حسابان

(جلد اول)

سال سوم رشته ریاضی

ویژه دانش‌آموزان ممتاز

مؤلفین:
حسین شفیع زاده
حمیدرضا کریمی
علی یوسفی

انتشارات خوشخوان

فهرست

۱

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

تصاعد حسابی در نظر بگیرید که جمله‌ی اول آن a و قدرنسبت آن d باشد. جملات این تصاعد به صورت زیر است:

$$a, a+d, a+۲d, \cdots, a+(n-۱)d, \cdots$$

جمله‌ی nام این تصاعد به صورت $a_n = a+(n-۱)d$ می‌باشد. مجموع n جمله‌ی اول این تصاعد که آن را با S_n نشان می‌دهیم از روابط زیر به‌دست می‌آید:

۱) $S_n = \frac{n}{۲}\left(۲a+(n-۱)d\right)$ ۲) $S_n = n.a + \frac{n(n-۱)}{۲}d$

اثبات به دو روش S_n را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&S_n = a_{۱}+a_{۲}+\cdots+a_n\\
&\underline{S_n = a_n+a_{n-۱}+\cdots+a_{۱}}\\
۲S_n &= (a_{۱}+a_n)+(a_{۲}+a_{n-۱})+\cdots+(a_n+a_{۱})\\
&= \left(a_{۱}+a_{۱}+(n-۱)d\right)+\left(a_{۱}+d+a_{۱}+(n-۲)d\right)\\
&+\cdots+\left(a_{۱}+(n-۱)d+a_{۱}\right)\\
&= \left(۲a_{۱}+(n-۱)d\right)+\left(۲a_{۱}+(n-۱)d\right)+\cdots+\left(۲a_{۱}+(n-۱)d\right)\\
&= n\left(۲a_{۱}+(n-۱)d\right)\\
\Rightarrow\ S_n &= \frac{n}{۲}\left(۲a_{۱}+(n-۱)d\right)
\end{aligned}$$

مثال ۱ جمله‌ی سوم یک تصاعد حسابی برابر ۷ و جمله‌ی هشتم آن برابر ۳۷ است. مجموع بیست جمله‌ی اول این تصاعد را بیابید.

حل

$$a_n = a+(n-۱)d \Rightarrow \begin{cases} a_{۳} = a+۲d = ۷\\ a_{۸} = a+۷d = ۳۷\end{cases} \xrightarrow{\text{با حل دستگاه}} \begin{cases} a = -۵\\ d = ۶\end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{۲}\left(۲a+(n-۱)d\right)$$

$$\Rightarrow S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}\left(۲(-۵)+(۲۰-۱)\times ۶\right) = ۱۰۴۰$$

مثال ۲

حاصل‌جمع n عدد فرد متوالی با شروع از ۱ را بیابید.

$$۱, ۳, ۵, ۷, \cdots, ۲n - ۱, \cdots$$

حل جمله اول $a = ۱$ و قدرنسبت $d = ۲$ است پس جمله nام این تصاعد

$$a_n = ۱ + (n - ۱) \times ۲ = ۲n - ۱$$

است.

پس مجموع n جمله اول برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲ \times ۱ + (n - ۱) \times ۲) = \frac{n}{۲}(۲ + ۲n - ۲) = n^۲$$

در نتیجه:

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$$

به طور مثال $۱ + ۳ + ۵ + ۷ + \cdots + ۹۹ = ۵۰^۲ = ۲۵۰۰$.

دقت کنید ۹۹ پنجاهمین عدد فرد است زیرا:

$$a_n = ۲n - ۱ = ۹۹ \Rightarrow n = ۵۰$$

تذکر

به کمک فرمول مجموع جملات تصاعد حسابی می‌توان نشان داد:

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

و یا مجموع n عدد زوج اول متوالی برابر است با:

$$۲ + ۴ + ۶ + \cdots + (۲n) = n(n + ۱)$$

نکته ۱ اگر $a_۱$ و a_n جملات اول و nام یک دنباله حسابی باشند آن‌گاه:

$$S_n = n(\frac{a_۱ + a_n}{۲})$$

یعنی مجموع n جمله اول برابر است با n برابر میانگین جمله اول و آخر.

مثال ۳

در یک تصاعد حسابی n جمله‌ای، مجموع سه جمله‌ی اول، مجموع سه جمله‌ی آخر و مجموع کل جملات به ترتیب برابر ۱۲، ۳۸ و ۳۵۰ است. تعداد جملات این تصاعد را بیابید.

حل دقت کنید که در یک تصاعد حسابی روابط زیر برقرار است:

$$a_۱ + a_n = a_۲ + a_{n-۱} = a_۳ + a_{n-۲}$$

زیرا $$a_۲ + a_{n-۱} = (a_۱ + d) + (a_n - d) = a_۱ + a_n$$

بنابراین به سه صورت می‌توان S_n را نوشت:

$$\begin{cases} S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \\ S_n = \frac{n}{۲}(a_۲ + a_{n-۱}) \\ S_n = \frac{n}{۲}(a_۳ + a_{n-۲}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_n + a_{n-۱} + a_{n-۲})$$

$$\Rightarrow ۳ \times ۳۵۰ = \frac{n}{۲}(۱۲ + ۳۸) \Rightarrow ۳ \times ۳۵۰ = n \times ۲۵ \Rightarrow n = ۴۲$$

نکته ۲ اگر مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد حسابی به صورت $an^{۲}+bn+c$ باشد آن‌گاه $c=۰$ و $a=\frac{d}{۲}$ (یعنی a نصف قدرنسبت است).

به طور مثال اگر $S_n=۳n^{۲}+۵n$ باشد آن‌گاه $\frac{d}{۲}=۳$ و $d=۶$.

نکته ۳ برای هر $n>۱$ رابطه‌ی $a_n=S_n-S_{n-۱}$ برقرار است.

مثال ۴ مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد حسابی برابر $n^{۲}+۴n$ است. مجموع ده جمله‌ی متوالی این تصاعد با شروع از جمله‌ی هشتم را بیابید.

حل

$$a_{۸}+a_{۹}+\cdots+a_{۱۷}=S_{۱۷}-S_{۷}=(۱۷^{۲}+۴\times ۱۷)-(۷^{۲}+۴\times ۷)=۲۸۰$$

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

فرض کنید a جمله‌ی اول و q قدرنسبت یک تصاعد هندسی باشد. جملات این تصاعد به صورت زیر است:

$$a, aq, aq^{۲}, \cdots, aq^{n-۱}, \cdots$$

جمله nام این تصاعد به صورت $a_n=aq^{n-۱}$ می‌باشد.

مجموع n جمله‌ی اول این تصاعد از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{S_n=a\frac{۱-q^n}{۱-q}}$$

اثبات از اتحاد $x^n-۱=(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+\cdots+x+۱)$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}S_n&=a+aq+aq^{۲}+\cdots+aq^{n-۱}=a(۱+q+q^{۲}+\cdots+q^{n-۱})\\&=a\frac{(۱+q+q^{۲}+\cdots+q^{n-۱})(۱-q)}{۱-q}=a\frac{۱-q^n}{۱-q}\end{aligned}$$

مثال ۵ حاصل $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۱۲۸}$ را بیابید.

حل تصاعد هندسی $۱, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{۲}, \cdots, \frac{۱}{۱۲۸}$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}&a_n=\frac{۱}{۱۲۸}=a_{۱}q^{n-۱}=۱\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{n-۱}\\&\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^{۷}=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{n-۱}=(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{n-۱}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{n-۱}{۲}}\\&\Rightarrow\frac{n-۱}{۲}=۷\Rightarrow n=۱۵\\&\Rightarrow S_{۱۵}=a_{۱}\frac{۱-q^{۱۵}}{۱-q}=۱\times\frac{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۱۵}}{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱}{۱۲۸}(۲۵۵+۱۲۷\sqrt{۲})\end{aligned}$$

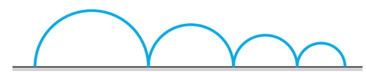
تست در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول ۱۵۳ می‌باشد. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$　　۲) ۸　　۳) ۹　　۴) ۱۶

حل ۱ ۲ ۳ ۴

$$۱۳۶ = S_۳ = a\frac{۱ - q^۳}{۱ - q}$$
$$۱۵۳ = S_۶ = a\frac{۱ - q^۶}{۱ - q} = a\frac{۱ - q^۳}{۱ - q}(۱ + q^۳) = S_۳(۱ + q^۳) = ۱۳۶(۱ + q^۳)$$
$$\Rightarrow ۱ + q^۳ = \frac{۱۵۳}{۱۳۶} \Rightarrow q^۳ = \frac{۱۷}{۱۳۶} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow q = \frac{۱}{۲}$$
$$\frac{a_۱}{a_۵} = \frac{a}{aq^۴} = (\frac{۱}{q})^۴ = ۲^۴ = ۱۶$$

مثال ۶ سنگی پس از برخورد با سطح آب بر روی نیم‌دایره‌هایی با قطر اولیه ۱ واحد به صورت شکل ۱ـ۱ حرکت می‌کند. هر بار که سنگ با سطح آب برخورد می‌کند ۲۰ درصد از طول قطر نیم‌دایره کم می‌شود. در برخورد دهم، مجموع مسافت‌های طی شده توسط این سنگ چقدر است؟



شکل ۱-۱

حل محیط نیم‌دایره‌ها تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{۴}{۵}$ می‌دهند.

$۱ =$ قطر نیم‌دایره‌ی اولی

$۰/۸ =$ قطر نیم‌دایره‌ی دومی

$۰/۶۴ =$ قطر نیم‌دایره‌ی سومی

$\vdots$

دنباله‌ی محیط نیم‌دایره‌ها : $\frac{\pi}{۲} \times ۱, \frac{\pi}{۲} \times ۰/۸, \frac{\pi}{۲} \times ۰/۶۴, \cdots, \frac{\pi}{۲} \times (۰/۸)^۹$

$$S_{۱۰} = \frac{\pi}{۲} \times \frac{۱ - (۰/۸)^{۱۰}}{۱ - ۰/۸} = ۵\frac{\pi}{۲}(۱ - (\frac{۴}{۵})^{۱۰})$$

مثال ۷ مجموع $۲n$ جمله اول دنباله‌ی $\left\{\frac{۲^{[\frac{n}{۲}]}}{۳^n}\right\}$ را بیابید.

حل جملات این دنباله به صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۹}, \frac{۲}{۲۷}, \frac{۴}{۸۱}, \frac{۴}{۲۴۳}, \frac{۸}{۷۲۹}, \cdots$$

جملات $a_۱$، $a_۳$، $a_۵$، …، $a_{۲n-۱}$ تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{۲}{۹}$ و جملات $a_۲$، $a_۴$، $a_۶$، …، $a_{۲n}$ نیز تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{۲}{۹}$ را می‌دهند پس:

$$S_{۲n} = (a_۱ + a_۳ + \cdots + a_{۲n-۱}) + (a_۲ + a_۴ + \cdots + a_{۲n})$$
$$= \frac{۱}{۳}\frac{۱ - (\frac{۲}{۹})^n}{۱ - \frac{۲}{۹}} + \frac{۲}{۹}\frac{۱ - (\frac{۲}{۹})^n}{۱ - \frac{۲}{۹}} = \frac{۵}{۷}(۱ - (\frac{۲}{۹})^n)$$

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

به تقسیم مقابل توجه کنید:

$$\begin{array}{l|l}
x^۴ + ۳x^۳ - ۵x + ۲ & x^۲ - ۴ \\ \cline{2-2}
x^۴ - ۴x^۲ & x^۲ + ۳x + ۴ \\ \cline{1-1}
۳x^۳ + ۴x^۲ - ۵x + ۲ & \\
۳x^۳ - ۱۲x & \\ \cline{1-1}
۴x^۲ + ۷x + ۲ & \\
۴x^۲ - ۱۶ & \\ \cline{1-1}
۷x + ۱۸ &
\end{array}$$

چندجمله‌ای $P(x) = x^{۴}+۳x^{۳}-۵x+۲$ را مقسوم، $Q(x) = x^{۲}-۴$ را مقسوم‌علیه، $h(x) = x^{۲}+۳x+۴$ را خارج‌قسمت و $R(x) = ۷x+۱۸$ را باقی‌مانده می‌نامیم.

به سادگی می‌توان بررسی کرد که بین این چندجمله‌ای‌ها رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$x^{۴}+۳x^{۳}-۵x+۲ = (x^{۲}-۴)(x^{۲}+۳x+۴)+(۷x+۱۸)$$

یعنی: $P(x) = Q(x).h(x)+R(x)$.

قضیه ۱ فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند. در این صورت چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $h(x)$ و $R(x)$ وجود دارند به طوری که درجه $R(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر باشد و رابطه زیر برقرار باشد:

$$P(x) = Q(x).h(x)+R(x)$$

$P(x)$ را مقسوم، $Q(x)$ را مقسوم‌علیه، $h(x)$ را خارج‌قسمت و $R(x)$ را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثال ۸ باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^{۲}-۵x+۴$ برابر $۳x+۲$ می‌باشد مقدار $P(۴)$ را بیابید.

حل قضیه‌ی تقسیم را می‌نویسیم. فرض کنید $h(x)$ خارج‌قسمت تقسیم باشد.

$$P(x) = (x^{۲}-۵x+۴)h(x)+۳x+۲$$

$$x = ۴ \Rightarrow P(۴) = ۰ \times h(۴)+(۳\times ۴+۲) \Rightarrow P(۴) = ۱۴$$

نکته ۴ اگر درجه مقسوم برابر m و درجه مقسوم‌علیه برابر n باشد آن‌گاه درجه خارج‌قسمت برابر $m-n$ و درجه باقی‌مانده حداکثر برابر $n-۱$ است.

فرض کنید $P(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم در این صورت باقی‌مانده یک عدد حقیقی خواهد بود. اگر باقی‌مانده را R بنامیم، طبق قضیه تقسیم داریم:

$$P(x) = (x-a)h(x)+R$$

حال در این تساوی اگر به جای x عدد a را قرار دهیم، داریم:

$$P(a) = (a-a)h(a)+R \Rightarrow P(a) = R$$

در واقع به قضیه زیر رسیدیم.

قضیه ۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $P(a)$.

به بیان دیگر برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ کافی است ریشه‌ی مقسوم‌علیه (یعنی $x-a=۰ \Rightarrow x=a$) را در مقسوم (یعنی در $P(x)$) جایگزین کنیم.

مثلاً برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^{۳}-۳x^{۲}+۲x+۱$ بر $x-۲$ کافی است $x=۲$ را جایگزین x کنیم:

$$R = P(۲) = ۲^{۳}-۳\times ۲^{۲}+۲\times ۲+۱ = ۸-۱۲+۴+۱ = ۱$$

مثال ۹ مقدار a را به گونه‌ای تعیین کنید که باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^{۳}-۷x^{۲}+ax+۵$ بر $x+۱$ برابر ۵ باشد.

حل $P(-۱) = ۵ \Rightarrow -۱-۷-a+۵ = ۵ \Rightarrow a = -۸$

نکته ۵ در حالت کلی باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $P(-\frac{b}{a})$.

مثال ۱۰

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-۱)(x+۲)$ برابر $۲x+۵$ است. مطلوب است باقی‌مانده تقسیم $P(۲x-۳)+۳P(-x)$ بر $x-۲$.

حل باقی‌مانده تقسیم $F(x)=P(۲x-۳)+۳P(-x)$ بر $x-۲$ همان $F(۲)$ است یعنی $R=F(۲)=P(۱)+۳P(-۲)$. از طرفی طبق قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$P(x)=(x-۱)(x+۲)h(x)+۲x+۵$$

$$\begin{cases} x=۱ & \Rightarrow\ P(۱)=۷ \\ x=-۲ & \Rightarrow\ P(-۲)=۱ \end{cases}$$

$$R=F(۲)=P(۱)+۳P(-۲)=۷+۳\times ۱=۱۰$$

مثال ۱۱

باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+۱$ و $x-۳$ به ترتیب برابر ۲ و ۵- است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^۲-۲x-۳$ را بیابید.

حل از فرض مسأله نتیجه می‌گیریم که $P(-۱)=۲$ و $P(۳)=-۵$ حال قضیه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x)=(x^۲-۲x-۳)h(x)+(ax+b)$$

$$\begin{cases} P(-۱)=۲ & \Rightarrow\ ۰\times h(-۱)-a+b=۲\ \Rightarrow\ -a+b=۲ \\ P(۳)=-۵ & \Rightarrow\ ۰\times h(۳)+۳a+b=-۵\ \Rightarrow\ ۳a+b=-۵ \end{cases}$$

از حل دو معادله $a=-\frac{۷}{۴}$ و $b=\frac{۱}{۴}$ به‌دست می‌آید یعنی باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^۲-۲x-۳$ برابر $-\frac{۷}{۴}x+\frac{۱}{۴}$ می‌باشد.

نکته ۶ اگر باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)$ برابر صفر باشد گوییم $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱۲

چندجمله‌ای درجه سومی را بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر هر یک از چندجمله‌ای‌های $x+۲$، $x+۱$ و $x-۳$ برابر ۲ باشد و در ضمن بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد.

حل طبق صورت سؤال داریم:

$$P(x)=(x+۲)h_۱(x)+۲\ \Rightarrow\ P(x)-۲=(x+۲)h_۱(x)$$

$$P(x)=(x+۱)h_۲(x)+۲\ \Rightarrow\ P(x)-۲=(x+۱)h_۲(x)$$

$$P(x)=(x-۳)h_۳(x)+۲\ \Rightarrow\ P(x)-۲=(x-۳)h_۳(x)$$

از روابط بالا نتیجه می‌گیریم $P(x)-۲$ بر $x+۲$، $x+۱$ و $x-۳$ بخش‌پذیر است، پس بر حاصل‌ضربشان نیز بخش‌پذیر است یعنی:

$$P(x)-۲=(x+۲)(x+۱)(x-۳)h(x)$$

از آن‌جایی که $P(x)$ درجه ۳ است لذا $h(x)$ یک عدد است مانند k، پس:

$$P(x)=(x+۲)(x+۱)(x-۳)k+۲$$

طبق فرض مسأله $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است پس $P(۱)=۰$ و از آن‌جا

$$P(۱)=۳\times ۲\times(-۲)k+۲=-۱۲k+۲=۰\ \Rightarrow\ k=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین چندجمله‌ای مورد نظر برابر است با:

$$P(x)=\frac{۱}{۶}(x+۲)(x+۱)(x-۳)+۲$$

تذکر

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $g_1(x)$، $g_2(x)$، ... و $g_n(x)$ برابر $R(x)$ باشد و همه‌ی g_iها دوبه‌دو نسبت به هم اول باشند آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $g_1(x) \times g_2(x) \times \cdots \times g_n(x)$ نیز برابر $R(x)$ است.

نکته ۷ برای یافتن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^n - a$ ابتدا $P(x)$ را بر حسب $y = x^n$ مرتب می‌کنیم و سپس در عبارت $P(x)$ به جای y عدد a را جایگزین می‌کنیم یعنی $P(y = a)$ را می‌یابیم.

مثال ۱۳ باقی‌مانده تقسیم $x^7 - 3x^6 + 5x^3 + x^2 - 7x - 3$ را بر $x^2 + 1$ به‌دست آورید.

حل

$$x^2 = y \;\Rightarrow P(x) = (x^2)^3 x - 3(x^2)^3 + 5x^2 x + x^2 - 7x - 3$$

$$P(x) = y^3 x - 3y^3 + 5yx + y - 7x - 3$$

حال می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم بر $y + 1$ را بیابیم. به جای y عدد -1 را جایگزین می‌کنیم

$$y = -1 \Rightarrow R(x) = (-1)^3 x - 3(-1)^3 + 5(-1)x + (-1) - 7x - 3 = 13x - 1$$

مثال ۱۴ مقادیر a و b را به گونه‌ای تعیین کنید که $x^5 + 3x^4 + ax^3 + bx^2 + x - 2$ بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر باشد.

حل عبارت را بر حسب x^2 مرتب می‌کنیم و سپس به جای x^2 عدد یک را جایگزین می‌کنیم

$$(x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 1)$$

$$P(x) = (x^2)^2 x + 3(x^2)^2 + ax^2.x + bx^2 + x - 2$$

$$P(x) = (1)^2 x + 3(1)^2 + a(1).x + b \times 1 + x - 2 = (a + 2)x + b + 1$$

چون باقی‌مانده باید صفر شود پس هم $a + 2 = 0$ و هم $b + 1 = 0$ یعنی $a = -2$ و $b = -1$.

مثال ۱۵ باقی‌مانده تقسیم x^{1390} را بر $x^2 + x + 1$ بیابید.

حل قضیه تقسیم را می‌نویسیم. ما به دنبال $R(x)$ هستیم:

$$x^{1390} = (x^2 + x + 1)h(x) + R(x)$$

$$x^{1390}(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)h(x) + (x - 1)R(x)$$

$$x^{1391} - x^{1390} = (x^3 - 1)h(x) + (x - 1)R(x)$$

$(x - 1)R(x)$ باقی‌مانده تقسیم $x^{1391} - x^{1390}$ بر $x^3 - 1$ است. برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $x^{1391} - x^{1390}$ کافی است به جای x^3 عدد ۱ را جایگزین کنیم $(x^3 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 1)$

$$x^{1391} - x^{1390} = (x^3)^{463} \times x^2 - (x^3)^{463} \times x$$

$$\text{باقی‌مانده} = (x - 1)R(x) = (1)^{463} \times x^2 - (1)^{463} \times x = x^2 - x = x(x - 1)$$

$$\Rightarrow\; R(x) = x$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم x^{1390} بر $x^2 + x + 1$ برابر x است.

تذکر

چندجمله‌ای $P(x) = x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است زیرا $R = P(a) = a^n - a^n = 0$ در حالت کلی می‌توان قضیه زیر را بیان کرد: