فصل اول
جلسه دوم
۲

CHAPTER ONE

احتمال شرطی - متغیر تصادفی - توزیع دوجمله‌ای

احتمال شرطی

در بعضی مواقع ممکن است به ما اطلاعاتی بدهند که این اطلاعات در احتمال وقوع پیشامد A مؤثر باشد.

به عنوان مثال، در پرتاب یک تاس احتمال وقوع عدد ۲ برابر $\frac{۱}{۶}$ است. اما اگر بدانیم عدد رو شده عددی اول است، در واقع عدد ظاهر شده یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ (۳ حالت) می‌باشد، در این‌صورت احتمال وقوع عدد ۲ برابر $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود.

تعریف: فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B)>۰$، در این‌صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را که با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی A به شرط وقوع B می‌گوییم و از دستور مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

و در فضای نمونه‌ای گسسته‌ی هم‌شانس داریم:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

مثال ۲۷: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S، $P(A\cap B)=۰/۳$ و $P(B)=۰/۸$ باشند، مقدار $P(A|B)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به فرمول $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ و مقادیر $P(A\cap B)=۰/۳$ و $P(B)=۰/۸$، داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۳}{۰/۸}=\frac{۳}{۸}$$

مثال ۲۸: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به‌طوری که $P(A)=۲P(B)=۰/۴$ و $P(A\cup B)=۰/۵$، مقدار $P(A|B)$ کدام است؟

۱) $۰/۱۵$ ۲) $۰/۲$ ۳) $۰/۵$ ۴) $۰/۶$

پاسخ: با توجه به فرمول $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ و مقدار $P(B)=۰/۲$، باید مقدار $P(A\cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\xrightarrow[P(A\cup B)=۰/۵]{P(A)=۰/۴,P(B)=۰/۲}۰/۵=۰/۴+۰/۲-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۶-۰/۵=۰/۱\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۱}{۰/۲}=\frac{۱}{۲}=۰/۵\Rightarrow$$ گزینه‌ی (۳) صحیح است.

در حل مسائل احتمال شرطی، پیشامد B (پیشامدی که می‌دانیم رخ داده است.) را به عنوان فضای نمونه‌ای جدید در نظر می‌گیریم و اعضای پیشامد A را در فضای نمونه‌ای جدید مشخص می‌کنیم (در واقع $A\cap B$) و سپس احتمال را در فضای نمونه‌ای جدید به‌دست می‌آوریم.

مثال ۲۹: یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده کم‌تر از ۵ باشد، احتمال آن‌که مجموع آن‌ها برابر ۴ باشد را به‌دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم B پیشامدی باشد که در آن مجموع اعداد رو شده کم‌تر از ۵ باشد، لذا:

$$B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}\Rightarrow n(B)=۶$$ (فضای نمونه‌ای جدید)

اگر A پیشامدی باشد که در آن مجموع اعداد رو شده برابر ۴ باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۳\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳۰: یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر سه عدد رو شده زوج باشند، احتمال آن‌که هیچ‌یک از اعداد رو شده ۶ نباشند را به‌دست آورید.

پاسخ: اگر B پیشامد زوج بودن عدد رو شده در هر سه پرتاب تاس باشد، آن‌گاه در هر پرتاب عدد رو شده یکی از سه عدد زوج است و در نتیجه:

$$n(B)=\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}=۲۷$$

اگر A پیشامدی باشد که هیچ‌یک از سه عدد رو شده ۶ نباشد، آن‌گاه در هر حالت یکی از دو عدد ۲ یا ۴ رو شده است (می‌دانیم عدد رو شده زوج است.) و در نتیجه:

$$n(A\cap B)=\frac{۲}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۲}{}=۸\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۸}{۲۷}$$

مثال ۳۱: در پرتاب دو تاس، اگر حداقل یکی از اعداد رو شده ۵ باشد، با کدام احتمال عدد ۲ ظاهر شده است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ : اگر B پیشامد رو شدن حداقل یک بار عدد ۵ در پرتاب دو تاس باشد، آن‌گاه:

$$B=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶)\}\Rightarrow n(B)=۱۱$$

اگر A پیشامد ظاهر شدن عدد ۲ باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(۲,۵),(۵,۲)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۱۱}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۳۲: در یک خانواده با سه فرزند، اگر فرزند اول پسر باشد، با کدام احتمال این خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر دارد؟

پاسخ : فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با سه فرزند، ۸ عضو دارد. اگر B پیشامدی باشد که در آن فرزند اول پسر باشد، آن‌گاه:

$B=\{$ (پ،پ،پ) , (پ،پ،د) , (پ،د،پ) , (پ،د،د) $\}\Rightarrow n(B)=۴$

اگر A پیشامدی باشد که در آن خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر داشته باشد، آن‌گاه:

$A\cap B=\{$ (پ،پ،د) , (پ،د،پ) $\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

مثال ۳۳: کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن‌که کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد، چه‌قدر است؟

(مسأله‌ی کتاب درسی - صفحه‌ی ۹)

		جنسیت: مرد	جنسیت: زن
تحصیلات	دانشگاهی	۱۵	۱۰
تحصیلات	کم‌تر از دانشگاهی	۹۰	۸۰

پاسخ : با توجه به جدول $۱۰۵=۱۵+۹۰$ کارمند اداره مرد می‌باشند که از این تعداد، ۱۵ نفر تحصیلات دانشگاهی دارند، بنابراین احتمال آن‌که کارمند مرد انتخابی، تحصیلات دانشگاهی داشته باشد برابر $P=\frac{۱۵}{۱۰۵}=\frac{۱}{۷}$ می‌باشد.

مثال ۳۴: از بین ۵ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی و ۳ دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی، سه نفر به تصادف انتخاب شده‌اند. اگر حداقل دو دانش‌آموز رشته‌ی تجربی در بین انتخاب‌شدگان باشند، با کدام احتمال دقیقاً دو نفر از انتخاب‌شدگان از رشته‌ی تجربی می‌باشند؟

پاسخ : می‌دانیم از بین ۳ نفر انتخاب شده، حداقل ۲ نفر آنان از رشته‌ی تجربی هستند، بنابراین اگر B پیشامدی باشد که رخ داده باشد، آن‌گاه:

B: هر سه نفر از رشته‌ی تجربی یا ۲ نفر از رشته‌ی تجربی و ۱ نفر از رشته‌ی ریاضی $\Rightarrow n(B)=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۳}=۱۰\times۳+۱۰=۴۰$

اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً دو نفر از انتخاب‌شدگان از رشته‌ی تجربی باشند، آن‌گاه:

$A\cap B$: ۲ نفر از رشته‌ی تجربی و ۱ نفر از رشته‌ی ریاضی $\Rightarrow n(A\cap B)=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}=۳۰\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}$

قانون ضرب احتمالات

از رابطه‌ی $P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$، تساوی $P(A\cap B)=P(B)P(A\,|\,B)$ به‌دست می‌آید که به آن قانون ضرب احتمالات می‌گوییم و از این قانون برای به‌دست آوردن احتمال هم‌زمان وقوع دو پیشامد استفاده می‌کنیم.

مثال ۳۵: درون جعبه‌ای ۴ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد. ۲ لامپ به تصادف و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد را به‌دست آورید.

پاسخ : فرض کنیم A پیشامد سالم بودن لامپ اول و B پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد. می‌خواهیم $P(A\cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B\,|\,A)$$

$P(A)=\frac{۴}{۵}$, $P(B\,|\,A)=P$ (لامپ اول سالم | لامپ دوم معیوب) $=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B\,|\,A)=\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۵}$

احتمال شرطی و استقلال پیشامدها

اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، آن‌گاه:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

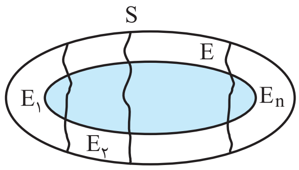
در واقع، رخداد یکی از این پیشامدها در احتمال رخداد دیگری تأثیر ندارد.

مثال ۳۶: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر دو فرزند اول آن‌ها دختر باشند، با کدام احتمال هر چهار فرزند خانواده دختر می‌باشند؟

پاسخ : اگر دختر بودن دو فرزند اول خانواده را B و دختر بودن دو فرزند آخر خانواده را A در نظر بگیریم، آن‌گاه A مستقل از B است و داریم:

$$P(A\mid B)=P(A)=P\text{(فرزندان سوم و چهارم دختر باشند.)}\underset{\text{جنسیت فرزندان}}{\overset{\text{مستقل بودن}}{=\!=\!=}}P\text{(فرزند سوم دختر)}\;P\text{(فرزند چهارم دختر)}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

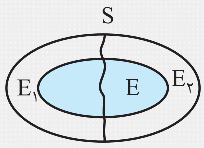
قانون احتمال کل (احتمال‌های چندشاخه‌ای)



فرض کنید $E_۱$، $E_۲$، ...، E_n پیشامدهایی باشند که حتماً یکی از آن‌ها رخ می‌دهد، یعنی $E_۱\cup E_۲\cup\ldots\cup E_n=S$. هم‌چنین فرض کنید فقط یکی از E_iها بتواند رخ دهد، یعنی این پیشامدها دوبه‌دو ناسازگارند، یعنی به‌ازای هر $i\neq j$، $E_i\cap E_j=\varnothing$. با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه E داریم:

$$P(E)=P(E_۱)P(E\mid E_۱)+\cdots+P(E_n)P(E\mid E_n)=\sum_{i=۱}^{n}P(E_i)P(E\mid E_i)$$

مثال ۳۷: فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال آن‌که این فرزند سالم باشد. (مثال کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۲)

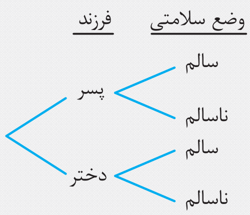


پاسخ : فرزندی که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر. پس اگر پسر بودن فرزند را با $E_۱$ و دختر بودن آن را با $E_۲$ نشان دهیم، آن‌گاه $E_۱$ و $E_۲$ ناسازگارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ خواهد داد. سالم بودن فرزند را با E نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(E)$ را حساب کنیم.

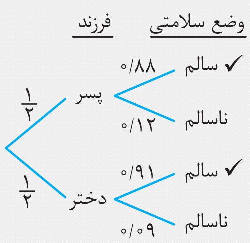
$$P(E)=P(E_۱)P(E\mid E_۱)+P(E_۲)P(E\mid E_۲)$$

$$=\frac{۱}{۲}\times(۱-۰/۱۲)+\frac{۱}{۲}(۱-۰/۰۹)=۰/۴۴+۰/۴۵۵=۰/۸۹۵$$

برای این مسأله اگر سعی می‌کردیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم به نموداری به‌صورت زیر دست می‌یافتیم:



اگر روی هر یک از پاره‌خط‌های نمودار بالا احتمال پیشامد نظیر آن خط را بنویسیم، خواهیم نوشت:



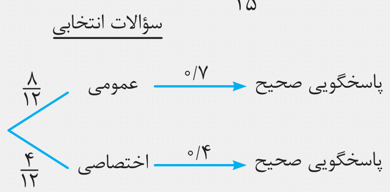
حال اگر شاخه‌هایی را که به وضعیت سالم ختم می‌شوند مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجه حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\frac{۱}{۲}\times ۰/۸۸}_{\text{شاخه‌ی اول}}+\underbrace{\frac{۱}{۲}\times ۰/۹۱}_{\text{شاخه‌ی دوم}}=۰/۸۹۵$$

مثال ۳۸: **احتمال پاسخ‌گویی صحیح به سؤالات اختصاصی و عمومی در یک آزمون به‌ترتیب ۰/۴ و ۰/۷ است. اگر از بین ۴ سؤال اختصاصی و ۸ سؤال عمومی یک سؤال به تصادف انتخاب شود، احتمال پاسخ‌گویی صحیح به این سؤال چه‌قدر است؟**

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

پاسخ: اطلاعات مسأله را در نمودار درختی زیر، خلاصه می‌کنیم:



بنابر احتمال کل داریم:

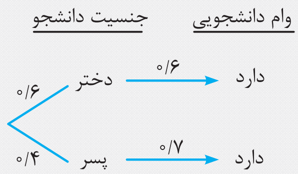
$$P(\text{پاسخ‌گویی صحیح}) = \frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۰}+\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۰}=\frac{۵۶+۱۶}{۱۲۰}=\frac{۷۲}{۱۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۳۹: **در یک دانشکده، ۶۰ درصد دانشجویان دختر و بقیه پسر می‌باشند. ۶۰ درصد دانشجویان دختر و ۷۰ درصد دانشجویان پسر از وام دانشجویی استفاده کرده‌اند. با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، از وام دانشجویی استفاده کرده است؟**

۱) ۰/۶۷ ۲) ۰/۶۶ ۳) ۰/۶۵ ۴) ۰/۶۴

پاسخ: اطلاعات مسأله را در نمودار درختی زیر خلاصه می‌کنیم:

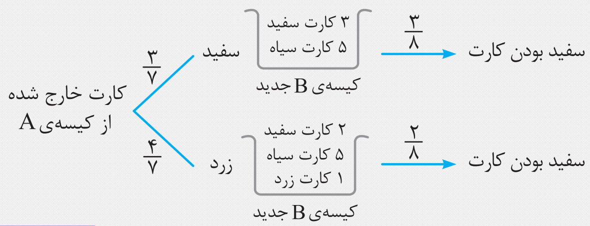


$$\Rightarrow P(\text{دانشجوی انتخابی از وام استفاده کرده باشد.}) = ۰/۶\times۰/۶+۰/۴\times۰/۷=۰/۶۴ \Rightarrow$$ گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۴۰: **درون کیسه‌ی A، ۳ کارت سفید و ۴ کارت زرد و درون کیسه‌ی B، ۲ کارت سفید و ۵ کارت سیاه وجود دارد. کارتی به تصادف از درون کیسه‌ی A انتخاب کرده و بدون نگاه کردن آن را درون کیسه‌ی B قرار می‌دهیم. سپس از کیسه‌ی B کارتی به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن کارت خارج شده از کیسه‌ی B کدام است؟**

۱) $\frac{۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۷}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۹}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۷}{۵۶}$

پاسخ:



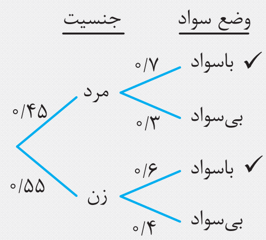
$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن کارت}) = \frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۲}{۸}=\frac{۹+۸}{۵۶}=\frac{۱۷}{۵۶}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۴۱: **۵۵ درصد جمعیت کشوری را زنان و ۴۵ درصد بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد زنان و ۷۰ درصد مردان باسواد باشند، مطلوب است:**

آ) احتمال آن‌که شخصی که به تصادف انتخاب می‌شود، باسواد باشد. **ب) اگر شخص انتخاب شده باسواد باشد، آن‌گاه احتمال آن‌که مرد باشد، چه‌قدر است؟**

پاسخ: آ) اطلاعات مسأله را در نمودار درختی زیر خلاصه می‌کنیم:



بنابراین احتمال باسواد بودن برابر است با:

$$P(\text{باسواد بودن}) = ۰/۴۵\times۰/۷+۰/۵۵\times۰/۶=۰/۶۴۵$$

ب) احتمال خواسته شده یک احتمال شرطی است. می‌دانیم که شخص انتخاب شده باسواد است (B)، می‌خواهیم احتمال مرد بودن وی (A) را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

طبق قسمت (آ)، $P(B)=۰/۶۴۵$ و همچنین:

$$P(A\cap B)=۰/۴۵\times۰/۷=۰/۳۱۵\Rightarrow P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۳۱۵}{۰/۶۴۵}=\frac{۶۳}{۱۲۹}=\frac{۲۱}{۴۳}$$

متغیر تصادفی

تعریف: در هر آزمایش تصادفی به هر نتیجه‌ی آزمایش، عددی را نسبت می‌دهیم. این عدد را متغیر تصادفی می‌نامیم. متغیرهای تصادفی را معمولاً با حروف بزرگ X، Y و ... نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، فرض کنید در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۴ موش سیاه داریم. می‌خواهیم ۳ موش از بین آن‌ها انتخاب کنیم. فرض کنید X تعداد موش‌های سفید انتخاب شده باشد، در این‌صورت X متغیری است تصادفی که مقادیر ۰،۱،۲ و ۳ را می‌تواند انتخاب کند. $X=0$ (سه موش انتخاب شده سیاه باشند.)، $X=1$ (یک موش سفید و دو موش سیاه انتخاب شوند.)، $X=2$ (دو موش سفید و یک موش سیاه انتخاب شوند.)، $X=3$ (هر سه موش انتخاب شده سفید باشند.)

مثال ۴۲: یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X، قدرمطلق تفاضل اعداد رو شده باشد، X چند مقدار متفاوت را اختیار می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی به‌صورت مقابل است: $S=\{(x,y)\,|\,x,y\in\{1,2,\dots,6\}\}=\{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$

متغیر تصادفی X به‌صورت $X=|x-y|$ تعریف شده است، لذا: $X=|x-y|=0,1,2,3,4,5$

بنابراین متغیر تصادفی X، ۶ مقدار متفاوت را اختیار می‌کند و در نتیجه گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تابع توزیع احتمال و جدول توزیع احتمال

فرض کنیم جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه دارد، از این جعبه چهار مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. فرض کنید X تعداد مهره‌های سفید خارج شده از جعبه باشد، در این‌صورت متغیر تصادفی X مقادیر ۰،۱،۲،۳ را اختیار می‌کند (توجه کنیم X نمی‌تواند عدد ۴ را اختیار کند، زیرا درون جعبه ۴ مهره‌ی سفید وجود ندارد.) احتمال هر یک از مقادیر X را به‌دست می‌آوریم. به عنوان مثال، احتمال آن‌که $X=0$ شود را با $P(X=0)$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$P(X=0)=P(\text{صفر مهره سفید و چهار مهره سیاه باشند.})=\frac{\binom{3}{0}\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}}=\frac{5}{70}$$

به همین ترتیب، سایر احتمال‌ها را حساب می‌کنیم:

$$P(X=1)=P(\text{یک مهره سفید و سه مهره سیاه})=\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{3}}{\binom{8}{4}}=\frac{3\times10}{70}=\frac{30}{70}$$

$$P(X=2)=P(\text{دو مهره سفید و دو مهره سیاه})=\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{3\times10}{70}=\frac{30}{70}$$

$$P(X=3)=P(\text{سه مهره سفید و یک مهره سیاه})=\frac{\binom{3}{3}\binom{5}{1}}{\binom{8}{4}}=\frac{1\times5}{70}=\frac{5}{70}$$

این احتمال‌ها را می‌توانیم در جدولی به‌صورت مقابل بنویسیم که به آن جدول توزیع احتمال X می‌گوییم:

X	۰	۱	۲	۳
$P(X)$	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$

هم‌چنین احتمال‌ها از دستور زیر به‌دست می‌آیند که به آن تابع احتمال (تابع توزیع احتمال) می‌گوییم:

$$P(X=k)=\frac{\binom{3}{k}\binom{5}{4-k}}{\binom{8}{4}}\quad,\quad k=0,1,2,3$$

بنابراین:

فرض کنیم S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و متغیر تصادفی X روی S مقادیر $x_1,x_2,\dots,x_n$ را اختیار کند و هم‌چنین به‌ازای هر i، احتمال آن‌که $X=x_i$ شود، برابر P_i باشد در واقع: $P(X=x_i)=P_i$. تابع $P(X=x_i)=P_i$ را تابع توزیع احتمال می‌گوییم. این تابع دارای دو شرط زیر است:

۱) $0\le P(X=x_i)\le 1$

۲) $P(X=x_1)+P(X=x_2)+\dots+P(X=x_n)=1$ (جمع احتمالات تمام مقادیر X برابر یک است.)

این احتمالات را در جدول مقابل که به آن جدول توزیع احتمال X می‌گوییم، خلاصه می‌کنیم:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	$\cdots$	P_n

منظور از توزیع احتمال X آن است که تعیین کنیم احتمال چگونه روی مقادیر X توزیع شده است.

مثال ۴۳: یک تاس سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X ماکسیمم دو عدد رو شده باشد، جدول توزیع احتمال X و تابع آن را مشخص کنید.

پاسخ: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی به‌صورت $S=\{(x,y)\mid x,y\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\}$ است و داریم:

$$X=\max\{x,y\}=۱,۲,۳,۴,۵,۶$$

احتمال هر یک از مقادیر X را به‌دست می‌آوریم:

$$P(X=۱)=P(\{(۱,۱)\})=\frac{۱}{۳۶} \quad , \quad P(X=۲)=P(\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\})=\frac{۳}{۳۶}$$

$$P(X=۳)=P(\{(۱,۳),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\})=\frac{۵}{۳۶}$$

$$P(X=۴)=P(\{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۴),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴)\})=\frac{۷}{۳۶}$$

$$P(X=۵)=P(\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵)\})=\frac{۹}{۳۶}$$

$$P(X=۶)=P(\{(۱,۶),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۶),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\})=\frac{۱۱}{۳۶}$$

جدول توزیع احتمال X به‌صورت مقابل است:

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P(X)	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۷}{۳۶}$	$\frac{۹}{۳۶}$	$\frac{۱۱}{۳۶}$

با توجه به احتمال‌های به‌دست آمده (صورت کسرها، اعداد فرد می‌باشند)، تابع احتمال به‌صورت $P(X=k)=\frac{۲k-۱}{۳۶},k=۱,۲,۳,۴,۵,۶$ می‌باشد.

مثال ۴۴: از بین ۴ دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی و ۵ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی، ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X، تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی انتخاب شده باشد، مقدار $P(X\le ۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۴۲}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴۲}$ ۳) $\frac{۱۹}{۴۲}$ ۴) $\frac{۲۳}{۴۲}$

پاسخ: تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی انتخاب شده از بین ۳ دانش‌آموز انتخاب شده $=X \Rightarrow X=۰,۱,۲,۳$

$\Rightarrow P(X\le۱)=P(X=۰)+P(X=۱)=P$ (هر سه دانش‌آموز از رشته‌ی ریاضی باشند) $+P$ (یکی از رشته‌ی تجربی و ۲ نفر از رشته‌ی ریاضی باشند)

$$=\frac{\binom{۵}{۰}\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}}+\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴}{۸۴}+\frac{۳۰}{۸۴}=\frac{۳۴}{۸۴}=\frac{۱۷}{۴۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۴۵: تابع احتمال به‌صورت $P(X=x)=\frac{۲^x}{A};x=۱,۲,۳,۴,۵,۶$ تعریف شده است. با محاسبه‌ی عدد A، احتمال فرد بودن متغیر تصادفی X، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: در تابع احتمال، مجموع احتمالات برابر یک است. ابتدا با قرار دادن مقادیر ۶,...,۲,۱ به‌جای x در تابع، هر یک از احتمالات را به‌دست می‌آوریم:

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P(X)	$\frac{۲}{A}$	$\frac{۴}{A}$	$\frac{۸}{A}$	$\frac{۱۶}{A}$	$\frac{۳۲}{A}$	$\frac{۶۴}{A}$

$$P(X=۱)+P(X=۲)+\cdots+P(X=۶)=۱\Rightarrow\frac{۲}{A}+\frac{۴}{A}+\frac{۸}{A}+\frac{۱۶}{A}+\frac{۳۲}{A}+\frac{۶۴}{A}=۱\Rightarrow\frac{۲+۴+۸+۱۶+۳۲+۶۴}{A}=۱\Rightarrow A=۱۲۶$$

$$P(\text{فرد باشد } X)=P(X=۱)+P(X=۳)+P(X=۵)=\frac{۲}{۱۲۶}+\frac{۸}{۱۲۶}+\frac{۳۲}{۱۲۶}=\frac{۴۲}{۱۲۶}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

توزیع دوجمله‌ای و احتمال آن

۱) هر آزمایش که دو نتیجه داشته باشد را یک امتحان می‌گوییم. به عنوان مثال، لامپی که به‌طور تصادفی انتخاب شود یا سالم است یا خراب. نتیجه‌ای از این آزمایش که موردنظر ما است را «پیروزی» و دیگری را «شکست» می‌نامیم. به عنوان مثال، اگر یک تاس را پرتاب کنیم و بخواهیم احتمال آمدن عدد زوج را به‌دست آوریم، در این‌صورت آمدن عدد زوج، پیروزی و آمدن عددی غیر زوج (فرد)، شکست می‌باشد.

نکته: اگر احتمال پیروزی برابر p باشد، در این‌صورت احتمال شکست برابر $1-p$ است. به عنوان مثال اگر احتمال برنده شدن یک نفر در مسابقه‌ای، $0/7$ باشد، در این‌صورت احتمال شکست وی در این مسابقه برابر $1-0/7=0/3$ است.

۲) هر امتحان را n بار تکرار می‌کنیم. به عنوان مثال، سکه‌ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم.

۳) آزمایش‌ها به‌صورت مستقل تکرار می‌شود. به عنوان مثال، احتمال «رو» آمدن سکه در پرتاب اول برابر $\frac{1}{2}$ است. در هر یک از پرتاب‌های دیگر نیز احتمال «رو» آمدن برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین اگر p احتمال پیروزی در انجام یک بار آزمایش باشد، آن‌گاه p در طول آزمایش ثابت است و از آزمایشی به آزمایشی دیگر عوض نمی‌شود.

اگر متغیر تصادفی X را تعداد پیروزی‌ها در n بار تکرار آزمایش‌ها در نظر بگیریم، آن‌گاه X مقادیر $0,1,2,\dots,n$ را اختیار می‌کند و احتمال از دستور مقابل پیروی می‌کند:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad,\quad k=0,1,2,\dots,n$$

توجه کنید که:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+\dots+P(X=n)=1$$

هر متغیر تصادفی که به‌صورت بالا معرفی می‌شود دارای توزیعی است که آن توزیع را **توزیع دوجمله‌ای** می‌نامیم.

مثال ۴۶: نوعی بذر ذرت تهیه شده است که ادعا می‌شود ٪۹۰ بذرها جوانه خواهند زد. اگر ۲۰ دانه از این ذرت‌ها را در شرایط مناسب و یکسان بکاریم، مطلوب است تعیین توزیع تعداد بذرهایی که جوانه می‌زنند و محاسبه‌ی احتمال آن‌که فقط ۱۸ دانه جوانه بزند (جواب را ساده نکنید). (تمرین ۱ کتاب درسی - صفحه‌ی ۱۹)

پاسخ: هر بذری که کاشته می‌شود، یا جوانه می‌زند (پیروزی) و یا جوانه نمی‌زند (شکست). احتمال پیروزی برای هر بذر برابر $\frac{90}{100}=0/9$ و در نتیجه احتمال شکست برای هر بذر، $1-0/9=0/1$ است. این آزمایش برای $n=20$ بذر تکرار شده است و این تکرارها مستقل از هم می‌باشند.

$$X=\text{تعداد بذرهای جوانه زده از ۲۰ بذر کاشته شده}\Rightarrow X=0,1,2,\dots,20$$

بنابر احتمال دوجمله‌ای داریم:

$$P(X=k)=\binom{20}{k}(0/9)^k(1-0/9)^{20-k}\quad,\quad k=0,1,2,\dots,20$$

$$P(\text{فقط ۱۸ بذر جوانه بزند})=P(X=18)=\binom{20}{18}(0/9)^{18}(0/1)^2$$

مثال ۴۷: دانش‌آموزی به ۵ پرسش سه گزینه‌ای، به تصادف پاسخ می‌دهد. احتمال این‌که حداکثر به یک پرسش پاسخ درست بدهد، کدام است؟

۱) $\frac{107}{243}$ ۲) $\frac{110}{243}$ ۳) $\frac{112}{243}$ ۴) $\frac{119}{243}$

پاسخ: احتمال پاسخ‌گویی صحیح به هر سؤال تستی سه گزینه‌ای برابر $p=\frac{1}{3}$ است. اگر متغیر تصادفی X تعداد پاسخ‌گویی صحیح به ۵ سؤال باشد، آن‌گاه: $X=0,1,2,3,4,5$

می‌خواهیم $P(X\le 1)$ را به‌دست آوریم. بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{5}{0}(\frac{1}{3})^0(1-\frac{1}{3})^5+\binom{5}{1}(\frac{1}{3})^1(1-\frac{1}{3})^4=\frac{32}{243}+\frac{80}{243}=\frac{112}{243}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۴۸: اگر در یک خانواده با سه فرزند احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر $0/6$ و پسر $0/4$ باشد، احتمال آن‌که دقیقاً دو فرزند از سه فرزند این خانواده دختر باشند، کدام است؟

۱) $0/348$ ۲) $0/432$ ۳) $0/484$ ۴) $0/512$

پاسخ: با توجه به احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$X:\text{تعداد فرزندان دختر}\Rightarrow X=0,1,2,3\quad,\quad p=0/6\quad,\quad n=3$$

$$\Rightarrow P(X=2)=\binom{3}{2}(0/6)^2(1-0/6)^{3-2}=0/432$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۴۹: ۲۰٪ افراد یک جامعه به بیماری A مبتلا هستند. اگر سه نفر به تصادف از این جامعه انتخاب شوند، احتمال آن‌که دو نفر مبتلا به بیماری و یک نفر نباشد، چند برابر این است که هر سه مبتلا باشند؟ (آزاد)

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۶۴ ۴) ۴

پاسخ: احتمال آن‌که فردی که به تصادف انتخاب می‌شود مبتلا به بیماری A باشد برابر $p=۰/۲$ است. اگر X تعداد افراد مبتلا به بیماری A باشد، بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:

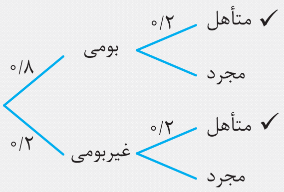
$$\frac{P(X=۲)}{P(X=۳)}=\frac{\binom{۳}{۲}(۰/۲)^{۲}(۱-۰/۲)^{۱}}{\binom{۳}{۳}(۰/۲)^{۳}}=\frac{۳\times\cancel{۰/۸}^{\,۴}}{\cancel{۰/۲}}=۱۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۵۰: هشتاد درصد از دانشجویان دانشگاهی بومی‌اند. می‌دانیم ۲۰ درصد از دانشجویان بومی و غیربومی متأهل می‌باشند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آن‌ها انتخاب کنیم، با کدام احتمال ۳ نفر آنان، متأهل می‌باشند؟

۱) ۰/۰۲۵۶ ۲) ۰/۰۲۸۴ ۳) ۰/۰۳۱۲ ۴) ۰/۰۳۲۴

پاسخ: ابتدا احتمال متأهل بودن یک دانشجوی انتخابی را به‌دست می‌آوریم: (احتمال چند شاخه‌ای)



$$P\text{ (متأهل بودن دانشجو)}=۰/۸\times۰/۲+۰/۲\times۰/۲=۰/۲\overbrace{(۰/۸+۰/۲)}^{۱}=۰/۲$$

بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$P\text{ (۳ نفر از ۴ نفر متأهل باشند.)}=\binom{۴}{۳}(۰/۲)^{۳}(۱-۰/۲)^{۱}=۰/۰۲۵۶$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

حالت خاص احتمال دوجمله‌ای

اگر احتمال پیروزی در یک آزمایش برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد (رو یا پشت آمدن در پرتاب سکه، پسر یا دختر بودن فرزند و ...)، آن‌گاه فرمول احتمال دوجمله‌ای به‌صورت مقابل می‌باشد:

$$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^{n}}\quad,\quad k=۰,۱,۲,\ldots,n$$

مثال ۵۱: در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی، با کدام احتمال ۳ فرزند پسر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: احتمال پسر بودن هر فرزند برابر $p=\frac{۱}{۲}$ است، لذا بنابر حالت خاص احتمال دوجمله‌ای، اگر X تعداد فرزندان پسر خانواده باشد، آن‌گاه:

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^{۴}}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۲ تستهای جلسه دوم

۸۷. در پرتاب دو تاس، اگر هر دو عدد رو شده اول باشند، با کدام احتمال مجموع آن‌ها نیز عددی اول است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

۸۸. در پرتاب دو تاس با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کم‌تر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده، فرد هستند؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۹. یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، سه فرزند پسر دارد، در صورتی‌که می‌دانیم فرزند اول آن‌ها پسر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۹۰. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر است. احتمال آن‌که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$ (سراسری تجربی)

۹۱. دانشجویان دانشکده‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن‌که دانشجوی زنی در مقطع کارشناسی ارشد مشغول به تحصیل باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

		جنسیت	
		مرد	زن
مقطع تحصیلی	کارشناسی ارشد	۲۵	۱۵
	دکترا	۱۵	۵

۹۲. ارقام ۱,۳,۴,۴,۵ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. اگر عدد حاصل زوج باشد، احتمال آن‌که دو رقم یکسان کنار هم باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۹۳. درون کیسه‌ای ۴ مهره‌ی سفید با شماره‌های ۱ تا ۴ و ۳ مهره‌ی سیاه با شماره‌های ۱ تا ۳ قرار دارند. از این کیسه دو مهره به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. اگر حداقل یکی از مهره‌ها سفید و با شماره‌ی ۲ باشد، با کدام احتمال مجموع شماره‌های دو مهره برابر ۴ است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۹۴. درون کیسه‌ای ۵ گوی سفید و ۴ گوی سیاه یکسان قرار دارند. از این کیسه دو گوی پی‌درپی و با جای‌گذاری خارج می‌کنیم. اگر دو گوی خارج شده هم‌رنگ باشند، با کدام احتمال سفید می‌باشند؟

۱) $\frac{۱۶}{۴۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۴۱}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۹۵. در محفظه‌ای ۳ موش سالم و ۴ موش دیابتی وجود دارند. از این محفظه ۳ موش گریخته‌اند، اگر موش اول سالم باشد، آن‌گاه با کدام احتمال هر سه موش سالم می‌باشند؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۹۶. شخصی به تصادف به ۳ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ داده است. اگر این شخص به سؤال اول پاسخ داده باشد، با کدام احتمال این شخص دقیقاً به دو سؤال با شماره‌ی فرد پاسخ داده است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۹۷. اگر داشته باشیم $P(A)=0/5$ ، $P(A\cup B)=0/6$ و $P(B)=0/2$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟ (آزاد)

۱) A و B ناسازگارند. ۲) $P(A|B)=\frac{1}{3}$ ۳) $P(B|A)=\frac{2}{3}$ ۴) A و B مستقل هستند.

۹۸. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری که $P(A)=0/3$ ، $P(B)=0/4$ و $P(A|B)=0/6$ ، آن‌گاه $P(B|A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۹۹. احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال، فرزندی که به دنیا می‌آید، این نوع بیماری را ندارد؟ (سراسری تجربی)

۱) ۰/۹۱ ۲) ۰/۹۲ ۳) ۰/۹۳ ۴) ۰/۹۴

۱۰۰. در آزمون ورودی دانشگاه، درصد شرکت‌کنندگان سه رشته‌ی تجربی، ریاضی و انسانی به‌ترتیب ۵۰، ۲۵ و ۲۵ می‌باشد. هم‌چنین درصد شرکت‌کنندگان دختر در سه رشته به‌ترتیب ۶۰، ۴۰ و ۴۰ می‌باشند. اگر یک نفر به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال دختر می‌باشد؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۵۲ ۴) ۰/۵۶

۱۰۱. در اداره‌ای تعداد کارمندان مرد، سه برابر تعداد کارمندان زن است. ۸۰ درصد کارمندان زن و ۳۰ درصد کارمندان مرد دارای مدرک کارشناسی هستند. اگر یک کارمند به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال دارای مدرک کارشناسی است؟

۱) $\frac{۲۷}{۴۰}$ ۲) $\frac{۲۹}{۴۰}$ ۳) $\frac{۲۷}{۲۰۰}$ ۴) $\frac{۲۹}{۲۰۰}$

۱۰۲. در یک خانواده، احتمال داشتن گروه خونی A برای فرزند پسر ۰/۳ و برای فرزند دختر ۰/۴ است. اگر این خانواده دو فرزند داشته باشد، احتمال آن‌که گروه خونی هر دو فرزند از نوع A باشد، کدام است؟

۱) ۰/۴۷ ۲) $\frac{۴۷}{۴۰۰}$ ۳) $\frac{۴۹}{۴۰۰}$ ۴) ۰/۴۹

۱۰۳. سه ظرف همانند داریم. در اولی و دومی هر کدام ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در ظرف سوم ۴ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه است. اگر به تصادف یک ظرف انتخاب و یک مهره بیرون آوریم، با کدام احتمال این مهره سیاه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) $\frac{۹}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۱۷}{۴۰}$

۱۰۴. دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۲ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و ظرف دوم شامل ۵ مهره‌ی سفید و یک مهره‌ی سیاه است. چند مهره‌ی سفید به ظرف اول اضافه کنیم تا در برداشتن یک مهره به‌طور تصادفی از یکی از ظرف‌ها احتمال سفید بودن مهره برابر $\frac{۲۵}{۳۶}$ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۵. دو ظرف داریم، در اولی ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه، در دومی ۷ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آن‌گاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۳۴}{۸۱}$ ۴) $\frac{۴۱}{۸۱}$

۱۰۶. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد حاصل مضرب ۳ باشد، دو سکه را با هم و در غیر این‌صورت سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً ۲ بار «رو» ظاهر شود، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۰۷. ۹۵ درصد متهمینی که به یک دادگاه آورده می‌شوند گناهکار می‌باشند. اگر در ۹۸ درصد مواقع هیئت منصفه تشخیص درست بدهد و یک نفر از متهمین را به تصادف از بین آن‌ها انتخاب کنیم، با کدام احتمال گناهکار است؟

۱) ۰/۹۱۲ ۲) ۰/۹۳۲ ۳) ۰/۲۳۸ ۴) ۰/۹۴۶

۱۰۸. در یک جامعه‌ی روستایی، ۶۰ درصد جمعیت آن را مردان و ۴۰ درصد آن را زنان تشکیل می‌دهند. می‌دانیم ۸۰ درصد مردان و ۳۰ درصد زنان به کار کشاورزی مشغول می‌باشند. اگر یک نفر از این جامعه به تصادف انتخاب کنیم و مشغول کار کشاورزی باشد، با کدام احتمال زن می‌باشد؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۰۹. جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت مقابل است. مقدار $P(X \leq ۲)$ کدام است؟

X	۱	۲	۳	۴
P(X)	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{a}{۲}$	$\frac{a}{۳}$	$\frac{۱}{۸}$

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۱۱۰. یک تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X مجموع اعداد رو شده باشد، مقدار $P(X = ۶)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۳۶}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۱۱. درون کیسه‌ای ۳ کارت یکسان با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ قرار دارد. کارت‌ها را یکی‌یکی و با جای‌گذاری خارج می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد دفعات خارج کردن کارت‌ها باشد تا اولین کارت با شماره‌ی زوج خارج شود، مقدار $P(X=3)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{27}$ ۲) $\frac{4}{27}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{8}{27}$

۱۱۲. از بین ۱۰ لامپ که ۴ تای آن‌ها معیوب است، دو لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد لامپ‌های معیوب انتخاب شده باشد، $P(X \geq 1)$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۱۱۳. در پرتاب دو تاس با هم، اگر متغیر تصادفی X برابر مجموع دو عدد ظاهر شده با تابع احتمال $P(X=x)=a-\frac{|x-7|}{36}$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$ (سراسری ریاضی)

۱۱۴. در تابع احتمال $x=1,2,3,4,5$ و $P(X=x)=kx^2$، مقدار $P(X \geq 4)$ کدام است؟

۱) $\frac{43}{55}$ ۲) $\frac{41}{55}$ ۳) $\frac{39}{50}$ ۴) $\frac{37}{50}$

۱۱۵. اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت $x=0,1,2,3,4,5$ و $P(X=x)=\binom{5}{x}(\frac{1}{3})^x(\frac{2}{3})^{5-x}$ باشد، مقدار $P(X \geq 2)$ کدام است؟

۱) $\frac{137}{243}$ ۲) $\frac{131}{243}$ ۳) $\frac{112}{243}$ ۴) $\frac{107}{243}$

۱۱۶. از نوعی بذر ۸۰ درصد آن‌ها جوانه می‌زند. اگر سه بذر از این نوع کاشته شود، با کدام احتمال لااقل دو بذر جوانه می‌زند؟ (سراسری تجربی)

۱) ۰/۵۱۲ ۲) ۰/۷۸۴ ۳) ۰/۸۶۴ ۴) ۰/۸۹۶

۱۱۷. رنگ چشم ۸۰ درصد از اهالی منطقه‌ای میشی است. اگر ۵ نفر به تصادف از این جمعیت انتخاب شود، با کدام احتمال فقط رنگ چشم ۲ نفر از آنان میشی است؟

۱) ۰/۰۱۰۲۴ ۲) ۰/۰۰۵۱۲ ۳) ۰/۰۵۱۲ ۴) ۰/۱۰۲۴

۱۱۸. دانش‌آموزی به ۵ پرسش چهارگزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به سه پرسش پاسخ صحیح داده است؟

۱) $\frac{57}{512}$ ۲) $\frac{51}{512}$ ۳) $\frac{49}{512}$ ۴) $\frac{45}{512}$

۱۱۹. در یک خانواده احتمال تولد فرزند پسر، سه برابر احتمال تولد فرزند دختر است. احتمال آن‌که فقط دو فرزند از سه فرزند این خانواده پسر باشند، کدام است؟

۱) $\frac{9}{64}$ ۲) $\frac{27}{64}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{4}{27}$

۱۲۰. پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B) اند و $P(B)=2P(b)$. اگر این پدر و مادر دارای ۴ فرزند باشند، با کدام احتمال دقیقاً یک فرزند از فرزندان دارای ژن رنگ چشم مغلوب است؟

۱) $\frac{32}{81}$ ۲) $\frac{35}{81}$ ۳) $\frac{11}{27}$ ۴) $\frac{19}{27}$

۱۲۱. نوعی واکسن با احتمال ۹۰ درصد برای طیور تأثیر مثبت دارد. اگر ۵ مورد از این واکسن به کار رود، با کدام احتمال، فقط ۳ مورد آن تأثیر مثبت خواهد داشت؟ (سراسری تجربی)

۱) ۰/۰۷۲۹ ۲) ۰/۰۸۱ ۳) ۰/۷۲۹ ۴) ۰/۸۱

۱۲۲. ۷۵ درصد تیرهای یک تیرانداز به هدف اصابت می‌کند. اگر این شخص ۴ تیر پرتاب کند، احتمال آن‌که حداقل ۳ تیر به هدف اصابت کند، کدام است؟

۱) $\frac{189}{256}$ ۲) $\frac{191}{256}$ ۳) $\frac{193}{256}$ ۴) $\frac{195}{256}$

۱۲۳. احتمال دیر رسیدن شخصی به محل کار ۰/۱ است. احتمال آن‌که این شخص در ۴ روز کاری، حداقل در سه روز به موقع سر کار حاضر شود، چه‌قدر است؟

۱) ۰/۹۱۵۸ ۲) ۰/۹۲۴۱ ۳) ۰/۹۳۸۲ ۴) ۰/۹۴۷۷

۱۲۴. اگر ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده‌ی عامل RH خون منفی باشند، احتمال آن‌که از بین ۳ نفر حداقل ۲ نفر RH خون منفی داشته باشند، کدام است؟

۱) ۰/۰۶۲ ۲) ۰/۰۶۵ ۳) ۰/۰۶۹ ۴) ۰/۰۷۲

۱۲۵. ۴۰٪ جمعیت جامعه‌ای تحصیلات دانشگاهی دارند و ۹۰٪ افرادی که تحصیلات دانشگاهی دارند و ۴۰٪ افراد فاقد تحصیلات دانشگاهی روزنامه می‌خوانند. اگر سه نفر از بین آن‌ها به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آن‌که دقیقاً دو نفر آنان روزنامه مطالعه کنند، چه‌قدر است؟

۱) ۰/۳۸۸ ۲) ۰/۴۳۲ ۳) ۰/۴۸۲ ۴) ۰/۵۱۲

۱۲۶. در پرتاب ۴ سکه‌ی سالم با هم، احتمال این‌که فقط سه سکه «رو» یا فقط سه سکه «پشت» بیاید، کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲۷. خانواده‌ی A سه فرزند و خانواده‌ی B دو فرزند دارند. با کدام احتمال تعداد پسرهای A زوج و تعداد دخترهای B فرد است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۱۲۸. اگر احتمال باریدن برف در یک روز برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، احتمال آن‌که از ۵ روز، دقیقاً در سه روز برف نبارد، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

۱۲۹. تاس سالمی را ۱۰ بار می‌ریزیم. احتمال آن‌که ۶ بار برآمد تاس، عددی بزرگ‌تر از ۳ باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۶۳}{۲۵۶}$ ۲) $\frac{۷۵}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۷۵}{۵۱۲}$ ۴) $\frac{۱۰۵}{۵۱۲}$

تست‌های کنکور

۱۳۰. در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج ظاهر شود، یک تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند. در غیر این‌صورت ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال موفقیت در هر تیر رها شده $\frac{۲}{۳}$ است. با کدام احتمال، فقط ۲ بار موفقیت حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی- ۹۴)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۷}$

۱۳۱. در پرتاب یک سکه، اگر «رو» بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند، اگر «پشت» بیاید، ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال اصابت هر تیر رها شده $\frac{۳}{۵}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می‌کند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{۹۶}{۶۲۵}$ ۲) $\frac{۱۱۴}{۶۲۵}$ ۳) $\frac{۱۲۲}{۶۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲۸}{۶۲۵}$

۱۳۲. ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟ (سراسری تجربی- ۹۳)

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۱۳۳. احتمال انتقال نوعی بیماری مسری به افراد مستعد برابر ۰/۲ است. اگر ۵ نفر مستعد، با فردی که حامل این بیماری است ملاقات کنند، با کدام احتمال ۳ نفر آنان مبتلا می‌شوند؟ (سراسری تجربی- ۹۳)

۱) ۰/۰۲۵۶ ۲) ۰/۰۵۱۲ ۳) ۰/۱۰۲۴ ۴) ۰/۲۰۴۸

۱۳۴. شصت درصد از کارکنان سازمانی مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد از مردان و ۴۵ درصد از زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنان، تحصیلات دانشگاهی دارند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

۱) ۰/۱۸۹ ۲) ۰/۱۹۲ ۳) ۰/۱۹۶ ۴) ۰/۱۹۸

۱۳۵. دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به سه پرسش پاسخ صحیح داده است؟ (سراسری تجربی- ۹۲)

۱) ۰/۰۲۵۶ ۲) ۰/۰۵۱۲ ۳) ۰/۰۶۲۵ ۴) ۰/۰۷۶۸

۱۳۶. در جعبه‌ی اول ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب نموده و دو مهره با هم و به تصادف از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

۱۳۷. دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به یک پرسش پاسخ صحیح داده است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) ۰/۲۰۴۸ ۲) ۰/۴۰۹۶ ۳) ۰/۵۱۲ ۴) ۰/۷۱۴۴

۱۳۸. در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به‌طور تصادفی ۲ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های سفید خارج شده است. بیش‌ترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۳۹. دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

۱۴۰. احتمال انتقال نوعی بیماری از فرد بیمار به افراد مستعد ۰/۲ است. اگر ۶ نفر مستعد با این بیمار ملاقات کنند، با کدام احتمال ۴ نفر آنان به این بیماری مبتلا می‌شوند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) ۰/۰۱۴۲۸ ۲) ۰/۰۱۵۳۶ ۳) ۰/۰۱۵۴۸ ۴) ۰/۰۱۵۹۶

۱۴۱. در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه‌ی سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچه‌ی سلامت دارد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) ۰/۶۵۸ ۲) ۰/۶۶۹ ۳) ۰/۶۸۵ ۴) ۰/۶۹۶

۱۴۲. به‌طور متوسط از هر ۱۰ مشتری مراجعه‌کننده به فروشگاهی، ۶ نفر خرید می‌کنند. در فاصله‌ی زمانی معین، ۴ مشتری به این فروشگاه مراجعه می‌کنند. با کدام احتمال فقط ۳ نفر از آنان خرید می‌کنند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) ۰/۳۱۷۲ ۲) ۰/۳۲۸۲ ۳) ۰/۳۴۵۶ ۴) ۰/۳۶۵۴

۱۴۳. احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟ (سراسری تجربی- ۸۹)

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶

۱۴۴. از نوعی بذر که ۸۰ درصد آنان جوانه می‌زند، ۵ عدد کاشته شده است. با کدام احتمال، حداقل دو عدد از آن‌ها جوانه می‌زند؟(سراسری تجربی- ۸۹)

۱) ۰/۹۹۳۲۸ ۲) ۰/۹۹۳۶۰ ۳) ۰/۹۴۲۰۸ ۴) ۰/۹۵۱۲۰

۱۴۵. در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۱۴۶. در یک کارخانه، ۶۰ درصد کارگران بومی‌اند. اگر ۴ نفر از بین آن‌ها به تصادف انتخاب شوند، با کدام احتمال درست ۳ نفر از آن‌ها بومی‌اند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)

۱) ۰/۱۵۳۶ ۲) ۰/۲۹۸۶ ۳) ۰/۳۲۷۶ ۴) ۰/۳۴۵۶

۱۴۷. دانش‌آموزی به ۶ پرسش تستی سه‌گزینه‌ای، به تصادف پاسخ می‌گوید. احتمال این‌که فقط به ۴ پرسش پاسخ درست بدهد، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۸۱}$ ۲) $\frac{۵}{۸۱}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۴۳}$ ۴) $\frac{۲۰}{۲۴۳}$ (سراسری تجربی- ۸۸)

۱۴۸. ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۸)

۱) ۶۱/۴ ۲) ۶۱/۸ ۳) ۶۲/۴ ۴) ۶۲/۸

۱۴۹. در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۵۰. احتمال انتقال ویروسی، از فرد بیمار به افراد مستعد $۰/۱$ است. اگر این بیمار با ۴ فرد مستعد ملاقات کند، با کدام احتمال ۲ یا ۳ نفر آن‌ها مبتلا می‌شوند؟ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) $۰/۰۴۸۲$ ۲) $۰/۰۵۲۲$ ۳) $۰/۰۵۶۴$ ۴) $۰/۰۵۹۴$

۱۵۱. یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی‌که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۱۵۲. هفتاد و پنج درصد محصولات کارخانه‌ای مرغوب‌اند. با کدام احتمال از ۴ کالای خریداری شده‌ی این کارخانه لااقل یک کالا مرغوب است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{۲۵۱}{۲۵۶}$ ۲) $\frac{۲۵۵}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۶۳}{۶۴}$

۱۵۳. پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B) هستند و $P(B) = ۳P(b)$. اگر این پدر و مادر دارای ۳ فرزند باشند، با کدام احتمال فقط یکی از فرزندان دارای ژن رنگ چشم مغلوب است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

۱) $\frac{۹}{۶۴}$ ۲) $\frac{۹}{۳۲}$ ۳) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۱۵۴. آزمایشی فقط دو نتیجه‌ی شکست و پیروزی دارد. احتمال پیروزی $\frac{۳}{۴}$ است و X تعداد پیروزی‌ها در ۱۶ بار تکرار این آزمایش‌ها است. $P(۰ \le X \le ۱۶)$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۵)

۱) $(\frac{۳}{۴})^{۱۶}$ ۲) $۱-(\frac{۱}{۴})^{۱۶}$ ۳) $۲\binom{۱۶}{۸}(\frac{۳}{۴})^{۸}$ ۴) ۱

۱۵۵. در یک خانواده‌ی دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال، این خانواده دارای فرزند دختر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۵۶. در یک شرکت ۴۵۰ نفر کار می‌کنند که ۳۰۰ نفر آن‌ها تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر ۶ نفر از این کارکنان به تصادف انتخاب شوند، با کدام احتمال ۴ نفر آن‌ها تحصیلات دانشگاهی دارند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $\frac{۱۶}{۸۱}$ ۲) $\frac{۶۴}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۸۰}{۲۴۳}$ ۴) $\frac{۴۰}{۸۱}$

۱۵۷. در دو ظرف به‌ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره‌ی یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید است. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) $\frac{۱۳}{۷۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۴۴}$

۱۵۸. در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب، و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{۱۱}{۲۶}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۶}$

۱۵۹. یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید آن‌گاه تاس می‌ریزیم. اگر «پشت» بیاید دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این عمل را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال، حداکثر بعد از پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ می‌باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۱۶۰. در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم. سپس از بین باقی‌مانده‌ی مهره‌ها، به‌تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۳)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۹}{۷}$

۱۶۱. پنج مهره‌ی سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و هم‌چنین ۵ مهره‌ی سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ و یکسان را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال، هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۶۲. دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که حداقل شماره‌ی یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۶۳. تاس همگنی را با چشم بسته انداخته‌ایم و فقط می‌دانیم که برآمد عدد زوج است. احتمال این‌که شماره‌ی ۴ یا ۶ ظاهر شده باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۶۴. در جعبه‌ای ۲ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی سفید یکسان وجود دارد. به تصادف ۱ مهره از جعبه خارج و رنگ آن را یادداشت می‌کنیم و به جعبه برمی‌گردانیم، اگر X تعداد آزمایش‌هایی باشد که برای اولین بار مهره‌ی سفید خارج شود، $P(X \le ۳)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\frac{۲۱}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۱۷}{۱۲۵}$ ۳) $\frac{۱۱۹}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۲۴}{۲۵}$

۱۶۵. در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبه‌ی اول ۴ عدد و در جعبه‌ی دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در یک جعبه‌ی جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه‌ی جدید معیوب است؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $\frac{۱۷}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۸}{۳۵}$

۱۶۶. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید تاس را می‌ریزیم، اگر «پشت» بیاید، سه سکه‌ی دیگری را با هم می‌ریزیم. در این آزمایش، احتمال این‌که دقیقاً یک سکه «رو» ظاهر شود، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

۱۶۷. در یک شرکت بسته‌بندی کالا، درصد محصولات تولیدی، با سه دستگاه A ، B و C به ترتیب ۳۰، ۴۵ و ۲۵ می‌باشد. می‌دانیم ۱ درصد از محصولات A ، ۲ درصد از محصولات B و ۴ درصد از محصولات C معیوب هستند. اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) ۰/۹۷۵ ۲) ۰/۹۷۸ ۳) ۰/۹۸۲ ۴) ۰/۹۸۷

۱۶۸. تابع احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت $P(X=i)=\frac{i(i+۱)}{a}, i=۱,۲,۳,۴,۵$ است. مقدار $P(X=۵)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۱۱}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۱۶۹. یک تاس همگن را انداخته‌ایم. برآمد حاصل، مضرب ۳ نیست. احتمال آن‌که شماره‌ی ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۷۰. تابع احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت $P(X=i)=\frac{\binom{۵}{i}}{a}, i=۱,۲,۳,۴,۵$ است. مقدار $P(X \ge ۴)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۳۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶}{۳۱}$

۲ پاسخ تست‌های جلسه‌دوم

۸۷ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۱)

در پرتاب دو تاس، در $۹=۳\times۳$ حالت هر دو عدد رو شده اول می‌باشند:

$B=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\}$

جمع دو عدد اول باشد : $A \Rightarrow A\cap B=\{\underbrace{(۲,۳),(۳,۲)}_{\text{مجموع }=۵},\underbrace{(۲,۵),(۵,۲)}_{\text{مجموع }=۷}\}$

$\Rightarrow n(A\cap B)=۴\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{۴}{۹}$

۸۸ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۱)

اگر B پیشامدی باشد که در آن جمع دو عدد رو شده کم‌تر از ۱۰ باشد، آن‌گاه B' تمام حالت‌هایی است که مجموع دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰ می‌باشند، لذا: $B'=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴),(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$

$\Rightarrow n(B')=۶\Rightarrow n(B)=۳۰$

در ۹ حالت هر دو عدد رو شده فرد می‌باشند، که یک حالت آن در B' وجود دارد و لذا ۸ حالت در B وجود دارند، بنابراین احتمال مطلوب برابر $\dfrac{۸}{۳۰}=\dfrac{۴}{۱۵}$ است.

۸۹ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۲)

فرزند اول پسر : $B=\{$(پ،پ،پ)،(پ،پ،د)،(پ،د،پ)،(پ،د،د)$\}$

$\Rightarrow n(B)=۴$

هر سه فرزند پسر : $A\Rightarrow A\cap B=\{$(پ،پ،پ)$\}\Rightarrow n(A\cap B)=۱$

$\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{۱}{۴}$

۹۰ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۲)

جنسیت فرزندان در خانواده مستقل از یک‌دیگرند، بنابراین:

P(دو فرزند دیگر دختر) = P(سومی دختر) × P(چهارمی دختر)

$=\dfrac{۱}{۲}\times\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۱}{۴}$

۹۱ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۳)

با توجه به جدول، $۲۰=۱۵+۵$ دانشجوی زن مشغول به تحصیل می‌باشند که ۱۵تای آن‌ها در مقطع کارشناسی ارشد می‌باشند. لذا احتمال مطلوب برابر $\dfrac{۱۵}{۲۰}=\dfrac{۳}{۴}$ است.

۹۲ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۱)

اگر پیشامد B، تمام اعداد زوج با ارقام ۱,۳,۴,۴,۵ باشد، آن‌گاه:

$n(B)=\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{\downarrow\atop\text{رقم یکان ۴ است}}{\underline{۱}}=۲۴$

اگر A تمام اعداد زوجی باشند که در آن دو رقم یکسان (زوج) کنار هم باشند، آن‌گاه:

$n(A)=\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underbrace{\underline{۱}\times\underline{۱}}_{\text{۲ رقم ۴}}=۶\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{۶}{۲۴}=\dfrac{۱}{۴}$

۹۳ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۳)

اگر B پیشامدی باشد که در آن حداقل یکی از مهره‌ها سفید و با شماره‌ی ۲ باشد، آن‌گاه: b : سیاه ، w : سفید

$B=\{(w_۲,w_۱),(w_۲,w_۳),(w_۲,w_۴),(w_۲,b_۱),(w_۲,b_۲),(w_۲,b_۳),(w_۱,w_۲),(w_۳,w_۲),(w_۴,w_۲),(b_۱,w_۲),(b_۲,w_۲),(b_۳,w_۲)\}\Rightarrow n(B)=۱۲$

اگر A پیشامدی باشد که در آن مجموع شماره‌های دو مهره برابر ۴ باشد، آن‌گاه: $A\cap B=\{(b_۲,w_۲),(w_۲,b_۲)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲$

$\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{۲}{۱۲}=\dfrac{۱}{۶}$

۹۴ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۲)

اگر B پیشامدی باشد که در آن دو گوی خارج شده همرنگ باشند، آن‌گاه:

گوی دوم سیاه و گوی اول سیاه یا گوی دوم سفید و گوی اول سفید: B

$\Rightarrow n(B)=۵\times۵+۴\times۴=۴۱$

توجه کنیم که در آزمایش‌های با جای‌گذاری، مهره‌ی خارج شده را دوباره به کیسه برمی‌گردانیم.

اگر A پیشامدی باشد که در آن هر دو گوی خارج شده سفید باشند، آن‌گاه:

$n(A)=۵\times۵=۲۵\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{۲۵}{۴۱}$

۹۵ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۴)

اگر B پیشامد سالم بودن موش اول باشد، آن‌گاه:

$n(B)=\underline{۳}\times\underline{۶}\times\underline{۵}$

اگر A پیشامد سالم بودن هر سه موش باشد، آن‌گاه:

$n(A)=\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{n(A)}{n(B)}=\dfrac{۳\times۲\times۱}{۳\times۶\times۵}=\dfrac{۱}{۱۵}$

۹۶ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۳)

اگر B پیشامدی باشد که این شخص به سؤال اول از ۳ سؤال پاسخ داده باشد، آن‌گاه B تمام حالاتی است که به دو سؤال از ۹ سؤال بعدی پاسخ داده است، لذا: $n(B)=\binom{۹}{۲}=\dfrac{۹\times۸}{۲}=۳۶$

اگر A پیشامدی باشد که این شخص به دو سؤال از ۵ سؤال با شماره‌ی فرد پاسخ داده باشد، آن‌گاه $A\cap B$ تمام حالاتی است که به سؤال اول و یکی از ۴ سؤال با شماره‌ی فرد دیگر و یک سؤال از ۵ سؤال با شماره‌ی زوج پاسخ داده است، لذا:

$n(A\cap B)=\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}=۲۰\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{۲۰}{۳۶}=\dfrac{۵}{۹}$

۹۷ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۴)

از دستور $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$، مقدار $P(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم:

$۰/۶=۰/۵+۰/۲-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۷-۰/۶=۰/۱$

اگر $P(A\cap B)=۰$، آن‌گاه A و B ناسازگار خواهند بود، لذا گزینه‌ی (۱) نادرست است.

$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{۰/۱}{۰/۲}=\dfrac{۱}{۲}\neq\dfrac{۱}{۳}$

بنابراین گزینه‌ی (۲) نادرست است.

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{۰/۱}{۰/۵}=\dfrac{۱}{۵}\neq\dfrac{۲}{۳}$

بنابراین گزینه‌ی (۳) نادرست است.

B و A مستقل هستند. $\Leftarrow P(A\cap B)=۰/۱=P(A)P(B)$

۹۸ ۱ ۲ ۳ ۴ (گزینه‌ی ۱)

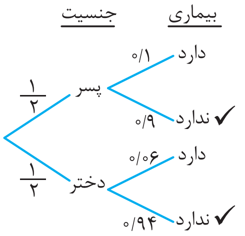
با توجه به دستور $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$، مقدار $P(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم:

$۰/۶=\dfrac{P(A\cap B)}{۰/۴}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۴\times۰/۶=۰/۲۴$

$\Rightarrow P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{۰/۲۴}{۰/۳}=۰/۸=\dfrac{۴}{۵}$

۹۹

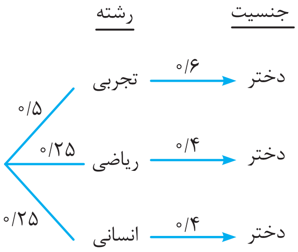
با توجه به نمودار درختی داریم:



$$\Rightarrow P(\text{بیماری را ندارد}) = \frac{۱}{۲}\times ۰/۹ + \frac{۱}{۲}\times ۰/۹۴ = ۰/۹۲$$

۱۰۰

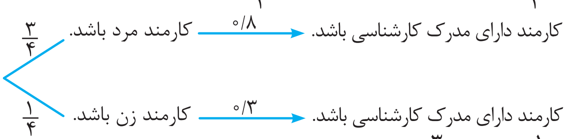
نمودار درختی را با توجه به اطلاعات مسأله رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow P\ (\text{دختر بودن دانشجوی انتخابی})$$
$$= ۰/۵\times ۰/۶ + ۰/۲۵\times ۰/۴ + ۰/۲۵\times ۰/۴ = ۰/۵$$

۱۰۱

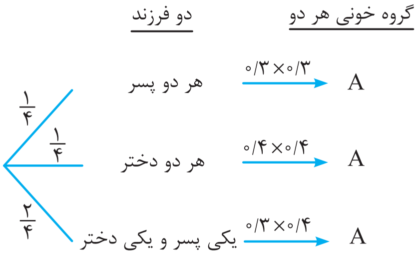
$$P(\text{کارمند مرد باشد}) = ۳P(\text{کارمند زن باشد})$$
$$P(\text{کارمند مرد باشد}) + P(\text{کارمند زن باشد}) = ۱$$
$$\Rightarrow ۴P(\text{کارمند زن باشد}) = ۱$$
$$\Rightarrow P(\text{کارمند زن باشد}) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow P(\text{کارمند مرد باشد}) = \frac{۳}{۴}$$



$$\Rightarrow P(\text{کارمند دارای مدرک کارشناسی باشد}) = \frac{۳}{۴}\times ۰/۸ + \frac{۱}{۴}\times ۰/۳$$
$$= \frac{۱}{۴}(۲/۴ + ۰/۳) = \frac{۱}{۴}\times\frac{۲۷}{۱۰} = \frac{۲۷}{۴۰}$$

۱۰۲

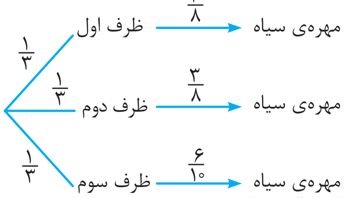
اطلاعات مسأله در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:



بنابراین:

$$P\ (\text{گروه خونی هر دو فرزند از نوع A باشد})$$
$$= \frac{۱}{۴}\times ۰/۳\times ۰/۳ + \frac{۱}{۴}\times ۰/۴\times ۰/۴ + \frac{۲}{۴}\times ۰/۳\times ۰/۴ = \frac{۴۹}{۴۰۰}$$

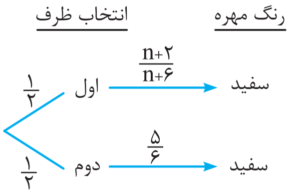
۱۰۳



$$\Rightarrow P(\text{سیاه بودن مهره}) = \frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۱۰} = \frac{۹}{۲۰}$$

۱۰۴

فرض کنیم n مهره‌ی سفید به ظرف اول اضافه شده باشد، لذا در ظرف اول $n+۲$ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه قرار دارند. اطلاعات مسأله را در نمودار درختی مقابل خلاصه می‌کنیم:



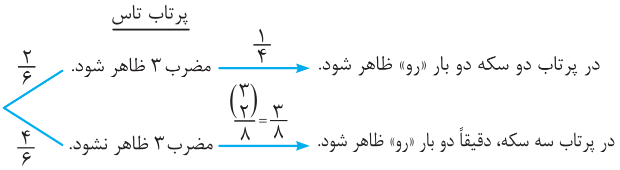
$$P\ (\text{سفید بودن}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{n+۲}{n+۶} + \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۶} = \frac{۲۵}{۳۶}$$
$$\xrightarrow{\times ۲} \frac{n+۲}{n+۶} = \frac{۲۵}{۱۸} - \frac{۵}{۶} = \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow ۹(n+۲) = ۵(n+۶)$$
$$\Rightarrow ۹n + ۱۸ = ۵n + ۳۰ \Rightarrow ۴n = ۱۲ \Rightarrow n = ۳$$

۱۰۵

$$P(\text{سفید بودن مهره از ظرف دوم}) = \frac{۵}{۹}\times\frac{۸}{۱۸} + \frac{۴}{۹}\times\frac{۷}{۱۸} = \frac{۳۴}{۸۱}$$

۱۰۶

اطلاعات مسأله را در نمودار درختی زیر خلاصه می‌کنیم:

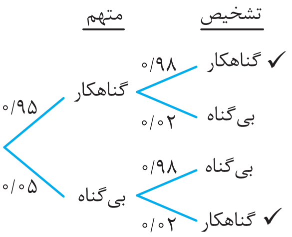


بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P = \frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۴} + \frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۸} = \frac{۱۶}{۴۸} = \frac{۱}{۳}$$

۱۰۷

اطلاعات مسأله در نموداردرختی زیر خلاصه شده است:



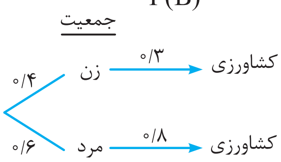
$$P\ (\text{گناهکار بودن متهم}) = ۰/۹۵\times ۰/۹۸ + ۰/۰۵\times ۰/۰۲ = ۰/۹۳۲$$

۱۰۸

اگر B پیشامد مشغول بودن به کار کشاورزی و A پیشامد زن بودن فرد انتخابی باشد، آن‌گاه $P(A|B)$، احتمال مطلوب است. داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

با توجه به نمودار درختی مقادیر $P(B)$ و $P(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم:



$$P(B) = ۰/۴\times ۰/۳ + ۰/۶\times ۰/۸ = ۰/۶$$
$$P(A\cap B) = P\ (\text{زن})\ P\ (\text{زن} \mid \text{کشاورزی}) = ۰/۴\times ۰/۳ = ۰/۱۲$$
$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۱۲}{۰/۶} = \frac{۱}{۵}$$

۱۰۹

مجموع احتمالات در جدول توزیع احتمال برابر یک است. لذا:

$$P(X=۱) + P(X=۲) + P(X=۳) + P(X=۴) = ۱$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۴} + \frac{a}{۲} + \frac{a}{۳} + \frac{۱}{۸} = ۱ \Rightarrow \frac{۵}{۶}a = \frac{۵}{۸} \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$
$$\Rightarrow P(X\le ۲) = P(X=۱) + P(X=۲) = \frac{۱}{۴} + \frac{a}{۲} \overset{a=\frac{۳}{۴}}{=\!=\!=} \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۸} = \frac{۵}{۸}$$

۱۱۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$P(X=۶)=P(\text{جمع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد})$

$=P(\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\})=\frac{۵}{۳۶}$

۱۱۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$X=۳$، یعنی ۳ بار کارت از کیسه خارج می‌کنیم که در دو بار اول کارت با شماره‌ی فرد و در بار سوم کارت با شماره‌ی زوج خارج شده است. با توجه به این‌که انتخاب کارت‌ها با جای‌گذاری است، لذا در هر انتخاب فضای نمونه‌ای تغییر نمی‌کند و داریم:

$P(X=۳)=P(\text{کارت اول فرد})P(\text{کارت دوم فرد})P(\text{کارت سوم زوج})$

$=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۲۷}$

۱۱۲ **۱** ۲ ۳ ۴

اگر X تعداد لامپ‌های معیوب از بین ۲ لامپ انتخاب شده باشد، آن‌گاه:

$X=۰,۱,۲\ ,\ P(X=۰)+P(X=۱)+P(X=۲)=۱$

$\Rightarrow P(X\geq ۱)=۱-P(X=۰)=۱-P(\text{هر دو لامپ سالم باشند})$

$$=۱-\frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=۱-\frac{۱۵}{۴۵}=\frac{۲}{۳}$$

۱۱۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

X: مجموع دو عدد ظاهر شده

متغیر تصادفی X مقادیر $۲,۳,\ldots,۱۲$ را اختیار می‌کند.

$\Rightarrow P(X=۲)=P(\text{جمع دو عدد برابر ۲ باشد})=P(\{(۱,۱)\})=\frac{۱}{۳۶}$

از طرفی طبق ضابطه، $P(X=۲)=a-\frac{|۲-۷|}{۳۶}=a-\frac{۵}{۳۶}$ است. با مساوی قرار دادن این دو عدد، مقدار a به‌دست می‌آید:

$$a-\frac{۵}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}\Rightarrow a=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۵}{۳۶}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

۱۱۴ ۱ **۲** ۳ ۴

مجموع احتمالات برابر یک است، لذا:

$P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)+P(X=۴)+P(X=۵)=۱$

$\Rightarrow k(۱)^۲+k(۲)^۲+k(۳)^۲+k(۴)^۲+k(۵)^۲=۱\Rightarrow k=\frac{۱}{۵۵}$

$\Rightarrow P(X\geq ۴)=P(X=۴)+P(X=۵)=\frac{۱}{۵۵}\times ۴^۲+\frac{۱}{۵۵}\times ۵^۲=\frac{۴۱}{۵۵}$

۱۱۵ ۱ **۲** ۳ ۴

برای تابع احتمال، داریم:

$P(X=۰)+P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)+P(X=۴)+P(X=۵)=۱$

$\Rightarrow P(X\geq ۲)=۱-P(X=۰)-P(X=۱)$

$$=۱-\binom{۵}{۰}\left(\frac{۱}{۳}\right)^۰\left(\frac{۲}{۳}\right)^۵-\binom{۵}{۱}\left(\frac{۱}{۳}\right)^۱\left(\frac{۲}{۳}\right)^۴=\frac{۱۳۱}{۲۴۳}$$

۱۱۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

احتمال جوانه زدن هر بذر برابر ۰/۸ است و بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$P(X\geq ۲)=P(X=۲)+P(X=۳)$

$$=\binom{۳}{۲}(۰/۸)^۲(۱-۰/۸)^۱+\binom{۳}{۳}(۰/۸)^۳=۰/۸۹۶$$

۱۱۷ ۱ ۲ **۳** ۴

اگر یک نفر از این جمعیت به تصادف انتخاب شود، احتمال آن‌که رنگ چشم میشی داشته باشد برابر ۰/۸ است. اگر X تعداد افراد دارای رنگ چشم میشی باشند، آن‌گاه:

$$P(X=۲)=\binom{۵}{۲}(۰/۸)^۲(۱-۰/۸)^{۵-۲}=۰/۰۵۱۲$$

۱۱۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

احتمال پاسخ‌گویی صحیح به هر پرسش چهار گزینه‌ای برابر $p=\frac{۱}{۴}$ است. اگر متغیر تصادفی X تعداد پاسخ‌گویی صحیح به ۵ پرسش باشد، آن‌گاه: $X=۰,۱,۲,۳,۴,۵$

بنابر احتمال دوجمله‌ای، مقدار $P(X=۳)$ برابر است با:

$$P(X=۳)=\binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۴}\right)^۳\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)^۲=\frac{۴۵}{۵۱۲}$$

۱۱۹ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به فرض، $P(\text{پ})=۳P(\text{د})$. از طرفی، داریم:

$P(\text{پ})+P(\text{د})=۱\Rightarrow ۳P(\text{د})+P(\text{د})=۱\Rightarrow ۴P(\text{د})=۱$

$\Rightarrow P(\text{د})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(\text{پ})=۳P(\text{د})=\frac{۳}{۴}$

اگر متغیر تصادفی X تعداد فرزندان پسر خانواده باشد، آن‌گاه $P(X=۲)$ را با احتمال دوجمله‌ای به‌دست می‌آوریم:

$$P(X=۲)=\binom{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲\left(\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۲۷}{۶۴}$$

۱۲۰ **۱** ۲ ۳ ۴

طبق فرض $P(B)=۲P(b)$. از طرفی:

$P(B)+P(b)=۱\Rightarrow ۲P(b)+P(b)=۱\Rightarrow ۳P(b)=۱\Rightarrow P(b)=\frac{۱}{۳}$

اگر متغیر تصادفی X تعداد فرزندان با ژن رنگ چشم مغلوب باشد، آن‌گاه:

$$X=۰,۱,۲,۳,۴\Rightarrow P(X=۱)=\binom{۴}{۱}\left(\frac{۱}{۳}\right)^۱\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)^۳=\frac{۳۲}{۸۱}$$

۱۲۱ **۱** ۲ ۳ ۴

احتمال تأثیر مثبت هر واکسن برابر ۰/۹ است. بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$P(X=۳)=\binom{۵}{۳}\times(۰/۹)^۳(۱-۰/۹)^۲=۰/۰۷۲۹$$

۱۲۲ **۱** ۲ ۳ ۴

احتمال اصابت یک تیر به هدف برابر $\frac{۳}{۴}=\frac{۷۵}{۱۰۰}$ است. اگر X تعداد تیرهای اصابت کرده به هدف باشد، آن‌گاه: $X=۰,۱,۲,۳,۴$

بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم: $P(X\geq ۳)=P(X=۳)+P(X=۴)$

$$=\binom{۴}{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^۳\left(\frac{۱}{۴}\right)+\binom{۴}{۴}\left(\frac{۳}{۴}\right)^۴=\frac{۱۸۹}{۲۵۶}$$

۱۲۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

احتمال دیر رسیدن ۰/۱ است، لذا احتمال به موقع رسیدن برابر $۰/۹=۱-۰/۱$ می‌باشد. اگر X تعداد روزهای حاضر شدن به موقع در محل کار باشد، آن‌گاه: $X=۰,۱,۲,۳,۴$

برای به‌دست آوردن $P(X\geq ۳)$، از احتمال دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم، داریم:

$P(X\geq ۳)=P(X=۳)+P(X=۴)$

$$=\binom{۴}{۳}(۰/۹)^۳(۰/۱)^۱+\binom{۴}{۴}(۰/۹)^۴=۰/۹۴۷۷$$

۱۲۴ ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا احتمال منفی بودن RH خون را به‌دست می‌آوریم:

$P(\text{RH خون منفی})=P(\text{هر دو ژن منفی})=۰/۴\times۰/۴=۰/۱۶$

بنابر احتمال دوجمله‌ای، اگر متغیر تصادفی X تعداد افراد دارای RH خون منفی باشد، آن‌گاه:

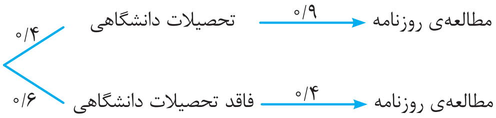
$X=۰,۱,۲,۳\ ,\ p=۰/۱۶\ ,\ n=۳$

$P(X\geq ۲)=P(X=۲)+P(X=۳)$

$$=\binom{۳}{۲}(۰/۱۶)^۲(۱-۰/۱۶)^۱+\binom{۳}{۳}(۰/۱۶)^۳=۰/۰۶۹$$

۱۲۵ ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا احتمال مطالعه‌ی روزنامه برای هر نفر از این جمعیت را به کمک نمودار درختی زیر به‌دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow P(\text{مطالعه‌ی روزنامه}) = 0/4\times 0/9 + 0/6\times 0/4 = 0/6$$

بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$P(X=2)=\binom{3}{2}(0/6)^2(1-0/6)^{3-2}=0/432$$

۱۲۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

بنابر احتمال دوجمله‌ای، احتمال مطلوب برابر است با:

$$P=\frac{\binom{4}{3}}{2^4}+\frac{\binom{4}{3}}{2^4}=\frac{4}{16}+\frac{4}{16}=\frac{1}{2}$$

۱۲۷ **۱** ۲ ۳ ۴

برای آن‌که تعداد پسرهای خانواده‌ی A زوج و تعداد دخترهای خانواده‌ی B فرد باشد، باید داشته باشیم: (خانواده‌ی B دارای ۱ دختر و خانواده‌ی A دارای ۲ پسر یا خانواده‌ی B دارای ۱ دختر و خانواده‌ی A دارای صفر پسر باشند.)

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها}=\binom{3}{0}\binom{2}{1}+\binom{3}{2}\binom{2}{1}=2+6=8\Rightarrow P=\frac{8}{2^5}=\frac{1}{4}$$

۱۲۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

برای آن‌که از ۵ روز در سه روز برف نبارد، باید دقیقاً در ۲ روز از ۵ روز برف ببارد و بنابر احتمال دوجمله‌ای داریم:

$$P(\text{باریدن برف در ۲ روز از ۵ روز})=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$$

۱۲۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۳ برابر $\frac{1}{2}$ است، زیرا: $A=\{4,5,6\}\Rightarrow P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$P(X=6)=\frac{\binom{10}{6}}{2^{10}}=\frac{210}{1024}=\frac{105}{512}$$

۱۳۰ ۱ **۲** ۳ ۴

احتمال ظاهر شدن عدد زوج در پرتاب یک تاس برابر $\frac{1}{2}$ و احتمال ۲ موفقیت در ۴ آزمایش بنابر احتمال دوجمله‌ای برابر $\binom{4}{2}(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2=\frac{8}{27}$ است. بنابراین: $P_1=\frac{1}{2}\times\frac{8}{27}=\frac{4}{27}$

احتمال ظاهر نشدن عدد زوج در پرتاب یک تاس برابر $\frac{1}{2}$ و احتمال ۲ موفقیت در ۳ آزمایش بنابر احتمال دوجمله‌ای برابر $\binom{3}{2}(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})=\frac{4}{9}$ است. بنابراین: $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$

پس احتمال مطلوب برابر است با: $P=P_1+P_2=\frac{4}{27}+\frac{2}{9}=\frac{10}{27}$

۱۳۱ ۱ **۲** ۳ ۴

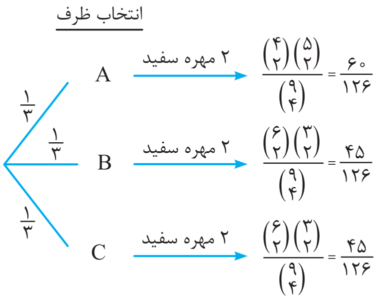
احتمال «رو» آمدن در پرتاب یک سکه برابر $\frac{1}{2}$ و احتمال اصابت فقط یک تیر در ۵ بار رها کردن تیر، بنابر احتمال دوجمله‌ای برابر $\binom{5}{1}(\frac{3}{5})^1(\frac{2}{5})^4=\frac{48}{625}$ است. بنابراین: $P_1=\frac{1}{2}\times\frac{48}{625}=\frac{24}{625}$

احتمال «پشت» آمدن در پرتاب یک سکه برابر $\frac{1}{2}$ و احتمال اصابت فقط یک تیر در ۳ بار رها کردن تیر، بنابر احتمال دوجمله‌ای برابر $\binom{3}{1}(\frac{3}{5})^1(\frac{2}{5})^2=\frac{36}{125}$ است. بنابراین: $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{36}{125}=\frac{18}{125}$

پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$P=P_1+P_2=\frac{24}{625}+\frac{18}{125}=\frac{24+90}{625}=\frac{114}{625}$$

۱۳۲ **۱** ۲ ۳ ۴



بنابراین:

$$P(\text{سفید بودن دو مهره})=\frac{1}{3}\left(\frac{60}{126}+\frac{45}{126}+\frac{45}{126}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{150}{126}=\frac{25}{63}$$

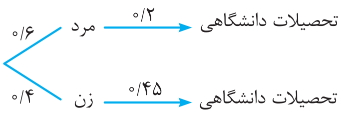
۱۳۳ ۱ **۲** ۳ ۴

اگر متغیر تصادفی X تعداد مبتلایان به بیماری از بین ۵ نفر باشد، آن‌گاه بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}(0/2)^3(1-0/2)^2=0/0512$$

۱۳۴ **۱** ۲ ۳ ۴

ابتدا احتمال آن‌که شخصی که به تصادف انتخاب می‌شود، دارای تحصیلات دانشگاهی باشد را با توجه به نمودار درختی زیر به‌دست می‌آوریم:



$$P(\text{شخص انتخاب شده تحصیلات دانشگاهی داشته باشد})$$
$$=0/6\times 0/2+0/4\times 0/45=0/3$$

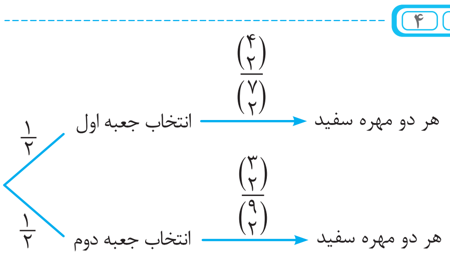
بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$P(\text{دو نفر از سه نفر تحصیلات دانشگاهی داشته باشند})$$
$$=\binom{3}{2}(0/3)^2(1-0/3)^1=0/189$$

۱۳۵ ۱ **۲** ۳ ۴

احتمال پاسخ‌گویی درست به هر تست پنج‌گزینه‌ای برابر $p=\frac{1}{5}$ است. اگر X تعداد سؤالات درست پاسخ داده شده باشد، آن‌گاه بنا بر احتمال دوجمله‌ای،داریم: $P(X=3)=\binom{5}{3}(\frac{1}{5})^3(1-\frac{1}{5})^2=0/0512$

۱۳۶ **۱** ۲ ۳ ۴



$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن هر دو مهره}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۲۱}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۳۶}=\frac{۳۱}{۱۶۸}$$

۱۳۷ ۱ **۲** ۳ ۴

احتمال پاسخ‌گویی درست به هر تست پنج‌گزینه‌ای برابر $p=\frac{۱}{۵}$ است. اگر X تعداد سؤالات درست پاسخ داده شده باشد، آن‌گاه بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:
$$P(X=۱)=\binom{۵}{۱}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۱}\left(۱-\frac{۱}{۵}\right)^{۴}=۰/۴۰۹۶$$

۱۳۸ ۱ ۲ **۳** ۴

X تعداد موش‌های سفید خارج شده از بین دو موش خارج شده است.
لذا: $X=۰,۱,۲$

$$P(X=۰)=P(\text{هر دو موش سیاه باشند.})=\frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۱۵}{۴۵}=\frac{۱}{۳}$$
$$P(X=۱)=P(\text{یک موش سفید و یک موش سیاه باشند.})$$
$$=\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۱}}{۴۵}=\frac{۲۴}{۴۵}=\frac{۸}{۱۵}$$
$$P(X=۲)=P(\text{هر دو موش سفید باشند.})=\frac{\binom{۴}{۲}}{۴۵}=\frac{۶}{۴۵}=\frac{۲}{۱۵}$$

۱۳۹ ۱ **۲** ۳ ۴

برای آن‌که حداکثر در سومین آزمایش نتیجه‌ی مطلوب حاصل شود، باید:

۱) در همان دو پرتاب اول هر دو عدد رو شده زوج باشند که احتمال مطلوب برابر $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$ است.

۲) در دو پرتاب اول، هر دو عدد رو شده زوج نباشند ولی در دو پرتاب دوم هر دو عدد رو شده زوج باشند که احتمال مطلوب برابر $\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۱۶}$ است.

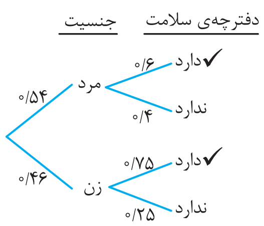
۳) در دو پرتاب اول و در دو پرتاب دوم هر دو عدد رو شده زوج نباشند و در دو پرتاب سوم هر دو عدد رو شده زوج باشند که احتمال مطلوب برابر $\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۶۴}$ است. بنابراین:
$$P=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱۶+۱۲+۹}{۶۴}=\frac{۳۷}{۶۴}$$

۱۴۰ ۱ **۲** ۳ ۴

بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:
X: تعداد مبتلایان به بیماری ، $n=۶$ ، $p=۰/۲$
$$P(X=۴)=\binom{۶}{۴}(۰/۲)^{۴}(۱-۰/۲)^{۲}=۰/۰۱۵۳۶$$

۱۴۱ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به نمودار درختی مقابل داریم:



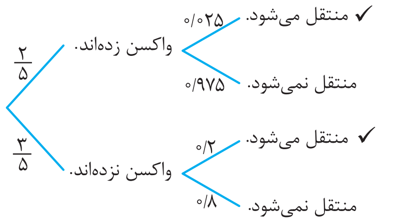
$$\Rightarrow P(\text{داشتن دفترچه‌ی سلامت})$$
$$=۰/۵۴\times۰/۶+۰/۴۶\times۰/۷۵$$
$$=۰/۶۶۹$$

۱۴۲ ۱ ۲ **۳** ۴

اگر یک مشتری از این فروشگاه به تصادف انتخاب شود، احتمال آن‌که خرید کند، برابر $p=\frac{۶}{۱۰}$ است. بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:
$$P(X=۳)=\binom{۴}{۳}(۰/۶)^{۳}(۱-۰/۶)^{۱}=۰/۳۴۵۶$$

۱۴۳ **۱** ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار درختی زیر داریم:



$$\Rightarrow P(\text{انتقال بیماری})=\frac{۲}{۵}\times\frac{۲۵}{۱۰۰۰}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱۳}{۱۰۰}$$

۱۴۴ **۱** ۲ ۳ ۴

احتمال جوانه زدن هر بذر برابر $۰/۸$ است. بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:
$$P(X\geq ۲)=۱-P(X=۰)-P(X=۱)$$
$$=۱-\binom{۵}{۰}(۰/۸)^{۰}(۱-۰/۸)^{۵}-\binom{۵}{۱}(۰/۸)^{۱}(۱-۰/۸)^{۴}$$
$$=۱-۰/۰۰۰۳۲-۰/۰۰۶۴۰=۰/۹۹۳۲۸$$

۱۴۵ ۱ **۲** ۳ ۴

فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با سه فرزند، ۸ عضو دارد.
اگر B پیشامدی باشد که در آن یکی از فرزندان پسر باشد، آن‌گاه:
$$B=S-\{(\text{د،د،د})\}\Rightarrow n(B)=۸-۱=۷$$
$$A:\text{دو فرزند دختر}\Rightarrow A\cap B=\{(\text{پ،د،د}),(\text{د،پ،د}),(\text{د،د،پ})\}$$
$$\Rightarrow n(A\cap B)=۳\Rightarrow P(A|B)=\frac{۳}{۷}$$

۱۴۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

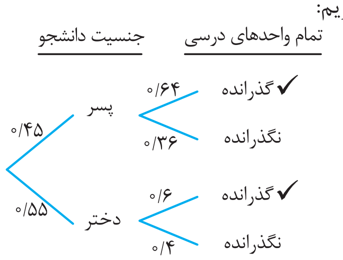
اگر یک کارگر از این کارخانه به تصادف انتخاب شود، احتمال آن‌که بومی باشد برابر $۰/۶$ است. بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:
$$P(X=۳)=\binom{۴}{۳}(۰/۶)^{۳}(۱-۰/۶)^{۱}=۰/۳۴۵۶$$

۱۴۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

احتمال پاسخ‌گویی درست به هر سؤال سه‌گزینه‌ای برابر $\frac{۱}{۳}$ است و بنابر احتمال دوجمله‌ای، داریم:
$$P(X=۴)=\binom{۶}{۴}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴}\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۲۰}{۲۴۳}$$

۱۴۸ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به نمودار درختی زیر داریم:



$$\Rightarrow P(\text{گذراندن تمام واحدها})$$
$$=۰/۴۵\times۰/۶۴+۰/۵۵\times۰/۶=۰/۶۱۸$$

بنابراین ۶۱/۸٪ کل دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند.

۱۴۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$B:\text{فرزند اول دختر است}=\{(\text{د،پ،د}),(\text{د،پ،پ}),(\text{د،د،پ}),(\text{د،د،د})\}$$
A: لااقل یکی از فرزندان پسر
$$\Rightarrow A\cap B=\{(\text{د،پ،د}),(\text{د،پ،پ}),(\text{د،د،پ})\}$$
$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳}{۴}$$

۱۵۰ ۱ **۲** ۳ ۴

اگر X تعداد افرادی که مبتلا به بیماری می‌شوند، باشد، آن‌گاه:

$$P(X=2 \text{ یا } 3)=P(X=2)+P(X=3)$$

$$=\binom{4}{2}(0/1)^2(1-0/1)^2+\binom{4}{3}(0/1)^3(1-0/1)^1=0/0522$$

۱۵۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده‌ی ۳ فرزندی، ۸ عضو دارد که فقط در یک حالت (پ،پ،پ) هیچ فرزندی دختر نمی‌باشد. بنابراین اگر B پیشامدی باشد که در آن حداقل یک فرزند دختر باشد، آن‌گاه B، ۷ عضو دارد و اگر A پیشامدی باشد که در آن حداقل دو فرزند دختر باشند، آن‌گاه: $n(A)=\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=4 \Rightarrow P(A\mid B)=\frac{4}{7}$

۱۵۲ ۱ **۲** ۳ ۴

اگر متغیر تصادفی X تعداد کالاهای مرغوب از بین ۴ کالای خریداری شده باشد، آن‌گاه: $X=0,1,2,3,4$

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$

$$\Rightarrow P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^4$$

$$=1-\frac{1}{256}=\frac{255}{256}$$

۱۵۳ ۱ ۲ **۳** ۴

$$P(B)=3P(b)\quad,\quad P(B)+P(b)=1\Rightarrow P(b)=\frac{1}{4}\quad,\quad P(B)=\frac{3}{4}$$

$X=0,1,2,3$: تعداد فرزندان با رنگ چشم مغلوب

$$\Rightarrow P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$

۱۵۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

X مقادیر $0,1,2,\dots,16$ را اختیار می‌کند و داریم:

$$P(X=0)+P(X=1)+\dots+P(X=16)=P(0\leq X\leq 16)=1$$

۱۵۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$B=\{(\text{پ،د}),(\text{د،پ}),(\text{پ،پ})\}$: حداقل یکی از فرزندان پسر است.

$A\Rightarrow A\cap B=\{(\text{پ،د}),(\text{د،پ})\}$: خانواده دارای فرزند دختر است.

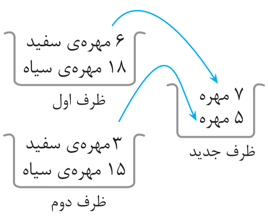
$$\Rightarrow P(A\mid B)=\frac{2}{3}$$

۱۵۶ ۱ ۲ **۳** ۴

از هر ۴۵۰ نفر، ۳۰۰ نفر تحصیلات دانشگاهی دارند، لذا احتمال آن‌که یک نفر به تصادف انتخاب شود و تحصیلات دانشگاهی داشته باشد برابر $p=\frac{300}{450}=\frac{2}{3}$ است. بنابر احتمال دو جمله‌ای، داریم:

$$P(X=4)=\binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$$

۱۵۷ ۱ ۲ ۳ **۴**



با توجه به نمودار درختی زیر، داریم:

مهره از ظرف جدید

$\frac{7}{12}$ مهره از ظرف اول $\xrightarrow{\frac{6}{24}}$ سفید

$\frac{5}{12}$ مهره از ظرف دوم $\xrightarrow{\frac{3}{18}}$ سفید

$$P(\text{سفید بودن مهره})=\frac{7}{12}\times\frac{6}{24}+\frac{5}{12}\times\frac{3}{18}=\frac{31}{144}$$

۱۵۸ **۱** ۲ ۳ ۴

اطلاعات مسأله در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:

$0/55$ دستگاه A $\xrightarrow{0/03}$ معیوب

$0/45$ دستگاه B $\xrightarrow{0/05}$ معیوب

$$P(\text{معیوب بودن کالا})=0/55\times 0/03+0/45\times 0/05=0/039$$

بنابر فرمول احتمال شرطی، داریم:

$$P(\text{A محصول کالا}\mid\text{معیوب})=\frac{P(\text{A محصول کالا و معیوب})}{P(\text{معیوب})}$$

$$=\frac{0/55\times 0/03}{0/039}=\frac{11}{26}$$

۱۵۹ ۱ ۲ **۳** ۴

اگر سکه را برای اولین بار پرتاب کنیم دو حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول: سکه «رو» بیاید که در این‌صورت باید تاس را پرتاب کنیم.

احتمال «رو» آمدن سکه $\frac{1}{2}$ و احتمال ظاهر شدن عدد مضرب ۳ در پرتاب تاس $\frac{2}{6}$ می‌باشد، بنابراین: $P_1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

حالت دوم: سکه «پشت» بیاید که در این‌صورت سکه‌ی دیگری پرتاب می‌کنیم. در پرتاب دوم سکه نیز دو حالت رخ می‌دهد:

آ) سکه «رو» ظاهر می‌شود که در این‌صورت تاس باید پرتاب کنیم. پس:

(تاس مضرب ۳، ر، پ): حالت مطلوب $\Rightarrow P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{12}$

ب) سکه «پشت» ظاهر می‌شود که در این‌صورت سکه را برای بار سوم پرتاب می‌کنیم که در پرتاب سوم سکه نیز دو حالت رخ می‌دهد:

(تاس مضرب ۳، ر، پ، پ): حالت مطلوب

$$\Rightarrow P_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{24}$$

بنابراین احتمال آن‌که در حداکثر ۳ پرتاب سکه، تاس مضرب ۳ بیاید برابر است با: $P=P_1+P_2+P_3=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$

۱۶۰ ۱ **۲** ۳ ۴

احتمال خارج شدن دو مهره‌ی سفید برابر $\frac{3}{21}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}$، احتمال خارج شدن دو مهره‌ی سیاه برابر $\frac{6}{21}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}$ و احتمال خارج شدن یک مهره‌ی سفید و یک مهره‌ی سیاه برابر $\frac{12}{21}=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}}$ خواهد بود. پس:

۲ مهره‌ی خارج شده — احتمال سفید بودن مهره با حذف دو مهره

$\frac{3}{21}$ هر دو سفید $\rightarrow \frac{1}{5}$

$\frac{6}{21}$ هر دو سیاه $\rightarrow \frac{3}{5}$

$\frac{12}{21}$ یکی سفید و دیگری سیاه $\rightarrow \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow P(\text{سفید})=\frac{3}{21}\times\frac{1}{5}+\frac{6}{21}\times\frac{3}{5}+\frac{12}{21}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{7}$$

۱۶۱ ۱ **۲** ۳ ۴

اگر B پیشامدی باشد که در آن مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، آن‌گاه: $b=$ مهره‌ی سیاه و $w=$ مهره‌ی سفید

$$B=\{\{w_۲,w_۴\},\{w_۱,w_۵\},\{b_۲,b_۴\},\{b_۱,b_۵\},\{w_۲,b_۴\},\{w_۵,b_۱\},\{w_۴,b_۲\},\{w_۳,b_۳\},\{w_۱,b_۵\}\}\Rightarrow n(B)=۹$$

اگر A پیشامدی باشد که هر دو مهره هم‌رنگ باشند، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{\{w_۲,w_۴\},\{w_۱,w_۵\},\{b_۲,b_۴\},\{b_۱,b_۵\}\}$$

$$n(A\cap B)=۴\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۹}$$

۱۶۲ **۱** ۲ ۳ ۴

اگر B پیشامدی باشد که در آن حاصل جمع شماره‌های دو تاس کم‌تر از ۶ باشد، آن‌گاه: $B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$

اگر A پیشامدی باشد که در آن حداقل شماره‌ی یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، آن‌گاه: $A\cap B=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

۱۶۳ ۱ ۲ **۳** ۴

عدد زوج حاصل است: $B\Rightarrow B=\{۲,۴,۶\}$

عدد ظاهر شده ۴ یا ۶ است: $A\Rightarrow A\cap B=\{۴,۶\}\Rightarrow P(A|B)=\frac{۲}{۳}$

۱۶۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$P(X\le ۳)=P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)$$

$P(X=۱)=P($مهره‌ی اول سفید باشد$)=\frac{۳}{۵}$

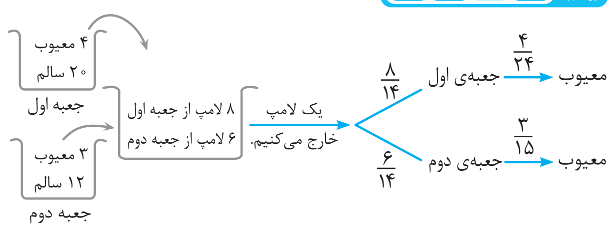
$P(X=۲)=P($مهره‌ی اول سیاه و مهره‌ی دوم سفید$)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۲۵}$

$P(X=۳)=P($مهره‌های اول و دوم سیاه و مهره‌ی سوم سفید$)$

$$=\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱۲}{۱۲۵}$$

$$\Rightarrow P(X\le ۳)=\frac{۳}{۵}+\frac{۶}{۲۵}+\frac{۱۲}{۱۲۵}=\frac{۷۵+۳۰+۱۲}{۱۲۵}=\frac{۱۱۷}{۱۲۵}$$

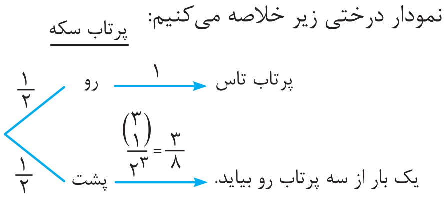
۱۶۵ ۱ **۲** ۳ ۴



$\Rightarrow P($معیوب بودن$)=\frac{۸}{۱۴}\times\frac{۴}{۲۴}+\frac{۶}{۱۴}\times\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱۹}{۱۰۵}$

۱۶۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

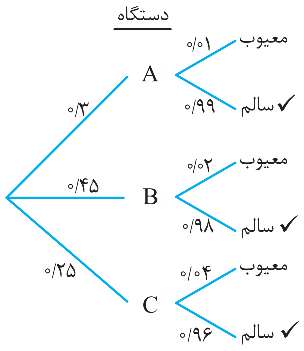
اطلاعات مسأله را در نمودار درختی زیر خلاصه می‌کنیم:



بنابراین: $P($دقیقاً یک بار سکه «رو» بیاید$)=\frac{۱}{۲}\times ۱+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۱}{۱۶}$

۱۶۷ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به نمودار درختی داریم:



$\Rightarrow P($سالم بودن$)=۰/۳\times ۰/۹۹+۰/۴۵\times ۰/۹۸+۰/۲۵\times ۰/۹۶$

$=۰/۹۷۸$

۱۶۸ **۱** ۲ ۳ ۴

مجموع احتمالات برابر یک است، لذا:

$$P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)+P(X=۴)+P(X=۵)=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۱(۱+۱)}{a}+\frac{۲(۲+۱)}{a}+\frac{۳(۳+۱)}{a}+\frac{۴(۴+۱)}{a}+\frac{۵(۵+۱)}{a}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲+۶+۱۲+۲۰+۳۰}{a}=۱\Rightarrow a=۷۰\Rightarrow P(X=۵)=\frac{۵\times ۶}{۷۰}=\frac{۳}{۷}$$

۱۶۹ ۱ ۲ **۳** ۴

اگر B پیشامدی باشد که برآمد حاصل، مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه:

$B=\{۱,۲,۴,۵\}$

شماره‌ی ۲ ظاهر شود: $A\Rightarrow A\cap B=\{۲\}\Rightarrow P(A|B)=\frac{۱}{۴}$

۱۷۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

مجموع احتمالات برابر یک است، لذا:

$$P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)+P(X=۴)+P(X=۵)=۱$$

$$\Rightarrow\frac{\binom{۵}{۱}}{a}+\frac{\binom{۵}{۲}}{a}+\frac{\binom{۵}{۳}}{a}+\frac{\binom{۵}{۴}}{a}+\frac{\binom{۵}{۵}}{a}=۱$$

با توجه به تساوی $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$، داریم:

$$\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۲}+\cdots+\binom{۵}{۵}=۲^۵-\binom{۵}{۰}=۳۲-۱=۳۱$$

$$\Rightarrow\frac{\binom{۵}{۱}+\cdots+\binom{۵}{۵}}{a}=\frac{۳۱}{a}=۱\Rightarrow a=۳۱$$

$$\Rightarrow P(X\ge ۴)=P(X=۴)+P(X=۵)$$

$$=\frac{\binom{۵}{۴}}{۳۱}+\frac{\binom{۵}{۵}}{۳۱}=\frac{۵}{۳۱}+\frac{۱}{۳۱}=\frac{۶}{۳۱}$$