بخش اوّل : آموزش ریاضیات

آموزش نکات مهمّ ریاضی:

فصل اوّل ← اعداد و الگوها ۸

فصل دوم ← کسر ۱۷

فصل سوم ← ضرب و تقسیم ۲۰

فصل چهارم ← اندازه‌گیری ۳۴

فصل پنجم ← عدد مخلوط و عدد اعشاری ۴۱

فصل ششم ← اشکال هندسی ۴۵

فصل هفتم ← آمار و احتمال ۵۶

فصل اوّل

اعداد و الگوها

عددنویسی

با حروف «ا ، ن ، م ، ی» چندین کلمه‌ی متفاوت می‌توان نوشت، مانند: امین، مینا، نیما، مانی، ماماِن، نان، امان، ایمان و ...

درحقیقت، تمام کلمه‌هایی که در زبان فارسی مورد استفاده قرار می‌گیرند، با استفاده از ۳۲ حرف الفبا ساخته می‌شوند. در مورد اعداد هم همین‌طور است. تمام اعدادی که می‌شناسیم (اعداد مشابه کلمات هستند)، تنها با استفاده از ۱۰ رقم (مشابه حروف الفبا) ساخته شده‌اند که عبارت‌اند از: ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹

به‌طور مثال، با ارقام ۳ , ۲ , ۱ می‌توان این اعداد ۳ رقمی را نوشت:

۱۱۱ , ۱۱۲ , ۱۱۳ , ۱۲۱ , ۱۲۲ , ۱۲۳ , ۱۳۱ , ۱۳۲ , ۱۳۳ , ۲۱۱ , ۲۱۲ , ۲۱۳ , ۲۲۱ , ۲۲۲ , ۲۲۳ , ۲۳۱ , ۲۳۲ , ۲۳۳ , ۳۱۱ , ۳۱۲
۳۱۳ , ۳۲۱ , ۳۲۲ , ۳۲۳ , ۳۳۱ , ۳۳۲ , ۳۳۳

نکته: نوشتن اعدادی که ارقام آن‌ها تکراری نباشند، فقط تا عدد ۱۰ رقمی ممکن است؛ زیرا تنها ده رقم متمایز داریم و عددهایی با تعداد ارقام بیش‌تر، حتماً رقم تکراری خواهند داشت.

طبقه و مرتبه

برای خواندن یک عدد، آن را از سمت راست، سه‌رقم سه‌رقم جدا کرده و با توجّه به مرتبه و طبقه‌اش می‌خوانیم.

مثال ۱ عدد ۵۸۴/۰۲۱/۰۷۰/۹۳۶ را خوانده و طبقه و مرتبه‌ی رقم (۲) را مشخّص کنید.

طبقه	یکی‌ها			هزارها			میلیون‌ها			میلیاردها		
مرتبه	یکان	دهگان	صدگان	یکان	دهگان	صدگان	یکان	دهگان	صدگان	یکان	دهگان	صدگان
رقم	۶	۳	۹	۰	۷	۰	۱	۲	۰	۴	۸	۵

پانصد و هشتاد و چهار میلیارد و بیست و یک میلیون و هفتاد هزار و نهصد و سی و شش

رقم ۲ در طبقه‌ی میلیون‌ها و مرتبه‌ی دهگان میلیون قرار دارد.

ارزش مکانی

ارزش مکانی هر رقم، برابر با حاصل‌ضرب آن رقم در مرتبه‌اش است. در مثال (۱)، ارزش مکانی ارقام ۴، ۷ و ۹ برابر است با:

ارزش مکانی		مرتبه		رقم
۴/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰	=	۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰	×	۴
۷۰/۰۰۰	=	۱۰/۰۰۰	×	۷
۹۰۰	=	۱۰۰	×	۹

نکته: در همه‌ی اعداد، اوّلین رقم سمت راست، کم‌ترین و اوّلین رقم سمت چپ، بیش‌ترین ارزش مکانی را دارد.

در نوشتن اعداد، در هر مرتبه، تنها یک رقم نوشته می‌شود، امّا گاهی در سؤالات از تعداد ارقام بیش‌تری استفاده می‌شود که در این‌صورت باید با محاسبه‌ی حاصل‌جمع ارزش مکانی اعداد داده‌شده، عدد موردنظر را یافت.

مثال ۲ **عددی از ۱۵ یکی، ۲۴۰ ده‌تایی و ۳۵ صدتایی تشکیل شده است. این عدد چند است؟**

$$\begin{array}{lr} ۱۵ \times ۱ = & ۱۵ \\ ۲۴۰ \times ۱۰ = & ۲۴۰۰ \\ ۳۵ \times ۱۰۰ = & +\ ۳۵۰۰ \\ \hline & ۵۹۱۵ \end{array}$$

برای تعیین تعداد چند عدد متوالی که ابتدا و انتهای آن‌ها مشخّص است، باید به کلمه‌های به‌کاررفته در صورت سؤال دقّت کرد:

الف) اگر تعداد اعداد «از» ابتدا «تا» انتها را خواسته بودند (ابتدا و انتها را هم باید محاسبه کرد) از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

تعداد اعداد = (انتها − ابتدا) + ۱

مثال ۳ **از ۳۵ تا ۲۸۷ چند عدد داریم؟**

$(۲۸۷ - ۳۵) + ۱ = ۲۵۲ + ۱ = ۲۵۳$

ب) اگر تعداد اعداد «بین» ابتدا «و» انتها را خواسته بودند (ابتدا و انتها جزو اعداد محاسبه نمی‌شوند) از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

تعداد اعداد = (انتها − ابتدا) − ۱

مثال ۴ **بین ۱۲۴ و ۸۹۶ چند عدد وجود دارد؟**

$(۸۹۶ - ۱۲۴) - ۱ = ۷۷۲ - ۱ = ۷۷۱$

تعداد اعداد یک‌رقمی (از ۱ تا ۹)، نه تا است. برای محاسبه‌ی تعداد دیگر اعداد چندرقمی، کافی است یکی از دو روش زیر را انجام دهیم:

روش اوّل: اختلاف بزرگ‌ترین عدد چندرقمی و بزرگ‌ترین عدد با یک رقم کم‌تر را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۵ **چند عدد ۵رقمی داریم؟**

درحقیقت، از ۱ تا ۹۹۹۹۹ (بزرگ‌ترین عدد ۵رقمی)، ۹۹۹۹ عدد (بزرگ‌ترین عدد ۴رقمی)، ۵رقمی نیستند و مابقی (۹۰۰۰۰ عدد)، ۵رقمی هستند.

$$\begin{array}{rl} ۹۹۹۹۹ & \text{بزرگ‌ترین عدد ۵ رقمی} \\ -\ ۹۹۹۹ & \text{بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی} \\ \hline ۹۰۰۰۰ & \end{array}$$

روش دوم: رقم ۹ را می‌نویسیم و جلوی آن، به تعداد یکی کم‌تر از ارقام، صفر می‌گذاریم.

مثال ۶ **چند عدد ۷رقمی داریم؟**

$۹\underbrace{۰۰۰۰۰۰}_{۷-۱=۶\ \text{رقم}}$

ترتیب عملیّات

گاهی در یک عبارت، چند عمل مختلف وجود دارد که بسته به اولویّت انجام عملیّات، جواب‌های متفاوتی برای آن به‌دست می‌آید. مانند:

$۱۸ - ۳ \times ۶ + ۴ \div ۲ = ?$

۱) $\underbrace{۱۸ - ۳}_{۱۵} \times ۶ + ۴ \div ۲ = ۱۵ \times ۶ + ۴ \div ۲ = ۹۰ + ۴ \div ۲ = ۹۴ \div ۲ = ۴۷$

۲) $۱۸ - \underbrace{۳ \times ۶}_{۱۸} + ۴ \div ۲ = ۱۸ - ۱۸ + ۴ \div ۲ = ۰ + ۴ \div ۲ = ۴ \div ۲ = ۲$

۳) $\underbrace{۱۸ - ۳}_{۱۵} \times \underbrace{۶ + ۴}_{۱۰} \div ۲ = ۱۵ \times ۱۰ \div ۲ = ۷۵$

۴) $۱۸ - \underbrace{۳ \times ۶}_{۱۸} + \underbrace{۴ \div ۲}_{۲} = ۱۸ - ۱۸ + ۲ = ۰ + ۲ = ۲$

۵) $\underbrace{۱۸ - ۳}_{۱۵} \times ۶ + \underbrace{۴ \div ۲}_{۲} = ۱۵ \times ۶ + ۲ = ۹۰ + ۲ = ۹۲$

از این رو ترتیب عملیّات در ریاضی، بسیار حائز اهمیّت و این‌چنین است:

۱ پرانتز

۲ ضرب یا تقسیم (از چپ به راست)

۳ جمع یا تفریق (از چپ به راست)

مثال ۷ حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$۲۵ + ۳ \times ۴ \div ۲ - (۷ + ۳) =$$

$$\underbrace{\underbrace{۲۵ + \underbrace{\underbrace{۳ \times ۴}_{(۲)} \div ۲}_{(۳)}}_{(۴)} - \underbrace{(۷ + ۳)}_{(۱)}}_{(۵)}$$

۱) $۷ + ۳ = ۱۰$

۲) $۳ \times ۴ = ۱۲$

۳) $۱۲ \div ۲ = ۶$

۴) $۲۵ + ۶ = ۳۱$

۵) $۳۱ - ۱۰ = ۲۱$

سؤال ۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۲ + ۵ \times (۱۲ \div ۴ - ۳) - ۱ =$

ب) $۱۸ \div ۳ + ۹ - (۴ + ۴ \div ۲) =$

۶ به‌دست آوردن تعداد اعداد چندرقمی با ارقام مشخّص

گاهی چند رقم داده می‌شود و تعداد اعداد چندرقمی را می‌خواهند که با آن ارقام می‌توان نوشت. این‌گونه مسائل ممکن است به چند صورت مطرح شوند:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد: در این‌صورت، در هر مرتبه می‌توان به تعداد ارقام داده‌شده، رقم متفاوت گذاشت و درنتیجه، تعداد کلّ اعداد از حاصل‌ضرب تعداد ارقامی به‌دست می‌آید که در هر مرتبه می‌توان قرار داد.

مثال ۸ با ارقام ۷ ، ۲ ، ۵ ، ۴ و ۱ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

در هر مرتبه، هریک از اعداد داده‌شده (پنج عدد ۷ ، ۲ ، ۵ ، ۴ و ۱) را می‌توان نوشت و داریم:

یکان دهگان صدگان

تعداد اعداد $= ۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$

نکته: درصورتی‌که عدد صفر، جزو ارقام داده‌شده باشد، آخرین (بزرگ‌ترین) مرتبه را نمی‌توان صفر قرار داد و باید یکی از تعداد ارقام کم کرد، امّا در مرتبه‌های دیگر، به تعداد ارقام داده‌شده، می‌توان رقم گذاشت.

مثال ۹ با ارقام ۲ ، ۹ ، ۶ و ۰ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

یکان دهگان صدگان

تعداد اعداد $= \underbrace{۳}_{} \times ۴ \times ۴ = ۴۸$

اگر صفر بگذاریم، عدد دورقمی می‌شود.

ب) عدد زوج یا فرد باشد: در این‌صورت، تنها تفاوتی که با حالت قبلی دارد، این است که تعداد رقم‌هایی که در مرتبه‌ی یکان قرار می‌گیرد، بستگی به زوج یا فرد بودن ارقام داده‌شده دارد. (چون عددی زوج (فرد) است که یکانش زوج (فرد) باشد.)

مثال ۱۰ با ارقام ۷ ، ۳ ، ۴ ، ۸ و ۰ چند عدد سه‌رقمی زوج می‌توان نوشت؟

یکان دهگان صدگان

$$\text{تعداد اعداد} = \underbrace{۴}_{\text{۴، ۸ یا ۰}} \times ۵ \times \underbrace{۳}_{\text{صفر نمی‌تواند باشد.}} = ۶۰$$

ج) **تکرار ارقام مجاز نباشد:** در این‌صورت، اگر از رقمی در یک مرتبه استفاده کنیم، اجازه نداریم مجدّداً از آن استفاده کنیم. به‌همین دلیل، در هر مرتبه، تعداد ارقام یکی کم‌تر از مرتبه‌ی قبلی می‌شود و تعداد کلّ اعداد از حاصل‌ضرب ارقامی به‌دست می‌آید که در هر مرتبه می‌توان قرار داد.

مثال ۱۱ با ارقام ۹ ، ۵ ، ۶ ، ۴ و ۳ چند عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

یکان دهگان صدگان یکان‌هزار

$$\text{تعداد اعداد} = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۱۲۰$$

مثال ۱۲ با رقم‌های ۷ ، ۲ ، ۰ ، ۳ و ۱ چند عدد چهاررقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟

یکان دهگان صدگان یکان‌هزار

$$\text{تعداد اعداد} = \underbrace{۴}_{\text{صفر نمی‌تواند باشد.}} \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

به‌دست آوردن تعداد ارقام چند عدد متوالی با ابتدا و انتهای مشخّص

در ابتدا باید تعداد کلّ اعداد و سپس تعداد اعداد یک‌رقمی، دورقمی، سه‌رقمی و ... را مشخّص کرد و تعداد اعداد هرکدام را در تعداد رقم‌هایشان ضرب کرد. (به‌طور مثال، برای ۹۰ عدد دورقمی $۱۸۰ = \underbrace{۲}_{\text{تعداد رقم‌ها}} \times \underbrace{۹۰}_{\text{تعداد اعداد دورقمی}}$ رقم نیاز داریم.) تعداد کلّ رقم‌ها از مجموع این حاصل‌ضرب‌ها به‌دست می‌آید.

مثال ۱۳ برای شماره‌گذاری یک کتاب ۲۵۴ صفحه‌ای، چند رقم به‌کار رفته است؟

عدد (از ۱ تا ۲۵۴) ۲۵۴ =

	تعداد اعداد		تعداد ارقام		
۹ عدد یک‌رقمی	۹	×	۱	=	۹
۹۰ عدد دورقمی	۹۰	×	۲	=	+ ۱۸۰
۱۵۵ عدد سه‌رقمی (۲۵۴ − ۹۹ = ۱۵۵)	۱۵۵	×	۳	=	۴۶۵
					۶۵۴

مثال ۱۴ اگر اعداد ۲۵ تا ۱۱۳ را بدون فاصله پشت سرهم بنویسیم، عدد حاصل چندرقمی خواهد بود؟

$$\left.\begin{array}{l} \text{تعداد اعداد} = (۱۱۳ - ۲۵) + ۱ = ۸۹ \\ \text{اعداد سه‌رقمی} = ۱۱۳ - ۹۹ = ۱۴ \\ \text{اعداد دورقمی} = ۸۹ - ۱۴ = ۷۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تعداد ارقام} = (۷۵ \times ۲) + (۱۴ \times ۳) = ۱۵۰ + ۴۲ = ۱۹۲$$

تعداد دفعات استفاده از یک رقم، در نوشتن چند عدد متوالی

برابر با مجموع تعداد دفعاتی است که آن عدد می‌تواند در هر مرتبه‌ی خاص قرار گیرد.

مثال ۱۵ **در نوشتن اعداد ۱ تا ۱۱۵، چندبار از عدد ۴ استفاده کرده‌ایم؟**

صدگان دهگان یکان

۰ + ۱۰ + ۱۲ = ۲۲

یکان: ۴ , ۱۴ , ۲۴ , ۳۴ , ۴۴ , ۵۴ , ۶۴ , ۷۴ , ۸۴ , ۹۴ , ۱۰۴ , ۱۱۴

دهگان: ۴۰ , ۴۱ , ۴۲ , ۴۳ , ۴۴ , ۴۵ , ۴۶ , ۴۷ , ۴۸ , ۴۹

نکته: تعداد اعدادی که رقم ۴ در آن‌ها استفاده شده است، یکی کم‌تر است؛ چون عدد ۴۴ را دو بار شمرده‌ایم (یک‌بار برای یکان و یک‌بار برای دهگان)؛ یعنی: ۲۱ = ۱ − ۲۲

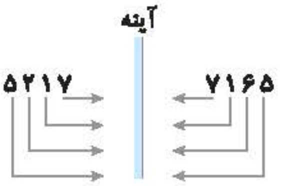
تصویر اعداد در آینه

تصویر ارقام ۳ ، ۴ و ۹ در آینه بی‌معنی و تصویر ارقام ۰ ، ۱ ، ۵ ، ۷ و ۸ برابر با خودشان است، امّا ارقام ۲ و ۶ در آینه به یک‌دیگر تبدیل (تصویر ۲، عدد ۶ و تصویر ۶، عدد ۲) می‌شوند.

برای یافتن تصویر یک عدد در آینه، یکی از دو روش زیر را می‌توان انجام داد:

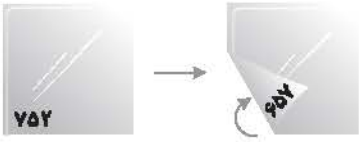
۱. در کنار عدد (سمت راست یا چپ تفاوتی ندارد.) باید خطّی رسم کرد و تصویر هر رقم را در سوی دیگر خط نوشت. نکته‌ی قابل توجّه آن است که باید فاصله‌ی ارقام تا آینه، در دو سوی آینه یکسان باشد؛ یعنی اگر فاصله‌ی رقمی در این سوی آینه کم‌تر از دیگر ارقام است، فاصله‌ی تصویرش تا آینه نیز باید کم‌ترین باشد.

مثال ۱۶ **تصویر عدد ۵۲۱۷ در آینه، چه عددی است؟**



۲. عدد را پررنگ بر یک روی کاغذ می‌نویسیم و از روی دیگر (پشت) کاغذ، آن را می‌خوانیم.

مثال ۱۷ **تصویر عدد ۷۵۲ در آینه، چه عددی است؟**



نکته: تعداد ارقام تصویر عددی که رقم یا رقم‌های سمت راستش صفر است، به تعداد صفرهای سمت راست، کم‌تر از تعداد ارقام آن عدد است.

مثال ۱۸ **تصویر عدد ۱۸۰۵۰۰ در آینه، چندرقمی است؟**

رمزنویسی

گاهی اوقات به‌جای کلمه‌ها، از اعداد استفاده می‌شود. (هر عدد معادل یک کلمه است.) در این نوشته‌های رمزگونه، معمولاً یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

۱. اعداد هم (برخلاف معمول) مانند حروف، از راست به چپ نوشته می‌شوند و همزمان با حرف به حرف خواندن کلمه‌ی رمز، عدد مربوط به آن حرف از راست به چپ نوشته می‌شود.

مثال ۱۹) یک رمزنویس، کلمه‌ی «استکان» را با عدد ۲۷۶۴۵۷ و کلمه‌ی «کتری» را با عدد ۹۳۴۶ می‌نویسد. این رمزنویس به‌جای کلمه‌ی «سینی» از چه عددی استفاده می‌کند؟

ن	ا	ک	ت	س	ا
۲	۷	۶	۴	۵	۷

،

ی	ر	ت	ک
۹	۳	۴	۶

⇒

ی	ن	ی	س
۹	۲	۹	۵

۲) اعداد از سمت چپ و حروف از سمت راست نوشته می‌شوند و با این‌که هر عدد به یک حرف خاص تعلّق دارد، باید دقّت کرد که جهت نوشتن حروف **برعکس** است.

مثال ۲۰) اگر کلمه‌ی «سلامتی» را با عدد ۱۲۳۴۵۶ و کلمه‌ی «بهداشت» را با عدد ۷۸۰۳۹۵ بنویسیم، کلمه‌ی «شادابی» را با چه عددی می‌نویسیم؟

نمی‌توان مانند قبل، اعداد را از راست به چپ گذاشت؛ چون در این‌صورت برای «ا» دو رقم ۰ و ۴ و برای «ت» دو رقم ۲ و ۷ را داریم که صحیح **نیست**. به‌همین دلیل، حروف را برخلاف معمول، از چپ به راست می‌نویسیم:

~~ی ت م ا ل س   ت ش ا د ه ب~~

~~۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶   ۷ ۸ ۰ ۳ ۹ ۵~~

س	ل	ا	م	ت	ی
۱	۲	۳	۴	۵	۶

،

ب	ه	د	ا	ش	ت
۷	۸	۰	۳	۹	۵

که در این‌صورت، مشکل رفع می‌شود و هر حرف، تنها معادل یک عدد است. (۳ به‌جای «ا» و ۵ به‌جای «ت») پس کلمه‌ی «شادابی» را هم از چپ به راست می‌نویسیم و حروف آن را با ارقام جایگذاری می‌کنیم:

ش	ا	د	ا	ب	ی
۹	۳	۰	۳	۷	۶

الگوها

گاهی بین تعدادی شکل یا عدد رابطه‌ای وجود دارد که **الگو** نامیده می‌شود. پیدا کردن الگو و بیان آن به‌صورت نوشتاری و کلامی، از مهارت‌های مهم در یادگیری ریاضیّات است که به حلّ بسیاری از مسائل پیچیده‌ی ریاضی کمک می‌کند. در حقیقت **الگویابی** یکی از راهبردهای مهمّ **حلّ مسئله** است.

الگوهای عددی

در این الگو که از تعدادی عدد تشکیل شده است، ابتدا باید رابطه‌ی بین اعداد را کشف و سپس اعداد بعدی الگو را حدس زد. اعداد در این الگوها غالباً در دو نوع **صعودی** (افزایشی) و **نزولی** (کاهشی) ظاهر می‌شوند.

۱) الگوهای عددی افزایشی

در این‌گونه الگوها، هر عدد از عدد قبلی خود بزرگ‌تر است و معمولاً در آن‌ها از عملیّات جمع و ضرب و گاهی ترکیب آن‌ها با سایر عملیّات (مثلاً تفریق) استفاده می‌شود.

مثال ۲۱) با توجّه به الگوهای عددی داده‌شده، به‌جای ؟ چه عددی قرار می‌گیرد؟

الف) ۳ ، ۷ ، ۱۱ ، ۱۵ ، ۱۹ ، ؟

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هر عدد ۴ واحد از عدد قبلی خود بزرگ‌تر است.

+۴ +۴ +۴ +۴ +۴

۳ ، ۷ ، ۱۱ ، ۱۵ ، ۱۹ ، ؟

بنابراین برای یافتن عدد بعدی، کافی است عدد ۱۹ را با ۴ جمع کنیم:

۱۹ + ۴ = ۲۳

ب) ۱۰ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۷ ، ۲۵ ، ۴۱ ، ؟

$$\overset{+۱}{۱۰ ,} \overset{+۲}{۱۱ ,} \overset{+۴}{۱۳ ,} \overset{+۸}{۱۷ ,} \overset{+۱۶}{۲۵ ,} ۴۱ , ?$$

اعداد به‌ترتیب ۱+، ۲+، ۴+ و ... شده‌اند و اعدادی که افزوده می‌شوند، در حال دو برابر شدن هستند، بنابراین به عدد بعدی، باید ۳۲ واحد (۳۲=۱۶×۲) افزود:

۴۱+۳۲=۷۳

ج) ۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۸ ، ۱۳ ، ؟

در این الگو، هر عدد از مجموع دو عدد قبلی خود ساخته می‌شود. (البتّه دو عدد اوّل، تنها برای پیدا کردن رابطه هستند.)

۱+۱=۲ ، ۱+۲=۳ ، ۲+۳=۵ ، ۳+۵=۸ ، ۵+۸=۱۳

بنابراین برای یافتن عدد بعدی، کافی است دو عدد ۸ و ۱۳ را با هم جمع کنیم:

۸+۱۳=۲۱

د) ۱ ، ۴ ، ۹ ، ۱۶ ، ۲۵ ، ؟

برای این اعداد می‌توان دو الگوی متفاوت در نظر گرفت که پاسخ هر دو، در نهایت یکی است.

$$\overset{+۳}{۱ ,} \overset{+۵}{۴ ,} \overset{+۷}{۹ ,} \overset{+۹}{۱۶ ,} ۲۵ , ?$$

راه‌حلّ اوّل:

به تعداد اعداد فرد، به اعداد افزوده شده است، بنابراین به عدد بعدی ۱۱ واحد افزوده می‌شود.

۲۵+۱۱=۳۶

راه‌حلّ دوم: اعداد این الگو از حاصل‌ضرب عددهای طبیعی در خودشان به‌دست آمده‌اند و کافی است برای پیدا کردن هر عضو این الگو، آن را در خودش ضرب کنیم، مثلاً ۶اُمین عضو این الگو از حاصل‌ضرب ۶×۶ می‌آید و برابر با ۳۶ است.

$$\underset{۱×۱}{۱} , \underset{۲×۲}{۴} , \underset{۳×۳}{۹} , \underset{۴×۴}{۱۶} , \underset{۵×۵}{۲۵} , ?$$

هـ) ۱ ، ۳ ، ۹ ، ۲۷ ، ۸۱ ، ؟

$$\overset{×۳}{۱ ,} \overset{×۳}{۳ ,} \overset{×۳}{۹ ,} \overset{×۳}{۲۷ ,} ۸۱ , ?$$

هر عدد سه‌برابر عدد قبلی خود است.

برای پیدا کردن عدد بعدی، کافی است ۸۱ را در ۳ ضرب کنیم:

۳×۸۱=۲۴۳

و) ۱ ، ۴ ، ۲۰ ، ۱۲۰ ، ۸۴۰ ، ؟

رابطه‌ی بین اعداد ضرب است و عددی که در ضرب استفاده می‌شود، هر بار یکی بیش‌تر می‌شود،

$$\overset{×۴}{۱ ,} \overset{×۵}{۴ ,} \overset{×۶}{۲۰ ,} \overset{×۷}{۱۲۰ ,} ۸۴۰ , ?$$

بنابراین کافی است برای پیدا کردن عدد بعدی، ۸۴۰ را در ۸ ضرب کنیم:

۸×۸۴۰=۶۷۲۰

ز) ۳ ، ۷ ، ۱۵ ، ۳۱ ، ۶۳ ، ؟

برای این اعداد می‌توان دو الگوی متفاوت در نظر گرفت که پاسخ هر دو، در نهایت یکی است.

راه‌حلّ اوّل: در این الگو، هم‌زمان از عمل ضرب و جمع استفاده شده است.

$$\overset{×۲+۱}{۳ ,} \overset{×۲+۱}{۷ ,} \overset{×۲+۱}{۱۵ ,} \overset{×۲+۱}{۳۱ ,} ۶۳ , ?$$

هر عدد از دو برابر عدد قبلی، یک واحد بیش‌تر است، بنابراین عدد بعدی ۱۲۷ می‌باشد. (۶۳×۲)+۱=۱۲۶+۱=۱۲۷

راه‌حلّ دوم: رابطه‌ی بین اعداد جمع است و عددی که در جمع استفاده می‌شود، هر بار دو برابر می‌شود.

+۴ +۸ +۱۶ +۳۲
۳ , ۷ , ۱۵ , ۳۱, ۶۳ , ?

بنابراین کافی است برای پیدا کردن عدد بعدی، ۶۳ را با ۶۴ (۶۴ = ۳۲ × ۲) جمع کنیم: ۱۲۷ = ۶۴ + ۶۳

ح) ۳ , ۵ , ۱۴ , ۵۵ , ?

در این الگو، هم‌زمان از عمل ضرب و تفریق استفاده می‌شود و عددی که در ضرب به‌کار می‌رود،

۱ − ۲× ۱ − ۳× ۱ − ۴×
۳ , ۵ , ۱۴ , ۵۵ , ?

هر بار یکی بیش‌تر می‌شود، بنابراین برای پیدا کردن عدد بعدی، کافی است ۵۵ را ۵ برابر کرده و یکی از آن کم کنیم:

۲۷۴ = ۱ − ۲۷۵ = ۱ − ۵۵ × ۵

۲) الگوهای عددی کاهشی

در این الگوها برخلاف الگوهای عددی افزایشی، هر عدد از عدد قبلی خود کوچک‌تر است و معمولاً در آن‌ها از عملیّات تفریق و تقسیم و گاهی ترکیب آن‌ها با سایر عملیّات (مثلاً جمع) استفاده می‌شود.

مثال ۲۲) با توجّه به الگوهای عددی داده‌شده، به‌جای ? چه عددی قرار می‌گیرد؟

الف) ۸۰۰ , ۴۰۰ , ۲۰۰ , ۱۰۰ , ?

÷۲ ÷۲ ÷۲ ÷۲
۸۰۰ , ۴۰۰ , ۲۰۰ , ۱۰۰ , ?

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هر عدد نصف عدد قبلی خود است.

بنابراین برای یافتن عدد بعدی، کافی است عدد ۱۰۰ را بر ۲ تقسیم کنیم: ۵۰ = ۲ ÷ ۱۰۰

ب) ۶۰ , ۵۶ , ۵۰ , ۴۲ , ۳۲ , ?

−۴ −۶ −۸ −۱۰
۶۰ , ۵۶ , ۵۰ , ۴۲ , ۳۲ , ?

به مقدار اعداد زوج، از اعداد کم شده است.

بنابراین از عدد بعدی باید ۱۲ واحد کم کرد: ۲۰ = ۱۲ − ۳۲

ج) ۹۴ , ۴۶ , ۲۲ , ۱۰ , ۴ , ?

۱ − ۲÷ ۱ − ۲÷ ۱ − ۲÷ ۱ − ۲÷
۹۴ , ۴۶ , ۲۲ , ۱۰ , ۴ , ?

در این الگو، هم‌زمان از عمل تقسیم و تفریق استفاده شده است.

بنابراین برای پیدا کردن عدد بعدی، یک واحد از نصف ۴ کم می‌کنیم: ۱ = ۱ − (۲ ÷ ۴)

د) ۴۲ , ۱۵ , ۶ , ۳ , ?

برای این اعداد می‌توان دو الگوی متفاوت در نظر گرفت که پاسخ هر دو، در نهایت یکی است.

راه‌حلّ اوّل: رابطه‌ی بین اعداد تفریق است و عددی که در تفریق استفاده می‌شود، هر بار ثلث عدد قبلی است.

−۲۷ −۹ −۳
۴۲ , ۱۵ , ۶ , ۳ , ?

بنابراین برای یافتن عدد بعدی، کافی است یک واحد (۱ = ۳ ÷ ۳) از عدد ۳ کم کنیم: ۲ = ۱ − ۳

راه‌حلّ دوم: در این الگو هم‌زمان از عمل جمع و تقسیم استفاده می‌شود.

$$42 \xrightarrow{+3\div3} 15 \xrightarrow{+3\div3} 6 \xrightarrow{+3\div3} 3 \;,\; ?$$

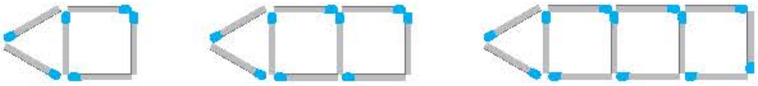
به هر عدد ۳ واحد افزوده شده و ثلث آن محاسبه می‌شود:

$$\cancelto{45}{(42+3)}\div 3=15 \quad , \quad \cancelto{18}{(15+3)}\div 3=6 \quad , \quad \cancelto{9}{(6+3)}\div 3=3 \quad \Rightarrow \quad \cancelto{6}{(3+3)}\div 3=2$$

الگوهای شکلی

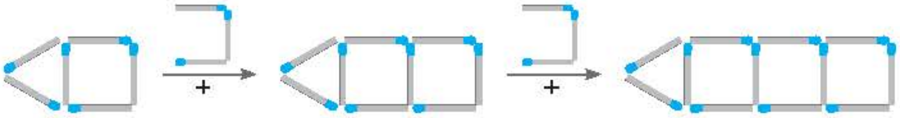
اساس کار الگوهای شکلی هم مانند الگوهای عددی است، یعنی باید با توجّه به ترتیب شکل‌ها، رابطه‌ی میان آن‌ها را پیدا کرده و شکل بعدی را حدس زد.

مثال ۲۳ با توجّه به الگوهای شکلی داده‌شده، به‌جای ؟ چه شکلی قرار می‌گیرد؟

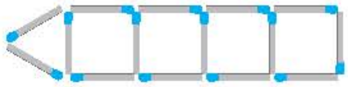
الف)  ؟

(۱) (۲) (۳)

همان‌طور که در شکل زیر مشاهده می‌کنید، هر بار ۳ چوب‌کبریت به شکل اضافه شده و شکل بعدی ساخته شده است:



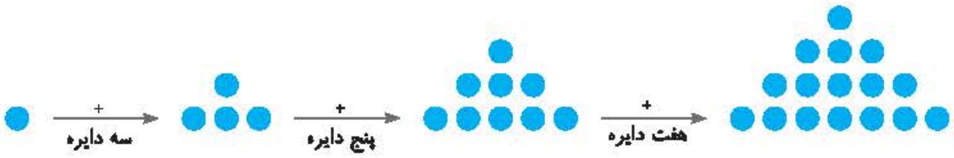
بنابراین شکل بعدی عبارت است از:



ب)  ؟

(۱) (۲) (۳)

هر بار به تعداد فرد به دایره‌ها افزوده شده است، بنابراین شکل چهارم برابر است با:



فصل دوم

کسر

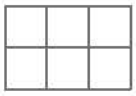
انواع کسر

۱ **کسر مساوی با صفر:** به کسری که صورت آن **صفر** باشد، **کسر مساوی با صفر** می‌گویند.

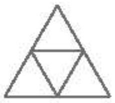
مثال ۱ **در هریک از شکل‌های زیر، چه کسری از شکل، رنگ شده است؟**

$\frac{۰}{۴} = \frac{۰}{۶} = ۰$

$\frac{۰}{۶}$



$\frac{۰}{۴}$



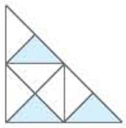
نکته: تمام کسرهایی که صورت آن‌ها **صفر** باشد، با یک‌دیگر **برابر** و **مساوی صفر** هستند. (اختلاف مخرج‌ها در تساوی **بی‌تأثیر** است.)

$\frac{۰}{۱} = \frac{۰}{۲} = \frac{۰}{۳} = \frac{۰}{۴} = \dots = ۰$

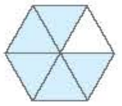
۲ **کسر کوچک‌تر از واحد:** به کسری که صورتی کوچک‌تر از مخرجش دارد، **کسر کوچک‌تر از واحد** می‌گویند.

مثال ۲ **در هریک از شکل‌های زیر، چه کسری از شکل، رنگ شده است؟**

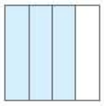
$\frac{۳}{۸}$



$\frac{۵}{۶}$



$\frac{۳}{۴}$



همان‌طور که در شکل‌های بالا می‌بینیم، در هیچ‌یک از شکل‌ها، شکل به‌طور کامل رنگ **نشده** و قسمت‌های رنگ‌شده (صورت کسر) کم‌تر از تمام قسمت‌های آن شکل (مخرج کسر) است.

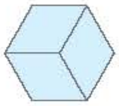
۳ **کسر واحد:** به کسری که صورت و مخرج آن برابر است، **کسر واحد** می‌گویند.

نکته: تمام کسرهای **واحد**، برابر با **یک** هستند.

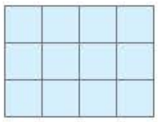
$\frac{۱}{۱} = \frac{۲}{۲} = \frac{۳}{۳} = \frac{۴}{۴} = \dots = ۱$

مثال ۳ **در هریک از شکل‌های زیر، چه کسری از شکل، رنگ شده است؟**

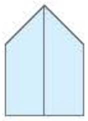
$\frac{۳}{۳}$



$\frac{۱۲}{۱۲}$



$\frac{۲}{۲}$

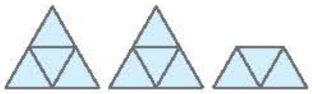


در تمام شکل‌های فوق، شکل به‌طور کامل رنگ شده است.

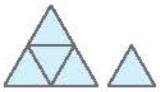
$\frac{۲}{۲} = \frac{۱۲}{۱۲} = \frac{۳}{۳} = ۱$

۴ **کسر بزرگ‌تر از واحد:** به کسری که صورتی بزرگ‌تر از مخرجش دارد، **کسر بزرگ‌تر از واحد** می‌گویند.

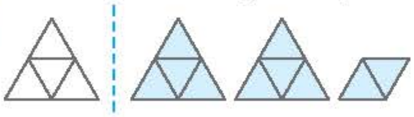
مثال ۴ **با توجّه به مقدار واحد ارائه‌شده، مشخّص کنید در هر یک از شکل‌های زیر چه کسری از شکل، رنگ شده است.**



$\frac{۱۱}{۴}$



$\frac{۵}{۴}$

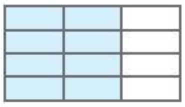


$\frac{۱۰}{۴}$

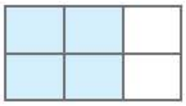
برابری کسرها

اگر هم‌زمان صورت و مخرج یک کسر را در عددی (غیر از صفر) ضرب کنیم، کسری برابر با کسر قبلی به‌دست خواهد آمد.

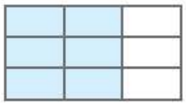
مثال ۵ سه کسر مساوی با کسر $\frac{۲}{۳}$ بنویسید.



$\frac{۲\times۴}{۳\times۴}=\frac{۸}{۱۲}$



$\frac{۲\times۲}{۳\times۲}=\frac{۴}{۶}$



$\frac{۲\times۳}{۳\times۳}=\frac{۶}{۹}$

$\frac{۲}{۳}$

با دقّت در شکل‌های بالا، متوجّه می‌شویم که مقدار رنگ‌شده در تمامی شکل‌ها، با هم برابر است، یعنی:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}$$

نکته: اگر هم‌زمان، صورت و مخرج یک کسر را بر عددی غیر از صفر (که هم صورت و هم مخرج بر آن بخش‌پذیرند) تقسیم کنیم، کسری برابر با کسر قبلی به‌دست خواهد آمد.

مثال ۶ سه کسر مساوی با کسر $\frac{۲۴}{۳۶}$ بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۲۴\div۳}{۳۶\div۳}=\frac{۸}{۱۲}\\[2mm]\frac{۲۴\div۴}{۳۶\div۴}=\frac{۶}{۹}\\[2mm]\frac{۲۴\div۱۲}{۳۶\div۱۲}=\frac{۲}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۲۴}{۳۶}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

نکته: تقسیم‌کردن صورت و مخرج یک کسر بر عددی یکسان و یافتن کسری برابر با آن را **ساده کردن کسر** می‌گویند.

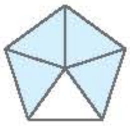
مقایسه‌ی کسرها

در مقایسه‌ی کسرها، ممکن است یکی از سه حالت زیر پیش آید:

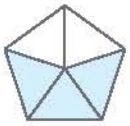
۱) **مخرج کسرها مساوی باشند:** در این‌صورت، کسری که صورت بزرگ‌تری دارد، بزرگ‌تر است.

مثال ۷ کسرهای $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۴}{۵}$ را از کوچک به بزرگ مرتّب کنید.

$\frac{۱}{۵}<\frac{۳}{۵}<\frac{۴}{۵}$ و اگر شکل آن‌ها را هم رسم کنیم، کاملاً متوجّه دلیل آن خواهیم شد:



$\frac{۴}{۵}$



$\frac{۳}{۵}$

$\frac{۱}{۵}$

۲) **صورت کسرها مساوی باشند:** در این‌صورت، کسری که مخرج کوچک‌تری دارد، بزرگ‌تر است. (چون به قسمت‌های کم‌تری تقسیم شده است.)

مثال ۸ **کسرهای $\frac{2}{4}$، $\frac{2}{5}$، $\frac{2}{3}$ و $\frac{2}{7}$ را از کوچک به بزرگ مرتّب کنید.**

$\frac{2}{7} < \frac{2}{5} < \frac{2}{4} < \frac{2}{3}$

در شکل‌های زیر هم کاملاً قابل مشاهده است، یعنی هر قدر از چپ به راست شکل‌ها (به سمت کسر بزرگ‌تر) پیش می‌رویم، مقدار بیش‌تری از شکل، رنگ شده است.

$\frac{2}{7}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{3}$

۳ کسرهایی با صورت و مخرج متفاوت: در این‌صورت، ابتدا باید مخرج کسرها را (با نوشتن کسرهای مساوی با هر کسر) یکسان کرد (مخرج مشترک گرفت)، سپس طبق دسته‌ی اوّل، آن‌ها را مقایسه کرد.

مثال ۹ **کسرهای $\frac{5}{8}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{4}{6}$ و $\frac{1}{3}$ را از کوچک به بزرگ مرتّب کنید.**

ابتدا کسری مساوی هریک از کسرها می‌نویسیم، به‌گونه‌ای که مخرج آن بر تمامی مخرج‌ها بخش‌پذیر باشد:

$\frac{1\times 8}{3\times 8}=\frac{8}{24}$ ، $\frac{4\times 4}{6\times 4}=\frac{16}{24}$ ، $\frac{1\times 6}{4\times 6}=\frac{6}{24}$ ، $\frac{5\times 3}{8\times 3}=\frac{15}{24}$

با مقایسه‌ی کسرهای جدید $\left(\frac{6}{24} < \frac{8}{24} < \frac{15}{24} < \frac{16}{24}\right)$، می‌توان کسرها را از کوچک به بزرگ، مرتّب کرد:

$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{5}{8} < \frac{4}{6}$

جمع و تفریق کسرها

در جمع و تفریق کسرها، مخرج‌ها حتماً باید یکسان باشند (اگر متفاوت بودند، ابتدا باید مخرج‌مشترک بگیریم)، در این‌صورت مانند معمول صورت‌ها را با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم و حاصل را در صورت می‌نویسیم و یکی از مخرج‌ها را هم در مخرج حاصل می‌نویسیم.

مثال ۱۰ **حاصلِ جمع و تفریق هر دسته از کسرهای زیر را به‌دست آورید.**

الف) $\frac{4}{7}$، $\frac{1}{7}$ ب) $\frac{2}{3}$، $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{14}{15}$، $\frac{7}{10}$

	مخرج‌مشترک	حاصل جمع	حاصل تفریق
$\frac{4}{7}, \frac{1}{7}$		$\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$
$\frac{2}{3}, \frac{1}{8}$	$\frac{2\times 8}{3\times 8}=\frac{16}{24}, \frac{1\times 3}{8\times 3}=\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}+\frac{16}{24}=\frac{19}{24}$	$\frac{16}{24}-\frac{3}{24}=\frac{13}{24}$
$\frac{4}{15}, \frac{7}{10}$	$\frac{4\times 2}{15\times 2}=\frac{8}{30}, \frac{7\times 3}{10\times 3}=\frac{21}{30}$	$\frac{8}{30}+\frac{21}{30}=\frac{29}{30}$	$\frac{21}{30}-\frac{8}{30}=\frac{13}{30}$

ضرب یک عدد در یک کسر

در ضرب یک عدد در یک کسر، عدد را در صورت کسر ضرب می‌کنیم و مخرج کسر بدون تغییر باقی می‌ماند.

مثال ۱۱ **حاصل هریک از ضرب‌های زیر را به‌دست آورید.**

الف) $3\times\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$ ب) $2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$ ج) $4\times\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$ د) $5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

فصل سوم

ضرب و تقسیم

ضرب

جمع چند عدد یکسان را می‌توان با عمل ضرب، به‌طور خلاصه نوشت، مانند: $\underbrace{5+5+5+5+5+5+5}_{\text{۷ بار}} = 7\times 5 = 35$

نکته: در ضرب چند عدد، به هریک از اعداد **عامل ضرب** گفته می‌شود.

۱ جابه‌جایی عوامل ضرب، تأثیری در حاصل‌ضرب **ندارد**، مانند:

$3\times 5\times 7 = 3\times 7\times 5 = 5\times 3\times 7 = 5\times 7\times 3 = 105$

$(2\times 4)\times 5 = 2\times(4\times 5) = (2\times 5)\times 4 = 2\times(5\times 4) = 40$

۲ حاصل‌جمع چند ضرب که دارای عامل مشترکی باشند، برابر حاصل‌ضرب مجموع عوامل غیرمشترک در عامل مشترک است. (عکس این مطلب نیز درست است.)، مانند:

$(2\times 5)+(3\times 5)+(6\times 5) = (2+3+6)\times 5$

$(7+4+8)\times 6 = (7\times 6)+(4\times 6)+(8\times 6)$

۳ اگر یکی از عوامل ضرب در عددی ضرب یا بر آن تقسیم شود، حاصل‌ضرب در آن عدد ضرب یا بر آن تقسیم می‌شود، مانند:

$$5\times 3\times 4 = 60 \xrightarrow{\div 2} 5\times 3\times 2 = 30$$

$$5\times 3\times 4 = 60 \xrightarrow{\times 3} 5\times 3\times 12 = 180$$

۴ در صورتی‌که چند عامل ضرب تغییر کنند (در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم شوند)، حاصل‌ضرب به میزان حاصل تغییرات، تغییر خواهد کرد. مانند:

$$9\times 6\times 5 = 270 \quad (\div 3,\ \div 2 \Rightarrow 2\times 3 = 6) \quad 3\times 3\times 5 = 45 \quad (\div 6)$$

$$5\times 8\times 6 = 240 \quad (\times 2,\ \times 3 \Rightarrow 2\times 3 = 6) \quad 10\times 24\times 6 = 1440 \quad (\times 6)$$

مثال ۱ **در ضرب سه عدد، اگر دو عامل را ۴ برابر و یکی را نصف کنیم، حاصل‌ضرب چه تغییری خواهد کرد؟**

برای یافتن پاسخ، کافی است حاصل تغییرات را محاسبه کنیم: $4\times 4\div 2 = 8$

پس حاصل‌ضرب، ۸ برابر می‌شود.

۵ حاصل‌ضرب هر عددی در صفر، صفر می‌شود، مانند:

$14\times 23\times 18\times 0\times 386\times 64 = 0$ $\quad 0\times 132 = 0$ $\quad 28\times 0 = 0$

۶ حاصل‌ضرب هر عددی در یک، برابر با خود آن عدد است، مانند:

$1\times 549 = 549$ $\quad 61\times 1 = 61$

۷ حاصل‌ضرب اعداد فرد، همیشه فرد است، مانند:

$7\times 11\times 3 = 231$ $\quad 3\times 5 = 15$

۸ حاصل‌ضرب عدد زوج در هر عددی (تفاوت نمی‌کند زوج یا فرد باشد)، زوج می‌شود، مانند:

۶ × ۹ × ۵ × ۲ = ۵۴۰ ‏ ‏ ۴ × ۵ × ۷ = ۱۴۰ ‏ ‏ ۲ × ۴ × ۶ = ۴۸

۹ در ضرب چند عدد، هرگاه فقط یکی از اعداد زوج باشد، حاصل‌ضرب زوج خواهد بود، مانند: ۳ × ۵ × ۲ × ۷ × ۹ = ۱۹۸۰

۱۰ حاصل‌ضرب دو عدد متوالی (یکی زوج و یکی فرد)، حتماً زوج است، مانند:

$۲۷ \times \underbrace{۲۸}_{\text{زوج}} = ۷۵۶$ ‏ ‏ $\underbrace{۱۲}_{\text{زوج}} \times ۱۳ = ۱۵۶$

۱۱ حاصل‌ضرب چند عدد متوالی، حتماً زوج است (چون حدّاقل یکی از آن‌ها زوج است.)، مانند:

$۳۱ \times \underbrace{۳۲}_{\text{زوج}} \times ۳۳ = ۳۲۷۳۶$ ‏ ‏ $۷ \times \underbrace{۸}_{\text{زوج}} \times ۹ \times ۱۰ = ۵۰۴۰$

تعیین یکان حاصل‌ضرب چند عدد

اگر بخواهیم یکان حاصل‌ضرب چند عدد را به‌دست آوریم، کافی است یکان‌های آن اعداد را در یک‌دیگر ضرب کنیم، یکان عدد حاصل جواب مورد نظر ماست.

مثال ۲ یکان عدد ۳۴۰۶ × ۷۵۱۲ چند است؟

یکان عدد (۲) است. ۷۵۱۲ × ۳۴۰۶ = ۲۵۵۸۵۸۷۲

راه ساده‌تر: ۷۵۱۲ × ۳۴۰۶ = ...۲

۲ × ۶ = ۱۲ ‏ **یکان عدد ۲ است.**

مثال ۳ حاصل‌ضرب ۳۲۹۴ × ۸۱۳۵ چند است؟

۱) ۲۴۴۶۷۱۴۳ ‏ ۲) ۲۵۹۸۶۱۷۵ ‏ ۳) ۲۶۷۹۶۶۹۰ ‏ ۴) ۲۴۹۸۱۰۴۸

با دقّت‌کردن به یکان اعدادی که در یک‌دیگر ضرب شده‌اند، متوجّه می‌شویم که یکان حاصل‌ضرب باید صفر شود:

۸۱۳۵ × ۳۲۹۴ ⟹ ۵ × ۴ = ۲۰

و تنها گزینه‌ای که یکان صفر دارد، گزینه‌ی (۳) است.

نکته: اگر دو عدد متوالی را در یک‌دیگر ضرب کنیم، یکان حاصل‌ضرب، یکی از اعداد ۰، ۲، ۶ یا ۸ است.

ضرب تقریبی

گاهی مقدار واقعی و دقیق یک ضرب را محاسبه نمی‌کنیم و آن را به‌طور تقریبی به‌دست می‌آوریم، به این‌گونه ضرب‌ها ضرب تقریبی می‌گوییم. ضرب تقریبی ممکن است به یکی از سه حالت زیر باشد:

۱ یکان هر دو عامل ضرب، رقمی غیر از ۵ باشد: در این حالت، هر یک از عوامل ضرب را به نزدیک‌ترین عدد با یکان صفر، تبدیل می‌کنیم و ضرب را انجام می‌دهیم، یعنی اگر رقم یکان کوچک‌تر از ۵ بود، به صفر تبدیل می‌شود و اگر بزرگ‌تر از ۵ بود، یک واحد به دهگان افزوده می‌شود و یکان صفر می‌شود.

مثال ۴ حاصل ضرب مقابل را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید. ۳۷ × ۲۳ = ?

$$\left.\begin{array}{l} ۳۰ < ۳۷ < ۴۰ \xrightarrow{\text{به ۴۰ نزدیک‌تر است}} ۳۷ \simeq ۴۰ \\ ۲۰ < ۲۳ < ۳۰ \xrightarrow{\text{به ۲۰ نزدیک‌تر است}} ۲۳ \simeq ۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \uparrow ۳۷ \times ۲۳ \downarrow \simeq ۴۰ \times ۲۰ = ۸۰۰$$

۲ یکان یکی از عوامل ضرب، ۵ باشد: در این حالت، اگر عدد دیگر افزایش یافته بود، یکان عددی که یکانش ۵ است، به صفر تبدیل می‌شود و دهگان تغییری نمی‌کند (تقریب پایین زده می‌شود) و اگر عدد دیگر کاهش یافته بود، به دهگان عددی که یکانش ۵ است، یکی می‌افزاییم و یکان آن را صفر می‌کنیم (تقریب بالا زده می‌شود).

مثال ۵ **حاصل ضرب‌های زیر را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید.**

الف) $45 \times 78 = ?$ $\quad \downarrow 45 \times \uparrow 78 \simeq 40 \times 80 = 3200$

ب) $14 \times 65 = ?$ $\quad \downarrow 14 \times \uparrow 65 \simeq 10 \times 70 = 700$

۳ یکان هر دو عامل ضرب، ۵ باشد: در این حالت، عدد کوچک‌تر را تقریب بالا و عدد بزرگ‌تر را تقریب پایین می‌زنیم.

مثال ۶ **حاصل ضرب‌های زیر را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید.**

الف) $45 \times 55 = ?$ $\quad \uparrow 45 \times 55 \downarrow \simeq 50 \times 50 = 2500$

ب) $35 \times 95 = ?$ $\quad \uparrow 35 \times 95 \downarrow \simeq 40 \times 90 = 3600$

برخی از سؤالات مهم و کاربردی

مثال ۷ **عددی را ۶ برابر کرده‌ایم، ۱۵۰ تا به آن اضافه شده است. آن عدد چند است؟**

وقتی عددی را ۶ برابر می‌کنیم، درحقیقت ۵ تا از همان عدد به آن اضافه کرده‌ایم (که با خودش جمعاً می‌شود ۶ تا).

در صورت سؤال آمده که ۱۵۰ تا به عدد اضافه شده، پس ۵ برابر عدد، ۱۵۰ است و به‌آسانی می‌توان عدد را محاسبه کرد:

$150 \div 5 = 30$

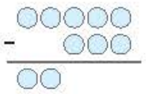
عدد به‌دست‌آمده ۳۰ است و اگر آن را در صورت مسئله بگذاریم و امتحان کنیم، می‌بینیم که درست است:

$30 \times 6 = 180$ ۶ برابر عدد $\Rightarrow 180 - 30 = 150$

سؤال ۱ **عددی را ۸ برابر کرده‌ایم، ۱۱۲ تا به آن اضافه شده است. آن عدد چند است؟**

سؤال ۲ **حاصل‌جمع عددی با ۴ برابرش، ۲۲۰ می‌شود. آن عدد چند است؟**

مثال ۸ **اختلاف ۵ برابر و ۳ برابر عددی، ۲۴۰ شده است. آن عدد چند است؟**



از عددی ۵ تا داشته‌ایم که ۳ تای آن را برداشته‌ایم، پس ۲تای دیگر از آن داریم:

درمی‌یابیم که ۲ برابر عدد ۲۴۰ است، پس خود آن ۱۲۰ است:

$240 \div 2 = 120$

و امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} 120 \times 5 = 600 \\ 120 \times 3 = 360 \end{cases} \Rightarrow 600 - 360 = 240$$

سؤال ۳ **تفاوت ۶ برابر و ۹ برابر عددی، ۱۶۲ است. آن عدد چند است؟**

سؤال ۴ **مجموع ۳ برابر و ۴ برابر عددی، ۱۴۰ است. آن عدد چند است؟**

سؤال ۵ **مجموع ۶ برابر و ۲ برابر عددی، ۳۳۶ شده است. ۵ برابر آن عدد چند است؟**

مثال ۹ **از ۳ برابر عددی، ۲ واحد (تا) کم و آن را ۴ برابر کردیم، حاصل ۸۸ شد. آن عدد چند است؟**

در این سؤال، رسم شکل می‌تواند کمک زیادی به ما بکند:

$$\bigcirc \xrightarrow{\times 3} \bigcirc \xrightarrow{-2} \bigcirc \xrightarrow{\times 4} 88$$

برای یافتن آن عدد، کافی است از راست به چپ، عملیّات را برعکس انجام دهیم. (به‌جای ضرب، تقسیم و به‌جای تفریق، جمع) پس خواهیم داشت:

$$8 \xleftarrow{\div 3} 24 \xleftarrow{+2} 22 \xleftarrow{\div 4} 88$$

سؤال ۶ به نصف عددی ۵ واحد افزودیم و آن را ۳ برابر کردیم، حاصل ۶۹ شد. آن عدد چند است؟

مثال ۱۰ ۱۲ دوست به‌مناسبت عید نوروز، برای هم‌دیگر کارت پستال می‌فرستند. تعداد کلّ کارت‌پستال‌ها چه‌قدر است؟

هر فرد برای ۱۱ نفر (همه به‌جز خودش) کارت پستال می‌فرستد، پس: ۱۲×۱۱=۱۳۲

مثال ۱۱ در مسابقات لیگ برتر فوتبال ۱۶ تیم شرکت کرده‌اند که دوبه‌دو با یک‌دیگر مسابقه می‌دهند. چند بازی تا پایان لیگ صورت می‌گیرد؟ (هر تیم تنها یک‌بار با تیم دیگر بازی می‌کند.)

مانند مثال قبل، هر تیم با ۱۵ تیم دیگر مسابقه می‌دهد: ۱۶×۱۵=۲۴۰

امّا در این‌صورت، هر دو تیم، دوبار با یک‌دیگر بازی کرده‌اند (به‌عنوان مثال، یک‌بار بازی تیم قرمز با آبی را حساب کرده‌ایم و یک‌بار دیگر، بازی تیم آبی را با قرمز)، پس باید تعداد مسابقات را نصف کرد:

(۱۶×۱۵)÷۲=۲۴۰÷۲=۱۲۰

تقسیم

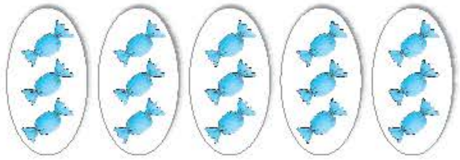
هرگاه بخواهیم مقدار مشخّصی را بین چند فرد (یا چند شیء)، به‌طور مساوی قسمت کنیم، از عمل تقسیم استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۲ می‌خواهیم ۱۵ شکلات را به‌طور مساوی بین ۵ دوست تقسیم کنیم. به هرکدام، چند شکلات می‌رسد؟

تعداد شکلات‌ها ← ۱۵ | ۵ → تعداد افراد

−۱۵   ۳ → به هر فرد ۳ شکلات می‌رسد.

۰ ← همه‌ی شکلات‌ها بین افراد تقسیم می‌شود و چیزی باقی نمی‌ماند.



در یک تقسیم، به مقدار کل، مقسوم می‌گویند؛ تعداد افراد یا اشیایی که مقدار مشخّصی را بین آن‌ها تقسیم می‌کنیم، مقسوم‌علیه نام دارد و سهم هر فرد (یا شیء) از مقدار کلّ تقسیم، خارج قسمت نام دارد.

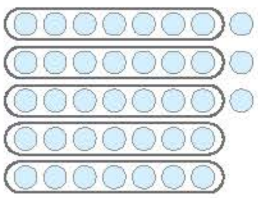
در مثال بالا مقسوم ۱۵، مقسوم‌علیه ۵ و خارج قسمت ۳ است.

در یک تقسیم ممکن است یکی از دو حالت زیر اتّفاق بیفتد:

۱) مقسوم بر مقسوم‌علیه قابل قسمت (بخش‌پذیر) باشد: در این‌حالت، باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر است. (مثال ۱۲)

۲) مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر نباشد: در این‌صورت، باقی‌مانده عددی غیرصفر و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه است. (مثال ۱۳)

مثال ۱۳ برای ساخت نوعی دستبند، ۷ مهره‌ی رنگی لازم است. با ۳۸ مهره‌ی رنگی، چند دستبند می‌توان ساخت؟



مقسوم ← ۳۸ | ۷ → مقسوم‌علیه

−۳۵   ۵ → خارج قسمت

باقی‌مانده ← ۳

با ۳۸ مهره، ۵ دستبند می‌توان ساخت و ۳ مهره بدون استفاده باقی می‌ماند.

نکته: باقی‌مانده، همیشه عددی کوچک‌تر از مقسوم‌علیه است. به‌همین دلیل، اگر تمام اعداد را بر عددی (مثلاً بر ۷) تقسیم کنیم، باقی‌مانده می‌تواند یکی از اعداد کوچک‌تر از آن (۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰) باشد.

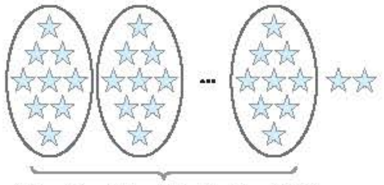
مثال ۱۴ **عددی را بر ۴ تقسیم کردیم. باقی‌مانده کدام است؟**

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ممکن است هریک از گزینه‌ها باشد.

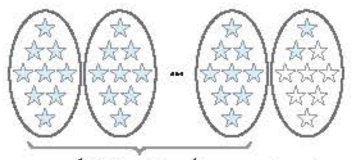
باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد بر ۴، می‌تواند یکی از اعداد ۰، ۱، ۲ یا ۳ باشد، پس تمام گزینه‌ها به‌جز گزینه‌ی (۳)، غلط هستند.

سؤال ۷ **در تقسیم یک عدد بر ۵، باقی‌مانده ممکن است چه اعدادی باشند؟**

مثال ۱۵ **عددی را بر ۹ تقسیم کرده‌ایم و باقی‌مانده ۲ شده است. حدّاکثر چه‌قدر می‌توانیم به مقسوم اضافه کنیم تا خارج قسمت تغییری نکند؟**



تعداد بسته‌های ۹تایی(خارج قسمت)



خارج قسمت قبلی + ۱

تعداد بسته‌های ۹تایی(خارج قسمت جدید)

مطابق شکل، تعدادی بسته‌ی ۹ تایی داریم و ۲ تا هم باقی‌مانده است.

اگر ۷ تا به مقسوم اضافه کنیم، با ۲ تای باقی‌مانده می‌توانیم یک بسته‌ی ۹تایی جدید درست کنیم (۹ = ۷ + ۲).

در این‌صورت، یکی به تعداد بسته‌ها (خارج قسمت تقسیم) اضافه می‌شود.

درحالی‌که می‌خواستیم خارج قسمت تغییری نکند، پس حدّاکثر تعدادی که می‌توان به مقسوم اضافه کرد، یکی کم‌تر؛ یعنی ۶ تا است و به‌طور کلّی:

نکته: حدّاکثر تعدادی که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییری نکند، یکی کم‌تر از اختلاف مقسوم‌علیه و باقی‌مانده است.

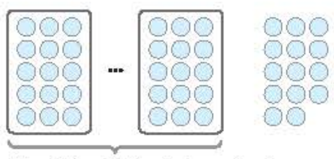
مثال ۱۶ **عددی را بر ۶ تقسیم کردیم و باقی‌مانده ۱ شد. اگر بخواهیم خارج قسمت تغییری نکند، حدّاکثر چند تا می‌توانیم به مقسوم اضافه کنیم؟**

حدّاکثر تعداد = (مقسوم‌علیه − باقی‌مانده) − ۱ = (۶ − ۱) − ۱ = ۵ − ۱ = ۴

سؤال ۸ **باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی بر ۸، برابر ۴ شده است. حدّاکثر چند تا می‌توان به مقسوم افزود تا خارج قسمت تغییری نکند؟**

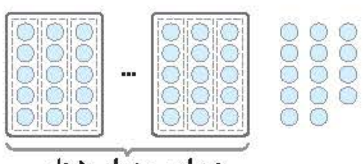
مثال ۱۷ **عددی را بر ۱۵ تقسیم کردیم و باقی‌مانده ۱۴ شد. اگر همین عدد را بر ۵ تقسیم کنیم، باقی‌مانده چه عددی می‌شود؟**

مطابق شکل، تعدادی بسته‌ی ۱۵تایی و ۱۴ تا باقی‌مانده داریم:



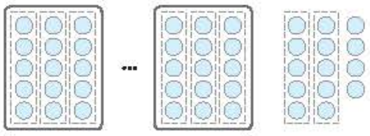
تعداد بسته‌های ۱۵تایی(خارج قسمت)

اگر عدد را بر ۵ تقسیم کنیم، درحقیقت می‌خواهیم با آن بسته‌های ۵ تایی بسازیم. هر بسته‌ی ۱۵تایی را می‌توان به ۳ بسته‌ی ۵ تایی تقسیم کرد. در این‌صورت، تعداد بسته‌ها ۳ برابر می‌شود.



تعداد بسته‌های ۵ تایی
(تعداد بسته‌های ۱۵تایی×۳)

با ۱۴تای باقی‌مانده هم می‌توان ۲ بسته‌ی ۵ تایی جدید ساخت و ۴ تا هم باقی می‌ماند. باقی‌مانده‌ی جدید ۴ می‌شود و خارج قسمت جدید، ۲ تا بیش‌تر از ۳ برابر خارج قسمت قبلی است.



۲ + خارج قسمت قبلی×۳

خارج قسمت جدید(تعداد بسته‌های۵ تایی)

از آن‌جا که ۱۵ بر ۵ بخش‌پذیر بود (و می‌توانستیم تمام بسته‌های ۱۵تایی را به بسته‌های ۵ تایی تقسیم کنیم)، کافی بود تنها باقی‌مانده‌ی تقسیم قبلی را بر ۵ تقسیم کنیم و باقی‌مانده‌ی جدید را به‌دست آوریم؛ یعنی:

باقی‌مانده‌ی قبلی ← ۱۴ | ۵

−۱۰   ۲

باقی‌مانده‌ی جدید ← ۴

مثال ۱۸ **باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی بر ۱۲، برابر ۱۰ شده است. باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم همین عدد بر ۳ چند است؟**

اگر بسته‌های ۱۲تایی را به بسته‌های ۳ تایی تقسیم کنیم، تعداد بسته‌ها ۴ برابر می‌شود. با ۱۰تای باقی‌مانده هم ۳ بسته‌ی جدید می‌توان ساخت. پس تعداد بسته‌های ۳تایی، ۳تا بیش‌تر از ۴ برابر تعداد بسته‌های ۱۲تایی است (۳ + ۴× خارج قسمت قبلی = خارج قسمت جدید) و یکی هم باقی می‌ماند.

۱۰ | ۳

−۹   ۳

باقی‌مانده‌ی جدید ← ۱

سؤال ۹ **تعدادی شکلات را بین ۸ نفر تقسیم کردیم و ۶ شکلات باقی ماند. اگر همین تعداد شکلات را بین ۴ نفر تقسیم کنیم، به هرکدام، چند برابر شکلات می‌رسد و چند شکلات باقی می‌ماند؟**

نکته: در یک تقسیم، اگر مقسوم و مقسوم‌علیه را در یک عدد ضرب (یا بر یک عدد تقسیم) کنیم، باقی‌مانده نیز در همان عدد ضرب (یا بر همان عدد تقسیم) می‌شود، امّا خارج قسمت تغییری نمی‌کند.

مثال ۱۹ **به تقسیم‌های زیر توجّه کنید.**

۳۰ | ۸ ، −۲۴ ، ۳ ، ۰۶ $\xrightarrow{\div 2}$ ۱۵ | ۴ ، −۱۲ ، (۳) ← تغییری نکرده ، ۰۳ (نصف شده)

۳۰ | ۸ ، −۲۴ ، ۳ ، ۰۶ $\xrightarrow{\times 2}$ ۶۰ | ۱۶ ، −۴۸ ، (۳) ← تغییری نکرده ، ۱۲ (۲ برابر شده)

مثال ۲۰ **خارج قسمت تقسیم عددی بر ۳، برابر ۷ و باقی‌مانده ۲ است. اگر پنج‌برابر این عدد را بر ۱۵ تقسیم کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت چه خواهد شد؟**

( ) | ۳ ، (۷) ، ۰۲ $\xrightarrow{\times 5}$ عدد جدید: ( ) × ۵ | ۳ × ۵ = ۱۵ ، (۷) ← خارج قسمت جدید ، ۲ × ۵ = ۱۰ ← باقی‌مانده‌ی جدید

خارج قسمت تغییری نمی‌کند، امّا باقی‌مانده ۵ برابر می‌شود.

سؤال ۱۰ **خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی بر ۱۶، به‌ترتیب ۹ و ۱۲ شده است. باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم همین عدد بر ۴ چند است؟**

امتحان تقسیم

برای اطمینان از درستی تقسیم، آن را امتحان می‌کنند. برای این‌که تقسیم درست باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱- باقی‌مانده کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد.

۲- اگر مقسوم‌علیه و خارج قسمت را در هم ضرب کنیم و با باقی‌مانده جمع کنیم، عدد به‌دست‌آمده برابر با مقسوم باشد.

مقسوم = باقی‌مانده + (خارج قسمت × مقسوم‌علیه)

مثال ۲۱ امتحان درستی تقسیم مقابل را بنویسید.

$$\begin{array}{r|l} ۲۳ & ۵ \\ \hline -۲۰ & ۴ \\ \hline ۰۳ & \end{array}$$

شرط (۱): $۳ < ۵$ شرط (۲): $۲۳ = ۲۰ + ۳ = ۳ + (۵ \times ۴)$

بهتر است ابتدا شرط اوّل را امتحان کنیم.

مثال ۲۲ درستی تقسیم‌های زیر را امتحان کنید.

$$\begin{array}{r|l} ۳۴ & ۷ \\ \hline -۲۱ & ۳ \\ \hline ۱۳ & \end{array}$$

تقسیم اشتباه است. ⇐ $\begin{cases} \cancel{۱۳ < ۷} & \text{درست نیست} \\ (۷ \times ۳) + ۱۳ = ۲۱ + ۱۳ = ۳۴ & \text{همان مقسوم است.} \end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} ۴۸ & ۹ \\ \hline -۴۵ & ۶ \\ \hline ۰۳ & \end{array}$$

تقسیم اشتباه است. ⇐ $\begin{cases} ۳ < ۹ \\ (۹ \times ۶) + ۳ = ۵۴ + ۳ = ۵۷ \neq ۴۸ & \text{با مقسوم تفاوت دارد.} \end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} ۳۶ & ۵ \\ \hline -۳۵ & ۷ \\ \hline ۰۱ & \end{array}$$

تقسیم درست است. ⇐ $\begin{cases} ۱ < ۵ \\ (۵ \times ۷) + ۱ = ۳۶ & \text{همان مقسوم است.} \end{cases}$

نکته: ۱) $\frac{۱}{۲}$ هر عددی را نصف آن عدد می‌گویند. برای محاسبه‌ی نصف یک عدد، کافی است آن را بر ۲ تقسیم کنیم.

۲) $\frac{۱}{۳}$ هر عددی را ثُلث آن عدد می‌گویند. برای محاسبه‌ی ثلث یک عدد، کافی است آن را بر ۳ تقسیم کنیم.

۳) $\frac{۱}{۴}$ هر عددی را رُبع آن عدد می‌گویند. برای محاسبه‌ی ربع یک عدد، کافی است آن را بر ۴ تقسیم کنیم.

۴) $\frac{۱}{۵}$ هر عددی را خُمس آن عدد می‌گویند. برای محاسبه‌ی خمس یک عدد، کافی است آن را بر ۵ تقسیم کنیم.

بخش‌پذیری

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی (مقسوم) بر عدد دیگر (مقسوم‌علیه) صفر شد، بر آن عدد بخش‌پذیر است.

مثال ۲۳ کدام‌یک از اعداد ۳۸ یا ۷۵، بر ۳ بخش‌پذیر است؟

$$\begin{array}{r|l} ۳۸ & ۳ \\ \hline -۳ & ۱۲ \\ \hline ۰۸ & \\ -۶ & \\ \hline ۲ & \end{array}$$

۲ ⇐ ۳۸ بر ۳ بخش‌پذیر نیست

$$\begin{array}{r|l} ۷۵ \text{ مقسوم} & ۳ \text{ مقسوم‌علیه} \\ \hline -۶ & ۲۵ \text{ خارج قسمت} \\ \hline ۱۵ & \\ -۱۵ & \\ \hline ۰۰ & \end{array}$$

۰۰ (باقی‌مانده) ⇐ ۷۵ بر ۳ بخش‌پذیر است

تمام اعدادی را که یک عدد بر آن‌ها بخش‌پذیر است، مقسوم‌علیه‌های آن عدد می‌گویند. مثلاً مقسوم‌علیه‌های ۱۰، اعداد ۱۰، ۵، ۲ و ۱ هستند.