فصل اول قسمت اول

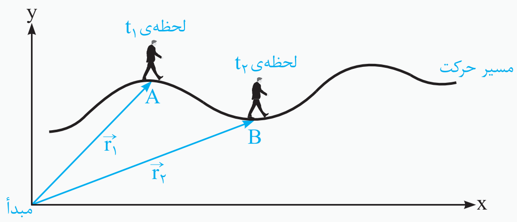
مفاهیم اولیه‌ی حرکت و حرکت یکنواخت

۱- (۴) برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به درسنامه‌ی زیر توجه کنید:

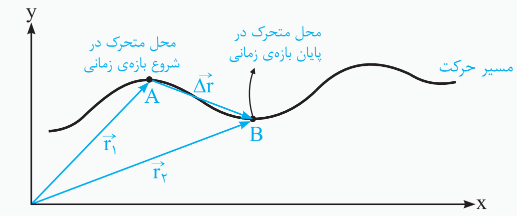
درسنامه‌ی ۱

مفاهیم بردار مکان، جابه‌جایی و مسافت طی شده

(تست‌های ۱ تا ۱۵)



بردار مکان: در شکل مقابل متحرکی (مثلاً یک کوهنورد) بر روی مسیر نشان داده شده (مثلاً یک کوه) در حال حرکت است. **بردار مکان** در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل می‌شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده شده است.

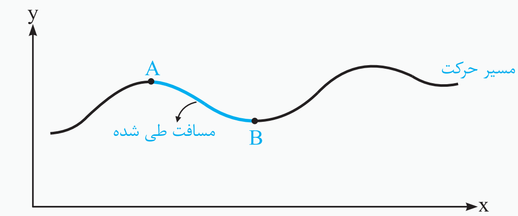


بردار تغییر مکان (جابه‌جایی): متحرک نشان داده شده در شکل مقابل، در بازه‌ی زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازه‌ی زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازه‌ی زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازه‌ی زمانی متصل می‌کند.

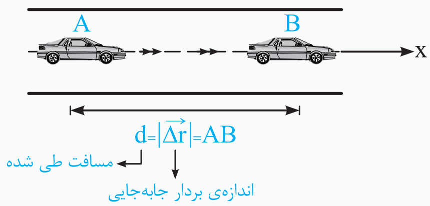
تذکر: همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بردار جابه‌جایی معادل با تفاضل بردارهای مکان در A و B است.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱$$

(بردار $\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱$، از انتهای $\vec{r}_۱$ به انتهای $\vec{r}_۲$ متصل می‌شود.)

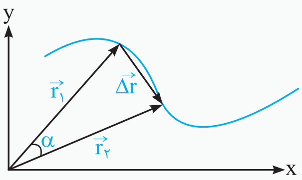


مسافت طی شده: متحرک مورد بررسی، از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B حرکت کرده است و طول واقعی مسیر حرکتش برابر طول منحنی واقع در بین نقاط A و B است (که با رنگ آبی نشان داده شده است). این طول، **مسافت طی شده** نام دارد.



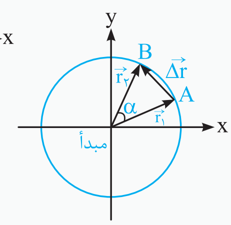
تذکر: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، طول منحنی AB (مسافت طی شده)، از طول پاره‌خط AB (جابه‌جایی) بزرگ‌تر است. در مجموع می‌توان گفت «**مسافت طی شده توسط یک متحرک، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه‌ی جابه‌جایی متحرک است**». دقت شود که در شکل مقابل یک اتومبیل در جهت محور x مستقیماً از A تا B منتقل شده است، در این حالت خاص طول بردار جابه‌جایی و مسافت طی شده با یک‌دیگر برابر بوده و هم‌اندازه با طول پاره‌خط AB است.

نکات مهم و کاربردی:



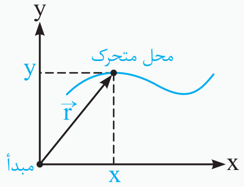
۱) برای به‌دست آوردن اندازه‌ی $\vec{\Delta r}$، می‌توان از رابطه‌ی زیر نیز کمک گرفت:

$$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{r_۱^۲ + r_۲^۲ - ۲r_۱r_۲\cos\alpha}$$



حالت خاص: اگر متحرک بر روی دایره در حال حرکت باشد، اندازه‌ی بردار مکان در A و B یکسان بوده (برابر شعاع دایره) و اندازه‌ی بردار جابه‌جایی آن برابر است با:

$$|\vec{r}_۱| = |\vec{r}_۲| = r \ (\text{شعاع دایره}) \Rightarrow |\vec{\Delta r}| = ۲r\sin\frac{\alpha}{۲}$$



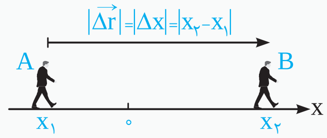
۲) بردار مکان در صفحه، معمولاً به صورت $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ نوشته می‌شود که x و y توابعی از زمان هستند. با جایگذاری زمان در روابط x و y، به سادگی می‌توان بردار مکان در هر لحظه‌ی دلخواه را به‌دست آورد:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

مثال: $\vec{r} = (۲t+۱)\vec{i} + (۳t+۱)\vec{j} \xrightarrow{t=۱s} \vec{r} = (۲\times۱+۱)\vec{i} + (۳\times۱+۱)\vec{j} = ۳\vec{i} + ۴\vec{j}$

دقت شود که اندازه‌ی بردار مکان، در واقع برابر با فاصله‌ی متحرک از مبدأ مختصات است (چرا؟).

$$\text{فاصله‌ی متحرک از مبدأ} = |\vec{r}| = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

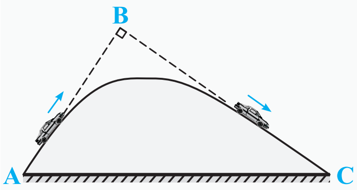


۳ اگر متحرک بر روی محور x در حال حرکت باشد (حرکت یک‌بعدی) و از نقطه‌ی A تا B منتقل شود، بردار جابه‌جایی متحرک به صورت مقابل به‌دست می‌آید: $|\vec{\Delta r}|=|\Delta x|=|x_B-x_A|=|x_۲-x_۱|$

$$\begin{cases}\Delta x = x_۲ - x_۱ > ۰ \Rightarrow \text{.بردار جابه‌جایی در جهت محور x است} \\ \Delta x = x_۲ - x_۱ < ۰ \Rightarrow \text{.بردار جابه‌جایی در خلاف جهت محور x است}\end{cases}$$

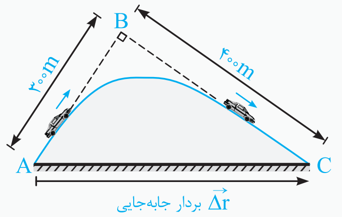
۴ مسافت طی شده کمیتی نرده‌ای بوده و جابه‌جایی کمیتی برداری است.

در ادامه با حل دو تمرین زیر، مفاهیم ارائه شده را با هم مرور می‌کنیم.



تمرین ۱: در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده شده ابتدا از تپه بالا رفته و سپس از طرف دیگر آن پایین می‌آید. در مسیر نشان داده شده، جابه‌جایی متحرک از A تا C چقدر است؟ $(AB = ۳۰۰m\ ,\ BC = ۴۰۰m)$ (تألیفی)

۱) ۵۰۰ متر
۲) ۷۰۰ متر
۳) کم‌تر از ۵۰۰ متر
۴) بیشتر از ۵۰۰ متر



پاسخ: همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید، متحرک در طول حرکت خود از نقطه‌ی A (ابتدای مسیر) به نقطه‌ی C (انتهای مسیر) رفته و جابه‌جایی آن برابر بردار $\vec{AC}$ است:

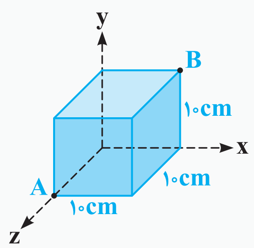
$$\text{جابه‌جایی} = |\vec{AC}| = \sqrt{(AB)^۲ + (BC)^۲} = \sqrt{(۳۰۰)^۲ + (۴۰۰)^۲} = ۱۰۰\sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵۰۰m$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

دقت: توجه کنید که در این سؤال، مسافت طی شده (طول خط آبی‌رنگ) از یک طرف بزرگ‌تر از جابه‌جایی بوده و از سوی دیگر بیشتر از ۵۰۰ متر و کم‌تر از ۷۰۰ متر است (چرا؟).

تذکر: در صورتی‌که طول، عرض و ارتفاع یک متحرک در فضای سه‌بعدی تغییر کرده و متحرک از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B منتقل شود، اندازه‌ی بردار جابه‌جایی آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$A:\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\\z_A\end{matrix}\right. \rightarrow B:\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\\z_B\end{matrix}\right. \Rightarrow |\vec{\Delta r}| = \sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲+(z_B-z_A)^۲}$$

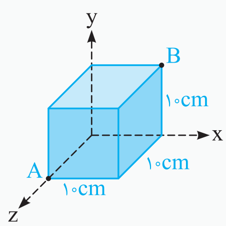


تمرین ۲: در شکل مقابل، متحرکی با حرکت بر روی سطوح جانبی یک مکعب توپر به ضلع ۱۰ سانتی‌متر، خود را از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B می‌رساند. اندازه‌ی جابه‌جایی متحرک در این تغییر مکان چند سانتی‌متر است؟ (تألیفی)

۱) $۱۰\sqrt{۳}$
۲) $۱۰(۱+\sqrt{۲})$
۳) $۱۰\sqrt{۲}$
۴) $۵\sqrt{۳}$

پاسخ: برای این سؤال، دو روش زیر را ارائه می‌کنیم:

روش اول: با توجه به مختصات نقاط A و B و تذکر ارائه شده در قبل از سؤال داریم:



$$A:\left|\begin{matrix}x_A=۰\\y_A=۰\\z_A=۱۰cm\end{matrix}\right. \rightarrow B:\left|\begin{matrix}x_B=۱۰cm\\y_B=۱۰cm\\z_B=۰\end{matrix}\right. \Rightarrow |\vec{\Delta r}| = \sqrt{(۱۰-۰)^۲+(۱۰-۰)^۲+(۰-۱۰)^۲} = ۱۰\sqrt{۳}\ cm$$

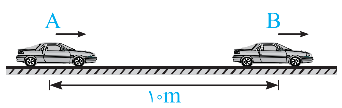
روش دوم: همانطور که در شکل فوق می‌بینید، نقاط A و B دو انتهای یک قطر مکعب هستند و جابه‌جایی برابر اندازه‌ی AB است، پس کافی است اندازه‌ی آن قطر را بیابیم. از طرفی اندازه‌ی یک قطر از مکعبی به ضلع a برابر با $d = a\sqrt{۳}$ است و داریم:

$$a = ۱۰cm \rightarrow \text{اندازه‌ی جابه‌جایی}: |\vec{\Delta r}| = a\sqrt{۳} = ۱۰\sqrt{۳}\ cm$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

در صورتی‌که متحرکی بر روی یک خط راست جابه‌جا شود و در طول حرکت تغییر جهت ندهد، آن‌گاه مسافت طی شده و جابه‌جایی متحرک با یک‌دیگر برابرند.

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow\\ \text{مسافت طی شده}}}{d} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{جابه‌جایی}}}{\Delta x} = ۱۰m$$



(اتومبیل بدون تغییر جهت از A به B برود)

عبارت صحیح: «مسافت طی شده توسط متحرک همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی آن است.»

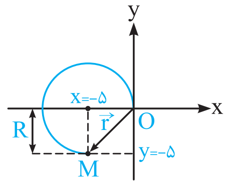
دقت شود که با توجه به درسنامه‌ی فوق، سایر گزینه‌ها صحیح می‌باشد.

۲- (۳) با جای‌گذاری $t=۱s$ در معادله‌ی بردار مکان، به سادگی می‌توان اندازه‌ی آن را در این لحظه به‌دست آورد:

معادله‌ی بردار مکان: $\vec{r}=(۲t+۱)\vec{i}+(t^۲+۳t)\vec{j} \xrightarrow{t=۱s} \vec{r}=(۲\times۱+۱)\vec{i}+(۱^۲+۳\times۱)\vec{j}=\underset{x}{۳}\,\vec{i}+\underset{y}{۴}\,\vec{j}$

اندازه‌ی بردار مکان در $t=۱s$: $|\vec{r}|=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}\xrightarrow[\text{اعداد فیثاغورثی}]{۳,۴\to۵}|\vec{r}|=۵m$

۳- (۱) با توجه به درسنامه‌ی صفحه‌ی قبل، بردار مکان متحرک در نقطه‌ی M، برداری است که ابتدای آن واقع بر مبدأ مختصات و انتهای آن روی نقطه‌ی M باشد:
$\vec{r}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}=-۵\vec{i}-۵\vec{j}$



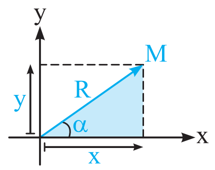
تمرین: **اندازه‌ی بردار مکان متحرک در نقطه‌ی M را به‌دست آورید.**

پاسخ:

$\vec{r}=-۵\vec{i}-۵\vec{j}\Rightarrow|\vec{r}|=\sqrt{(-۵)^۲+(-۵)^۲}=۵\sqrt{۲}\,m \xrightarrow{\text{روش دیگر}} \text{قطر مربع}=|\vec{r}|=a\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}\,m$

۴- (۱)

یادآوری: اگر بردار $\vec{R}$ با افق زاویه‌ی α بسازد، مؤلفه‌های افقی و قائم این بردار عبارت است از:



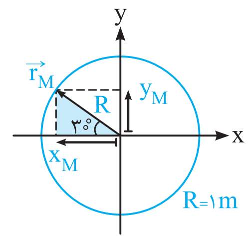
$$\cos\alpha=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{x}{R}\Rightarrow x=R\cos\alpha$$

$$\sin\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{y}{R}\Rightarrow y=R\sin\alpha$$

دقت شود که علامت x و y، با توجه به ربعی که انتهای بردار (نقطه‌ی M) در آن قرار می‌گیرد تعیین می‌شود. در شکل فوق، نقطه‌ی M در ربع اول قرار داشته و در این ربع x و y هر دو مثبت است.

با توجه به یادآوری ارائه شده داریم:

$$\begin{cases}\text{بردار مکان در نقطه‌ی } M: \vec{r}_M=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}\\ \text{مؤلفه‌ی افقی بردار مکان}: x_M=-R\cos۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \text{مؤلفه‌ی عمودی بردار مکان}: y_M=R\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow\vec{r}_M=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{i}+\frac{۱}{۲}\vec{j}$$

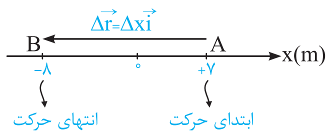


تصویر بردار مکان در نقطه‌ی M

دقت: $\begin{cases}\cos۳۰^\circ=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{x}{R}\\ x=-R\cos۳۰^\circ\end{cases}$

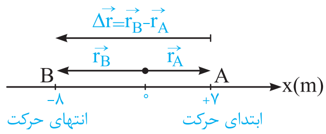
دقت: توجه شود در ربع دوم، مقدار x منفی و مقدار y مثبت است، بنابراین گزینه‌ی (۴) نادرست است.

۵- (۲) **روش اول:** بردار تغییر مکان برداری است که مستقیماً از نقطه‌ی ابتدای حرکت به نقطه‌ی انتهایی آن متصل می‌شود و داریم:



$$\Delta x=x_۲-x_۱=-۸-(۷)=-۱۵m\Rightarrow\vec{\Delta r}=-۱۵\vec{i}$$

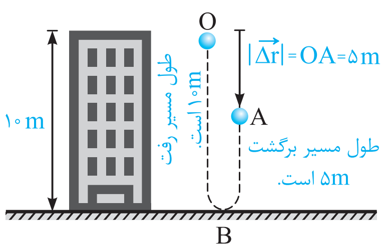
روش دوم: به‌طور کلی بردار تغییر مکان، برابر تفاضل بردارهای مکان ثانویه و اولیه‌ی متحرک است و داریم:



$$\begin{cases}\vec{\Delta r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A\\ \vec{r}_A=۷\vec{i}\\ \vec{r}_B=-۸\vec{i}\end{cases}\Rightarrow\vec{\Delta r}=-۸\vec{i}-۷\vec{i}=-۱۵\vec{i}$$

۶- (۳) با توجه به شکل نشان داده شده، گلوله بعد از پرتاب ابتدا ۱۰ متر به سمت پایین رفته و پس از برخورد به زمین در نقطه‌ی B، تغییر جهت داده و ۵ متر به سمت بالا می‌آید تا به نقطه‌ی A برسد. بنابراین مسافت طی شده توسط گلوله برابر $۱۰+۵=۱۵$ متر است $(d=۱۰+۵=۱۵m)$.

از طرفی مطابق تعریف، جابه‌جایی برداری است که نقطه‌ی پرتاب را مستقیماً به نقطه‌ی A متصل کند، یعنی اندازه‌ی پاره‌خط OA به طول $۵m$ معادل با مقدار جابه‌جایی متحرک است.



$$|\vec{\Delta y}|=|\vec{OA}|=۵m$$

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی}}=\frac{\text{رفت}+\text{برگشت}}{OA}=\frac{۱۰+۵}{۵}=۳$$

بنابراین مسافت طی شده توسط گلوله، سه برابر جابه‌جایی آن است.

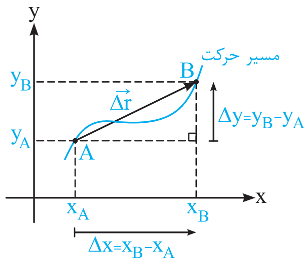
دقت: مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر و یا مساوی جابه‌جایی است و گزینه‌ی (۱) هیچ‌گاه نمی‌تواند صحیح باشد.

۷- (۱)

تذکر: اگر متحرکی از نقطه‌ی $A\Big|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}$ به نقطه‌ی $B\Big|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}$ منتقل شود، بردار جابه‌جایی این متحرک در واقع برداری است که از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B متصل می‌شود و عبارت است از:

بردار جابه‌جایی: $\vec{\Delta r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

اندازه‌ی بردار جابه‌جایی: $|\vec{\Delta r}| = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$

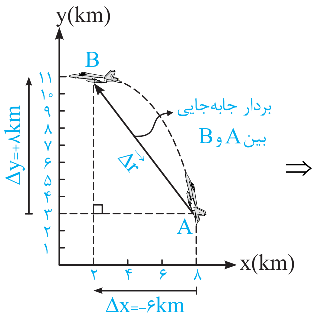


می‌دانیم که بردار جابه‌جایی بین دو نقطه، برابر تفاضل برداری نقاط انتها و ابتدای حرکت است.

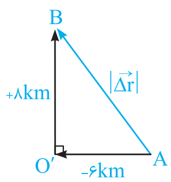
بردار جابه‌جایی بین A و B: $\vec{\Delta r} = \vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

$$A\Big|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}, B\Big|\begin{matrix}-۵\\۳\end{matrix} \to \vec{\Delta r} = (-۵-۲)\vec{i} + (۳-(-۱))\vec{j} = -۷\vec{i} + ۴\vec{j}$$

۸- (۱) **روش اول:** می‌دانیم که جهت بردار جابه‌جایی، هم‌جهت با برداری است که از نقطه‌ی ابتدا (A) به نقطه‌ی انتها (B) متصل می‌شود و برای محاسبه‌ی اندازه‌ی جابه‌جایی با کمک قضیه‌ی فیثاغورث داریم:



$\Rightarrow$



$$\Rightarrow |\vec{\Delta r}| = \sqrt{(-۶)^۲ + ۸^۲} = ۱۰km$$

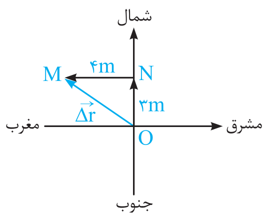
روش دوم: می‌دانیم بردار جابه‌جایی بین دو نقطه برابر تفاضل برداری نقاط ابتدا و انتهای حرکت است، بنابراین داریم:

$$\vec{\Delta r} = \vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$

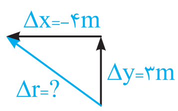
$$A\Big|\begin{matrix}۸\\۳\end{matrix}, \quad B\Big|\begin{matrix}۲\\۱۱\end{matrix} \to \vec{\Delta r} = (۲-۸)\vec{i} + (۱۱-۳)\vec{j} = -۶\vec{i} + ۸\vec{j}$$

$$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{(-۶)^۲ + ۸^۲} = ۱۰km$$

۹- (۱) فرض کنید که متحرک از نقطه‌ی O شروع به حرکت کرده و پس از طی ۳ متر به سمت شمال به نقطه‌ی N می‌رسد. سپس ۴ متر به سمت مغرب رفته تا به نقطه‌ی M برسد. بردار جابه‌جایی متحرک در طول این حرکت برابر $\vec{\Delta r} = \vec{OM}$ بوده و اندازه‌ی آن عبارت است از:



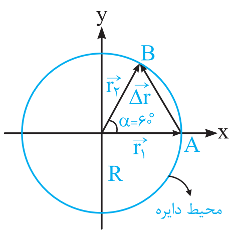
$\equiv$



$$\Rightarrow \vec{\Delta r} = -۴\vec{i} + ۳\vec{j} \Rightarrow |\vec{\Delta r}| = \sqrt{(-۴)^۲ + ۳^۲} = ۵m$$

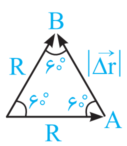
۱۰- (۱) با توجه به تمرین (۱) در درسنامه‌ی (۱)، گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۱۱- (۱) **روش اول:** فرض کنید که متحرک بر روی محیط دایره ۶۰ درجه چرخیده و از A به B منتقل می‌شود. بردار جابه‌جایی متحرک در این حالت برابر تفاضل بردارهای مکان است:

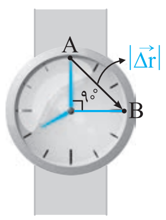


$$\vec{\Delta r} = \vec{r_۲} - \vec{r_۱} \xrightarrow{|\vec{r_۱}| = |\vec{r_۲}| = R} |\vec{\Delta r}| = ۲|\vec{r_۱}|\sin\frac{\alpha}{۲} = ۲R\sin(\frac{۶۰}{۲}) = R$$

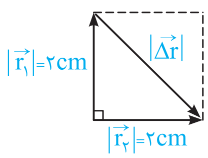
روش دوم: بردار جابه‌جایی برداری است که نقطه ابتدای حرکت را به نقطه‌ی انتها وصل می‌کند، مثلث روبه‌رو یک مثلث متساوی‌الاضلاع است، بنابراین اندازه‌ی جابه‌جایی در این حالت برابر R است (چرا؟). $|\vec{\Delta r}| = R$



۱۲- (۱) عقربه‌ی دقیقه‌شمار، در هر ۶۰ دقیقه یک دور می‌چرخد. بنابراین در طول ۱۵ دقیقه به اندازه‌ی ۹۰ درجه ($\frac{۱}{۴}$ دور) چرخیده و از نقطه‌ای مانند A به B می‌رود:

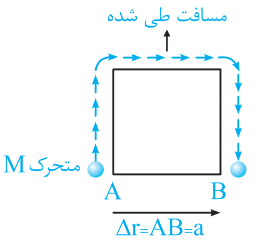


$\Rightarrow$



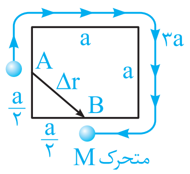
$$\Rightarrow |\vec{\Delta r}| = ۲r\sin\frac{۹۰}{۲} = r\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}\ cm$$

یا $|\vec{\Delta r}| =$ قطر مربع فرضی $= r\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}\ cm$



۱۳- (۳) متحرک در طول حرکت خود توقف ندارد و در صورتی‌که مسافت طی شده توسط متحرک ۳a باشد، ثابت می‌شود:

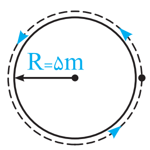
۱) **بیشترین جابه‌جایی** متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از رأس مربع شروع به حرکت کند و سپس مسافتی برابر ۳a را بپیماید، در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر a است، یعنی برابر طول برداری که مستقیماً نقطه‌ی شروع را به نقطه‌ی پایان متصل می‌کند. $\Delta r_{max} = a$



۲) **کم‌ترین جابه‌جایی** متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از وسط یکی از اضلاع مربع شروع به حرکت کند. در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$ است.

$$\begin{cases} \Delta r_{min} = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{a}{۲})^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a \\ \text{نگاه دوم} : \Delta r_{min} = \frac{a}{۲} \text{ قطر مربع فرضی با ضلع } = (\frac{a}{۲})\sqrt{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a \end{cases}$$

دقت: در حل این مسئله شما می‌توانید حالات دیگری به غیر از موارد ۱ و ۲ را نیز بررسی کنید، در این مسئله تحلیل جابه‌جایی‌های مختلف متحرک مدنظر طراح بوده است. به سادگی می‌توان نشان داد که در تمام حالت‌ها، جابه‌جایی از a کوچک‌تر (یا مساوی) و از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$ بزرگ‌تر (یا مساوی) می‌باشد.



۱۴- (۲) متحرک پس از ۱۰ دقیقه، ۱۰ بار به‌طور کامل بر روی دایره چرخیده و مجدداً به نقطه‌ی شروع حرکت می‌رسد، بنابراین جابه‌جایی متحرک در این مدت برابر صفر است. در این حالت مسافت طی شده ۱۰ برابر محیط دایره است.

$$\text{مسافت طی شده} = ۱۰ \times (۲\pi R) = ۱۰ \times ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰۰ m$$

۱۵- (۱) با توجه به تمرین (۲) در درسنامه‌ی (۱)، گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۱۶- (۲) برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به درسنامه‌ی زیر توجه کنید:

درسنامه‌ی ۲ — بررسی ویژگی‌های معادله‌ی مکان

(تست‌های ۱۶ تا ۲۰)

فرض کنید متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است و معادله‌ی مکان ـ زمان آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید: $x = t^۳ + ۲t + ۵$

این معادله معادله‌ای است که اگر زمان را در آن قرار دهیم، بلافاصله موقعیت متحرک را به ما می‌دهد. مثلاً داریم:

$$x = t^۳ + ۲t + ۵ \Rightarrow \begin{cases} t_۰ = ۰ \to x_۰ = ۰^۳ + ۲\times۰ + ۵ = ۵m & (\text{در } t_۰ = ۰ \text{ (شروع حرکت)، } x_۰ = ۵m \text{ است.}) \\ t_۱ = ۱s \to x_۱ = ۱^۳ + ۲\times۱ + ۵ = ۸m & (\text{در } t_۱ = ۱s\text{، } x_۱ = ۸m \text{ است.}) \\ t_۲ = ۲s \to x_۲ = ۲^۳ + ۲\times۲ + ۵ = ۱۷m & (\text{در } t_۲ = ۲s\text{، } x_۲ = ۱۷m \text{ است.}) \end{cases}$$

تذکر: اگر از ما بخواهند جابه‌جایی متحرک را در یک بازه‌ی زمانی مانند $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲s$ از روی معادله‌ی مکان ـ زمان به‌دست آوریم، کافی است مقادیر $t_۱$ و $t_۲$ را در معادله‌ی مکان قرار داده و حاصل $x_۱$ و $x_۲$ را به‌دست آوریم. $x_۲ - x_۱$، معادل با جابه‌جایی متحرک است.

$$\begin{cases} t_۲ = ۲s \to x_۲ = ۱۷m \\ t_۱ = ۱s \to x_۱ = ۸m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۱۷ - ۸ = ۹m$$

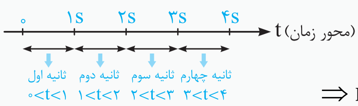
نکات مهم و کاربردی:

۱) مکان اولیه‌ی متحرک یعنی مکان آن در لحظه‌ی $t = ۰$، بنابراین برای پیدا کردن مکان اولیه‌ی یک متحرک کافی است در معادله‌ی مکان ـ زمان آن، t را برابر صفر قرار دهیم.

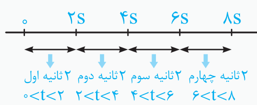
۲) متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است، این متحرک هنگامی از مبدأ عبور می‌کند که $x = ۰$ شود. به‌عبارتی برای پیدا کردن لحظات عبور یک متحرک از مبدأ، کافی است برای آن $x = ۰$ قرار داده شود.

مثال: $x = ۴t - ۸ \xrightarrow[\text{عبور از مبدأ}]{\text{پیدا کردن لحظه‌ی}} x = ۴t - ۸ = ۰ \to t = ۲s$

۳) ثانیه‌ی اول حرکت، یک بازه‌ی زمانی است که طول آن برابر یک ثانیه بوده و از $t = ۰$ شروع می‌شود یعنی $۰ < t < ۱s$، ثانیه‌ی دوم حرکت یعنی $۱s < t < ۲s$ و به همین صورت می‌توان گفت:



ثانیه‌ی nام: $\Rightarrow n - ۱ < t < n$



۴) دو ثانیه‌ی اول حرکت یک بازه‌ی زمانی است که طول آن برابر دو ثانیه و از $t = ۰$ شروع می‌شود، یعنی $۰ < t < ۲s$، دو ثانیه‌ی دوم یعنی $۲s < t < ۴s$* و به همین صورت دو ثانیه‌های بعدی نیز نوشته می‌شود.

* اگر بخواهیم بازه‌های زمانی را دقیق‌تر بنویسیم، ۲ ثانیه‌ی اول معادل با $۰ \le t < ۲s$، ۲ ثانیه‌ی دوم معادل با $۲s \le t < ۴s$ و ... می‌باشد که البته این موضوع از اهمیت چندانی برخوردار نیست و معمولاً در کتاب‌های کنکور رعایت نمی‌شود.

در ادامه با حل سه تمرین نسبتاً ساده، مفاهیم ارائه شده را بهتر درک می‌کنیم.

تمرین ۱: دو ثانیه‌ی هشتم از یک حرکت، معادل با چه بازه‌ی زمانی است؟

پاسخ: دو ثانیه‌ی هشتم یک حرکت، یعنی ۸ بازه‌ی زمانی ۲ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای این بازه‌ی زمانی $۸ \times ۲ = ۱۶s$ است، از طرفی طول هر بازه‌ی زمانی $۲s$ است یعنی: $\underset{\downarrow}{۱۴s} < t < ۱۶s$.

(۲ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.)

تمرین ۲: نه ثانیه‌ی پنجم از یک حرکت، معادل با چه بازه‌ی زمانی است؟

پاسخ: نه ثانیه‌ی پنجم یک حرکت، یعنی ۵ بازه‌ی زمانی ۹ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای بازه‌ی زمانی $۵ \times ۹ = ۴۵s$ است، از طرفی طول هر بازه‌ی زمانی $۹s$ است یعنی $\underset{\downarrow}{۳۶s} < t < ۴۵s$.

(۹ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.)

تمرین ۳: معادله‌ی حرکت متحرکی در SI از رابطه‌ی $x = t^۲ - ۴t$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیه‌ی اول حرکت و در ۲ ثانیه‌ی سوم حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر است؟ (تألیفی)

۱) $۱۲, -۴$ ۲) $۱۰, -۶$ ۳) $۸, -۴$ ۴) $۱۰, -۴$

پاسخ: برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

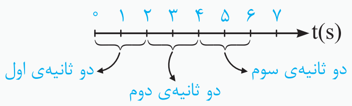
گام اول: محاسبه‌ی جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیه‌ی اول حرکت $(۰ < t < ۲s)$:

$$x = t^۲ - ۴t \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \to x_۱ = ۰ \\ t = ۲s \to x_۲ = ۲^۲ - ۴ \times ۲ = -۴m \end{cases} \Rightarrow \text{جابه‌جایی در دو ثانیه‌ی اول}: \Delta x = x_۲ - x_۱ = -۴m$$

گام دوم: محاسبه‌ی جابه‌جایی در ۲ ثانیه‌ی سوم حرکت $(۴s < t < ۶s)$:

$$x = t^۲ - ۴t \Rightarrow \begin{cases} t = ۴s \to x_۱ = ۴^۲ - ۴ \times ۴ = ۰ \\ t = ۶s \to x_۲ = ۶^۲ - ۴ \times ۶ = ۱۲m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جابه‌جایی در دو ثانیه‌ی سوم}: \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۱۲ - ۰ = ۱۲m$$



بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

با توجه به درسنامه‌ی فوق، مکان متحرک در لحظه‌ی $t = ۰$ (مبدأ زمان) معادل با مکان اولیه‌ی متحرک است. در این سؤال با داشتن معادله‌های مکان دو متحرک، کافی است به جای t مقدار صفر را قرار دهیم:

$$A \text{ معادله‌ی مکان متحرک}: x_A = ۳t^۳ - ۷t + ۵ \xrightarrow{t=۰} x_{۰A} = ۵m$$

$$B \text{ معادله‌ی مکان متحرک}: x_B = ۲\cos \pi t + ۱ \xrightarrow{t=۰} x_{۰B} = ۲\cos(۰) + ۱ = ۲ + ۱ = ۳m$$

هشدار! برخی از داوطلبان ممکن است در رابطه‌ی $x_B = ۲\cos \pi t + ۱$، به اشتباه عدد ۱ را به عنوان $x_{۰B}$ اعلام کنند، در صورتی‌که با قرار دادن $t = ۰$ در عبارت $۲\cos \pi t + ۱$، به عدد ۳ می‌رسیم!

۱۷- (۱) برای محاسبه‌ی مکان متحرک در $t = ۱s$، کافیست در معادله‌ی مکان به جای زمان، $t = ۱s$ را قرار دهیم:

$$\text{معادله‌ی حرکت}: x = t^۳ - t + ۲ \xrightarrow{\text{مکان متحرک در } t=۱s} x = (۱)^۳ - ۱ + ۲ = ۲m$$

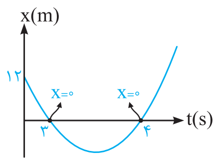
دقت: معادله‌ی حرکت یا مکان ـ زمان معادله‌ای است که از ما مقدار t را گرفته و بلافاصله فاصله‌ی متحرک از مبدأ در آن لحظه را می‌دهد.

هشدار! این تست شاید ساده به نظر برسد، اما دارای دام آموزشی است. یعنی شما به جواب $۲m$ می‌رسید و به اشتباه گزینه‌ی ۲ را در پاسخنامه وارد کرده و به سادگی نمره‌ی منفی می‌گیرید! حدود ۲۰ درصد تست‌های سراسری دارای این‌گونه دام‌های آموزشی هستند.

۱۸- (۱)

تذکر: لحظه‌ای که مکان یک متحرک صفر باشد $(x = ۰)$، متحرک از مبدأ عبور می‌کند. بنابراین برای یافتن لحظاتی که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند، کافی است ریشه‌های معادله حرکت را به‌دست آوریم.
دقت شود با توجه به این‌که حرکت را در زمان‌های مثبت بررسی می‌کنیم، ریشه‌های منفی قابل قبول نیستند.

$$\text{معادله‌ی مکان}: x = t^۲ - ۷t + ۱۲ = ۰ \Rightarrow (t - ۳)(t - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۳s \\ t_۲ = ۴s \end{cases}$$



(نمودار x - t)

این متحرک، دو بار از مبدأ مختصات عبور کرده و در نتیجه فاصله‌ی زمانی دو عبور متحرک از مبدأ برابر $\Delta t = ۴ - ۳ = ۱s$ می‌باشد.

۱۹- (۲) نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی زمانی هفت ثانیه‌ی شروع حرکت، $t_۱=۰$ و $t_۲=۷s$ می‌باشد. بنابراین جابه‌جایی در این بازه‌ی زمانی برابر است با:

$$x=۱/۵+\cos ۷\pi t \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۰ \to x_۱=۱/۵+\overbrace{\cos(۰)}^{۱}=۲/۵\,m \\ t_۲=۷s \to x_۲=۱/۵+\cos(۴۹\pi)=۱/۵+\overbrace{\cos\pi}^{-۱}=۰/۵\,m \end{cases}$$

جابه‌جایی متحرک: $\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۰/۵-۲/۵=-۲\,m$

یادآوری: $\cos \underbrace{۲k\pi}_{\text{مضرب زوج } \pi}=+۱$ و $\cos\underbrace{(۲k-۱)\pi}_{\text{مضرب فرد } \pi}=-۱$

۲۰- (۱) با توجه به تمرین (۳) در درسنامه‌ی (۲)، گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲۱- (۴) برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به درسنامه‌ی زیر توجه کنید:

درسنامه‌ی ۳

به‌دست آوردن معادله‌ی سرعت و شتاب

(تست‌های ۲۱ تا ۲۴)

با دانستن معادله‌ی مکان متحرک، به سادگی می‌توان سرعت یک متحرک را در هر لحظه‌ی دلخواه به‌دست آورد. به همین منظور کافی است از معادله‌ی مکان نسبت به زمان، یک بار مشتق گرفته شود، به‌طور مثال داریم:

$$x=t^۳+۲t+۵ \xrightarrow{\text{معادله‌ی سرعت}} V=\frac{dx}{dt}=۳t^۲+۲$$

با به‌دست آمدن این معادله، به سادگی می‌توان سرعت متحرک در هر لحظه‌ی دلخواه را محاسبه کرد. به‌طور مثال در حرکت فوق داریم:

$$\begin{cases} t_۰=۰ \to V_۰=۳\times ۰^۲+۲=۲\,m/s \quad (\text{سرعت در } t_۰=۰ \text{ یا سرعت اولیه}) \\ t_۱=۱s \to V=۳\times ۱^۲+۲=۵\,m/s \end{cases}$$

نتیجه: سرعت لحظه‌ای، مشتق اول معادله‌ی مکان نسبت به زمان است $\Leftarrow$ $\left(V=\frac{dx}{dt}\right)$

به‌دست آوردن معادله‌ی شتاب

با یک بار مشتق‌گیری از معادله‌ی سرعت، به سادگی معادله‌ی شتاب متحرک به‌دست می‌آید. به طور مثال داریم:

$$V=۳t^۲+۲ \xrightarrow{\text{معادله‌ی شتاب}} a=۶t$$

با به‌دست آوردن این معادله، شتاب متحرک در هر لحظه‌ی دلخواه از حرکت به سادگی به‌دست می‌آید. به طور مثال در حرکت فوق داریم:

$$\begin{cases} t_۰=۰ \to a_۰=۶\times ۰=۰ \\ t_۱=۱s \to a_۱=۶\times ۱=۶\,m/s^۲ \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۱: شتاب لحظه‌ای، مشتق معادله‌ی سرعت نسبت به زمان است. $\Leftarrow$ $a=\frac{dV}{dt}$

نتیجه‌ی ۲: شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله‌ی مکان نسبت به زمان است. $\Leftarrow$ $a=\frac{d^۲x}{dt^۲}$

تمرین ۱: معادله‌ی مکان ـ زمان حرکت متحرکی در SI از رابطه‌ی $x=۰/۲\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{۶}\right)$ به‌دست می‌آید. شتاب متحرک در لحظه‌ی $t=۲s$ در SI برابر است با:

(آزاد ریاضی ۸۸ خارج از کشور)

۱) $۰/۲\pi^۲$ ۲) $-۰/۲\pi^۲$ ۳) $۰/۱\pi^۲$ ۴) $-۰/۱\pi^۲$

پاسخ: با داشتن معادله‌ی مکان ـ زمان و دو بار مشتق گرفتن از آن، معادله‌ی شتاب متحرک به سادگی به‌دست می‌آید:

معادله‌ی مکان ـ زمان: $x=۰/۲\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{۶}\right) \xrightarrow{\text{مشتق}} V=\frac{dx}{dt}=۰/۲\pi\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{۶}\right) \xrightarrow{\text{مشتق}} a=\frac{dV}{dt}=-۰/۲\pi^۲\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{۶}\right)$

$$t=۲s \Rightarrow a=-۰/۲\pi^۲\overbrace{\sin\left(۲\pi\times ۲+\frac{\pi}{۶}\right)}^{\frac{۱}{۲}}=-۰/۲\pi^۲\times\frac{۱}{۲}=-۰/۱\pi^۲\,m/s^۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

یادآوری: در این سؤال توجه شود که $\sin\left(۴\pi+\frac{\pi}{۶}\right)$ با $\sin\frac{\pi}{۶}$ معادل بوده و مقدار آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

به طور کلی: $\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$ (k عددی صحیح)

با توجه به درسنامه‌ی فوق، آهنگ تغییرات مکان متحرک در بازه‌ی زمانی Δt، $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$، معادل سرعت متوسط متحرک بوده و در نتیجه عبارت مطرح شده در گزینه‌ی (۴) نادرست است، دقت شود که سایر گزینه‌ها صحیح می‌باشند. در مورد سرعت متوسط در ادامه‌ی فصل توضیح خواهیم داد.

۲۲- (۱)

تذکر: هرگاه اشاره شود سرعت متحرک در لحظه‌ی t چه‌قدر است، منظور همان سرعت لحظه‌ای متحرک است.

با در اختیار داشتن معادله‌ی مکان ـ زمان و مشتق گرفتن از آن، معادله‌ی سرعت لحظه‌ای متحرک به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\text{معادله‌ی مکان}: x = t^2 + 75 \xrightarrow{\text{مشتق}} \text{معادله‌ی سرعت}: V = \frac{dx}{dt} = 2t \xrightarrow{t=5s} \text{سرعت لحظه‌ای}: V = 2 \times 5 = 10\,m/s$$

۲۳- (۴) با توجه به تمرین (۱) در درسنامه‌ی (۳)، گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۲۴- (۲) در گام اول معادله‌ی شتاب متحرک را به‌دست آورده و سپس زمانی که شتاب برابر $12\,m/s^2$ می‌شود را مشخص می‌کنیم:

$$\text{معادله حرکت}: x = t^3 + 3t^2 - 5 \xrightarrow{\text{مشتق}} \text{معادله‌ی سرعت}: V = 3t^2 + 6t \xrightarrow{\text{مشتق}} \text{معادله‌ی شتاب}: a = 6t + 6$$

در چه لحظه‌ای شتاب $12\,m/s^2$ می‌شود؟ $\Rightarrow 6t + 6 = 12 \Rightarrow t = 1s$

در گام بعدی، سرعت متحرک را در این لحظه به‌دست می‌آوریم:

$$V = 3t^2 + 6t \xrightarrow{t=1s} V = 3 \times 1^2 + 6 \times 1 = 9\,m/s$$

۲۵- (۴) برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به درسنامه‌ی زیر توجه کنید:

درسنامه‌ی ۴ — آشنایی با یک تکنیک (تست‌های ۲۵ تا ۲۸)

این قسمت را با یک مثال ساده به شما آموزش می‌دهیم. فرض کنید می‌خواهیم بدانیم اگر متحرکی با سرعت اولیه‌ی $+2\,m/s$ بر روی محور x حرکت کرده و معادله‌ی شتاب ـ زمان آن از رابطه‌ی $a = 2t + 1$ به‌دست آید، معادله‌ی سرعت ـ زمان آن چگونه محاسبه می‌شود؟

برای به‌دست آوردن معادله‌ی سرعت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

از V مشتق گرفته‌ایم. ⇐ a به‌دست آمده است.

$$\begin{cases} V = At^2 + Bt + V_0 & (\text{لزوماً از درجه‌ی دو است (چرا؟).}\ V) \\ a = \ \ 2t\ +1 & (\text{به صورت درجه‌ی یک است.}\ a) \end{cases}$$

$$At^2 \xrightarrow{\text{از آن مشتق گرفته‌ایم}} \text{حاصل } 2t \text{ شده است.} \xrightarrow{\text{A چه بوده است؟}} A = 1$$

$$Bt \xrightarrow{\text{از آن مشتق گرفته‌ایم}} \text{حاصل ۱ شده است.} \xrightarrow{\text{B چه بوده است؟}} B = 1$$

از طرفی با توجه به این‌که در $t = 0$ سرعت اولیه‌ی متحرک برابر $+2\,m/s$ بوده است، معادله‌ی سرعت آن عبارت است از:

$$V = t^2 + t + V_0 \xrightarrow[V=2m/s]{t=0} V_0 = 2\,m/s$$

با شیوه‌ی مشابه، معادله‌ی مکان متحرک نیز به‌دست می‌آید (روش عکس مشتق).

تذکر: عملیات فوق که در آن در واقع عکس عمل مشتق‌گیری را انجام دادیم، به نوعی همان انتگرال‌گیری است. یعنی می‌توان گفت:

$V = \int a\,dt = \int (2t+1)dt = t^2 + t + c$ عدد ثابت c، همان V_0 است.

یادآوری:

$$\int ax^n dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$$

نکات مهم برداشت شده از مفاهیم انتگرال و مشتق:

از x مشتق بگیریم ⇐ معادله‌ی V به‌دست می‌آید
معادله‌ی x به‌دست می‌آید ⇒ از معادله V انتگرال بگیریم

از V مشتق بگیریم ⇐ معادله‌ی a به‌دست می‌آید
معادله‌ی V به‌دست می‌آید ⇒ از معادله‌ی a انتگرال بگیریم

مطابق آن‌چه در درسنامه‌ی فوق گفته شد، فرم کلی معادله‌ی مکان مربوط به معادله‌ی سرعت داده شده، به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + x_0 & (\text{درجه‌ی ۳}) \\ V = -6t^2 + 6t + 0 & (\text{درجه‌ی ۲}) \end{cases}$$

محاسبه‌ی ضرایب معادله‌ی مکان ـ زمان:

$$\begin{cases} at^3 \xrightarrow{\text{از آن مشتق گرفته‌ایم}} \text{حاصل برابر } -6t^2 \text{ شده است.} \xrightarrow{\text{a چه بوده است؟}} a = -2 \\ bt^2 \xrightarrow{\text{از آن مشتق گرفته‌ایم}} \text{حاصل برابر } 6t \text{ شده است.} \xrightarrow{\text{b چه بوده است؟}} b = 3 \\ ct \xrightarrow{\text{از آن مشتق گرفته‌ایم}} \text{حاصل برابر صفر شده است.} \xrightarrow{\text{c چه بوده است؟}} c = 0 \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی مکان متحرک به‌صورت مقابل است: $x=-۲t^۳+۳t^۲+x_۰$

از طرفی در لحظه‌ی $t=۱s$، متحرک در مکان $x=-۲m$ قرار دارد و داریم:

$$-۲=-۲\times۱^۳+۳\times۱^۲+x_۰ \Rightarrow \text{مکان اولیه}: x_۰=-۳m \Rightarrow \text{معادله‌ی حرکت}: x=-۲t^۳+۳t^۲-۳$$

کمی خلاقیت: بدون حل نیز می‌توان گفت با توجه به این‌که معادله‌ی سرعت از درجه‌ی ۲ است، معادله‌ی مکان از درجه‌ی ۳ بوده و تنها گزینه‌ی (۴) می‌تواند صحیح باشد. توجه شود که درجه‌ی معادله‌ی سرعت یک واحد کوچک‌تر از درجه‌ی معادله‌ی مکان است.

۲۶- (۱) با مشتق گرفتن از معادله‌ی سرعت ـ زمان، به سادگی معادله‌ی شتاب ـ زمان به‌دست می‌آید و داریم:

$$V=-۶t^۲+۶t \xrightarrow{\text{مشتق}} a=\frac{dV}{dt}=-۱۲t+۶$$

۲۷- (۳) برای پاسخ به این سؤال، ابتدا با مشتق گرفتن از معادله‌ی مکان ـ زمان، معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{۲}{۳}t^۳-۶t^۲+۲۰t \xrightarrow{V=\frac{dx}{dt}} V=۲t^۲-۱۲t+۲۰$$

حال برای به‌دست آوردن کم‌ترین مقدار سرعت متحرک در طول مسیر، باید حداقل مقدار تابع سرعت ـ زمان را برای $t>۰$ بیابیم (یافتن نقاط اکسترمم):

$$\frac{dV}{dt}=۰ \Rightarrow ۴t-۱۲=۰ \Rightarrow t=۳s \xrightarrow{t=۳s} V=۲\times(۳)^۲-۱۲(۳)+۲۰=۲m/s$$

تذکر: با نوشتن معادله‌ی سرعت ـ زمان به‌صورت شکل زیر نیز می‌توان فهمید که کم‌ترین مقدار سرعت متحرک، مربوط به لحظه‌ی $t=۳s$ است که برابر $۲m/s$ می‌باشد.

$$V=۲(t^۲-۶t+۱۰)=۲(t^۲-۶t+۹+۱)=۲(t-۳)^۲+۲ \Rightarrow V_{min}=۲m/s$$

۲۸- (۱) بر اساس مهارتی که در درسنامه‌ی شماره‌ی (۴) آموختیم، معادله‌ی شتاب را با استفاده از عملیات عکس مشتق به‌دست می‌آوریم.

دقت شود چون معادله‌ی شتاب $(a=۱/۲t-۵)$ درجه‌ی یک است، پس معادله‌ی سرعت نسبت به t یک رابطه‌ی درجه دوم است و داریم:

$$\begin{cases} V=\overset{?}{A}\,t^۲+\overset{?}{B}\,t+V_۰ \\ a=۱/۲t^۱-۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} At^۲ \xrightarrow{\text{از آن مشتق گرفته‌ایم}} \text{حاصل برابر } ۱/۲t \text{ شده است.} \xrightarrow{\text{A چه بوده است؟}} A=۰/۶ \\ Bt \xrightarrow{\text{از آن مشتق گرفته‌ایم}} \text{حاصل برابر } -۵ \text{ شده است.} \xrightarrow{\text{B چه بوده است؟}} B=-۵ \end{cases} \Rightarrow \text{معادله‌ی سرعت}: V=۰/۶t^۲-۵t+V_۰$$

از طرفی متحرک در $t=۰$ ساکن است، یعنی سرعت اولیه‌ی آن صفر بوده و $V_۰=۰$ است. در نهایت سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=۱۰s$ به سادگی به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

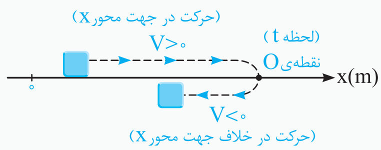
$$t=۱۰s \rightarrow V=۰/۶(۱۰)^۲-۵\times۱۰=۱۰m/s$$

۲۹- (۱) برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به درسنامه‌ی زیر توجه کنید:

درسنامه‌ی ۵ — بررسی لحظه‌ی تغییر جهت یک متحرک

(تست‌های ۲۹ تا ۳۲)

در شکل مقابل متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است. این متحرک در ابتدا در جهت محور x در حال حرکت است (این موضوع یعنی سرعت آن مثبت است) در لحظه‌ی t، متحرک به نقطه‌ی O رسیده و در این نقطه متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (این موضوع یعنی ادامه‌ی حرکت سرعت آن منفی می‌شود.)، لحظه‌ی t را در اصطلاح **لحظه‌ی تغییر جهت متحرک** می‌نامیم.



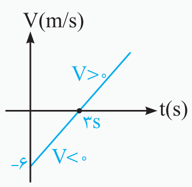
شرط تغییر جهت دادن متحرک در نقطه‌ی O: برای این منظور باید سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لزوماً علامت سرعت متحرک تغییر کند.

نکته‌ی مهم: برای به‌دست آوردن لحظه‌ی تغییر جهت یک متحرک، کافی است ریشه‌های معادله‌ی سرعت ـ زمان آن را به‌دست آورده و کنترل کنیم که قبل و بعد از ریشه‌ی به‌دست آمده، تغییر علامت برای سرعت متحرک رخ می‌دهد یا خیر (در اصطلاح ریشه‌ی به‌دست آمده ساده است یا خیر؟).

به طور مثال برای معادله‌ی سرعت ـ زمان زیر داریم:

$$V=۲t-۶ \xrightarrow{V=۰} ۲t-۶=۰ \Rightarrow t=۳s \ (\text{لحظه‌ی تغییر جهت})$$

نقاط کمک جهت رسم نمودار
به t صفر بدهیم ← $V=-۶m/s$
به V صفر بدهیم ← $t=۳s$



$\Rightarrow$ (قبل از $t=۳s$، سرعت متحرک منفی و بعد از $t=۳s$ سرعت آن مثبت است، بنابراین در این لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد.)

در ادامه با یک تمرین مناسب، این مفهوم را بیشتر بررسی می‌کنیم.

تمرین ۱: معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = ۲۰t - ۲t^۲$ است. سرعت این متحرک پس از طی چند متر جابه‌جایی تغییر جهت می‌دهد؟ (آزاد تجربی ۷۴)

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ: برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبه‌ی لحظه‌ای که سرعت متحرک تغییر جهت می‌دهد:

$$x = ۲۰t - ۲t^۲ \longrightarrow V = ۲۰ - ۴t \xrightarrow{V=۰} ۲۰ - ۴t = ۰ \Rightarrow t = ۵s$$

گام دوم: محاسبه‌ی جابه‌جایی متحرک پس از ۵ ثانیه:

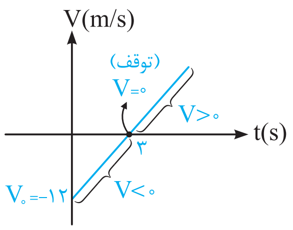
$$\begin{cases} t_۱ = ۰ \rightarrow x_۱ = ۰ \\ t_۲ = ۵s \rightarrow x_۲ = ۲۰t - ۲t^۲ = ۲۰ \times ۵ - ۲ \times ۵^۲ = ۵۰m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۵۰m$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

همان‌گونه که در درسنامه‌ی فوق نیز ذکر شد، برای تعیین لحظات تغییر جهت متحرک، کافی است معادله‌ی سرعت را به‌دست آورده و آن را برابر صفر قرار داده و بررسی کنیم که سرعت در ریشه‌ی معادله تغییر علامت می‌دهد یا خیر. برای این منظور رسم نمودار سرعت زمان روش مناسبی است:

$$x = ۲t^۲ - ۱۲t \xrightarrow{\text{مشتق}} \text{معادله‌ی سرعت}: V = ۴t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = ۳s$$

توجه: همان‌طور که مشاهده می‌شود برای رسم نمودار کافی است از دو نقطه‌ی کمکی A $\left| \begin{matrix} t = ۰ \\ V_۰ = -۱۲ \end{matrix} \right.$ و B $\left| \begin{matrix} t = ۳s \\ V = ۰ \end{matrix} \right.$ استفاده شود (در ریاضی یک بار به x صفر می‌دادیم و y را حساب می‌کردیم و یک بار به y صفر می‌دادیم و x را به‌دست می‌آوردیم).
نمودار سرعت ـ زمان مقابل نشان می‌دهد که متحرک قبل از لحظه‌ی $t = ۳s$ (لحظه‌ی توقف) سرعت منفی دارد و بعد از لحظه‌ی $t = ۳s$ دارای سرعت مثبت است (بالای محور زمان)، بنابراین در لحظه‌ی $t = ۳s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد.



۳۰- (۱)

تذکر: به‌طور کلی ریشه‌های ساده‌ی معادله‌ی سرعت ـ زمان لحظاتی هستند که متحرک در آن تغییر جهت می‌دهد، اما در ریشه‌های مضاعف معادله‌ی سرعت ـ زمان با این‌که سرعت صفر می‌شود، ولی متحرک تغییر جهت نمی‌دهد (دقت کنیم هر دو نوع ریشه برای متحرک، لحظه‌ی توقف محسوب می‌شود).

$$\text{مثال}: V = \underbrace{(t-۱)}_{\text{توان ۱}} \times \underbrace{(t-۲)^۲}_{\text{توان ۲}} \times \underbrace{(t-۳)^۳}_{\text{توان ۳}} \xrightarrow{V=۰} \begin{cases} t = ۱s \quad (\text{ریشه‌ی ساده}) \Rightarrow (\text{لحظه‌ی تغییر جهت}) \\ t = ۲s \quad (\text{ریشه‌ی مضاعف}) \Rightarrow (\text{تغییر جهت نمی‌دهد}) \\ t = ۳s \quad (\text{ریشه‌ی ساده}) \Rightarrow (\text{لحظه‌ی تغییر جهت}) \end{cases}$$

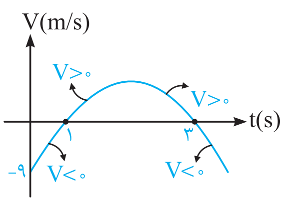
دقت شود ریشه‌ی ساده در عبارت‌های با توان فرد مشاهده شده و ریشه‌ی مضاعف در عبارت‌های با توان زوج مشاهده می‌شود.

$$x = -t^۳ + ۶t^۲ - ۹t \xrightarrow{\text{مشتق}} V = -۳t^۲ + ۱۲t - ۹ = ۰ \xrightarrow[\text{از ۳}]{\text{فاکتورگیری}} ۳ \times (t^۲ - ۴t + ۳) = ۰ \Rightarrow ۳ \times (t-۱)(t-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱s \quad (\text{ریشه‌ی ساده}) \\ t_۲ = ۳s \quad (\text{ریشه‌ی ساده}) \end{cases}$$

بنابراین فاصله‌ی زمانی بین دو تغییر جهت برای این متحرک برابر $\Delta t = ۳ - ۱ = ۲s$ است.

دقت: برای اطمینان بیشتر از این‌که متحرک در لحظات فوق تغییر جهت می‌دهد یا خیر، نمودار سرعت زمان آن را رسم کرده و بررسی می‌کنیم که آیا علامت سرعت در این لحظات تغییر کرده است یا خیر!

$$\begin{cases} V = -۳t^۲ + ۱۲t - ۹ \xrightarrow{t=۰} V_۰ = -۹ m/s \\ (t^۲ \text{ ضریب}) < ۰ \rightarrow \frown \text{ تقعر منحنی به سمت پایین است} \end{cases}$$



۳۱- (۴) مشابه با سؤال قبل داریم:

$$x = \frac{t^۳}{۳} - ۲t^۲ + ۴t \xrightarrow{\text{مشتق}} V = t^۲ - ۴t + ۴ = ۰ \Rightarrow (t-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow \underbrace{t = ۲s}_{(\text{ریشه‌ی مضاعف})}$$

t	۰		۲		∞
V		+	۰	+	

با توجه به این‌که علامت سرعت در $t = ۲s$ تغییر نمی‌کند، این متحرک در هیچ لحظه‌ای تغییر جهت نداده (چرا؟) و گزینه‌ی (۴) صحیح است.