جلسه دوم ۲

دامنه و برد تابع

مفهوم دامنه و برد تابع

دامنه‌ی تابع (حوزه‌ی تعریف): مجموعه‌ی مقادیری است که اگر به جای x قرار دهیم برای y عددی حقیقی به‌دست می‌آید، یعنی y نامعین نمی‌شود. دامنه‌ی تابع f را با نماد D_f نمایش می‌دهیم. به بیان دیگر دامنه‌ی تابع، مجموعه‌ی مقادیری است که متغیر مستقل می‌تواند داشته باشد.

برد تابع (حوزه‌ی مقادیر): مجموعه‌ی مقادیری است که به ازای xهای دامنه برای y به‌دست می‌آید. در تابع f برد را با نماد R_f نمایش می‌دهیم. به بیان دیگر برد یک تابع، مجموعه مقادیری است که یک متغیر وابسته می‌تواند داشته باشد.

تذکر: اگر تابع به صورت زوج‌های مرتب نمایش داده شود، مجموعه‌ی همه عضوهای اول را دامنه و مجموعه‌ی همه‌ی عضوهای دوم را برد تابع می‌گوییم.

مثال ۱۱: دامنه و برد تابع مقابل چیست؟

$f=\{(-۳,۶),(۷,۸),(۹,۱۰),(۱,\sqrt{۲})\}$

پاسخ:

دامنه $D_f=\{-۳,۷,۹,۱\}$

برد $R_f=\{۶,۸,۱۰,\sqrt{۲}\}$

مثال ۱۲: برد تابع $f(x)=x^۲+۳$ با دامنه‌ی $\{۱,۲,۳\}$ کدام است؟

۱) $\{۴,۵,۶\}$ ۲) $\{۴,۷,۱۲\}$ ۳) $\{۲,۵,۸\}$ ۴) $\{۲,۹,۱۲\}$

پاسخ: می‌دانیم منظور از دامنه، همان متغیر مستقل (x) و منظور از بُرد همان متغیر وابسته (y) است. (در ضمن $f(x)$ همان y است.) لذا خواهیم داشت:

$y=x^۲+۳$ و دامنه $=\{۱,۲,۳\}$

$$\left.\begin{array}{l}x=۱\Rightarrow y=۱^۲+۳=۴\\ x=۲\Rightarrow y=۲^۲+۳=۷\\ x=۳\Rightarrow y=۳^۲+۳=۱۲\end{array}\right\}\Rightarrow \text{برد}=\{۴,۷,۱۲\}\Rightarrow$$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۱۳: اگر حوزه‌ی مقادیر تابع $f(x)=x^۲+۴$ برابر $\{۱۳,۵\}$ باشد، حوزه‌ی تعریف این تابع کدام است؟

۱) $\{۱,۴\}$ ۲) $\{\pm۱,\pm۵\}$ ۳) $\{۲,۴\}$ ۴) $\{\pm۱,\pm۳\}$

پاسخ: منظور از حوزه‌ی مقادیر همان برد یا y می‌باشد.

$y=x^۲+۴$ و برد $=\{۱۳,۵\}$

این بار برعکس سؤال قبلی، yها داده شده و باید xها را به‌دست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}y=۱۳\Rightarrow ۱۳=x^۲+۴\Rightarrow x^۲=۱۳-۴=۹\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm۳\\ y=۵\Rightarrow ۵=x^۲+۴\Rightarrow x^۲=۵-۴=۱\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm۱\end{array}\right\}\Rightarrow \text{دامنه}=\{\pm۱,\pm۳\}\Rightarrow$$ گزینه‌ی (۴) صحیح است.

تعیین دامنه‌ی برخی توابع خاص

تعیین دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای‌ها: دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای که به شکل $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}\cdots+L$ می‌باشند، برابر $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) می‌باشد. یعنی به x هر عدد حقیقی دلخواهی که بدهیم، برای y یا همان $f(x)$ حتماً مقداری مشخص به‌دست می‌آید.

استاد! راستش من نفهمیدم به چه عبارت‌هایی چندجمله‌ای می‌گیم!

جواب: ببین عزیزم اگه در یک عبارت x تو مخرج نباشه و توانش هم عدد حسابی باشه $(۰,۱,۲,...)$، چندجمله‌ای داریم، مثل $y=\sqrt{۵}x^۳-۷x^۲+۶x$ و یا $y=\frac{x^۲-۳x}{۷}$. همون طور که می‌بینی x زیر رادیکال نیست و در مخرج هم نیست پس این دو عبارت چندجمله‌ای هستن و دامنه‌ی اونها برابر با $\mathbb{R}$ هست. یعنی شما به x هر عددی از $\mathbb{R}$ بدی برای y حتماً یک جواب پیدا می‌شه.

تعیین دامنه‌ی توابع کسری: در توابع کسری به شکل $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ که $g(x)$ و $h(x)$ چندجمله‌ای می‌باشند، برای به‌دست آوردن دامنه، مخـرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه یا ریشه‌های آن پیدا شود. سپس دامنه‌ی تابع از رابطه‌ی مقابل تعیین می‌شود: **$D_f=\mathbb{R}-\{$ریشه(های) مخرج$\}$**

زیرا می‌دانیم اگر مخرج کسری صفر شود، آن کسر تعریف نشده است. به عبارت دیگر x هر عددی از $\mathbb{R}$ می‌تواند باشد به‌جز ریشه‌های مخرج.

مثال ۱۴: دامنه‌ی (حوزه‌ی تعریف) توابع زیر را به‌دست آورید:

آ) $f(x)=\frac{۳x-۴}{۵x-۲}$ ب) $g(x)=\frac{۳x^۲-۱}{x^۲+۸x}$ پ) $h(x)=\frac{x+۷}{x^۲-۱۶}$ ت) $k(x)=\frac{۷x}{x^۲+۱۰۰}$ ث) $p(x)=\frac{x^۲-۱}{|x|-۵}$

پاسخ:

آ) $\text{مخرج}=۰\Rightarrow ۵x-۲=۰\Rightarrow ۵x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۵}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\frac{۲}{۵}\}$

ب) $\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۲+۸x=۰\xrightarrow{\text{فاکتور از } x}x(x+۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x+۸=۰\Rightarrow x=-۸\end{cases}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰,-۸\}$

پ) $\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۲-۱۶=۰\Rightarrow x^۲=۱۶\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm\sqrt{۱۶}=\pm۴\Rightarrow D_h=\mathbb{R}-\{\pm۴\}$

ت) $\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۲+۱۰۰=۰\Rightarrow x^۲=-۱۰۰$ این معادله جواب ندارد. $\Rightarrow D_k=\mathbb{R}$

استادا پس چرا از -۱۰۰ جذر نگرفتید؟

جواب: فکر کنم یادت رفته در سال اول خوندی که از اعداد منفی نمیشه جذر گرفت. یادت اُومد؟ حالا چرا این‌جوری منو نیگا میکنی؟ نکنه بازم سؤال داری!

استادا مگه دامنه‌ی کسرها $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ نمی‌شد؟ پس چرا این‌جا فقط $\mathbb{R}$ شد؟

جواب: خوب وقتی $x^۲=-۱۰۰$ جواب نداره، پس ریشه‌ای برای مخرج پیدا نمی‌شه دیگه و همون‌طور که می‌دونی $\mathbb{R}-\{\ \}$ جوابش همون $\mathbb{R}$ می‌شه.

ث) **نکته:** اگر k عددی نامنفی (مثبت یا صفر) باشد آن‌گاه: اگر $|x|=k\Rightarrow x=\pm k$

چون در این سؤال x داخل قدرمطلق قرار دارد باید از نکته‌ی بالا استفاده کنیم:

$\text{مخرج}=۰\Rightarrow |x|-۵=۰\Rightarrow |x|=۵\xrightarrow{\text{طبق نکته}}x=\pm۵\Rightarrow D_p=\mathbb{R}-\{-۵,+۵\}$

استادا با عرض معذرت اگه در نکته‌ی بالا k عددی منفی باشه چی؟

جواب: اون‌وقت معادله جواب نداره، چون جواب قدرمطلق، هیچ وقت نمی‌تونه منفی باشه. مثل معادله‌ی $|x|=-۵$ که جواب نداره.

مثال ۱۵: عبارت $\frac{۱-x}{۴x+x^۳}$ به‌ازای چه مقداری از x تعریف نشده است؟

۱) -۲ ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) صفر

پاسخ: کافی است مخرج را مساوی صفر قرار دهیم تا عددی که کسر را تعریف نشده می‌سازد به‌دست آوریم:

$۴x+x^۳=۰\xrightarrow{\text{فاکتور از } x}x(۴+x^۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\۴+x^۲=۰\Rightarrow x^۲=-۴\ \ (\text{جواب ندارد})\end{cases}$

پس به‌ازای $x=۰$ مخرج کسر صفر شده و کسر تعریف نشده خواهد بود. لذا گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۱۶: دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{۱-x}{x^۲-۲x+۱}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۲\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱,۲\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۲,۳\}$

پاسخ:

$\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\ \ ,\ \ \Delta=b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(۱)=۴-۴=۰$

چون $\Delta=۰$ می‌باشد، لذا معادله ریشه‌ی مضاعف دارد که از رابطه $x=\frac{-b}{۲a}$ به‌دست می‌آید:

$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۲)}{۲(۱)}=\frac{۲}{۲}=۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۱۷: اگر دامنه‌ی تابع $y=\frac{۴x+۱}{kx^۲+۲x-۳}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، محدوده‌ی تغییرات k چیست؟

۱) $k>\frac{-۱}{۳}$ ۲) $k<-\frac{۱}{۳}$ ۳) $k\geq\frac{-۱}{۳}$ ۴) $k\leq-\frac{۱}{۳}$

پاسخ: دامنه‌ی کسر مورد نظر برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس نتیجه می‌گیریم که مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد. چون اگر ریشه داشته باشد، دامنه $\mathbb{R}$ نمی‌شود. از طرفی می‌دانیم معادله‌ی درجه‌ی ۲ وقتی جواب ندارد که دلتای آن منفی باشد، پس خواهیم نوشت:

$$y=\frac{۴x+۱}{kx^۲+۲x-۳}$$

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow kx^۲+۲x-۳=۰$$

$\Delta<۰\Rightarrow b^۲-۴ac<۰\Rightarrow ۲^۲-۴(k)(-۳)<۰\Rightarrow ۴+۱۲k<۰\Rightarrow ۱۲k<-۴\Rightarrow k<-\frac{۴}{۱۲}\Rightarrow k<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۱۸: اگر دامنه‌ی تابع $y=\frac{۵x}{x^۲+۲x+m}$ فقط شامل دو عدد حقیقی متمایز نباشد، حدود m چیست؟

۱) $m<۱$ ۲) $m>۱$ ۳) $m<۲$ ۴) $m>۲$

پاسخ: دامنه‌ی تابع فقط شامل ۲ عدد حقیقی متمایز نیست، پس نتیجه می‌گیریم که مخرج کسر حتماً ۲ ریشه‌ی متمایز داشته که از $\mathbb{R}$ حذف شده است. از طرفی می‌دانیم معادله‌ی درجه‌ی ۲ وقتی دارای دو ریشه‌ی متمایز است که دلتای آن مثبت باشد:

$$x^۲+۲x+m=۰$$

$\Delta>۰\Rightarrow b^۲-۴ac>۰\Rightarrow ۲^۲-۴(۱)(m)>۰\Rightarrow ۴-۴m>۰\Rightarrow -۴m>-۴\Rightarrow m<۱\Rightarrow$ گزینه‌ی (۱) صحیح است.

نکته: اگر یک تابع به شکل $y=\dfrac{\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{h(x)}{k(x)}}$ باشد که f، g، h و k چندجمله‌ای هستند، برای محاسبه‌ی دامنه، معادلات $g(x)=۰$، $k(x)=۰$ و $h(x)=۰$ را حل کرده و ریشه‌های آن‌ها را از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم. چون $g(x)$ و $k(x)$ در مخرج کسرهای بالا و پایین هستند و از طرف پس از انجام دور در دور، نزدیک در نزدیک تابع به $y=\frac{f(x)k(x)}{g(x)h(x)}$ تبدیل می‌شود. همان‌طور که مشهود است، $h(x)$ هم به مخرج می‌آید. پس تمامی عبارت‌های $g(x)$، $k(x)$ و $h(x)$ چون به نوعی در مخرج قرار دارند، باید آن‌ها را مساوی صفر قرار دهیم و جواب‌شان را از $\mathbb{R}$ حذف کنیم.

مثال ۱۹: دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{\frac{x-۱}{x-۲}}{\frac{x-۳}{x-۴}}$ را تعیین کنید.

پاسخ: ابتدا مخرج کسرهای $\frac{x-۱}{x-۲}$ و $\frac{x-۳}{x-۴}$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم یعنی:

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\quad,\quad x-۴=۰\Rightarrow x=۴$$

حالا دور در دور نزدیک در نزدیک می‌کنیم تابع به شکل $y=\frac{(x-۱)(x-۴)}{(x-۲)(x-۳)}$ تبدیل می‌شود. در مخرج این کسر $(x-۳)$ هم وجود دارد، پس:

$$x-۳=۰\Rightarrow x=۳$$

پس باید اعداد ۲ ، ۳ و ۴ را از $\mathbb{R}$ حذف کنیم:

$$D_y=\mathbb{R}-\{۲,۳,۴\}$$

تعیین دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد: اگر فرجه‌ی رادیکال فرد باشد، در محاسبه‌ی دامنه، می‌توانیم از رادیکال صرف‌نظر کنیم. یعنی فقط کافیست دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال را تعیین کنیم.

مثال ۲۰: دامنه‌ی توابع زیر را تعیین کنید:

آ) $y=\sqrt[3]{5x^2-6x+7}$ ب) $y=\sqrt[7]{\dfrac{3x-1}{x^2-x-2}}$ پ) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

پاسخ: آ) چون فرجه‌ی رادیکال فرد است، رادیکال را حذف می‌کنیم. عبارت $(5x^2-6x+7)$ باقی می‌ماند و چون این عبارت، چندجمله‌ای می‌باشد لذا دامنه‌ی تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

ب) با حذف رادیکال، عبارت $\dfrac{3x-1}{x^2-x-2}$ باقی می‌ماند و چون در مخرج x وجود دارد، دیگر با یک چندجمله‌ای مواجه نیستیم. لذا مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\text{مخرج}=0\Rightarrow x^2-x-2=0\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}(x-2)(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x-2=0\Rightarrow x=2\\x+1=0\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

لذا دامنه به صورت $D_y=\mathbb{R}-\{-1,2\}$ می‌باشد.

استاد! با عرض شرمندگی فراوان! من روش تجزیه رو یادم رفته. میشه یه توضیح بدین؟

جواب: ببین مثلاً در معادله‌ی $x^2-1x-2=0$ دنبال دو تا عدد می‌گردیم که ضربشون بشه ۲ و جمعشون بشه ۱. خـوب چـه اعدادی ضربشـون ۲ میشه معلومه دیگه ۲ و ۱. حالا عدد بزرگ‌تر که ۲ باشه رو تو پرانتز اول می‌ذاریم و عدد کوچک‌تر تو پرانتز دوم قرار می‌گیره. علامت‌های اون‌ها هم به صورت زیر تعیین میشه:

منفی در منفی می‌شود مثبت

$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$

پ) با حذف رادیکال، کسر $\dfrac{1+x}{x^2-9}$ باقی می‌ماند. حال برای یافتن دامنه‌ی این کسر، مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\text{مخرج}=0\Rightarrow x^2-9=0\Rightarrow x^2=9\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm3$$

لذا دامنه به صورت $D_y=\mathbb{R}-\{-3,+3\}$ خواهد بود.

مثال ۲۱: دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[5]{x^2+1}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\pm1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-1\}$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ:

چون فرجه‌ها فرد هستند از رادیکال‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. لذا تابع به شکل $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ تبدیل می‌شود که مانند یک کسر با آن برخورد می‌کنیم:

$\text{مخرج}=0\Rightarrow x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow$ چون اعداد منفی جذر ندارند این معادله جواب ندارد.

لذا دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد، چون مخرج کسر، هیچ جوابی ندارد. پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

تعیین دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج: برای تعین دامنه‌ی توابع به شکل $y=\sqrt[\text{زوج}]{f(x)}$ کافی است نامعادله‌ی $f(x)\geq 0$ را حل کنیم. چون همان‌طور که می‌دانید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج نمی‌تواند منفی باشد($f(x)$ یک چندجمله‌ای می‌باشد).

مثال ۲۲: دامنه‌ی توابع زیر را تعیین کنید:

آ) $y=\sqrt{3x-5}$ ب) $y=\sqrt[4]{(x-1)^2-x^2+3x}$

پاسخ: آ) چون فرجه‌ی رادیکال زوج است (عدد ۲)، زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$3x-5\geq 0\Rightarrow 3x\geq 5\Rightarrow x\geq\frac{5}{3}$$

ب) برای محاسبه‌ی $(x-1)^2$ از اتحاد $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ استفاده کرده و خواهیم داشت:

$$(x-1)^2-x^2+3x\geq 0\Rightarrow \cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}+3x\geq 0\Rightarrow x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1$$

تذکر: اگر رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر باشد، عبارت زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم. به‌عنوان مثال دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{۸x+۲}{\sqrt{۴-۲x}}$ به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$۴-۲x>۰ \Rightarrow -۲x>-۴ \xrightarrow{\text{طرفین} \div (-۲)} x<۲$$

استاد! چرا جهت > به جهت < تبدیل شد؟

جواب: چون عدد پشت x منفی بود دیگه. نامعادله رو شما سال اول خوندین. حتماً یه نگاهی به جزوت بنداز چون بازم با نامعادله‌ها کار داریم.

> **نکته‌ی تستی:** اگر رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج باشد و با یک عدد جمع یا تفریق شود، برای یافتن دامنه، ابتدا زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم، سپس گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که عدد داخل { } آن، مخرج را صفر کند.

مثال ۲۳: دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{۸x}{\sqrt{x-۵}-۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۴\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $\{x\ge ۵\}-\{۹\}$ ۴) $\{x\ge ۵\}-\{۶\}$

پاسخ: همان طور که ملاحظه می‌کنید، یک رادیکال در مخرج وجود دارد که در کنار آن عدد ۲− وجود دارد. لذا طبق نکته‌ی گفته شده ابتدا عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم: $x-۵\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۵$

لذا یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) درست می‌باشند. حالا اعداد ۹ و ۶ را که در گزینه‌ها داخل آکولاد هستند، به جای x مخرج می‌گذاریم. اگر مخرج صفر شد، جواب همان گزینه است:

$$x=۹ \text{ اگر} \Rightarrow \text{مخرج}=\sqrt{x-۵}-۲=\sqrt{۹-۵}-۲=\sqrt{۴}-۲=۲-۲=۰$$

$$x=۶ \text{ اگر} \Rightarrow \text{مخرج}=\sqrt{x-۵}-۲=\sqrt{۶-۵}-۲=\sqrt{۱}-۲=۱-۲=-۱$$

چون $x=۹$ مخرج را صفر می‌کند، پس گزینه‌ی (۳) صحیح می‌باشد.

> **نکته‌ی تستی:** اگر در یک کسر، رادیکال با فرجه‌ی زوج فقط در صورت باشد، ابتدا زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار داده تا دامنه‌ی صورت پیدا شود، سپس مخرج را مساوی صفر قرار داده تا ریشه یا ریشه‌های آن به‌دست آید و در نهایت این ریشه‌ها را از دامنه‌ی صورت حذف می‌کنیم.

مثال ۲۴: دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{\sqrt{x-۱}}{x-۳}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۳\}$ ۲) $x\ge ۱$ ۳) $\{x\ge ۳\}-\{۱\}$ ۴) $\{x\ge ۱\}-\{۳\}$

پاسخ: چون رادیکال با فرجه‌ی زوج در صورت قرار دارد، زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\text{دامنه‌ی صورت} \quad x-۱\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۱$$

حال مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌ی آن را از دامنه‌ی صورت کنار می‌گذاریم:

$$\text{ریشه مخرج} \quad \text{مخرج}=۰ \Rightarrow x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$$

$$\text{دامنه‌ی تابع}=\{\text{دامنه‌ی صورت}\}-\{\text{ریشه‌ی مخرج}\} \Rightarrow \text{دامنه‌ی تابع}=\{x\ge ۱\}-\{۳\}$$

یعنی x هر عدد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱ می‌تواند باشد به‌جز ۳ . لذا گزینه‌ی (۴) صحیح است.

> **نکته تستی:** اگر هم در صورت و هم در مخرج کسر، رادیکال با فرجه‌ی زوج باشد، یعنی تابع به شکل $y=\dfrac{\sqrt[\text{زوج}]{f(x)}}{\sqrt[\text{زوج}]{g(x)}}$ باشد (f و g چندجمله‌ای هستند)، نامعادلات $f(x)\ge ۰$ و $g(x)>۰$ را حل کرده سپس از جواب آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

مثال ۲۵: دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{\sqrt[۴]{x-۳}}{\sqrt[۸]{x-۲}}$ کدام است؟

۱) $x\ge ۲$ ۲) $x\ge ۳$ ۳) $x>۲$ ۴) $x>۳$

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} \text{صورت} \ge ۰ \Rightarrow x-۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۳ \\ \text{مخرج} >۰ \Rightarrow x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\ge ۳ \text{ دامنه‌ی تابع} \Rightarrow$$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۲۶: دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{\sqrt{۴-x}}{\sqrt{۹+x}}$ شامل کدام عدد زیر <u>نمی‌باشد</u>؟

۱) -۸ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) -۹

پاسخ:

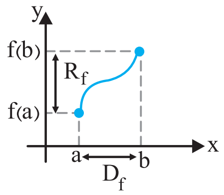
$$\left\{\begin{array}{l} \text{صورت} \ge ۰ \Rightarrow ۴-x\ge ۰ \Rightarrow -x\ge -۴ \xrightarrow{\text{طرفین} \times (-۱)} x\le ۴ \\ \text{مخرج} >۰ \Rightarrow ۹+x>۰ \Rightarrow x>-۹ \end{array}\right. \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۹<x\le ۴ \Rightarrow$$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

تعیین دامنه و برد یک تابع از روی نمودار آن

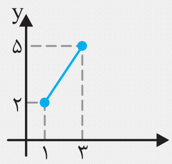
همان طور که قبلاً هم گفته شد مجموعه‌ی تمام مقدارهایی که x می‌تواند داشته باشد، دامنه و مجموعه‌ی تمام مقادیری که y می‌تواند داشته باشد، برد تابع می‌باشد.

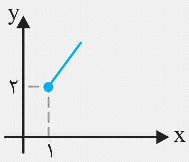
به نمودار زیر دقت کنید. طبق شکل، x بین دو عدد a و b تغییر می‌کند و y بین دو عدد f(a) و f(b) لذا خواهیم داشت:

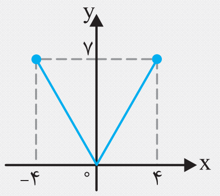


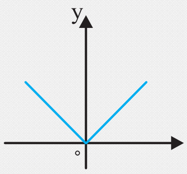
$$\begin{cases} \text{دامنه} : D_f : a \le x \le b \\ \text{برد} : R_f : f(a) \le y \le f(b) \end{cases}$$

مثال ۲۷: دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید:

آ) 

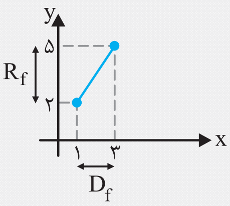
ب) 

پ) 

ت) 

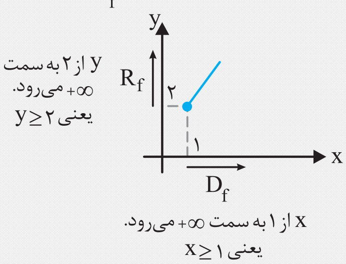
پاسخ :

آ) از روی نمودار مشاهده می‌کنید که x از ۱ تا ۳ و y از ۲ تا ۵ تغییر می‌کند.

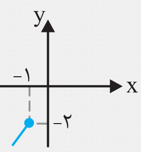


$$\text{دامنه} : D_f = \{۱ \le x \le ۳\} \qquad \text{بُرد} : R_f = \{۲ \le y \le ۵\}$$

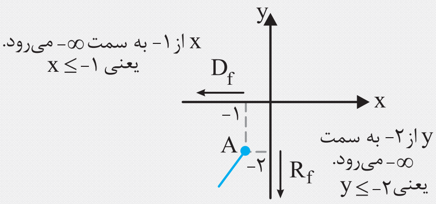
ب) با توجه به شکل x از ۱ شروع شده تا $+\infty$ ادامه دارد. یعنی تمام x های بزرگ‌تر یا مساوی ۱ جزء دامنه هستند. همچنین y هم از ۲ شروع شده و تا $+\infty$ ادامه دارد. یعنی تمام y های بزرگ‌تر یا مساوی ۲ جزء برد هستند.

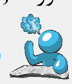


$$D_f = \{x \ge ۱\} \quad , \quad R_f = \{y \ge ۲\}$$

استاد! اگه شکل به صورت  باشه دامنه و بردش چی میشه؟

جواب: خوب تو شکلی که کشیدی x از -۱ شروع و به سمت چپ حرکت می‌کنه (به سمت $-\infty$ می‌ره)، پس دامنه به صورت $D_f = \{x \le -۱\}$ است. همچنین y از -۲ شروع و به سمت پایین حرکت می‌کنه (به سمت $-\infty$ می‌ره)، پس برد هم به صورت $R_f = \{y \le -۲\}$ خواهد بود.



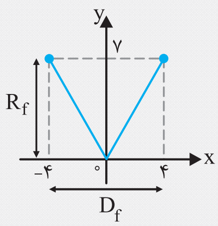


استاد! عذر می‌خوام اگه به جای نقطه‌ی توپر، نقطه‌ی توخالی داشتیم چی؟

جواب: مثلاً در همین شکل اگه نقطه‌ی A توخالی باشه علامت مساوی رو از دامنه و برد برمی‌داریم. یعنی: $D_f = \{x < -۱\}$, $R_f = \{y < -۲\}$

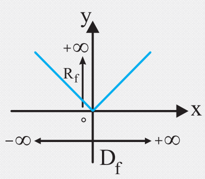
چون می‌دونی که نقطه‌ی توخالی جزء نمودار نیست.

پ) از روی شکل می‌بینید که نمودار از چپ و راست و بالا و پایین محدود شده، یعنی x از -۴ تا $+۴$ تغییر می‌کند و y از ۰ تا ۷، لذا این طور می‌نویسیم که:



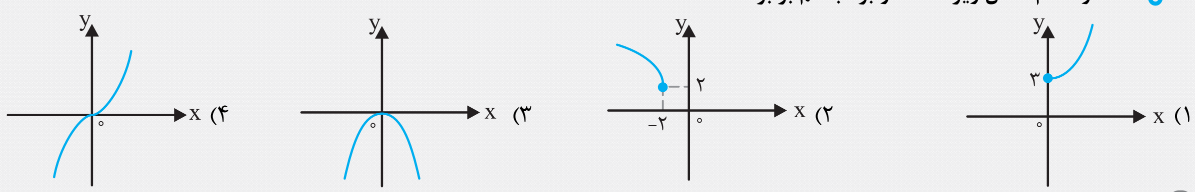
$$\text{دامنه} : D_f = \{-۴ \le x \le ۴\} \quad , \quad \text{برد} : R_f = \{۰ \le y \le ۷\}$$

ت) طبق شکل ملاحظه می‌کنید که x از چپ و راست نامحدود است، یعنی نمودار از $-\infty$ در چپ تا $+\infty$ در راست ادامه دارد. لذا دامنه تابع کل اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) می‌باشد $D_f = \mathbb{R}$. همچنین y از ۰ شروع شده تا $+\infty$ بالا می‌رود. لذا برد تابع به صورت $R_f = \{y \ge ۰\}$ خواهد بود. (دو شاخه‌ی نمودار به سمت بالا حرکت می‌کنند یعنی تا $+\infty$ ادامه دارند.)



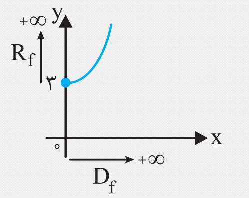
$$D_f = \mathbb{R} = \{-\infty < x < +\infty\} \quad , \quad R_f = \{y \ge ۰\}$$

مثال ۲۸: در کدام شکل زیر، دامنه و برد با هم برابرند؟



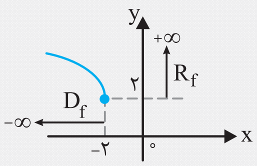
پاسخ :

در شکل گزینه‌ی (۱) می‌بینیدکه نمودار از راست و بالا نامحدود است، یعنی به سمت $+\infty$ می‌رود. لذا:



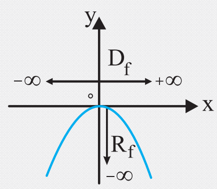
$$D_f = \{x \geq ۰\} \text{ و } R_f = \{y \geq ۳\}$$

در گزینه‌ی (۲) نمودار از چپ و بالا نامحدود است، یعنی از چپ به سمت $-\infty$ و از بالا به سمت $+\infty$ می‌رود. لذا:



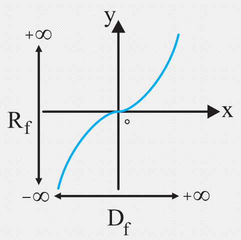
$$D_f = \{x \leq -۲\} \text{ و } R_f = \{y \geq ۲\}$$

به همین ترتیب در گزینه‌ی (۳) خواهیم داشت:



$$D_f = \{-\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$
$$R_f = \{y \leq ۰\}$$

در نمودار گزینه‌ی (۴) هر دوی x و y نامحدود هستند هم از چپ و راست و هم از بالا و پایین:



$$D_f = \{-\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$
$$R_f = \{-\infty < y < +\infty\} = \mathbb{R}$$

می‌بینید که دامنه و برد با هم مساوی شده‌اند. لذا گزینه‌ی (۴) صحیح است.

پرسش‌های جلسه دوم

۹ دامنه و برد توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $f = \{(-۱,۶),(۲,۹),(۳,۵),(۰,۰)\}$

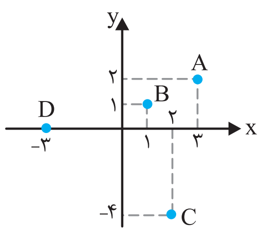
ب)

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱۲	۶	۴	۳	۲/۴	۲

۱۰ با توجه به نمودار مقابل:

آ) مجموعه‌ی زوج‌مرتب‌های مربوط به شکل مقابل را بنویسید.

ب) دامنه و برد مربوط به این تابع را مشخص کنید.



۱۱ در جاهای خالی عبارات مناسب بگذارید.

آ) به کمیتی که تغییر می‌کند، .... گفته می‌شود.

ب) .... مجموعه مقادیری است که یک متغیر مستقل می‌تواند داشته باشد.

پ) .... مجموعه مقادیری است که یک متغیر وابسته می‌تواند داشته باشد.

۱۲ دامنه‌ی تعریف توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $y=۳x^۲+۴x-۲$ (نهایی- خرداد ۹۳ و مشابه خرداد ۹۲ و شهریور ۹۱ و ۹۰)

ب) $y=\frac{۵}{۷x-۶}$ (نهایی- خرداد ۹۳ و مشابه خرداد۹۲ و شهریور ۹۱ و ۹۰)

پ) $y=\frac{۵x}{۱۴-۷x}$ ت) $y=\frac{-۶}{(x-۱)(۳-x)}$ ث) $g(x)=\frac{۳x}{|x|-۲}$

ج) $h(x)=\frac{۱۰x}{|x|+۵}$ چ) $p(x)=\frac{x+۵}{(x+۱)(x-۱)}$ ح) $f(x)=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۵}{x-۲}$

خ) $k(x)=\frac{۱۲}{|x|+۲}-\frac{۱۳x}{|x|-۴}$ د) $y=\dfrac{۱-\frac{۱}{x}}{\frac{x-۳}{x-۴}}$

۱۳ دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $y=\sqrt{۲x+۱۶}$ (نهایی- خرداد ۹۳ و مشابه خرداد ۹۲ و شهریور ۹۱ و ۹۰) ب) $y=\sqrt{۷-۲x}$

پ) $f(x)=\sqrt[۳]{۵x^۲-۱}$ ت) $f(x)=\sqrt[۴]{۲-۵x}$ ث) $h(x)=\sqrt[۳]{\frac{۲x+۳}{۵x-۱}}$

ج) $f(x)=\sqrt[۴]{(x-۱)^۲-x^۲}$ چ) $f(x)=\frac{x^۳+۱}{\sqrt{۵x+۱۰}}$ ح) $g(x)=\sqrt{۲-|x|}$

خ) $y=\frac{\sqrt[۴]{۲x+۸}}{\sqrt[۶]{-۵x-۱۰}}$ د) $g(x)=\sqrt[۵]{\frac{۲x-۱}{(x^۲+۱)(x^۲-۱)}}$ ذ) $y=\frac{|۵x-۱|}{\sqrt[۷]{x-۲}}$

پاسخ پرسش‌های جلســه‌دوم

۹

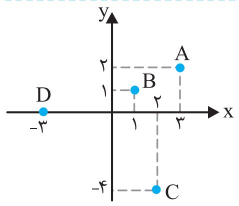
آ) $\begin{cases} D_f=\{-۱,۲,۳,۰\} \\ R_f=\{۶,۹,۵,۰\} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} D_y=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \\ R_y=\{۱۲,۶,۴,۳,۲/۴,۲\} \end{cases}$

۱۰

آ) اگر مجموعه‌ی زوج‌مرتب‌های مربوط به نمودار را با f نمایش دهیم آن‌گاه داریم:

$$f=\{\underbrace{(۳,۲)}_{A},\underbrace{(۱,۱)}_{B},\underbrace{(۲,-۴)}_{C},\underbrace{(-۳,۰)}_{D}\}$$



ب) چون تمام عضوهای اول زوج‌مرتب‌ها با هم متفاوت هستند، پس مجموعه‌ی f نمایشگر یک تابع است و دامنه و برد f برابر است با:

$D_f=\{۳,۱,۲,-۳\}$, $R_f=\{۲,۱,-۴,۰\}$

۱۱

آ) به کمیتی که تغییر می‌کند **متغیر** می‌گوییم. مانند دستمزد یک کارگر که با توجه به تعداد ساعات کارکرد او، تغییر می‌کند.

ب) **دامنه‌ی تابع،** مجموعه مقادیری است که یک متغیر مستقل می‌تواند اختیار کند تا برای متغیر وابسته مقدارهایی معین به‌دست آید.

پ) **برد تابع،** مجموعه مقادیری است که یک متغیر وابسته می‌تواند اختیار کند.

۱۲

آ) تابع $y=۳x^۲+۴x-۲$ چندجمله‌ای می‌باشد، (x در مخرج نیست زیر رادیکال هم نیست) لذا دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است $(D_y=\mathbb{R})$

ب) می‌دانیم دامنه‌ی توابع کسری برابر است با مجموعه‌ی اعداد حقیقی به جز ریشه(ها)ی مخرج کسر. پس داریم:

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow ۷x-۶=۰\Rightarrow ۷x=۶\Rightarrow x=\frac{۶}{۷}\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{\frac{۶}{۷}\}$$

پ) $$y=\frac{۵x}{۱۴-۷x}\Rightarrow ۱۴-۷x=۰\Rightarrow -۷x=-۱۴\xrightarrow{\text{طرفین}\div(-۷)} x=۲\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{۲\}$$

ت) $$(x-۱)(۳-x)=۰\Rightarrow\begin{cases} x-۱=۰ \\ ۳-x=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=۱ \\ x=۳ \end{cases}\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{۱,۳\}$$

ث) $$\text{مخرج}=۰\Rightarrow |x|-۲=۰\Rightarrow |x|=۲\Rightarrow x=\pm۲\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm۲\}$$

ج) $$\text{مخرج}=۰\Rightarrow |x|+۵=۰\Rightarrow |x|=-۵\ \text{جواب ندارد.}\Rightarrow D_h=\mathbb{R}$$

چ) $\text{مخرج}=۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases} \Rightarrow D_p=\mathbb{R}-\{-۱,+۱\}$

ح) مخرج‌ها را جداگانه مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌ی آن‌ها به‌دست آید:

$$f(x)=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۵}{x-۲} \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \\ x-۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۲ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱,۲\}$$

خ) $k(x)=\frac{۱۲}{|x|+۲}-\frac{۱۳x}{|x|-۴} \Rightarrow \begin{cases} |x|+۲=۰ \\ |x|-۴=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|=-۲ \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \\ |x|=۴ \Rightarrow x=\pm ۴ \end{cases} \Rightarrow D_k=\mathbb{R}-\{-۴,+۴\}$

د) $y=\dfrac{۱-\frac{۱}{x}}{\frac{x-۳}{x-۴}}=\dfrac{\frac{x-۱}{x}}{\frac{x-۳}{x-۴}} \xrightarrow[\text{تمام مخرج‌ها}]{\text{یافتن ریشه‌ی}} \begin{cases} x=۰ \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{۰,۳,۴\} \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \end{cases}$

۱۳

آ) چون فرجه‌ی رادیکال زوج است (عدد ۲) عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$y=\sqrt{۲x+۱۶} \Rightarrow ۲x+۱۶ \ge ۰ \Rightarrow ۲x \ge -۱۶ \Rightarrow x \ge -۸$$

ب) $y=\sqrt{۷-۲x} \Rightarrow ۷-۲x \ge ۰ \Rightarrow -۲x \ge -۷ \xrightarrow{\text{طرفین}\div(-۲)} x \le \frac{۷}{۲} \Rightarrow D_y=\{x \mid x \le \frac{۷}{۲}\}$

پ) چون فرجه‌ی رادیکال فرد است، پس رادیکال تأثیری در تعیین دامنه ندارد. با حذف رادیکال چندجمله‌ای $۵x^۲-۱$ به‌دست می‌آید که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. پس $D_f=\mathbb{R}$

ت) $f(x)=\sqrt[۴]{۲-۵x} \Rightarrow ۲-۵x \ge ۰ \Rightarrow -۵x \ge -۲ \xrightarrow{\text{طرفین}\div(-۵)} \frac{-۵x}{-۵} \le \frac{-۲}{-۵} \Rightarrow x \le \frac{۲}{۵} \Rightarrow D_f=\{x \mid x \le \frac{۲}{۵}\}$

ث) چون فرجه‌ی رادیکال فرد است، پس آن را نادیده می‌گیریم و دامنه‌ی $\frac{۲x+۳}{۵x-۱}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\text{مخرج}=۰ \Rightarrow ۵x-۱=۰ \Rightarrow ۵x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۵} \;:\text{ریشه‌ی مخرج} \;\Rightarrow D_h=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۵}\}$$

ج) چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، عبارت زیر رادیکال باید همواره نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد:

$$(x-۱)^۲-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow \cancel{x^۲}-۲(x)(۱)+۱^۲-\cancel{x^۲} \ge ۰ \Rightarrow -۲x+۱ \ge ۰ \Rightarrow -۲x \ge -۱ \xrightarrow{\text{طرفین}\div(-۲)} x \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_f=\{x \mid x \le \frac{۱}{۲}\}$$

یادآوری: در محاسبه‌ی $(x-۱)^۲$ از اتحاد $(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$ استفاده کرده‌ایم: $(\underset{a}{x}-\underset{b}{۱})^۲=x^۲-۲(x)(۱)+۱^۲$

چ) چون رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر قرار گرفته است، پس عبارت زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم:

$$۵x+۱۰>۰ \Rightarrow ۵x>-۱۰ \xrightarrow{\text{طرفین}\div ۵} x>-۲ \Rightarrow D_f=\{x \mid x>-۲\}$$

ح) فرجه‌ی رادیکال زوج است، پس عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۲-|x| \ge ۰ \Rightarrow -|x| \ge -۲ \xrightarrow{\text{طرفین}\times(-۱)} |x| \le ۲ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \Rightarrow D_g=\{x \mid -۲ \le x \le ۲\}$$

نکته ۱: اگر $|x|<k$ و k عددی مثبت باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت $-k<x<k$، به‌عنوان مثال از عبارت $|x|<۳$ نتیجه می‌گیریم که $-۳<x<۳$

نکته ۲: اگر $|x| \le k$ و k عددی مثبت باشد، آن‌گاه خواهیم داشت $-k \le x \le k$، به‌عنوان مثال از عبارت $|x| \le ۳$ نتیجه می‌گیریم که $-۳ \le x \le ۳$

استادا! چرا وقتی دو طرف نامساوی $-|x| \ge -۲$ را در عدد -۱ ضرب کردید، جهت عوض شد؟

جواب: همان طور که قبلاً هم گفتیم اگر عددی منفی رو در دو طرف نامساوی ضرب کنیم جهت عوض می‌شه. (در تقسیم هم همین طوره، یعنی اگر طرفین یک نامساوی را بر عددی منفی تقسیم کنیم باز هم جهت عوض می‌شه.)

خ) $y=\dfrac{\sqrt[۴]{۲x+۸}}{\sqrt[۶]{-۵x-۱۰}} \Rightarrow \begin{cases} ۲x+۸ \ge ۰ \Rightarrow x \ge -۴ \\ -۵x-۱۰>۰ \Rightarrow x<-۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۴ \le x<-۲$

د) چون فرجه‌ی رادیکال فرد است، پس از آن صرف‌نظر می‌کنیم. برای محاسبه‌ی دامنه‌ی $\frac{۲x-۱}{(x^۲+۱)(x^۲-۱)}$ مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌های آن به‌دست آید:

$$(x^۲+۱)(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲+۱=۰ \\ x^۲-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲=-۱ \;(\text{غ ق ق}) \\ x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۱,۱\} \end{cases}$$

ذ) چون فرجه‌ی رادیکال فرد است برای تعیین دامنه می‌توانیم از رادیکال صرف‌نظر کنیم: $y=\dfrac{|۵x-۱|}{\sqrt[۷]{x-۲}}$

$$\text{مخرج}=۰ \Rightarrow x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{۲\}$$

۲ تست‌های جلسه دوم

۲۵. دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt[7]{x^2+4x}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0,-4\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

۲۶. دامنه‌ی تابع $y=3(x-1)^2(x+1)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{1,-1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-1\}$

۲۷. اگر رابطه‌ی $y=x^2$ نشان‌دهنده‌ی مساحت مربعی باشد که طول آن x است، دامنه‌ی این تابع کدام است؟

۱) $x>0$ ۲) $x\geq 0$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0\}$

۲۸. دامنه‌ی $y=\dfrac{x^2-5x+1}{x^4+6}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{\pm 6\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{6}\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

۲۹. دامنه‌ی تابع $f(x)=(x-3)\sqrt{x-2}$ شامل کدام عدد زیر نمی‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰. دامنه‌ی عبارت $y=\dfrac{x^2+7x}{x^3-16x}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۳۱. دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{x+3}{x^4-8x}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0,3\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0,2\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,8\}$

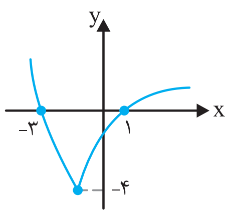
۳۲. دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-3x+2}$ شامل چند عضو از مجموعه‌ی اعداد صحیح نیست؟

۱) هیچ عضو ۲) یک عضو ۳) دو عضو ۴) سه عضو

۳۳. مجموعه‌ی دامنه‌ی تابع $f=\{(1,7),(3,6),(9,10),(4,1)\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۳۴. با توجه به شکل مقابل، دامنه و برد تابع f کدام‌اند؟



۱) $\begin{cases} D_f: x\geq 1 \\ R_f: y\geq -3 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} D_f: x\leq 3 \\ R_f: y\leq -4 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} D_f: \mathbb{R} \\ R_f: y\geq -4 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} D_f: \mathbb{R} \\ R_f: y> -4 \end{cases}$

۳۵. دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{2x+5}{x^3+8}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-2\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

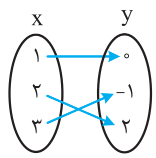
۳۶. در تابع $y=3$ دامنه و برد کدام است؟

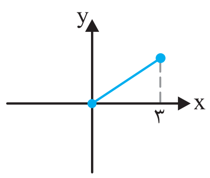
۱) $\begin{cases} D_y=\mathbb{R}-\{3\} \\ R_y=\mathbb{R} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} D_y=\mathbb{R}-\{0\} \\ R_y=\{3\} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} D_y=\mathbb{R} \\ R_y=\mathbb{R} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} D_y=\mathbb{R} \\ R_y=\{3\} \end{cases}$

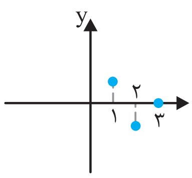
۳۷. دامنه‌ی کدام تابع با بقیه متفاوت است؟

۱)

x	۱	۲	۳
y	۲	۵	۸

۲)


۳)


۴)


۳۸. دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x}{۲}-۵}$ کدام است؟

۱) $x \geq \frac{۱}{۱۰}$ ۲) $x \geq ۱۰$ ۳) $x \leq \frac{۱}{۱۰}$ ۴) $x \leq ۱۰$

۳۹. تابع $y=\sqrt{\frac{۲-x}{۳}}$ به ازای کدام مقدار زیر، تعریف نشده است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰. دامنه‌ی کدام تابع زیر، شامل تعداد کم‌تری از اعداد طبیعی است؟

۱) $y=\sqrt{۳-x}$ ۲) $y=\frac{۱}{۳-x}$ ۳) $y=۳-x$ ۴) $y=\frac{۳-x}{x^{۲}-۹}$

۴۱. مجموعه‌ی برد تابع $g(x)=\frac{x+|-x|}{\sqrt{x-۱}-۱}$ با دامنه‌ی $\{۵,۱۰\}$ چیست؟

۱) $\{۱۰\}$ ۲) $\{۱۰,۲۰\}$ ۳) $\{۱۵,۳۰\}$ ۴) $\{۱۵\}$

۴۲. اگر حوزه‌ی مقادیر تابع $f(x)=۴-x^{۲}$ برابر $\{۰,۴\}$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع کدام است؟

۱) $\{-۴,۰,-۲\}$ ۲) $\{-۴,۰,۲\}$ ۳) $\{-۴,۰,۴\}$ ۴) $\{-۲,۰,۲\}$

۴۳. اگر دامنه‌ی توابع $f(x)=\sqrt{۱+x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ را به ترتیب D_f و D_g بنامیم، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $D_f=D_g$ ۲) $D_f \subset D_g$ ۳) $D_g \subset D_f$ ۴) $D_f=\varnothing$ و $D_g=\mathbb{R}$

۴۴. دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{-۳x+۶}}{\sqrt{x+۱}}$ کدام است؟

۱) $x \leq ۲$ ۲) $x>-۱$ ۳) $-۱ \leq x \leq ۲$ ۴) $-۱<x \leq ۲$

۴۵. مجموعه‌ی اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی کدام تابع زیر، نیست؟

۱) $y=(۲x-۱)^{۳}$ ۲) $y=\sqrt{۲x-۱}$ ۳) $y=\frac{۱}{۲x-۱}$ ۴) $y=\sqrt[۷]{(۲x-۱)^{۲}}$

۴۶. در کدام تابع، دامنه برابر با مجموعه‌ی اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ نیست؟

۱) $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}$ ۲) $g(x)=\frac{۴x}{|x|+۷}$ ۳) $h(x)=\frac{۷}{|x|-۳}$ ۴) $k(x)=\frac{x-۱}{x^{۲}-۲x+۳}$

۴۷. دامنه‌ی کدام تابع با سایرین برابر نیست؟

۱) $f(x)=(x-۱)^{۳}$ ۲) $g(x)=\frac{|x-۱|}{۳}$ ۳) $h(x)=\sqrt[۳]{|x-۱|}$ ۴) $k(x)=\frac{۳}{x-۱}$

۴۸. دامنه‌ی کدام تابع، شامل تمام اعداد طبیعی می‌باشد؟

۱) $y=\frac{x^{۲}-۱}{۲x-۴}$ ۲) $y=\sqrt{۳-x}$ ۳) $y=\frac{x+۱}{x^{۲}-۹}$ ۴) $y=\sqrt{۳x-۲}$

۴۹. تابع $y=\frac{m}{۳x^{۲}-۶x+۲m}$ به ازای چه مقادیری از m، همواره معین است؟

۱) $m=\frac{۳}{۲}$ ۲) $m<\frac{۳}{۲}$ ۳) $m>\frac{۳}{۲}$ ۴) $۰<m<\frac{۳}{۲}$

۵۰. اگر دامنه‌ی تابع $y=\frac{x+۱}{x^{۲}+ax+۳b}$ برابر $\mathbb{R}-\{۳\}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) -۶

۵۱. دامنه‌ی تابع $y=۲x^{۲}-\sqrt[۳]{x-۱}+\sqrt{۲-x}$ کدام است؟

۱) $x \geq ۱$ ۲) $۱ \leq x \leq ۲$ ۳) $x \leq ۱$ ۴) $x \leq ۲$

۵۲. دامنه‌ی تابع $y=\frac{\sqrt{x-۵}}{x-۱}+(۴x-۱)^{۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱,۵\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۴) $x \geq ۵$

۵۳. دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{4x-8}}{|x|-2}$ چند عضو از مجموعه‌ی اعداد طبیعی را ندارد؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) ۳
۴) شامل همه اعضای مجموعه اعداد طبیعی می‌باشد.

۵۴. دامنه‌ی تابع $y=\frac{\sqrt{2x}(x-1)}{x^2-1}$ کدام است؟

۱) $x\geq 0$
۲) $x\neq \pm 1$
۳) $x\geq 0$ و $x\neq 1$
۴) $x\geq 0$ و $x=-1$

۵۵. دامنه‌ی تابع $y=\frac{\sqrt{x+3}}{2x^2-7x+3}$ کدام است؟

۱) $D_y=\{x\mid x\leq 3\ ,\ x\neq \frac{1}{2},2\}$
۲) $D_y=\{x\mid x\geq 3\ ,\ x\neq 4,6\}$
۳) $D_y=\{x\mid x\geq -3\ ,\ x\neq 2,3\}$
۴) $D_y=\{x\mid x\geq -3\ ,\ x\neq \frac{1}{2},3\}$

۵۶. دامنه‌ی تابع $y=\frac{2x^2+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۱) $x>0$
۲) $x>-1$
۳) $x>1$
۴) $x<1$

۵۷. دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

۱) $x\leq -1$ یا $x\geq 1$
۲) $x<-1$ یا $1<x\leq 2$
۳) $-1<x<1$ یا $x>2$
۴) $x<1$ یا $x\geq 2$

۵۸. دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{x^2+1}+x^2-4$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $\mathbb{R}-\{1\}$
۳) $\mathbb{R}-\{-1,1\}$
۴) $\mathbb{R}-\{\pm 1,\pm 2\}$

۵۹. کدام عدد عضو دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{2-x}}$ نیست؟

۱) ۳
۲) -2
۳) ۱
۴) صفر

۶۰. دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\frac{x-1}{x-2}}{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2}}$ کدام است؟

۱) $x\geq 1$
۲) $x>1$
۳) $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$
۴) $1<x<2$ یا $x>2$

۶۱. دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt[4]{|x|-x}$ کدام است؟

۱) $x\geq 0$
۲) $x\leq 0$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $\varnothing$

۶۲. تابع $y=\frac{|3-x|}{\sqrt{|x|-x}}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $\varnothing$
۳) $x>0$
۴) $x<0$

۶۳. دامنه‌ی تابع $y=\frac{5x-7}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0\}$
۲) $\mathbb{R}$
۳) $\varnothing$
۴) $x\geq 0$

۲ پاسخ تست‌های جلسه‌ی دوم

۲۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

چون فرجه‌ی رادیکال عددی فرد است از رادیکال صرف‌نظر کرده عبارت $(x^۲+۴x)$ باقی می‌ماند که یک چندجمله‌ای بوده و دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ است یعنی: $D_f=\mathbb{R}$

۲۶ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

چون در تابع $y=۳(x-۱)^۲(x+۱)$ ، x زیر رادیکال قرار ندارد و در مخرج هم قرار ندارد، لذا یک چندجمله‌ای خواهیم داشت که دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۲۷ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

اگر در صورت سؤال فقط گفته می‌شد دامنه‌ی تابع $y=x^۲$ چیست جواب $\mathbb{R}$ بود، چون $x^۲$ چندجمله‌ای محسوب می‌شود (x در مخرج نیست زیر رادیکال هم نیست). ولی چون گفته شده $y=x^۲$ مساحت مربع را نشان می‌دهد x دیگر نمی‌تواند صفر یا منفی باشد چون طول ضلع یک مربع همیشه عددی مثبت است.

۲۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۴+۶=۰\Rightarrow x^۴=-۶$$

چون توان x زوج است، سمت راست تساوی نباید عددی منفی باشد. لذا معادله‌ی $(x^۴=-۶)$ جواب ندارد و دامنه برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

استاد! حالا اگه معادله به صورت $x^۴=۶$ بود چه جوری حلش می‌کردیم؟

جواب: اون موقع توان ۴ مربوط به x تبدیل میشه به $\sqrt[۴]{\ }$ برای سمت راست. البته باید به سمت راست $\pm$ هم بدهیم چون توان x زوجه، پس:

$$x^۴=۶\Rightarrow x=\pm\sqrt[۴]{۶}$$

ولی اگه توان x فرد باشه نیاز به $\pm$ دادن نیست. دقت کن: $x^۳=۲\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲}$

۲۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

چون فرجه زوج است زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x-۲\geq ۰\Rightarrow x\geq ۲$$

دقت کنید که $(x-۳)$ که پشت رادیکال می‌باشد تأثیری در محاسبه دامنه ندارد. تمام اعداد ۲ ، ۳ و ۴ در دامنه قرار دارند ولی ۱ در دامنه وجود ندارد.

۳۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۳-۱۶x=۰\xrightarrow{\text{فاکتور از } x}x(x^۲-۱۶)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^۲-۱۶=۰\Rightarrow x^۲=۱۶\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm ۴\end{cases}$$

لذا دامنه‌ی تابع به صورت $D_y=\mathbb{R}-\{۰,-۴,+۴\}$ می‌باشد ولی اعداد صفر و -۴ طبیعی نیستند و فقط عدد $+۴$ طبیعی است.

استاد! اگه در متن سؤال گفته می‌شد دامنه تابع، شامل چند عدد صحیح نیست؟ چی می‌گفتیم؟

جواب: اون وقت گزینه‌ی (۳) درست بود. چون اعداد صفر و -۴ و $+۴$ همگی جزء اعداد صحیح هستن.

۳۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۴-۸x=۰\xrightarrow{\text{فاکتور از } x}x(x^۳-۸)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^۳-۸=۰\Rightarrow x^۳=۸\Rightarrow x^۳=۲^۳\Rightarrow x=۲\end{cases}$$

لذا دامنه‌ی تابع به صورت $D_y=\mathbb{R}-\{۰,۲\}$ می‌باشد.

۳۲ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}(x-۲)(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱,۲\}$$

پس دامنه‌ی تابع f فقط شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ نمی‌باشد.

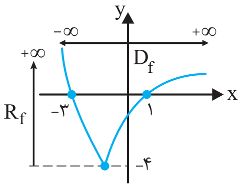
۳۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

مجموعه‌ی تمام عضوهای اول، دامنه را تشکیل می‌دهد. یعنی:

$$f=\{(۱,۷),(۳,۶),(۹,۱۰),(۴,۱)\}\Rightarrow D_f=\{۱,۳,۹,۴\}$$

از سال اول به یاد دارید که تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با ۲^n. در این‌جا مجموعه‌ی D_f دارای ۴ عضو است، لذا تعداد زیر مجموعه‌های آن برابر است با: $۲^n=۲^۴=۱۶$

۳۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)



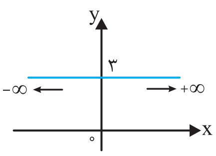
با توجه به نمودار تابع، x از چپ و راست نامحدود است. یعنی از $-\infty$ تا $+\infty$ در حال تغییر است، پس $D_f=\mathbb{R}$. از طرفی y از -۴ در پایین تا $+\infty$ در بالا تغییر می‌کند یعنی: $R_f: y\geq -۴$

۳۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^۳+۸=۰\Rightarrow x^۳=-۸\Rightarrow x^{\cancel{۳}}=(-۲)^{\cancel{۳}}$$

$$\Rightarrow x=-۲\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{-۲\}$$

۳۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)**



اگر نمودار تابع $y=۳$ را رسم کنیم ملاحظه می‌کنیم که x می‌تواند از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند، لذا $D_y=\mathbb{R}$. از طرفی عرض تمام نقاط روی خط، همان ۳ می‌باشد. یعنی بُرد تابع برابر است با $R_y=\{۳\}$

۳۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

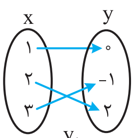
می‌دانید که منظور از دامنه همان مؤلفه‌های اول یا xها می‌باشد لذا خواهیم داشت:

گزینه‌ی (۱):

x	۱	۲	۳
y	۲	۵	۸

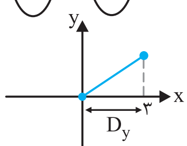
$\Rightarrow D_y=\{۱,۲,۳\}$

گزینه‌ی (۲):



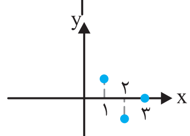
$\Rightarrow D_y=\{۱,۲,۳\}$

گزینه‌ی (۳):



$\Rightarrow D_y=\{۰\leq x\leq ۳\}$

گزینه‌ی (۴):



$\Rightarrow D_y=\{۱,۲,۳\}$

همان طور که می‌بینید در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) دامنه فقط شامل سه عدد ۱ ، ۲ و ۳ می‌باشد ولی در گزینه‌ی (۳) دامنه شامل تمام اعداد حقیقی بین صفر و ۳ (و خود صفر و ۳) می‌باشد.

۳۸ ۱ **۲** ۳ ۴

$f(x)=\sqrt{\frac{x}{۲}-۵}$

$\frac{x}{۲}-۵\geq ۰ \Rightarrow \frac{x}{۲}\geq ۵ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x\geq ۱۰$

۳۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

روش اول: چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$\frac{۲-x}{۳}\geq ۰ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲-x\geq ۳\times ۰ \Rightarrow ۲-x\geq ۰$

$\Rightarrow -x\geq -۲\Rightarrow x\leq ۲$

یعنی اعدادی جزء دامنه هستند که کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشند، ولی عدد ۳ که در گزینه‌ها آمده کوچک‌تر یا مساوی ۲ نیست، پس جزء دامنه نمی‌باشد و تابع به ازای $x=۳$ تعریف نشده است.

روش دوم: می‌توانیم اعداد گزینه‌ها را به جای x تابع قرار دهیم. عبارت زیر رادیکال نباید منفی شود. فقط در گزینه‌ی (۴) داریم:

گزینه‌ی (۴): $y=\sqrt{\frac{۲-x}{۳}} \xrightarrow{(x=۳)} y=\sqrt{\frac{۲-۳}{۳}}=\sqrt{\frac{-۱}{۳}}$

چون زیر رادیکال منفی شد پس $x=۳$ قابل قبول نیست.

۴۰ **۱** ۲ ۳ ۴

گزینه‌ی (۱): $y=\sqrt{۳-x}\Rightarrow ۳-x\geq ۰\Rightarrow -x\geq -۳\Rightarrow x\leq ۳$

اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۳ عبارت‌اند از: $۱,۲,۳$

گزینه‌ی (۲): $y=\frac{۱}{۳-x}\xrightarrow{\text{مخرج}=۰} ۳-x=۰\Rightarrow -x=-۳$

$\Rightarrow x=۳\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{۳\}$

مجموعه $\mathbb{R}-\{۳\}$ شامل تمام اعداد طبیعی به جز ۳ می‌باشد، یعنی شامل $۱,۲,۴,۵,\ldots$ می‌باشد.

گزینه‌ی (۳): $y=۳-x\Rightarrow D_y=\mathbb{R}$

می‌دانید که $\mathbb{R}$ شامل همه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد.

گزینه‌ی (۴): $y=\frac{۳-x}{x^۲-۹}\xrightarrow{\text{مخرج}=۰} x^۲-۹=۰\Rightarrow x^۲=۹$

$\xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm۳\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{\pm۳\}$

مجموعه $\mathbb{R}-\{\pm۳\}$ شامل همه‌ی اعداد طبیعی به جز ۳+ می‌باشد.

لذا دامنه‌ی تابع گزینه‌ی (۱) شامل تعداد کم‌تری از اعداد طبیعی می‌باشد.

۴۱ **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم دامنه همان x می‌باشد لذا در تابع $g(x)$ یک‌بار به جای تمام xها عدد ۵ و بار دیگر عدد ۱۰ را قرار می‌دهیم تا مقدار g یا y به‌دست آید:

$y=\frac{x+|-x|}{\sqrt{x-۱}-۱}\xrightarrow{(x=۵)} y=\frac{۵+|-۵|}{\sqrt{۵-۱}-۱}=\frac{۵+۵}{\sqrt{۴}-۱}=\frac{۱۰}{۱}=۱۰$

$y=\frac{x+|-x|}{\sqrt{x-۱}-۱}\xrightarrow{(x=۱۰)} y=\frac{۱۰+|-۱۰|}{\sqrt{۱۰-۱}-۱}=\frac{۱۰+۱۰}{\sqrt{۹}-۱}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$

لذا برد تابع $R_f=\{۱۰\}$ می‌باشد.

استادا معذرت می‌خوام شما چرا به جای $g(x)$، نوشتین y؟

جواب: کلاً به جای اسم یک تابع مثل $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ و غیره می‌تونیم از y استفاده کنیم. (برای حل ساده‌تر)

۴۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$y=۴-x^۲\Rightarrow \begin{cases} y=۰\Rightarrow ۴-x^۲=۰\Rightarrow x^۲=۴\xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm۲\\ y=۴\Rightarrow ۴-x^۲=۴\Rightarrow x^۲=۰\xrightarrow{\text{جذر}} x=۰\end{cases}$

لذا دامنه‌ی تابع به صورت $\{۰,+۲,-۲\}$ می‌باشد.

۴۳ ۱ ۲ **۳** ۴

$f(x)=\sqrt{۱+x^۲}\xrightarrow{\text{فرجه زوج}} ۱+x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\geq -۱$

می‌دانید که x هر عددی که باشد چه مثبت چه منفی و چه صفر وقتی به توان ۲ می‌رسد جواب از عدد ۱- بزرگ‌تر است. پس $x^۲\geq -۱$ همواره درست است و نیاز به حل ندارد.

اگر نامعادله‌ای همواره درست باشد (بدیهی باشد) جواب آن $\mathbb{R}$ است. لذا:

$D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{۱-x^۲}\xrightarrow{\text{فرجه زوج}} ۱-x^۲\geq ۰\Rightarrow -x^۲\geq -۱$

$\xrightarrow{\text{طرفین}\times(-۱)} x^۲\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\Rightarrow D_g=\{-۱\leq x\leq ۱\}$

همان طور که معلوم است $\mathbb{R}$ شامل $\{-۱\leq x\leq ۱\}$ هم می‌شود یعنی: $D_g\subset D_f$

استادا میشه بگید $x^۲\leq ۱$ رو چه جوری حل کردید؟

جواب: کلاً یادت باشه اگه k عددی مثبت باشه آن‌گاه:

اگر $x^۲<k^۲\Rightarrow -k<x<k$ مثال: $x^۲<۹\Rightarrow -۳<x<۳$

۴۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$-۳x+۶\geq ۰\Rightarrow -۳x\geq -۶\Rightarrow x\leq ۲$

$x+۱>۰\Rightarrow x>-۱$

چون جهت نامعادله‌ها مختلف است، لذا دامنه به صورت زیر خواهد بود:

دامنه: $\left.\begin{matrix}x\leq ۲\\ x>-۱\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱<x\leq ۲$

۴۵ ۱ **۲** ۳ ۴

گزینه‌ی (۱): $y=(۲x-۱)^۳\Rightarrow D_y=\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ شامل اعداد صحیح هم می‌باشد.

گزینه‌ی (۲): $y=\sqrt{۲x-۱}\xrightarrow{\text{فرجه زوج}} ۲x-۱\geq ۰\Rightarrow ۲x\geq ۱\Rightarrow x\geq\frac{۱}{۲}$

$x\geq\frac{۱}{۲}$ شامل همه‌ی اعداد صحیح نمی‌باشد، مثلاً عدد صفر را شامل نمی‌شود.

گزینه‌ی (۳): $y=\frac{۱}{۲x-۱}\xrightarrow{\text{مخرج}=۰} ۲x-۱=۰\Rightarrow ۲x=۱$

$\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۲}\}$

می‌دانیم $\frac{۱}{۲}$ عدد صحیح نیست، پس $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۲}\}$ تمام اعداد صحیح را شامل می‌شود.

گزینه‌ی (۴): $y=\sqrt[۷]{(۲x-۱)^۲}\xrightarrow{\text{فرجه فرد}} D_y=\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ شامل اعداد صحیح هم می‌باشد.

۴۶ ۱ ۲ **۳** ۴

گزینه‌ی (۱): $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۱}\xrightarrow{\text{فرجه فرد}} D_f=\mathbb{R}$

گزینه‌ی (۲): $g(x)=\frac{۴x}{|x|+۷}\xrightarrow{\text{مخرج}=۰} |x|+۷=۰\Rightarrow |x|=-۷$

این معادله جواب ندارد چون جواب $|x|$ نمی‌تواند منفی باشد. پس $D_g=\mathbb{R}$ است.

گزینه‌ی (۳): $h(x)=\frac{۷}{|x|-۳}\xrightarrow{\text{مخرج}=۰} |x|-۳=۰\Rightarrow |x|=۳$

$\Rightarrow x=\pm۳\Rightarrow D_h=\mathbb{R}-\{\pm۳\}$

گزینه‌ی (۴): $k(x)=\frac{x-۱}{x^۲-۲x+۳}\xrightarrow{\text{مخرج}=۰} x^۲-۲x+۳=۰$

$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(۳)=۴-۱۲=-۸<۰$

معادله ریشه ندارد.

چون مخرج کسر جواب ندارد، لذا دامنه‌ی تابع $k(x)$ برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۴۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

گزینه‌ی (۱): $f(x)=(x-۱)^۳ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

گزینه‌ی (۲): $g(x)=\frac{|x-۱|}{۳} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$

گزینه‌ی (۳): $h(x)=\sqrt[۳]{|x-۱|} \xrightarrow{\text{فرجه فرد}} D_h=\mathbb{R}$

گزینه‌ی (۴): $k(x)=\frac{۳}{x-۱} \xrightarrow{\text{مخرج}=۰} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_k=\mathbb{R}-\{۱\}$

استاد! ببخشید، چرا دامنه‌ی گزینه‌های (۲) و (۳) برابر با $\mathbb{R}$ شد؟ پس تکلیف قدرمطلق چی میشه؟

جواب: اگه یه تابع به شکل $|f(x)|$ باشد که $f(x)$ یک چندجمله‌ای است دامنه‌ی تابع همان دامنه‌ی $f(x)$ است. یعنی قدرمطلق تأثیری در دامنه ندارد. البته به شرطی که $|f(x)|$ در مخرج یک کسر نباشه، مثلاً برای محاسبه‌ی دامنه‌ی $y=\frac{۳x}{|x|-۷}$ مخرج را مساوی صفر قرار داده جواب‌های آن را از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم.

$|x|-۷=۰ \Rightarrow |x|=۷ \Rightarrow x=\pm۷ \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{\pm۷\}$

۴۸ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

گزینه‌ی (۱): $y=\frac{x^۲-۱}{۲x-۴} \xrightarrow{\text{مخرج}=۰} ۲x-۴=۰$

$\Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{۲\}$

دامنه‌ی تابع فوق، شامل عدد ۲ که طبیعی هم می‌باشد نیست.

گزینه‌ی (۲): $y=\sqrt{۳-x} \Rightarrow ۳-x\ge۰ \Rightarrow -x\ge-۳ \Rightarrow x\le۳$

دامنه‌ی این تابع شامل اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۳ نیست.

گزینه‌ی (۳): $y=\frac{x+۱}{x^۲-۹} \xrightarrow{\text{مخرج}=۰} x^۲-۹=۰ \Rightarrow x^۲=۹$

$\xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm۳ \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{\pm۳\}$

دامنه‌ی تابع فوق، شامل عدد طبیعی ۳ نیست.

گزینه‌ی (۴): $y=\sqrt{۳x-۲} \Rightarrow ۳x-۲\ge۰ \Rightarrow ۳x\ge۲ \Rightarrow x\ge\frac{۲}{۳}$

اگر $\frac{۲}{۳}$ را تقریباً ۰/۶ فرض کنیم، داریم $x\ge۰/۶$ که شامل تمام اعداد طبیعی می‌باشد.

۴۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

کسر $\frac{m}{۳x^۲-۶x+۲m}$ وقتی همواره تعریف شده است که مخرج آن ریشه نداشته باشد. مخرج هم که یک معادله‌ی درجه دوم است. می‌دانید معادله‌ی درجه دوم وقتی ریشه ندارد که دلتای آن منفی باشد. لذا خواهیم نوشت:

$۳x^۲-۶x+۲m=۰$

$\Delta<۰ \Rightarrow b^۲-۴ac<۰ \Rightarrow (-۶)^۲-۴(۳)(۲m)<۰$

$\Rightarrow ۳۶-۲۴m<۰ \Rightarrow -۲۴m<-۳۶ \xrightarrow{\text{طرفین} \div (-۲۴)} \frac{-۲۴m}{-۲۴}>\frac{-۳۶}{-۲۴}$

$\Rightarrow m>\frac{۳۶}{۲۴} \Rightarrow m>\frac{۳}{۲}$

۵۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

وقتی گفته می‌شود دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}-\{۳\}$ می‌باشد، به این معناست که عدد ۳ ریشه‌ی مخرج است. پس در مخرج به جای xها ۳ را قرار می‌دهیم:

$\text{مخرج}=۰ \Rightarrow x^۲+ax+۳b=۰ \xrightarrow{(x=۳)} ۳^۲+a\times۳+۳b=۰$

$\Rightarrow ۹+۳a+۳b=۰ \Rightarrow ۳a+۳b=-۹ \xrightarrow{\div۳} \frac{۳a}{۳}+\frac{۳b}{۳}=\frac{-۹}{۳}$

$\Rightarrow a+b=-۳$

۵۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

وقتی یک تابع از دو یا چند قسمت تشکیل شده باشد که بین آن‌ها جمع و تفریق و یا ضرب می‌باشد دامنه‌ی هر یک از آن‌ها را جداگانه حساب کرده سپس اشتراک می‌گیریم:

$$y=\underbrace{۲x^۲}_{\text{چندجمله‌ای است و دامنه‌ی آن } \mathbb{R} \text{ است.}}-\underbrace{\sqrt[۳]{x-۱}}_{\text{فرجه‌ی رادیکال فرد است. با حذف رادیکال، } x-۱ \text{ باقی می‌ماند که چندجمله‌ای است و دامنه‌ی آن } \mathbb{R} \text{ است.}}+\underbrace{\sqrt{۲-x}}_{\text{فرجه زوج است. دامنه } x\le۲ \text{ می‌باشد.}}$$

می‌دانیم اشتراک هر مجموعه با $\mathbb{R}$ همان مجموعه است پس اشتراک $\{x\le۲\}$ با $\mathbb{R}$ برابر است با: $D_y=\{x\le۲\}$

۵۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

برای تعیین دامنه‌ی تابع داده شده فقط کافی است دامنه‌ی $\frac{\sqrt{x-۵}}{x-۱}$ را تعیین کنیم. چون عبارت $(۴x-۱)^۲$ چندجمله‌ای بوده و دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ است و می‌دانید که اشتراک هر مجموعه با $\mathbb{R}$ خود آن مجموعه است.

$\frac{\sqrt{x-۵}}{x-۱}$:

دامنه‌ی صورت: $x-۵\ge۰ \Rightarrow x\ge۵$

ریشه‌ی مخرج: $x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$D_y=\{\text{دامنه‌ی صورت}\}-\{\text{ریشه‌ی مخرج}\}=\{x\ge۵\}-\{۱\}=\{x\ge۵\}$

استاد! ببخشید من گیج شدم. عدد ۱ چرا یه دفه غیب شد؟

جواب: سعی کن خونسرد باشی تا بگم چی شد. مگه دامنه به صورت $\{x\ge۵\}-\{۱\}$ نشد؟ خوب این یعنی چه؟ یعنی اعدادی که بزرگ‌تر یا مساوی ۵ هستند به جز عدد ۱. خوب عدد ۱ که اصلاً بزرگ‌تر از ۵ نیست. پس می‌تونیم ننویسیمش. اگه مثلاً دامنه به صورت $\{x\ge۵\}-\{۷\}$ می‌شد اون وقت نمی‌شد ۷ رو به قول تو غیب کنیم چون از ۵ بزرگ‌تره.

۵۳ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

دامنه‌ی صورت $۴x-۸\ge۰ \Rightarrow ۴x\ge۸ \Rightarrow x\ge۲$

ریشه‌های مخرج $|x|-۲=۰ \Rightarrow |x|=۲ \Rightarrow x=\pm۲$

$D_y=\{\text{دامنه‌ی صورت}\}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}=\{x\ge۲\}-\{\pm۲\}$

عدد ۲− که اصلاً در $x\ge۲$ وجود ندارد ولی عدد ۲+ وجود دارد که باید آن را حذف کنیم. یعنی D_y به $\{x>۲\}$ تبدیل می‌شود. اعداد طبیعی که از ۲ بزرگ‌تر هستند عبارتند از: ...,۳,۴,۵. پس دامنه‌ی تابع شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ نمی‌باشد.

استاد! میشه بگین چه موقع از فرمول $\{\text{ریشه‌های مخرج}\}-\{\text{دامنه‌ی صورت}\}$ استفاده می‌کنیم؟

جواب: وقتی که در صورت یک کسر، رادیکال با فرجه‌ی زوج و در مخرج اون، یک چندجمله‌ای داشته باشیم.

۵۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

دامنه‌ی صورت: $۲x\ge۰ \Rightarrow x\ge\frac{۰}{۲} \Rightarrow x\ge۰$

ریشه‌های مخرج: $x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm۱$

$D_y=\{\text{دامنه‌ی صورت}\}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}=\{x\ge۰\}-\{\pm۱\}$

مجموعه‌ی $\{x\ge۰\}-\{\pm۱\}$ را بهتر است به شکل $\{x\ge۰\}-\{+۱\}$ بنویسیم. چون وقتی $x\ge۰$ می‌باشد عدد ۱− را شامل نمی‌شود.

۵۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

دامنه‌ی صورت: $x+۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۳$

ریشه‌های مخرج: $۲x^۲-۷x+۳=۰$

$$\Rightarrow \Delta = b^۲-۴ac=(-۷)^۲-۴(۲)(۳)=۴۹-۲۴=۲۵$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۷)\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۲)}=\frac{۷\pm ۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۷+۵}{۴}=۳ \\ x=\frac{۷-۵}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

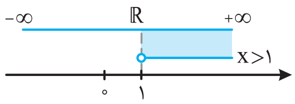
$D_y=\{$دامنه‌ی صورت$\}-\{$ریشه‌های مخرج$\}=\{x\ge -۳\}-\{۳,\frac{۱}{۲}\}$

۵۶ ۱ ۲ **۳** ۴

در صورت کسر چون $۲x^۲$ چندجمله‌ای می‌باشد دامنه آن $\mathbb{R}$ است. از طرفی در عبارت $\sqrt{x^۲}$ می‌دانیم عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد یعنی باید $x^۲\ge ۰$. می‌دانیم $x^۲$ همیشه یا صفر و یا مثبت می‌باشد یعنی رابطه‌ی $x^۲\ge ۰$ همیشه درست بوده و نیازی به حل ندارد. پس دامنه‌ی $\sqrt{x^۲}$ هم $\mathbb{R}$ است. حال به سراغ مخرج می‌رویم و چنین می‌نویسیم:

$x-۱>۰\Rightarrow x>۱$

اشتراک $\mathbb{R}$ و $x>۱$ باز هم $x>۱$ خواهد بود:



$D_y=\{$دامنه‌ی صورت$\}\cap\{$دامنه‌ی مخرج$\}=\mathbb{R}\cap\{x>۱\}=\{x>۱\}$

استادا چه وقت از فرمول $\{$دامنه‌ی مخرج$\}\cap\{$دامنه‌ی صورت$\}$ برای محاسبه‌ی دامنه استفاده می‌کنیم؟

جواب: وقتی که هم در صورت کسر و هم در مخرج، رادیکال با فرجه‌ی زوج داشته باشیم.

۵۷ ۱ **۲** ۳ ۴

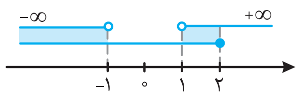
دامنه‌ی صورت: $۲-x\ge ۰\Rightarrow -x\ge -۲\Rightarrow x\le ۲$

دامنه‌ی مخرج: $x^۲-۱>۰\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow \begin{cases} x>۱ \\ \text{یا} \\ x<-۱ \end{cases}$

$D_f=\{$دامنه‌ی صورت$\}\cap\{$دامنه‌ی مخرج$\}$

$D_f=\{x\le ۲\}\cap\{x>۱ \text{ یا } x<-۱\}$

با توجه به شکل، اشتراک دو مجموعه‌ی بالا را تعیین می‌کنیم:



$D_f=\{x<-۱ \text{ یا } ۱<x\le ۲\}$

استادا من نفهمیدم $x^۲>۱$ رو چه جوری حل کردین؟

جواب: اگه $x^۲$ بزرگ‌تر از یه عدد مثبت باشه از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:

$$x^۲>k^۲\Rightarrow \begin{cases} x>k \\ x<-k \end{cases}$$

۵۸ **۱** ۲ ۳ ۴

باید دامنه‌ی هر یک از عبارت‌های $(x^۲-۴)$ و $\sqrt{x^۲+۱}$ را جداگانه محاسبه کرده و از جواب آن‌ها اشتراک بگیریم. می‌دانیم $(x^۲-۴)$ چندجمله‌ای است، پس دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ است. در عبارت $\sqrt{x^۲+۱}$ زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$x^۲+۱\ge ۰\Rightarrow x^۲\ge -۱\Rightarrow$ همواره درست است $\Rightarrow$ دامنه $=\mathbb{R}$

پس دامنه‌ی هر دو عبارت $(x^۲-۴)$ و $\sqrt{x^۲+۱}$ برابر با $\mathbb{R}$ و در نهایت دامنه‌ی کل تابع هم $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۵۹ **۱** ۲ ۳ ۴

کافی است اعداد گزینه‌ها را به‌جای x های تابع قرار دهیم زیر رادیکال نباید منفی شود ضمناً مخرج هم نباید صفر شود اگر به‌جای x ها عدد ۳ را قرار دهیم به $\sqrt{-۱۰}$ می‌رسیم که تعریف نشده است.

۶۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

ریشه‌های مخرج: $\left.\begin{array}{l} x-۲=۰\Rightarrow x=۲ \\ x^۲=۰\Rightarrow x=۰ \end{array}\right\}$

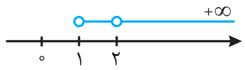
حال کسر داده شده را دور در دور، نزدیک در نزدیک می‌کنیم:

$$y=\frac{x^۲(x-۱)}{(x-۲)\sqrt{x-۱}}$$

حالا چون $\sqrt{x-۱}$ در مخرج قرار دارد لذا:

$x-۱>۰\Rightarrow x>۱$

$D_y=\{x>۱\}-\{۰,۲\}$



اگر D_y را روی محور طول‌ها مشخص کنیم گزینه‌ی (۴) به‌دست می‌آید. یعنی از اعداد بزرگ‌تر از ۱ فقط کافی است عدد ۲ را حذف کنیم (۲ را تو خالی می‌کنیم).

۶۱ ۱ ۲ **۳** ۴

$$y=\sqrt[۴]{|x|-x}\Rightarrow |x|-x\ge ۰\Rightarrow |x|\ge x\Rightarrow D_y=\mathbb{R}$$

استادا من نفهمیدم از $|x|\ge x$ چه جوری به $\mathbb{R}$ رسیدین!

جواب: چه اعدادی قدرمطلقشون بزرگ‌تر یا مساوی با خودشونه؟ همه‌ی عددها. هر عددی چه مثبت، چه منفی و چه صفر قدرمطلقش یا با خودش مساویه یا بزرگ‌تره. پس چون نامعادله‌ی $|x|\ge x$ همیشه درسته جوابش $\mathbb{R}$ میشه. کلاً تو ریاضی روابطی که همیشه درست باشند جوابشون $\mathbb{R}$ است و روابطی که همیشه غلط باشند جواب شون $\varnothing$ است.

۶۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

چون رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر واقع است باید عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر از صفر باشد:

$|x|-x>۰\Rightarrow |x|>x\Rightarrow D_y=\{x<۰\}$

تذکر: دقت دارید که $|x|>x$ یعنی به دنبال اعدادی هستیم که قدرمطلق‌شان بزرگ‌تر از خودشان باشد و می‌دانید که قدرمطلق اعداد منفی از خودشان بزرگ‌تر هستند. اعداد منفی را هم به صورت $x<۰$ نشان می‌دهیم.

۶۳ ۱ ۲ **۳** ۴

$x-|x|>۰\Rightarrow x>|x|$ این نامعادله جواب ندارد $\Rightarrow D_y=\varnothing$

می‌دانید که هیچ عددی نمی‌تواند از قدرمطلق خودش بزرگ‌تر باشد. به همین دلیل است که گفتیم نامعادله‌ی $x>|x|$ جواب ندارد.