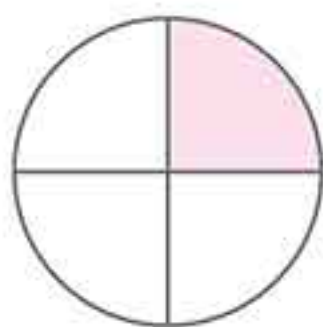
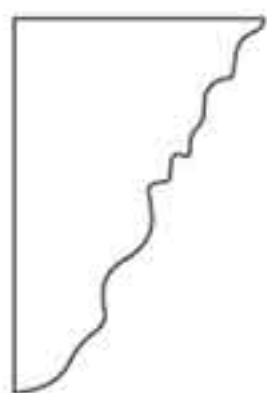


فصل اول

کسر متعارفی



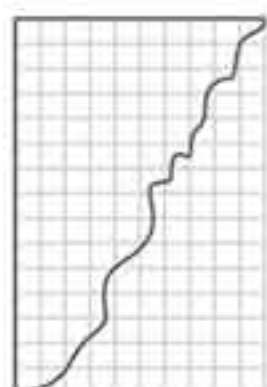
مفهوم کسر



شکل مقابل یک صفحه‌ی کاغذی را نشان می‌دهد که قسمتی از آن جدا شده است، اما نمی‌دانیم چه مقدار از آن جدا شده است.

در ریاضیات هرگاه بخواهیم بخشی از کل چیزی را نشان دهیم، از **اعداد کسری** استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال شکل مقابل، یک دایره است که قسمتی از آن رنگ شده است. برای نشان دادن این که چه مقدار از دایره رنگی است، از عدد کسری $\frac{1}{4}$ استفاده می‌کنیم. (عدد مورد نظر را «یک‌چهارم» می‌خوانیم). کسر $\frac{1}{4}$ یعنی کل شکل به چهار قسمت **مساوی** تقسیم و یک قسمت از آن رنگ شده است.

بنابراین در صفحه‌ی کاغذی بالا برای این که بیان کنیم چه مقدار از کاغذ جدا شده است، باید از یک **عدد کسری** استفاده کنیم. برای این منظور باید کل صفحه‌ی کاغذ را به قسمت‌های مساوی تقسیم کرده و سپس مشخص کنیم که چه مقدار از آن جدا شده است.



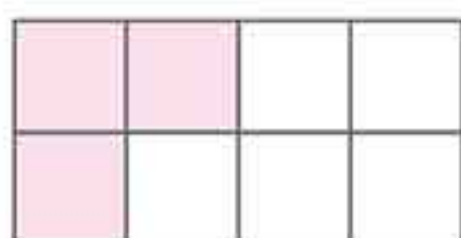
به‌نظر شما برای این که صفحه‌ی کاغذ را به قسمت‌های مساوی تقسیم کنیم، باید چه کاری انجام دهیم؟ یک روش برای این که صفحه‌ی کاغذ را به قسمت‌های مساوی تقسیم کنیم، این است که آن را به خانه‌های شطرنجی تقسیم‌بندی کرده و سپس به‌طور تقریبی مشخص کنیم که چه مقدار از آن جدا شده است.

نمایش عدد کسری

اکنون آموختیم که هرگاه بخواهیم **قسمتی از کل یک شکل یا هر چیز دیگری** را به‌صورت یک عدد نمایش دهیم، باید از **اعداد کسری** استفاده کنیم.

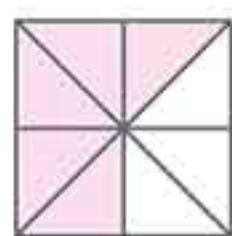
به این ترتیب که باید **کل** آن شکل را به **قسمت‌های مساوی** تقسیم کرده و سپس می‌توانیم تعیین کنیم که چند قسمت از کل شکل را باید در نظر بگیریم.

هر کسر دارای یک خط کسری (—) است. قسمت پایین خط کسری، **مخرج کسر** نام دارد، کل قسمت‌های شکل را شمرده و در مخرج می‌نویسیم و در بالای خط کسری که **صورت کسر** نام دارد، قسمت‌های مورد نظر را شمرده و می‌نویسیم.

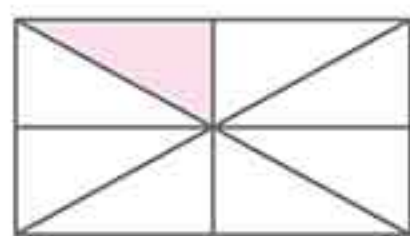


به‌طور مثال در شکل مقابل، کل شکل به ۸ قسمت مساوی تقسیم شده که باید آن را پایین خط کسری نوشت و ۳ قسمت شکل، رنگی است، که باید آن را بالای خط کسری بنویسیم. بنابراین عدد کسری مربوط به قسمت‌های رنگ‌شده‌ی شکل داده‌شده، $\frac{3}{8}$ می‌باشد.

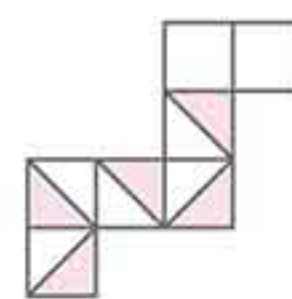
مثال ۱. قسمت‌های رنگی هر شکل را به صورت یک عدد کسری بنویسید.



$$\frac{5}{8}$$

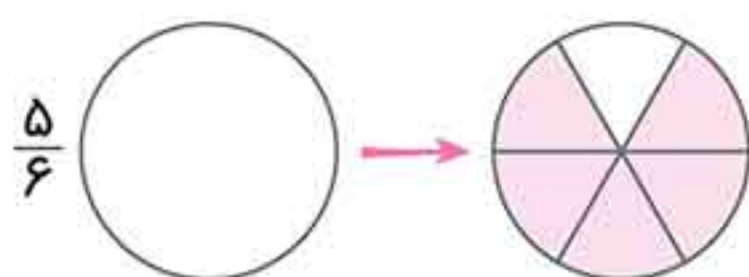


$$\frac{1}{8}$$

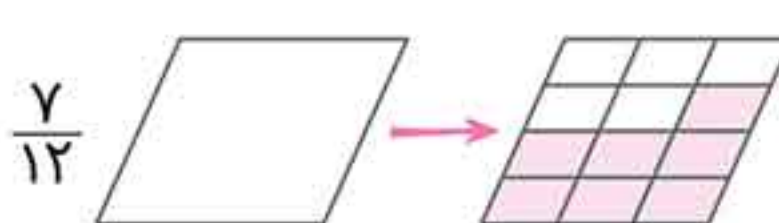


$$\frac{5}{14}$$

مثال ۲. در هر شکل، کسر خواسته شده را رنگ بزنید.



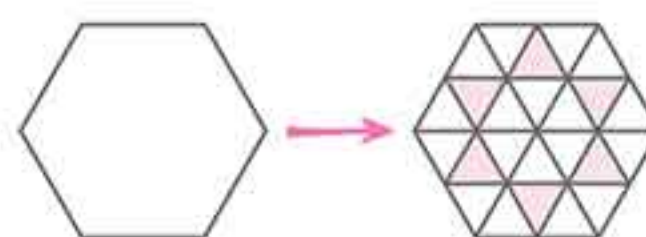
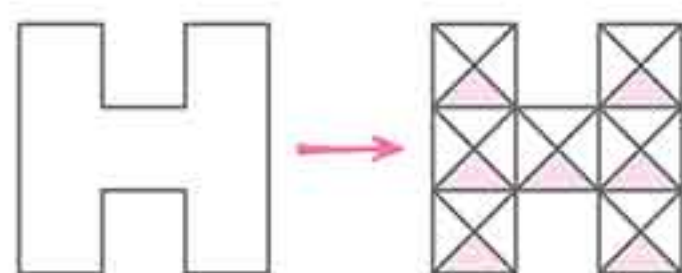
$$\frac{5}{6}$$



$$\frac{7}{12}$$

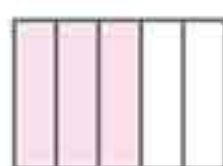
مثال ۳. $\frac{1}{4}$ هر یک از شکل‌های زیر را رنگ کنید.

کافی است هر شکل را به قسمت‌های مساوی تقسیم کنیم و سپس در هر قسمت، $\frac{1}{4}$ آن‌ها را رنگ بزنیم.



مثال ۴. برای هر یک از کسرهای زیر، یک شکل رسم کنید.

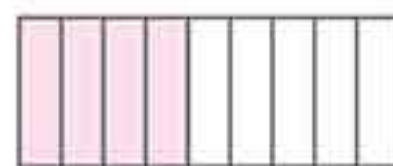
$$\frac{3}{5}$$



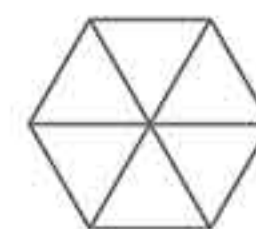
$$\frac{7}{7}$$



$$\frac{4}{9}$$



$$\frac{0}{6}$$



با دقت در مثال‌های بالا، به کسرهایی مثل کسر $\frac{0}{6}$ برخورد می‌کنیم که به آن‌ها کسرهای **مساوی با صفر** گویند؛ یعنی از کل شکل هیچ قسمتی از آن رنگ نشده است. مثل کسرهای دیگری مانند: $\frac{0}{2} = 0$ ، $\frac{0}{7} = 0$ و ...

همچنین به کسرهایی مثل کسر $\frac{7}{7}$ ، کسرهای **مساوی با واحد** گویند؛ $(\frac{7}{7} = 1)$ و معنی آن، این است که کل شکل رنگ شده است. مانند کسرهای $\frac{6}{6} = 1$ ، $\frac{13}{13} = 1$ و ...

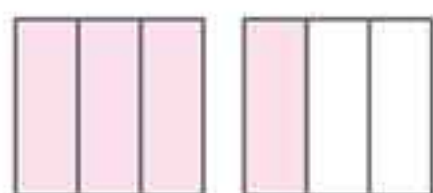
بقیه کسرهای بالا کسرهای **کوچک‌تر از واحد** هستند که در آن‌ها قسمتی از کل شکل رنگ شده است. مانند: $\frac{3}{5}$ ، $\frac{4}{9}$ و ...

همان‌طور که دیدید، در مورد «کسرهای مساوی با صفر»، «کسرهای کوچک‌تر از واحد» و «کسرهای مساوی با واحد» مطالبی گفته شد. آیا کسرهای بزرگ‌تر از واحد هم داریم؟

پاسخ سؤال بالا مثبت است؛ یعنی کسرهای بزرگ‌تر از واحد نیز داریم، مانند کسر $\frac{4}{3}$. اما باید کمی دقت کنیم، چون شاید فکر کنید که از یک شکل ۳ قسمتی **نمی‌توان** ۴ قسمت را مشخص کرد. بنابراین باید مفهوم دیگری داشته باشد.

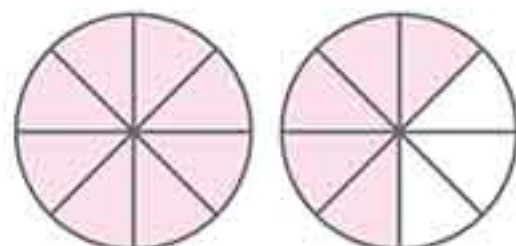


مفهوم کسره‌های بزرگ‌تر از واحد



در کسری مانند $\frac{4}{3}$ در واقع مقدار از یک واحد بیش‌تر است؛ یعنی از شکلی که سه قسمت شده، همه‌ی اجزای آن مدّ نظر بوده و شکل دیگری نیز موجود است که آن هم ۳ قسمت بوده، ولی یک قسمت از آن مدّ نظر است که در مجموع ۴ قسمت از کلّ دو شکل را خواهیم داشت.

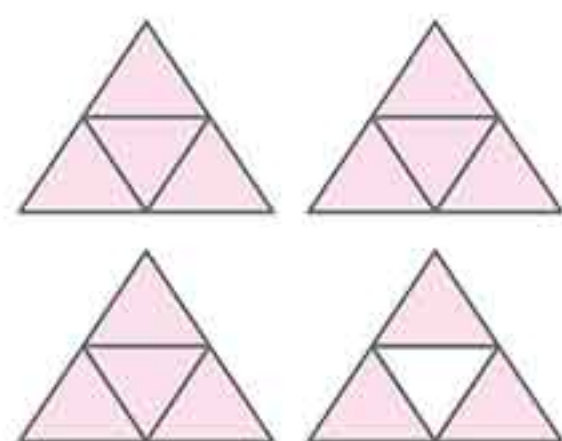
مثال ۵. شخصی ۲ عدد نان را که به شکل دایره بود، خرید و هر کدام را به ۸ قسمت مساوی تقسیم کرد و ۱۳ تکه از قسمت‌های کوچک را



خورد. مقدار نان خورده‌شده را به صورت یک کسر بزرگ‌تر از واحد نوشته و شکل آن را رسم کنید. مشخص است که او بیش از یک نان خورده است. چون یک نان ۸ قسمت دارد و او ۱۳ قسمت خورده است. بنابراین داریم:

$$\frac{13}{8}$$

مثال ۶. برای شکل مقابل، یک کسر بزرگ‌تر از واحد بنویسید.



چون هر شکل به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است، پس مخرج کسر بزرگ‌تر از واحد، ۴ می‌باشد. اکنون تعداد قسمت‌های رنگ‌شده را شمرده و بالای خط کسری می‌نویسیم: $\frac{15}{4}$

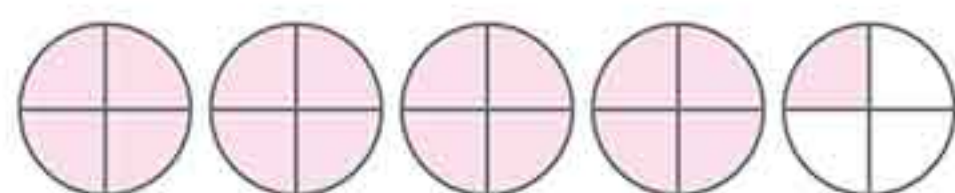
مثال ۷. برای کسر $\frac{11}{6}$ یک شکل بکشید.



باید شکل‌هایی بکشیم که هر کدام به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده‌اند.

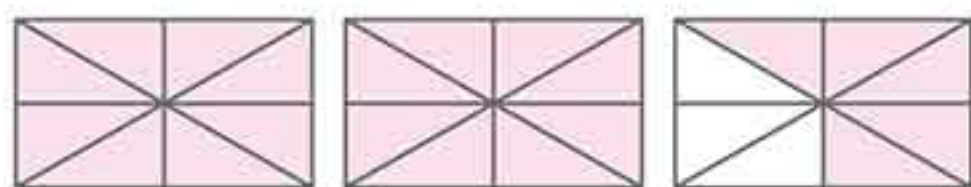
اعداد مخلوط

کسره‌های بزرگ‌تر از واحد را می‌توانیم به صورت یک عدد مخلوط بنویسیم. به طور مثال، اگر شخصی ۵ کلوچه داشته باشد و هر کدام را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کند و ۱۷ قسمت آن را بخورد ($\frac{17}{4}$)، در واقع او ۴ کلوچه را کامل خورده و از پنجمین کلوچه، $\frac{1}{4}$ آن را خورده است که می‌توانیم بنویسیم آن شخص $4\frac{1}{4}$ ، کلوچه خورده است؛ یعنی ۴ واحد کامل به اضافه‌ی $\frac{1}{4}$ از کلوچه‌ی پنجم. بنابراین داریم:



$$\frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$$

مثال ۸. برای شکل زیر، یک کسر بزرگ‌تر از واحد و یک عدد مخلوط بنویسید.



$$\frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$$

چگونه یک کسر بزرگ‌تر از واحد را به یک عدد مخلوط تبدیل کنیم؟

روش اول: باید تا جایی که امکان دارد، صورت کسر را به شکل جمع اعدادی به اندازه‌ی مخرج کسر بنویسیم. مانند:

$$\text{الف) } \frac{32}{6} = \frac{6+6+6+6+6+2}{6} = \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{2}{6} = 1+1+1+1+1+\frac{2}{6} = 5+\frac{2}{6} = 5\frac{1}{3}$$

$$\text{ب) } \frac{13}{7} = \frac{7+6}{7} = \frac{7}{7} + \frac{6}{7} = 1+\frac{6}{7} = 1\frac{6}{7}$$

روش دوم: می‌توانیم صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم. به این ترتیب که خارج قسمت تقسیم نشان‌دهنده‌ی عدد صحیح (واحد کامل)، مقسوم‌علیه نشان‌دهنده‌ی مخرج کسر و باقی‌مانده نشان‌دهنده‌ی صورت کسر می‌باشد.

$$\begin{array}{r} 59 \overline{) 19} \\ - 57 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\frac{59}{19} = 3 \frac{2}{19}$

به طور مثال برای تبدیل کسر $\frac{59}{19}$ به عدد مخلوط، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

مثال ۹. کسر $\frac{101}{14}$ را به صورت یک عدد مخلوط بنویسید.

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 14} \\ - 98 \\ \hline 3 \end{array} \Rightarrow \frac{101}{14} = 7 \frac{3}{14}$$

مثال ۱۰. کدام کسر را نمی‌توان به صورت یک عدد مخلوط نمایش داد؟

(د) $\frac{97}{15}$

(ج) $\frac{87}{53}$

(ب) $\frac{42}{43}$

(الف) $\frac{17}{8}$

گزینه‌ی «ب» $\frac{42}{43}$ ؛ چون این کسر کوچک‌تر از واحد است و فقط کسرهای بزرگ‌تر از واحد، به عدد مخلوط تبدیل می‌شوند.

روش تبدیل عدد مخلوط به یک کسر بزرگ‌تر از واحد

جمع
ضرب

$$\begin{array}{c} 3 \times 9 = 27 \\ 27 + 4 = 31 \\ \hline 9 \end{array} = \frac{31}{9}$$

برای تبدیل عدد مخلوط به یک کسر بزرگ‌تر از واحد، کافی است قسمت صحیح را در مخرج قسمت کسری ضرب کرده و حاصل را با صورت آن کسر جمع کنیم و جواب نهایی را در صورت کسر بنویسیم. مخرج کسر جدید هم، همان مخرج عدد مخلوط است. مانند:

$$4 \frac{3}{5} = 4 + \frac{3}{5}$$

به طور کلی می‌توان عدد مخلوط را به صورت جمع قسمت صحیح و قسمت کسری نوشت. مثال:

مثال ۱۱. کدام گزینه با $7 \frac{3}{5}$ برابر است؟

(د) $\frac{21}{5}$

(ج) $7 + \frac{3}{5}$

(ب) $\frac{21}{35}$

(الف) $7 \times \frac{3}{5}$

گزینه‌ی «ج»

مثال ۱۲. حاصل $\frac{111}{111}$ برابر است با:

(د) ۱۱۲

(ج) ۱۱۳

(ب) $\frac{(111+111) \times 111}{111}$

(الف) $\frac{12532}{111}$

گزینه‌ی «د»

$$\frac{111}{111} = 111 + \frac{111}{111} = 111 + 1 = 112$$

کسر مساوی با واحد

مثال ۱۳. عدد $9 \frac{9}{8}$ برابر است با:

(د) $9 \frac{1}{8}$

(ج) $\frac{99}{8}$

(ب) $\frac{90}{8}$

(الف) $10 \frac{1}{8}$

گزینه‌ی «الف» قسمت کسری هر عدد مخلوط، باید یک کسر کوچک‌تر از واحد باشد، ولی در این سؤال این طور نیست. پس باید قسمت کسری آن را به یک کسر کوچک‌تر از واحد تبدیل کنیم:

$$9 \frac{9}{8} = 9 + \frac{9}{8} = 9 + 1 \frac{1}{8} = 9 + 1 + \frac{1}{8} = 10 \frac{1}{8}$$

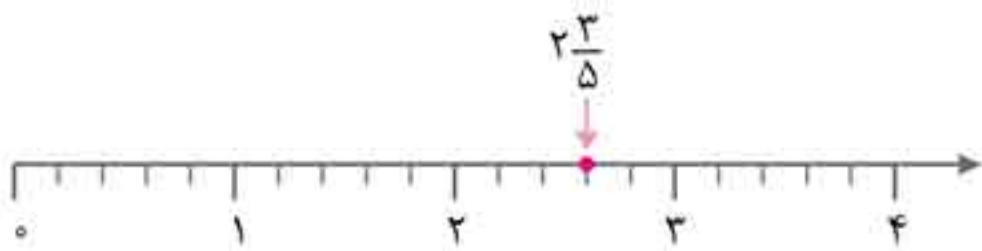


نمایش کسرها یا اعداد مخلوط روی محور

هر کسر یا عدد مخلوط را می‌توانیم روی محور اعداد نمایش دهیم. برای این کار، هر واحد روی محور را با توجه به مخرج کسر، به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کنیم و سپس با توجه به صورت کسر، قسمت‌های کوچک را می‌شماریم تا جای آن عدد روی محور مشخص شود.



برای نمایش کسر $\frac{5}{8}$ ، ابتدا روی محور، هر واحد را به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. (هر قسمت کوچک نشان‌دهنده $\frac{1}{8}$ است). سپس ۵ تا $\frac{1}{8}$ (پنج قسمت کوچک) را از صفر می‌شماریم تا عدد $\frac{5}{8}$ مشخص شود.

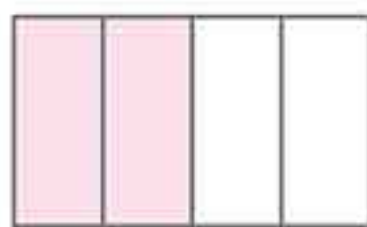


همچنین می‌توانیم عدد مخلوط $2\frac{3}{5}$ را روی محور نمایش دهیم:

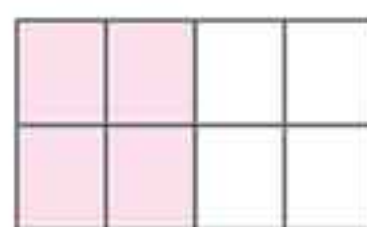
برای این کار، هر واحد باید ۵ قسمت شود. ابتدا دو واحد حرکت می‌کنیم و سپس ۳ قسمت کوچک دیگر هم جلو می‌رویم.

کسرهای مساوی

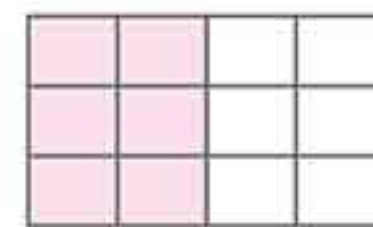
به هریک از شکل‌های زیر توجه کنید:



(الف)



(ب)



(ج)

در شکل (الف)، $\frac{2}{4}$ ، در شکل (ب)، $\frac{4}{8}$ و در شکل (ج)، $\frac{6}{12}$ رنگ شده است.

ظاهراً هیچ کدام از کسرهای $\frac{2}{4}$ ، $\frac{4}{8}$ و $\frac{6}{12}$ با هم یکسان نیستند، اما با دقت در شکل‌ها می‌بینیم که در همه‌ی شکل‌ها مقدار یکسانی رنگ شده و هیچ شکلی بیش‌تر یا کم‌تر از دیگری رنگ نشده است. پس اعداد کسری $\frac{2}{4}$ ، $\frac{4}{8}$ و $\frac{6}{12}$ با هم برابرند. اما چه‌طور ممکن است؟!

با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر صورت و مخرج کسر $\frac{2}{4}$ را در ۲ ضرب کنیم، کسر $\frac{4}{8}$ حاصل می‌شود:

$$\frac{2 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4}{8}$$

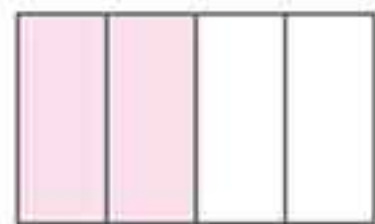
همچنین اگر صورت و مخرج کسر $\frac{2}{4}$ را در ۳ ضرب کنیم، کسر $\frac{6}{12}$ حاصل می‌شود:

$$\frac{2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$$

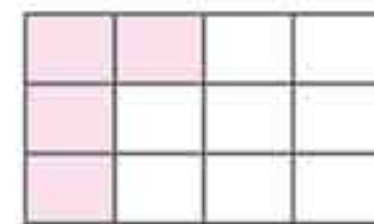
آیا اگر صورت یک کسر را در ۲ و مخرج آن را در ۳ ضرب کنیم، کسر مساوی با آن حاصل می‌شود؟ امتحان می‌کنیم.

$$\frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{4}{12}$$

برای بررسی، کافی است شکلی برای $\frac{2}{4}$ و $\frac{4}{12}$ بکشیم.



$$\frac{2}{4}$$



$$\frac{4}{12}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، قسمت‌های رنگ‌شده در دو شکل یکسان نیستند، پس $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{12}$.

بنابراین می‌توان یک نتیجه‌ی کلی گرفت که برای نوشتن کسرهای مساوی با یک کسر، کافی است صورت و مخرج آن کسر را در عددی یکسان (غیر از صفر) ضرب کنیم.



مثال ۱۴. برای کسر $\frac{3}{7}$ ، پنج کسر مساوی بنویسید.

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{9}{21} = \frac{12}{28} = \frac{15}{35} = \frac{18}{42}$$

مثال ۱۵. اگر دو کسر $\frac{6}{9}$ و $\frac{18}{\text{○}}$ با هم مساوی باشند، به جای ○ چه عددی باید قرار گیرد؟

$$\frac{6}{9} = \frac{18}{\text{○}}$$

(با ضرب کردن هر دو طرف در ۳، عدد ۱۸ به دست می‌آید)

مثال ۱۶. کسری مساوی با $\frac{7}{6}$ بنویسید که اختلاف صورت و مخرج آن ۵ باشد.

این سؤال، یک کسر مساوی با $\frac{7}{6}$ را با شرط این که اختلاف صورت و مخرج آن برابر با ۵ باشد، خواسته است. پس ابتدا اختلاف صورت و مخرج

کسر اصلی را پیدا می‌کنیم:

چون می‌خواهیم اختلاف صورت و مخرج کسر، ۵ واحد باشد، بنابراین باید صورت و مخرج کسر $\frac{7}{6}$ را در ۵ ضرب کنیم:

$$\frac{7 \times 5}{6 \times 5} = \frac{35}{30}$$

ساده کردن کسرها

همان‌طور که در قسمت قبل مشاهده کردید، صورت و مخرج یک کسر را می‌توانیم در عددی یکسان ضرب کنیم. مثلاً $\frac{12}{20} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4}$. اکنون

اگر قرار باشد از کسر $\frac{12}{20}$ به $\frac{3}{5}$ برسیم، باید برعکس عمل ضرب، یعنی تقسیم کنیم. پس:

$$\frac{12 \div 4}{20 \div 4} = \frac{3}{5}$$

بنابراین می‌توان گفت: برای ساده کردن کسرها، کافی است صورت و مخرج آن‌ها را بر یک عدد یکسان (غیر از صفر) تقسیم کنیم.

مثال ۱۷. کسر مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{36}{48} : \frac{36 \div 12}{48 \div 12} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{36 \div 12}{48 \div 12} = \frac{3}{4}$$

البته برای ساده کردن کسر $\frac{36}{48}$ ، می‌توانیم به صورت مقابل نیز عمل کنیم:



در ساده کردن کسرها باید توجه کنیم که صورت و مخرج کسر، بر عددی که می‌خواهیم تقسیم کنیم، بخش‌پذیر باشند. برای

مثال برای ساده کردن کسر $\frac{72}{90}$ صورت و مخرج را نمی‌توانیم بر ۵ تقسیم کنیم. زیرا ۹۰ بر ۵ بخش‌پذیر بوده ولی ۷۲ بر ۵

$$\frac{72 \div 2}{90 \div 2} = \frac{36}{45}$$

بخش‌پذیر نیست، اما هر دو بر عدد ۲ بخش‌پذیرند. پس:

$$\frac{36 \div 3}{45 \div 3} = \frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$$

اکنون چون صورت و مخرج کسر بالا بر ۳ بخش‌پذیرند، داریم:

$$\frac{72 \div 18}{90 \div 18} = \frac{4}{5}$$

البته می‌توانستیم از همان ابتدا صورت و مخرج کسر $\frac{72}{90}$ را بر ۱۸ نیز تقسیم کنیم:

روش دیگری برای ساده کردن کسرها

در این روش می‌توانیم هر کدام از اعداد صورت و مخرج را به صورت ضرب ۲ یا چند عدد بنویسیم و اعداد مشترک صورت و مخرج را با هم ساده کنیم. به‌طور مثال داریم:

$$\frac{72}{90} = \frac{8 \times 9}{9 \times 10} = \frac{8}{10} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{5}$$

البته ممکن است این سؤال در ذهن شما ایجاد شود که یک عدد، ممکن است چندین حاصل ضرب

$$\frac{72}{90} = \frac{9 \times 36}{9 \times 45} = \frac{36}{45} = \frac{4 \times 9}{5 \times 9} = \frac{4}{5}$$

داشته باشد. به مثال مقابل توجه کنید:

می‌بینید که تمام پاسخ‌ها یکسان هستند.



$$\frac{100 \times 63}{42 \times 30} = \frac{\overbrace{10 \times 10}^{100} \times \overbrace{9 \times 7}^{63}}{\overbrace{6 \times 7}^{42} \times \overbrace{5 \times 6}^{30}} = \frac{10 \times 9}{6 \times 5} = \frac{\overbrace{5 \times 2}^{10} \times \overbrace{3 \times 3}^9}{\overbrace{2 \times 3}^6 \times \overbrace{3 \times 3}^9} = \frac{5}{1} = 5$$

مثال ۱۸. کسر مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

پیدا کردن کوچک‌ترین مخرج مشترک برای دو کسر

به منظور پیدا کردن کوچک‌ترین مخرج مشترک برای دو کسر، کافی است

کسرهای مساوی با آن دو کسر را بنویسیم. به طور مثال داریم:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \frac{30}{36} = \frac{35}{42} = \frac{40}{48} = \dots$$

همان‌طور که در مثال قبل می‌بینید، هر دو کسر $\frac{5}{6}$ و $\frac{3}{8}$ بی‌شمار مخرج

مشترک دارند، ولی کوچک‌ترین مخرج مشترک آن‌ها عدد ۲۴ می‌باشد.

مثال ۱۹. کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر $\frac{5}{12}$ و $\frac{7}{9}$ را بیابید. \Rightarrow کوچک‌ترین مخرج مشترک = ۳۶

البته برای به دست آوردن کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر، راه‌های دیگری نیز وجود دارند. به طور مثال، به روش زیر دقت کنید:

گاهی اوقات یکی از مخرج‌ها بر مخرج دیگری بخش پذیر است؛ در این حالت، مخرج بزرگ‌تر، همان مخرج مشترک است. کوچک‌ترین

مخرج مشترک دو کسر $\frac{2}{3}$ و $\frac{7}{12}$ ، عدد ۱۲ می‌باشد، چون ۱۲ بر ۳ بخش پذیر است و داریم:

$$\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

که با $\frac{7}{12}$ هم‌مخرج می‌شود.

اگر مخرج بزرگ‌تر بر مخرج کوچک‌تر بخش پذیر نبود، کافی است مضربی از مخرج بزرگ‌تر را بیابیم که بر مخرج کوچک‌تر بخش پذیر باشد.

آن وقت اولین مضرب که بر مخرج کوچک‌تر بخش پذیر است، کوچک‌ترین مخرج مشترک است. مثلاً:

می‌بینید که ۱۲ بر ۸ بخش پذیر نیست، ولی عدد ۲۴ که دومین مضرب عدد ۱۲ می‌باشد ($12 \times 2 = 24$)، بر ۸ بخش پذیر است. پس

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{24}, \quad \frac{11}{12} = \frac{22}{24}$$

کوچک‌ترین مخرج مشترک این دو کسر، عدد ۲۴ می‌باشد. بنابراین:

البته با توجه به روش‌های مطرح شده، می‌توانیم بین ۳ یا چند کسر نیز مخرج مشترک بیابیم. مثلاً کوچک‌ترین مخرج مشترک ۳ کسر

$$\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9} \text{، عدد ۳۶ می‌باشد.}$$

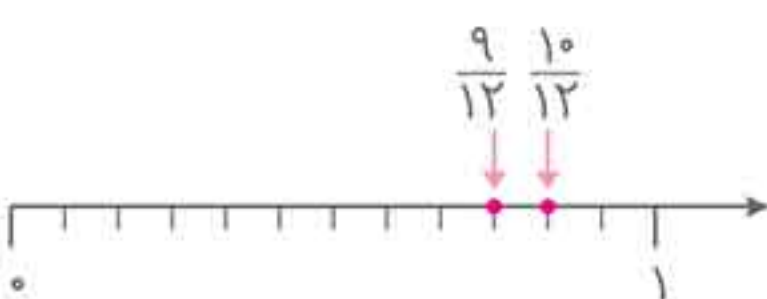
کاربردهای کوچک‌ترین مخرج مشترک

ممکن است این سؤال در ذهن شما مطرح شود که چرا باید کوچک‌ترین مخرج مشترک بین چند کسر را پیدا کرد؟

برای فهمیدن پاسخ سؤال، به مثال بعد، توجه کنید:

$$\frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}, \quad \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$$

مثال ۲۰. دو کسر $\frac{3}{4}$ و $\frac{5}{6}$ را روی یک محور نمایش دهید.



ما نمی‌توانیم واحدهای یک محور را به قسمت‌های مختلف تقسیم‌بندی کنیم. ابتدا باید مخرج

مشترک برای دو کسر پیدا کنیم و سپس واحدها را به آن تقسیم‌بندی کنیم. برای نمایش $\frac{3}{4}$ و

$\frac{5}{6}$ روی یک محور، کافی است هر واحد را ۱۲ قسمت کنیم و کسرهای مساوی با آن‌ها را روی

محور نمایش دهیم.

می‌بینید که اگر مخرج‌های دو کسر یکسان باشند، به راحتی می‌توانیم آن‌ها را مقایسه کنیم.

مقایسه‌ی دو کسر

به‌طور کلی برای مقایسه‌ی هر دو کسر، کافی است صورت‌ها یا مخرج‌هایشان با هم برابر باشند.

الف) اگر **مخرج‌ها** برابر باشند، کسری بزرگ‌تر است که **صورت** بزرگ‌تری داشته باشد. مانند:

$$\frac{12}{15} > \frac{9}{15}$$

ب) اگر **صورت‌ها** برابر باشند، کسری بزرگ‌تر است که **مخرج** کوچک‌تری داشته باشد. مانند:

$$\frac{6}{21} < \frac{6}{11}$$

ج) اگر نه صورت و نه مخرج دو کسر با هم برابر نباشند، کافی است مخرج‌ها یا صورت‌ها را یکسان کنیم تا کسرهای مساوی با کسرهای قبلی ساخته شوند. در واقع در این‌جا می‌توانیم از کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر کمک بگیریم. مانند:

$$\frac{10}{12} \circ \frac{13}{15} \Rightarrow \frac{10 \times 5}{12 \times 5} \circ \frac{13 \times 4}{15 \times 4} \Rightarrow \frac{50}{60} < \frac{52}{60} \Rightarrow \frac{10}{12} < \frac{13}{15}$$

البته در مقایسه‌ی دو کسر، حالت‌های خاصی نیز مطرح می‌شود که آن‌ها هم از روابط بالا پیروی می‌کنند که به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} < \frac{5}{5}$$

الف) همیشه کسرهای کوچک‌تر از واحد، از کسرهای مساوی با واحد کوچک‌ترند. مانند:

$$\frac{9}{5} > \frac{19}{19}$$

ب) همیشه کسرهای بزرگ‌تر از واحد، از کسرهای مساوی با واحد بزرگ‌ترند. مانند:

$$\frac{2}{11} < \frac{5}{3}$$

ج) همیشه کسرهای کوچک‌تر از واحد، از کسرهای بزرگ‌تر از واحد کوچک‌ترند. مانند:

د) همیشه کسرهایی که دارای صورت صفر هستند (چون برابر با صفر می‌باشند)، از همه‌ی کسرها کوچک‌ترند. مانند:

$$\frac{0}{8} < \frac{1}{1000}, \frac{0}{25} < \frac{2}{2}, \frac{0}{325} < \frac{1}{7}$$

$$\frac{6}{6} = \frac{666}{666}$$

ه) همیشه کسرهای برابر با واحد، با هم برابرند. مانند:

مقایسه‌ی اعداد مخلوط با یکدیگر و با کسرها

به‌طور کلی می‌توانیم با تبدیل اعداد مخلوط به کسر، از قواعد مربوط به مقایسه‌ی کسرها استفاده کنیم و عمل مقایسه را انجام دهیم. مانند:

$$\frac{15}{8} \circ 1\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{15}{8} \circ \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{75}{40} > \frac{72}{40} \Rightarrow \frac{15}{8} > 1\frac{4}{5}$$

البته راه‌های دیگری هم برای مقایسه‌ی دو عدد مخلوط وجود دارد که در زیر به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

$$3\frac{7}{9} > \frac{4}{11}$$

الف) هر عدد مخلوط، از هر کسر کوچک‌تر از واحد یا مساوی با واحد، بزرگ‌تر است. مانند:

ب) در مقایسه‌ی دو عدد مخلوط، باید توجه کنیم که قسمت کسری هر کدام از اعداد مخلوط، کوچک‌تر از واحد هست یا نه. اگر قسمت کسری، کوچک‌تر از واحد نباشد، ابتدا باید آن را به عدد مخلوط تبدیل کنیم تا کسر کوچک‌تر از واحد حاصل شود. آن‌گاه کسری بزرگ‌تر است که قسمت

$$5\frac{6}{7} < 13\frac{1}{2}$$

عدد صحیح (واحد کامل) آن بزرگ‌تر باشد. مانند:

ج) اگر قسمت عدد صحیح دو عدد مخلوط با هم برابر باشند، باید کسرهایشان را براساس آن‌چه در بخش مقایسه‌ی کسرها گفتیم، مقایسه

$$3\frac{4}{7} \circ 3\frac{8}{11} \Rightarrow 3\frac{44}{77} < 3\frac{56}{77} \Rightarrow 3\frac{4}{7} < 3\frac{8}{11}$$

کنیم. مانند:

جمع و تفریق اعداد کسری و اعداد مخلوط روی محور

برای محاسبه‌ی جمع و تفریق اعداد کسری و اعداد مخلوط روی محور، کافی است با توجه به مخرج‌ها، هر واحد روی محور را به قسمت‌های

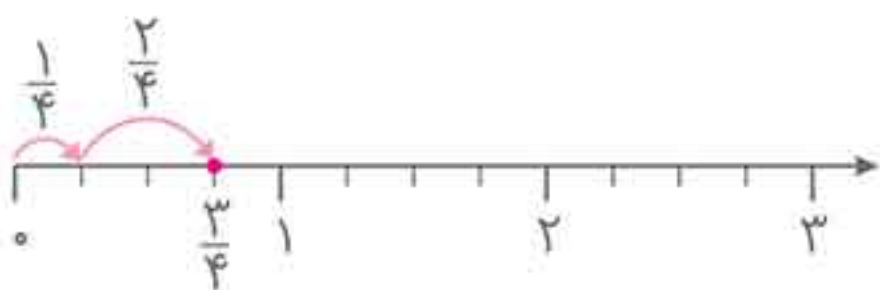
مساوی تقسیم کرده و به‌اندازه‌ی اولین عدد سمت چپ، از صفر شمرده و جلو رویم و سپس به‌اندازه‌ی دومین عدد سمت چپ به حرکت

اولی اضافه (جمع) یا از آن کم (تفریق) کنیم. اگر چند عدد دیگر نیز داشتیم، به همین صورت عمل می‌کنیم.

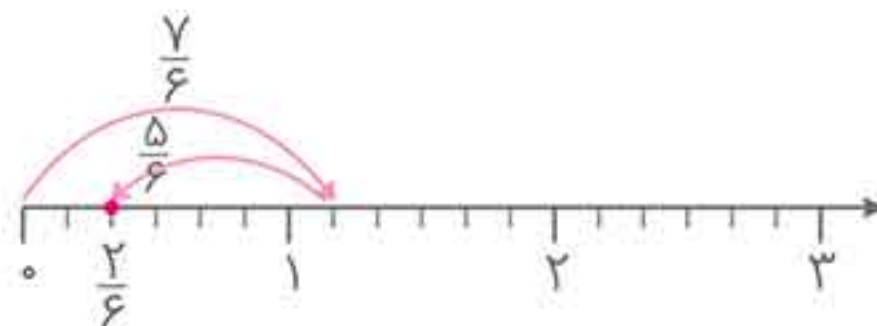


مثال ۲۱. جمع و تفریق‌های زیر را روی محور انجام دهید.

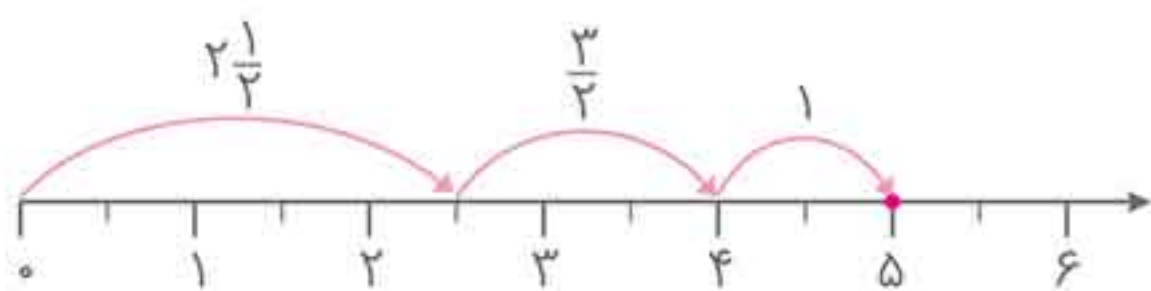
الف) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$



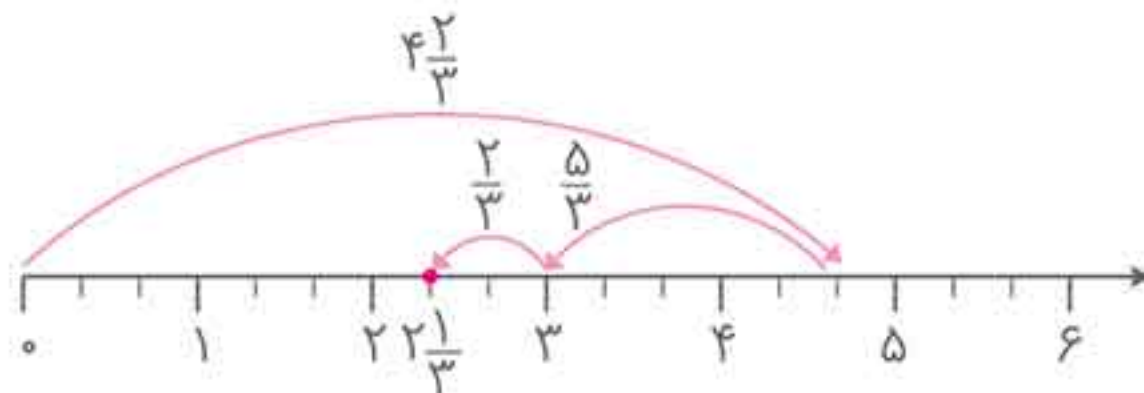
ب) $\frac{7}{6} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6}$



ج) $2\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 5$



د) $4\frac{2}{3} - \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$



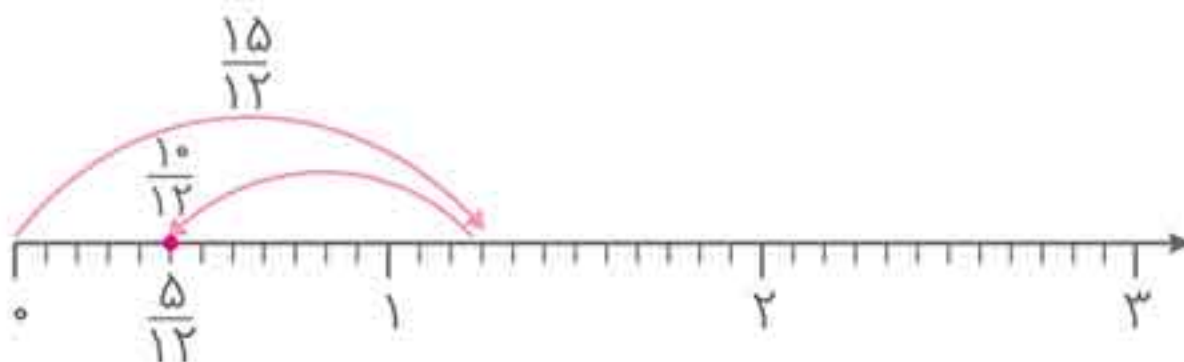
حال اگر کسرها و اعداد مخلوطی را که دارای مخرج یکسان نیستند، بخواهیم روی محور جمع و تفریق کنیم، چه کاری باید انجام دهیم؟ کافی است ابتدا کوچک‌ترین مخرج مشترک آن‌ها را تعیین کرده و سپس براساس کوچک‌ترین مخرج مشترک آن‌ها، تقسیم‌بندی هر واحد را انجام دهیم.

مثال ۲۲. جمع و تفریق‌های زیر را روی محور انجام دهید.

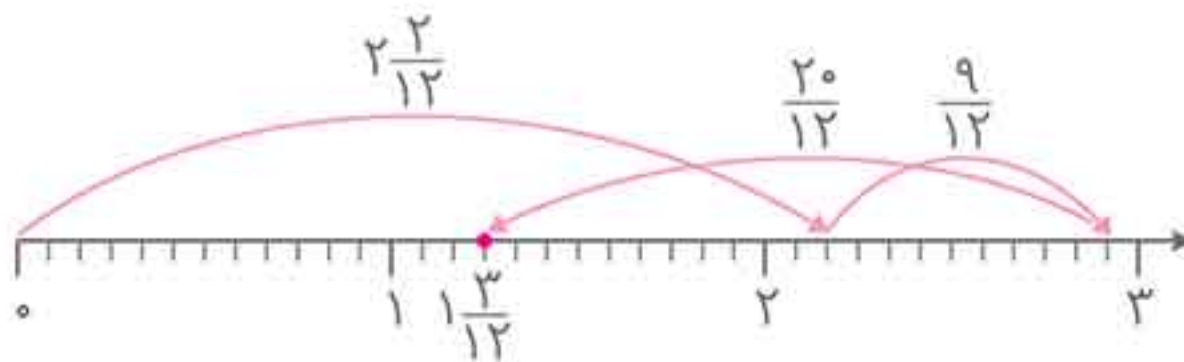
الف) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$



ب) $\frac{5}{4} - \frac{5}{6} = \frac{15}{12} - \frac{10}{12} = \frac{5}{12}$



ج) $2\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{5}{3} = 2\frac{2}{12} + \frac{9}{12} - \frac{20}{12} = 1\frac{3}{12}$

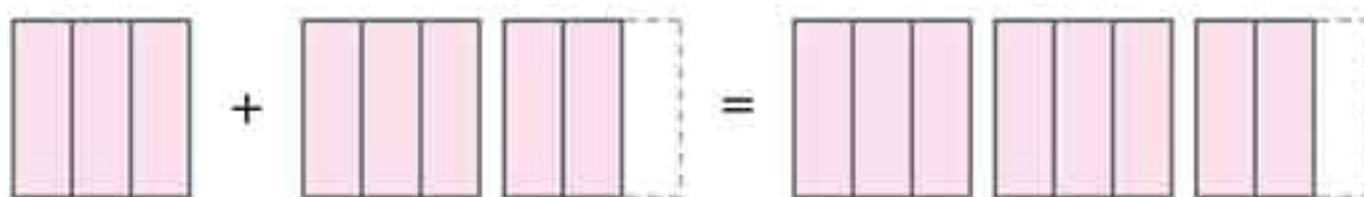


جمع اعداد کسری و اعداد مخلوط به کمک شکل

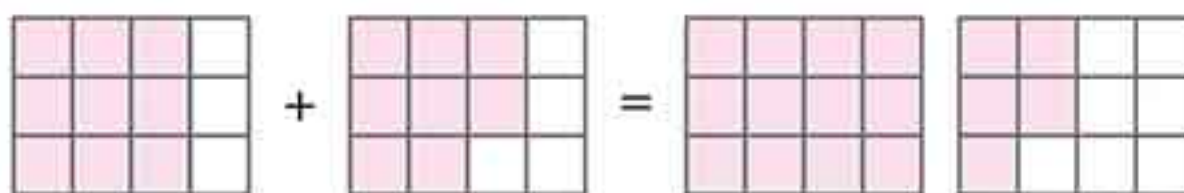
کافی است شکلی متناسب با هر کسر رسم کرده و سپس آن‌ها را با هم جمع کنیم. (در صورت نیاز، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم.)

مثال ۲۳. جمع‌های زیر را به کمک شکل انجام دهید.

الف) $1 + \frac{5}{3} = 1 + 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$



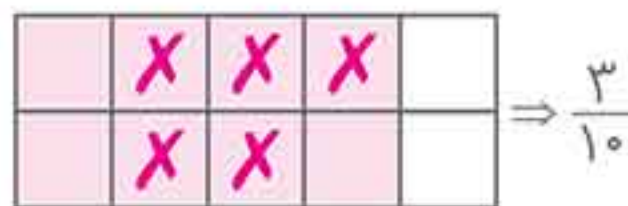
ب) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = 1\frac{5}{12}$



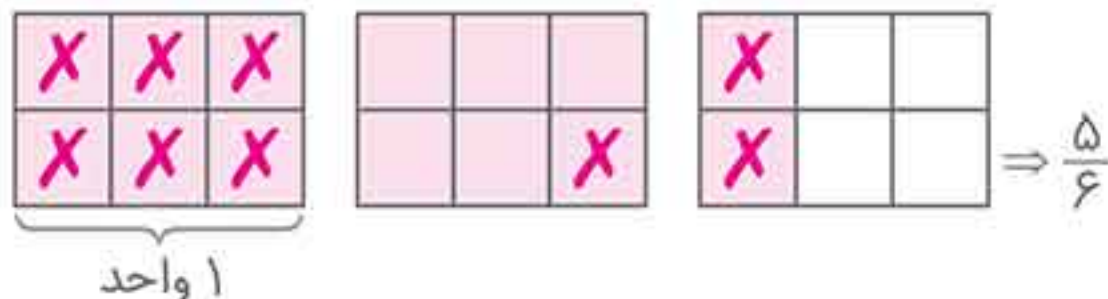
نمایش تفریق کسرها روی شکل: برای نمایش تفریق کسرها روی شکل، فقط شکل کسر (یا عدد مخلوط) اول را رسم می‌کنیم، سپس به اندازه‌ی کسر دوم، از آن خط می‌زنیم. (هر جا لازم بود، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم).

مثال ۲۴. هریک از تفریق‌های زیر را روی شکل نشان دهید.

الف) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$



ب) $2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2} = 2\frac{2}{6} - 1\frac{3}{6} = \frac{5}{6}$



جمع و تفریق اعداد کسری و اعداد مخلوط با کمک محاسبه

اگر مخرج کسرها مساوی باشند، صورت‌های آن‌ها را جمع یا تفریق کرده و مخرج را نیز بدون تغییر می‌نویسیم. مانند:

الف) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

ب) $\frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

اما اگر مخرج‌ها یکسان نباشند، باید **کوچک‌ترین** مخرج مشترک آن‌ها را پیدا کرده و سپس عملیات را انجام دهیم. مانند:

الف) $\frac{1}{8} + \frac{5}{6} = \frac{3}{24} + \frac{20}{24} = \frac{23}{24}$

ب) $\frac{9}{15} - \frac{1}{6} = \frac{18}{30} - \frac{5}{30} = \frac{13}{30}$

ج) $1 + \frac{7}{10} - \frac{3}{5} = \frac{10}{10} + \frac{7}{10} - \frac{6}{10} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$

در محاسباتی که اعداد مخلوط داریم، می‌توانیم آن‌ها را به کسر تبدیل کرده و سپس مانند بالا محاسبات را انجام دهیم و یا این که قسمت عدد صحیح اعداد مخلوط را جدا کنیم و بعد محاسبات را انجام دهیم. مانند:

الف) $5\frac{1}{7} + 3\frac{1}{3} - \frac{8}{21} = (5+3) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{8}{21}) = 8 + (\frac{3}{21} + \frac{7}{21} - \frac{8}{21}) = 8 + \frac{2}{21} = 8\frac{2}{21}$

ب) $5\frac{13}{16} - 2\frac{3}{8} - 1\frac{1}{8} = (5-2-1) + (\frac{13}{16} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8}) = 2 + (\frac{13}{16} - \frac{6}{16} - \frac{2}{16}) = 2 + \frac{5}{16} = 2\frac{5}{16}$

نکته



اگر در هنگام تفریق، کسر سمت چپ از کسر سمت راست کوچک‌تر بود، می‌توانیم از قسمت صحیح یک واحد کم کنیم و به اندازه‌ی مخرج کسر، به آن اضافه کنیم.

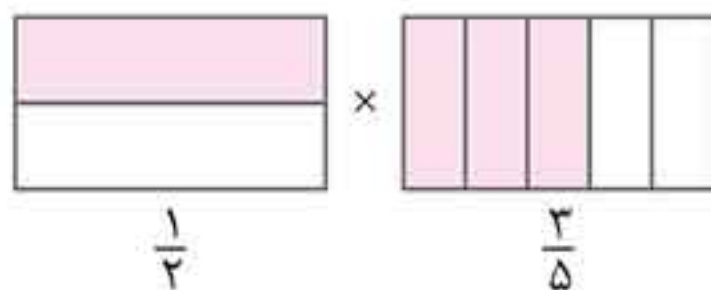
مثال ۲۵. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $8\frac{11}{20} - 3\frac{13}{20} \Rightarrow 7\frac{20+11}{20} - 3\frac{13}{20} = (7-3) + (\frac{31}{20} - \frac{13}{20}) = 4\frac{18}{20}$

ب) $5\frac{2}{5} - 1\frac{2}{3} = 5\frac{6}{15} - 1\frac{10}{15} = 4\frac{15+6}{15} - 1\frac{10}{15} = (4-1) + (\frac{21}{15} - \frac{10}{15}) = 3\frac{11}{15}$

ج) $7 - 3\frac{4}{5} = 6\frac{5}{5} - 3\frac{4}{5} = (6-3) + (\frac{5}{5} - \frac{4}{5}) = 3\frac{1}{5}$

ضرب کسرها به کمک شکل



هرگاه بخواهیم ضرب دو کسر را روی یک شکل نشان دهیم، باید مقدار هر دو کسر را روی شکل رنگ کنیم و قسمت‌های مشترک رنگ شده، حاصل ضرب می‌باشند. مانند:

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$



ضرب اعداد مخلوط به کمک شکل

برای ضرب اعداد مخلوط به کمک شکل، از محاسبه‌ی مساحت مستطیل کمک می‌گیریم. به این ترتیب که هر عدد مخلوط، به‌عنوان یکی از اضلاع مستطیل قرار می‌گیرد و سپس با محاسبه‌ی مساحت قسمت‌های تشکیل‌شده در داخل مستطیل، حاصل ضرب به‌دست می‌آید.

مثال ۲۶. حاصل ضرب‌های زیر را با استفاده از شکل به‌دست آورید.

الف) $2\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{4} = (1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} \times 1) + (\frac{1}{4} \times 1) + (\frac{1}{4} \times \frac{1}{3})$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 2 + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = 2 + \frac{11}{12} = 2\frac{11}{12}$$

	1	1	$\frac{1}{3}$
1	1×1	1×1	$1 \times \frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 1$	$\frac{1}{4} \times 1$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$

ب) $3\frac{5}{7} \times 2\frac{11}{20} = (1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times \frac{5}{7}) + (1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 1)$

$$+ (1 \times \frac{5}{7}) + (\frac{11}{20} \times 1) + (\frac{11}{20} \times 1) + (\frac{11}{20} \times 1) + (\frac{11}{20} \times \frac{5}{7})$$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{5}{7} + 1 + 1 + 1 + \frac{5}{7} + \frac{11}{20} + \frac{11}{20} + \frac{11}{20} + \frac{55}{140}$$

$$= 6 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{11}{20} + \frac{11}{20} + \frac{11}{20} + \frac{55}{140}$$

$$= 6 + \frac{10}{7} + \frac{33}{20} + \frac{11}{20} = 6 + \frac{200}{140} + \frac{231}{140} + \frac{55}{140} = 6 + \frac{486}{140} = 9\frac{66}{140} = 9\frac{33}{70}$$

	1	1	1	$\frac{5}{7}$
1	1×1	1×1	1×1	$1 \times \frac{5}{7}$
1	1×1	1×1	1×1	$1 \times \frac{5}{7}$
$\frac{11}{20}$	$\frac{11}{20} \times 1$	$\frac{11}{20} \times 1$	$\frac{11}{20} \times 1$	$\frac{11}{20} \times \frac{5}{7}$

ضرب کسرها و اعداد مخلوط به کمک محاسبه

برای ضرب هر دو کسر، کافی است صورت‌های دو کسر در هم و مخرج‌های آن‌ها نیز در هم ضرب شوند. مانند:

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$$

تذکره:

قبل از ضرب کردن، در صورت امکان اعداد صورت را با اعداد مخرج ساده می‌کنیم و بعد عملیات ضرب را انجام می‌دهیم. مانند:

الف) $\frac{2}{4} \times \frac{5}{15} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

ب) $\frac{8^2}{9^3} \times \frac{3^1}{4^1} = \frac{2 \times 1}{3 \times 1} = \frac{2}{3}$

ج) $\frac{25^5}{16^4} \times \frac{12^3}{35^7} \times \frac{21^7}{15^5} = \frac{5^1}{4^1} \times \frac{3}{7^1} \times \frac{7^1}{5^1} = \frac{3}{4}$

گاهی ضرب چند کسر را به‌صورت یک کسر بزرگ می‌نویسند. در این حالت هم، ساده کردن دقیقاً مثل ساده کردن ضرب دو یا چند کسر می‌باشد. مانند:

$$\frac{8}{9} \times \frac{24}{25} \times \frac{45}{48} = \frac{8 \times 24^1 \times 45^5}{9^1 \times 25 \times 48^2} = \frac{8^4 \times 1 \times 5^1}{1 \times 25 \times 4^1} = \frac{4}{5}$$

اگر در عملیات ضرب، عدد مخلوط وجود داشت، ابتدا باید آن را به کسر تبدیل کنیم و سپس مانند بالا، عملیات ضرب را انجام دهیم. مانند:

الف) $1\frac{2}{3} \times 4\frac{5}{6} = \frac{5}{3} \times \frac{29}{6} = \frac{145}{18} = 8\frac{1}{18}$

ب) $4 \times 3\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{4^1}{1} \times \frac{25}{8^2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$

نمایش ضرب عدد صحیح در کسر و عدد مخلوط روی محور:

برای نمایش ضرب عدد صحیح در کسر یا عدد مخلوط روی محور، به صورت زیر عمل می‌کنیم:
(الف) ابتدا عدد مخلوط را به کسر تبدیل می‌کنیم.

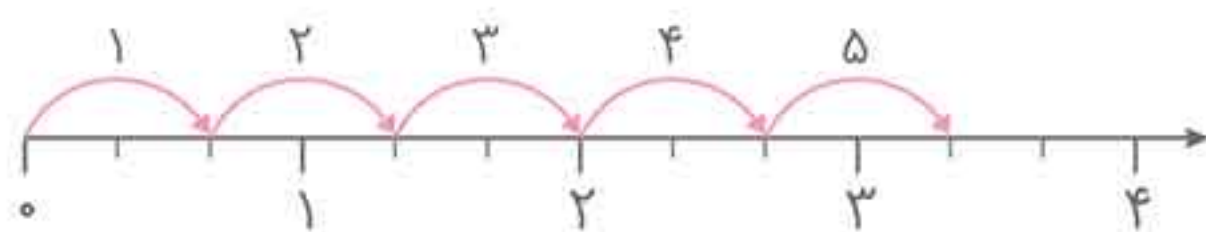
(ب) همه‌ی واحدها را به اندازه‌ی مخرج تقسیم‌بندی می‌کنیم.

(ج) در هر حرکت، به اندازه‌ی صورت کسر به جلو حرکت می‌کنیم.

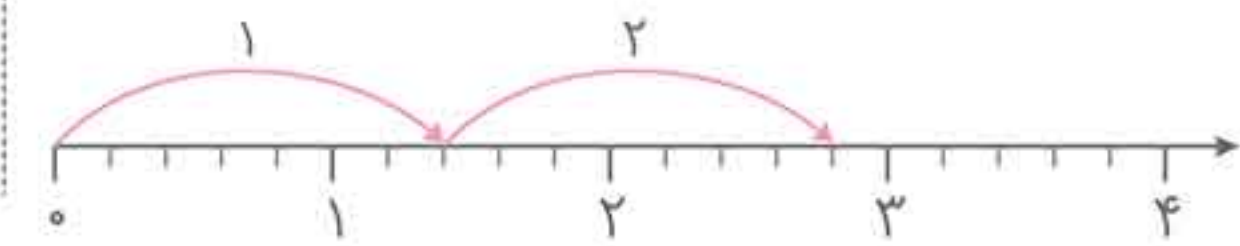
(د) تعداد حرکت‌ها به اندازه‌ی عدد صحیحی است که در کسر ضرب شده است.

مثال ۲۷. هر ضرب را روی محور نمایش دهید.

(الف) $5 \times \frac{2}{3} \Rightarrow 3\frac{1}{3}$



(ب) $2 \times 1\frac{2}{5} = 2 \times \frac{7}{5} \Rightarrow 2\frac{4}{5}$



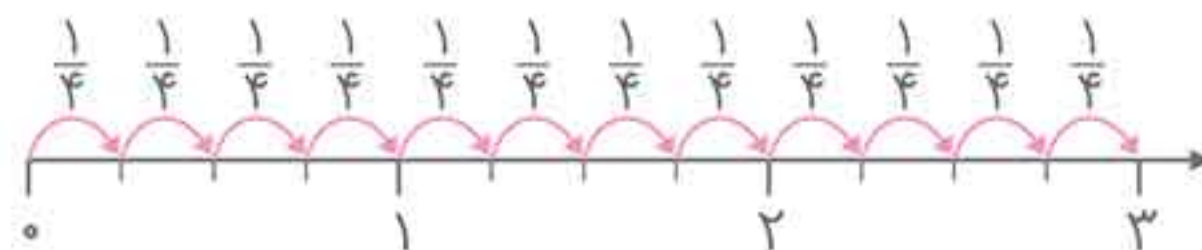
نمایش تقسیم کسر روی محور:

نمایش تقسیم کسرها روی محور را می‌توان به چند دسته تقسیم کرد:

(الف) **تقسیم عدد صحیح بر کسر:** در این حالت، ابتدا از صفر تا عدد صحیح داده‌شده، هر واحد را به اندازه‌ی مخرج کسر تقسیم‌بندی می‌کنیم، سپس به اندازه‌ی صورت کسر حرکت می‌کنیم. (اعداد مخلوط را ابتدا به کسر تقسیم می‌کنیم).

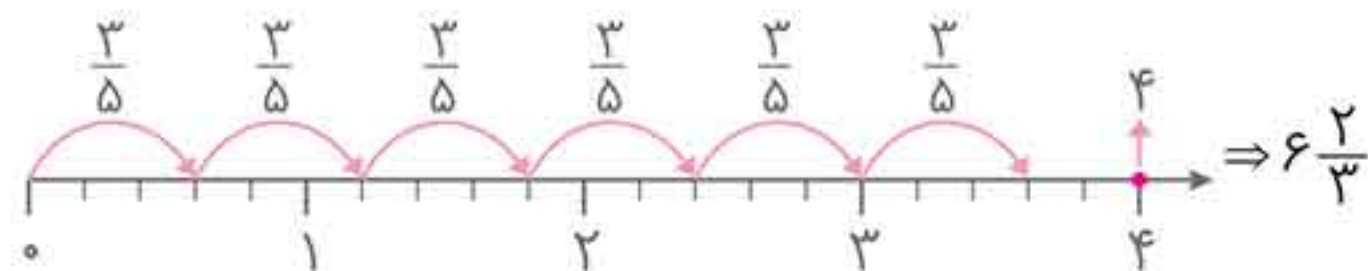
مثال ۲۸. هریک از تقسیم‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

اندازه‌ی هر حرکت
(الف) $3 \div \frac{1}{4}$



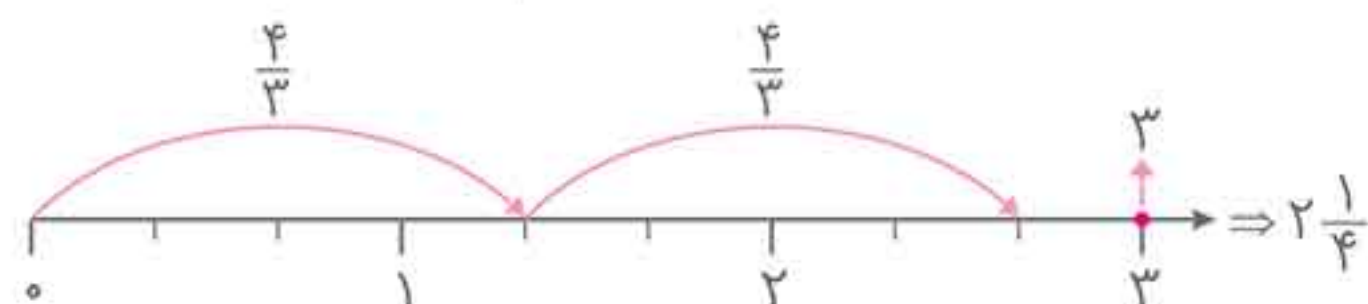
پس در عدد ۳، دوازده تا $\frac{1}{4}$ وجود دارد.

اندازه‌ی هر حرکت
(ب) $4 \div \frac{3}{5}$



مشاهده می‌کنید که هر حرکت ۳ واحد کوچک است (۶ حرکت کامل انجام دادیم) اما دو قسمت کوچک هنوز باقی مانده است (یعنی ۲ قسمت از ۳ قسمت لازم برای یک حرکت) پس ۶ حرکت کامل و $\frac{2}{3}$ یک حرکت را انجام دادیم.

اندازه‌ی هر حرکت
(ج) $3 \div 1\frac{1}{3} = 3 \div \frac{4}{3}$



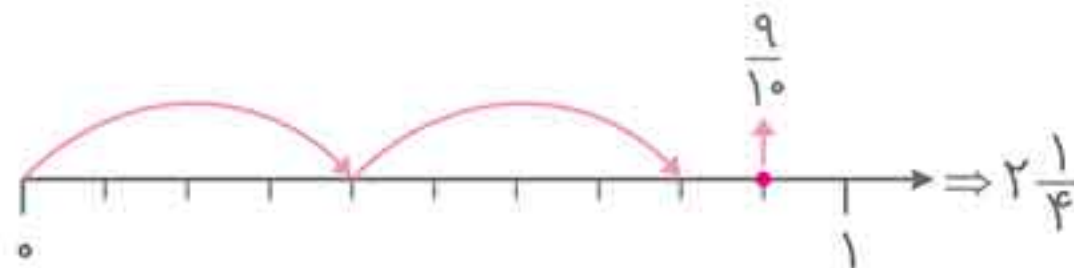
هر حرکت به اندازه‌ی ۴ واحد کوچک است. ما ۲ حرکت کامل انجام دادیم و در نهایت یک قسمت کوچک باقی مانده (یک قسمت از ۴ قسمت لازم برای هر حرکت) پس $2\frac{1}{4}$ حرکت را انجام دادیم.

(ب) **تقسیم کسر بر عدد صحیح یا کسر:** در این حالت، ابتدا عدد صحیح (یا عدد مخلوط) را به کسر تبدیل می‌کنیم، سپس مخرج مشترک می‌گیریم. آنگاه عدد سمت چپ را روی محور نمایش می‌دهیم و سپس از صفر شروع به حرکت می‌کنیم. هر حرکت باید به اندازه‌ی صورت کسر دوم باشد.



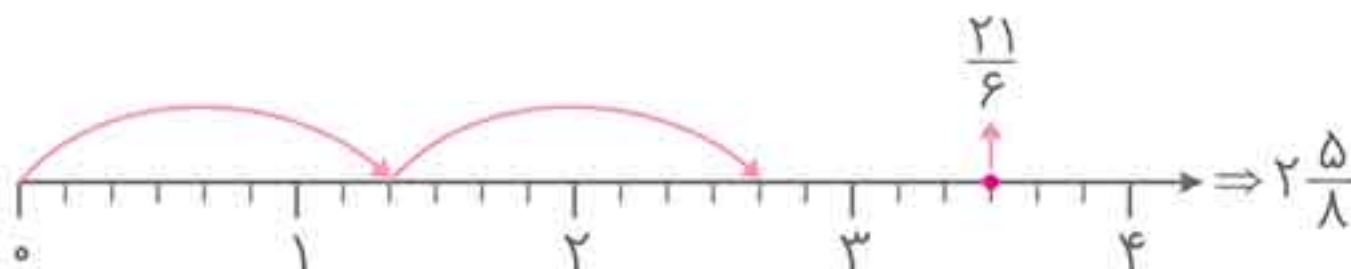
مثال ۲۹. هر یک از تقسیم‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

اندازه‌ی هر حرکت
(الف) $\frac{9}{10} \div \frac{4}{10}$



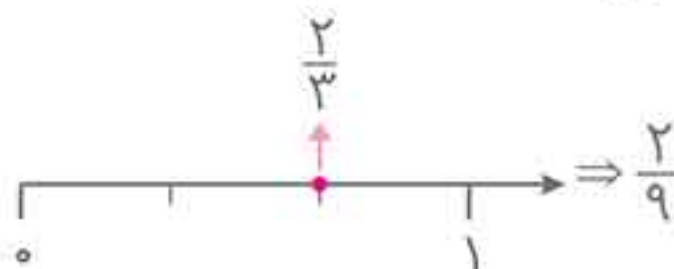
هر حرکت باید ۴ واحد کوچک باشد؛ با این حساب ۲ حرکت انجام شد، اما یک قسمت کوچک باقی ماند. (یعنی ۱ قسمت از ۴ قسمت مورد نیاز برای هر حرکت) پس $2\frac{1}{4}$ حرکت انجام شده است.

اندازه‌ی هر حرکت
(ب) $3\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{3} = \frac{7}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{21}{6} \div \frac{4}{6}$



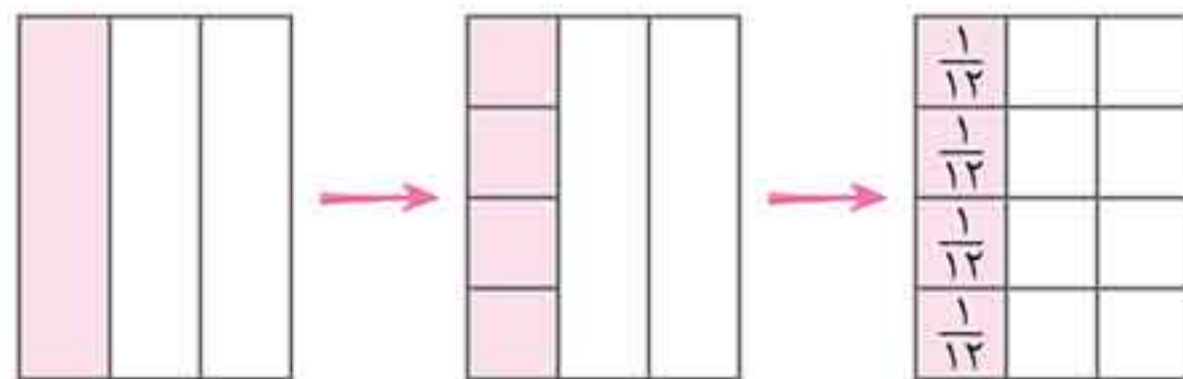
هر حرکت ۸ قسمت خواهد بود که ۲ حرکت کامل انجام دادیم، اما هنوز ۵ قسمت کوچک باقی مانده است. (یعنی ۵ قسمت از ۸ قسمت مورد نیاز برای هر حرکت) پس $2\frac{5}{8}$ حرکت انجام داده‌ایم.

اندازه‌ی هر حرکت
(ج) $\frac{2}{3} \div 3 = \frac{2}{3} \div \frac{3}{1} = \frac{2}{3} \div \frac{9}{3}$



برای هر حرکت باید ۹ قسمت کوچک جلو برویم، اما ما فقط ۲ قسمت کوچک داریم (یعنی $\frac{2}{9}$ حرکت) و هیچ حرکتی **نمی‌توانیم** انجام دهیم، پس حاصل هم $\frac{2}{9}$ است.

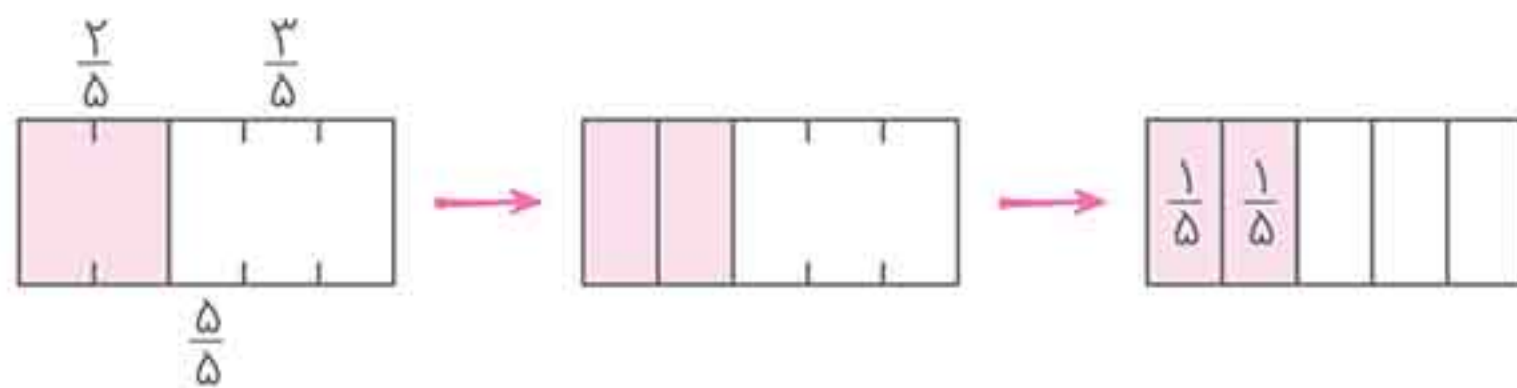
تقسیم کسرها بر عدد صحیح به کمک شکل



در تقسیم کسرها به کمک شکل، اولین عدد سمت چپ، تعیین کننده‌ی مقداری است که باید آن را تقسیم کنیم، پس ابتدا آن را روی شکل نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال برای انجام عبارت $\frac{1}{3} \div 4$ ، ابتدا شکلی کشیده و سپس $\frac{1}{3}$ آن را رنگی کرده و در نهایت، این مقدار را به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{3} \div 4 = \frac{1}{12}$$

همان‌طور که در شکل بالا ملاحظه می‌کنید، هر قسمت رنگی $\frac{1}{12}$ از کل شکل می‌باشد.



مثال ۳۰. تقسیم $\frac{2}{5} \div 2$ را روی شکل نمایش دهید.

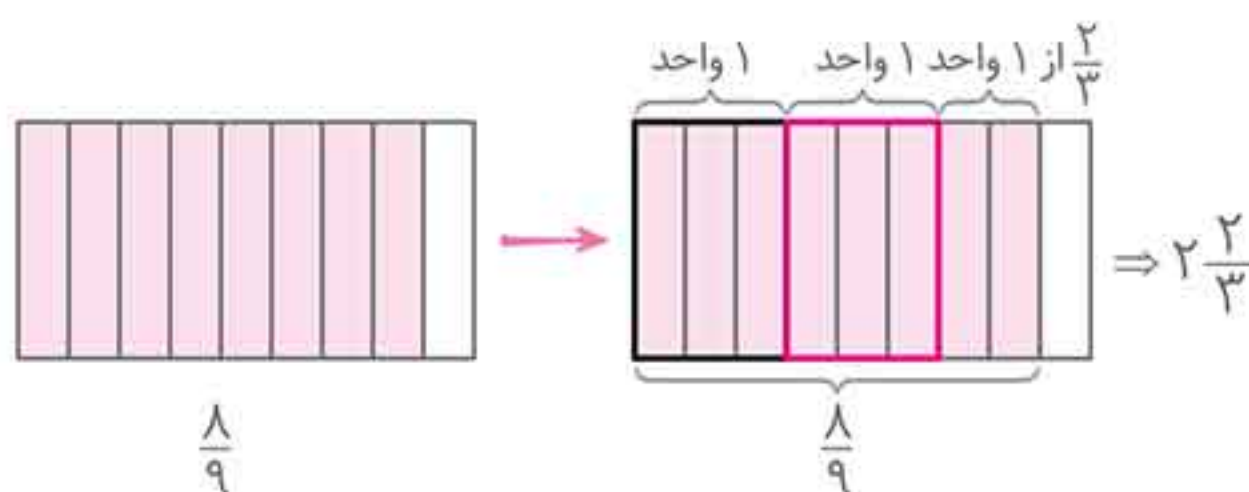
یعنی اگر $\frac{2}{5}$ را به ۲ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت (که در شکل مشخص شده است) $\frac{1}{5}$ از کل شکل می‌باشد.

تقسیم کسر بر کسر به کمک شکل

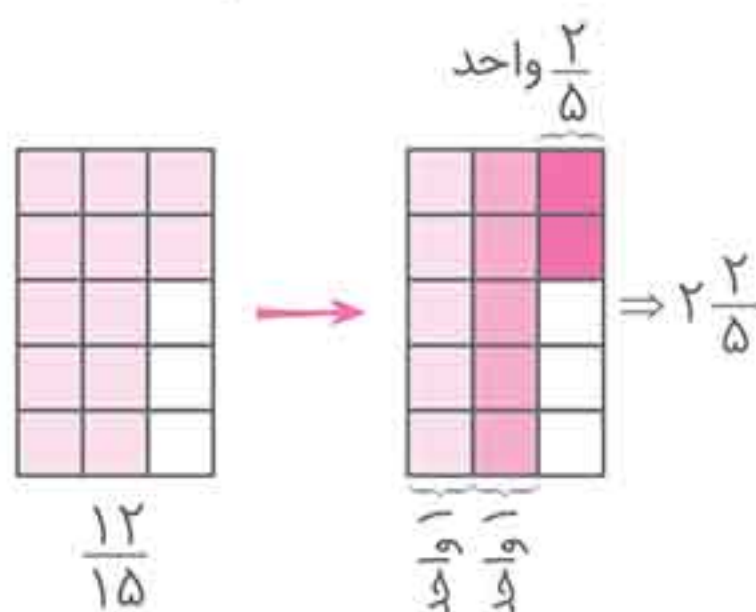
در اینجا ابتدا شکل کسر اول را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های رنگ‌شده را به دسته‌های مساوی تقسیم می‌کنیم. اندازه‌ی هر دسته باید با صورت کسر دوم مساوی باشد. (هر دسته یک واحد جدید حساب می‌شود).

مثال ۳۱. هریک از تقسیم‌های زیر را روی شکل نمایش دهید.

الف) $\frac{1}{9} \div \frac{3}{9} =$

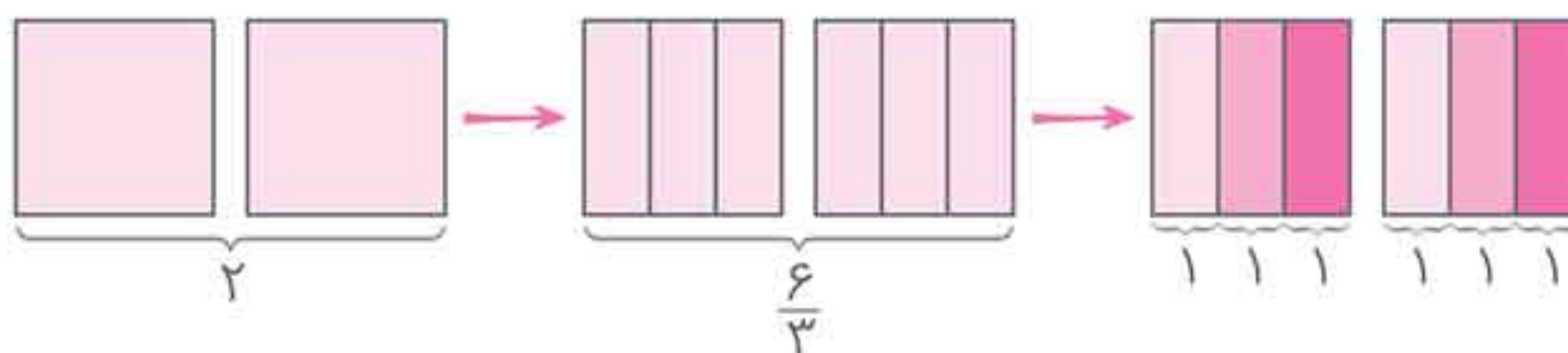


ب) $\frac{4}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{12}{15} \div \frac{5}{15} =$



برای کشیدن شکل این قسمت، ابتدا باید مخرج مشترک بگیریم، سپس مانند مثال قبل، عملیات را انجام دهیم. (خانه‌های رنگ‌شده را به قسمت‌های پنج‌تایی دسته‌بندی می‌کنیم.)

ج) $2 \div \frac{1}{3} = \frac{6}{3} \div \frac{1}{3} = 6$



تقسیم کسرها و اعداد مخلوط به کمک محاسبه

روش اول: مخرج مشترک گرفتن

در این روش، ابتدا برای دو کسر مخرج مشترک گرفته و سپس برای به‌دست آوردن حاصل تقسیم، کافی است صورت اولی را بر صورت دومی تقسیم کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

الف) $\frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$

ب) $\frac{2}{9} \div \frac{1}{4} = \frac{8}{36} \div \frac{9}{36} = \frac{8}{9}$

ج) $1\frac{4}{7} \div 5 = \frac{11}{7} \div \frac{5}{1} = \frac{11}{7} \div \frac{35}{7} = \frac{11}{35}$

روش دوم: تبدیل تقسیم به ضرب

در این روش، نیازی به مخرج مشترک گرفتن نمی‌باشد؛ فقط کافی است کسر اولی را در معکوس کسر دومی ضرب کنیم. (توجه: هرگاه قرار باشد کسری را معکوس کنیم، کافی است جای صورت و مخرج آن را عوض کنیم. مانند: $\frac{7}{9} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{9}{7}$)

مثال ۳۲. حاصل تقسیم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

ب) $\frac{2}{9} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{9} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{9}$

ج) $1\frac{4}{7} \div 5 = \frac{11}{7} \div \frac{5}{1} = \frac{11}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{35}$

د) $\frac{3}{8} \div 2\frac{1}{10} = \frac{3}{8} \div \frac{21}{10} = \frac{3}{8} \times \frac{10}{21} = \frac{5}{28}$



نکته



۱) برای معکوس کردن اعداد مخلوط، ابتدا باید آن‌ها را به کسر تبدیل کرده و سپس معکوس کنیم. مانند:

$$2\frac{1}{10} = \frac{21}{10} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{10}{21}$$

دقت کنید هر کسر (به جز کسرهای مساوی با واحد) با معکوس خود برابر نیست. به همین دلیل در بالا بین $\frac{21}{10}$ و $\frac{10}{21}$ مساوی

قرار ندادیم و علامت $\xrightarrow{\text{معکوس}}$ را گذاشتیم. $(\frac{21}{10} \neq \frac{10}{21})$

۲) برای نشان دادن عملیات تقسیم در ریاضی، علامت‌های « \div »، « $-$ » و « $_$ » به کار می‌روند. به طور مثال:

الف) $\frac{5}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{5}{3}$

ب) $\frac{5}{2} : \frac{3}{2} = \frac{5}{3}$

ج) $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{5}{3}$

البته علامت « $_$ » در کسرها استفاده نمی‌شود.

کسره‌های مرکب

به کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها اعداد کسری باشند، **کسره‌های مرکب** می‌گویند و برای محاسبه‌ی

$$\frac{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}}{2 - 1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

حاصل آن‌ها، کافی است حاصل صورت را بر حاصل مخرج تقسیم کنیم. مانند:

نکته



در محاسبه‌ی حاصل $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}}$ به جای تبدیل به $\frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$ می‌توانیم از قانون «دور در دور»

$$\times \left(\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

نزدیک در نزدیک» استفاده کنیم؛ یعنی:

که در این روش، حاصل ضرب بالاترین و پایین‌ترین عدد را در **صورت** جواب و حاصل ضرب دو عدد وسط را در **مخرج** جواب قرار می‌دهیم.

مثال ۳۳. حاصل هر عبارت را محاسبه کنید.

الف) $\frac{5\frac{3}{5}}{2\frac{1}{10}} = \frac{\frac{28}{5}}{\frac{21}{10}} = \frac{28^4 \times 10^2}{5_1 \times 21_3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

ب) $\frac{2 + 1\frac{1}{2}}{3 - 1\frac{1}{2}} = \frac{3\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}} = \frac{3\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{3}{2}} = \frac{7 \times 2^1}{3_1 \times 3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

ج) $2\frac{1}{2} + \frac{3\frac{1}{5}}{4 - 1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} + \frac{\frac{16}{5}}{3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} + \frac{\frac{16}{5}}{2\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} + \frac{16}{5} \div \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} + \frac{16 \times 2}{5 \times 5} = 2\frac{1}{2} + \frac{32}{25} = 2\frac{1}{2} + 1\frac{7}{25} = (2+1) + (\frac{1}{2} + \frac{7}{25}) = 3 + (\frac{25}{50} + \frac{14}{50}) = 3 + \frac{39}{50} = 3\frac{39}{50}$

د) $2 + \frac{1}{4 + 2\frac{1}{3}} = 2 + \frac{1}{6\frac{1}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{19}{3}} = 2 + \frac{3 \times 1}{1 \times 19} = 2 + \frac{3}{19} = 2\frac{3}{19}$



نکته



اگر در یک عبارت، به غیر از جمع و تفریق، ضرب و تقسیم هم داشتیم، ابتدا ضرب و تقسیم‌ها را (از سمت چپ) انجام می‌دهیم، بعد جمع و تفریق را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۳۴. حاصل عبارت داده شده را به دست آورید.

$$2\frac{1}{3} \times 3\frac{3}{7} - 4\frac{3}{8} \div 2\frac{4}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{24}{7} - \frac{35}{8} \div \frac{14}{5} = 8 - \frac{25}{16} = 8 - 1\frac{9}{16} = 7\frac{16}{16} - 1\frac{9}{16} = 6\frac{7}{16}$$

$\frac{7}{3} \times \frac{24}{7} = \frac{7 \times 24}{3 \times 7} = \frac{168}{21} = 8$
 $\frac{35}{8} \div \frac{14}{5} = \frac{35}{8} \times \frac{5}{14} = \frac{175}{112} = 1\frac{9}{16}$

نکته



اگر در یک عبارت پرانتز داشتیم، ابتدا باید حاصل پرانتز را به دست آوریم، سپس از سمت چپ ضرب و تقسیم‌ها را انجام دهیم.

مثال ۳۵. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

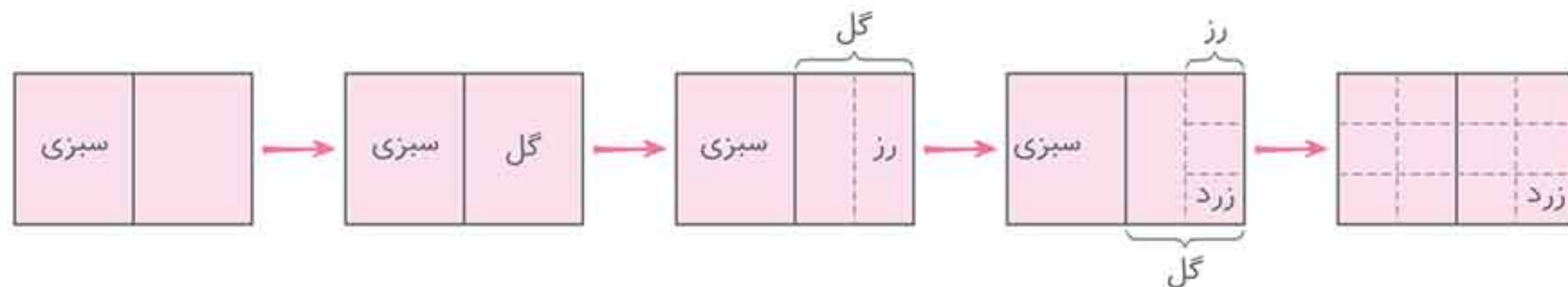
$$3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} \div (3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}) = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} \div (\frac{6}{2} - \frac{1}{2}) = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} \div \frac{5}{2} = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = 3\frac{1}{2} + 1 = 4\frac{1}{2}$$

$\frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
 $2\frac{1}{4} \div \frac{5}{2} = 2\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = 1$

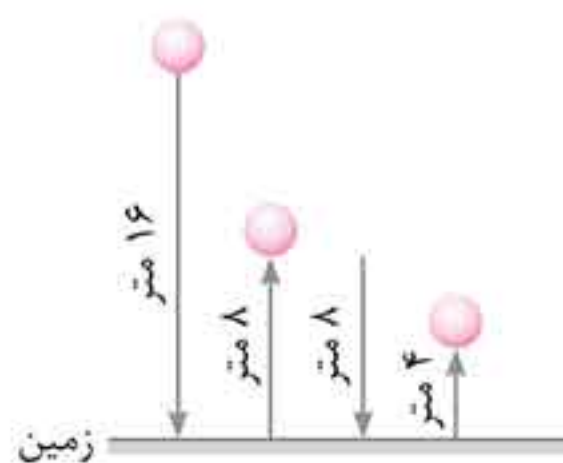
راهربرد حل مسئله (رسم شکل)

گاهی اوقات برای حل مسئله‌ها، کشیدن شکل مربوط به سؤال، کمک زیادی به حل آن می‌کند، البته برای رسم شکل مناسب برای یک مسئله، لازم نیست که حتماً نقاشی خوبی داشته باشیم، کافی است شکل را به صورت تقریبی رسم کنیم. به مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال ۳۶. مهدی نصف باغچه‌ی خانه‌شان را سبزی کاشت و نصف دیگر را گل کاری کرد. نصف زمین گل کاری شده را گل رز و ثلث قسمتی را که گل رز قرار داده بود، گل رز زرد کاشت. او چه کسری از کل باغچه را گل رز زرد کاشته است؟



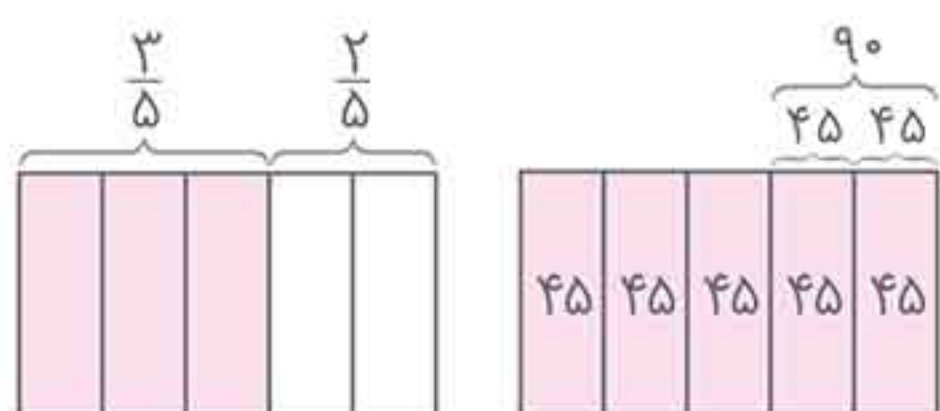
مثال ۳۷. تویی پس از زمین خوردن، نصف ارتفاع قبلی به بالا برمی‌گردد. اگر این توپ از ارتفاع ۱۶ متری رها شود، پس از ۲ بار زمین خوردن، در چه ارتفاعی قرار می‌گیرد؟



توپ پس از ۲ بار زمین خوردن، در ارتفاع ۴ متری قرار می‌گیرد. \Rightarrow



مثال ۳۸. $\frac{3}{5}$ یک مخزن پر است. اگر ۹۰ لیتر دیگر درون آن آب بریزیم، مخزن پر از آب می‌شود. ظرفیت کل این مخزن چه قدر است؟

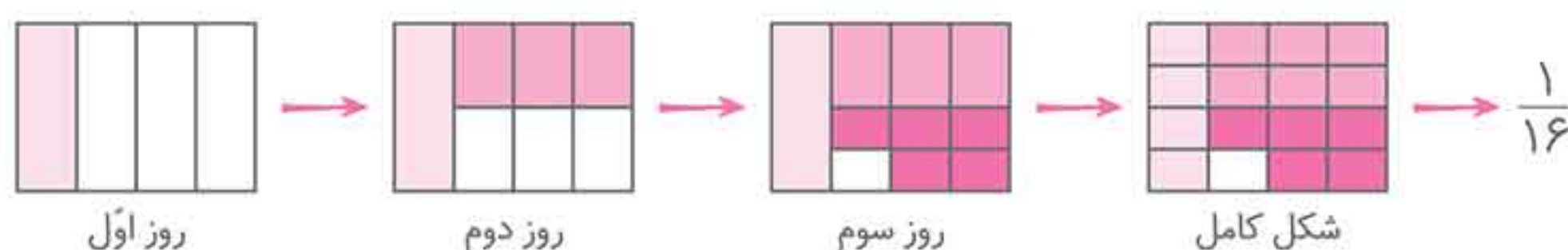


ابتدا شکل را رسم می‌کنیم. مشاهده می‌کنید که ۲ قسمت روی شکل خالی است. وقتی ۹۰ لیتر می‌ریزیم، این دو قسمت پر شده و کل مخزن پر از آب می‌شود. پس نتیجه می‌گیریم در هر قسمت از مخزن، ۴۵ لیتر آب جای می‌گیرد.

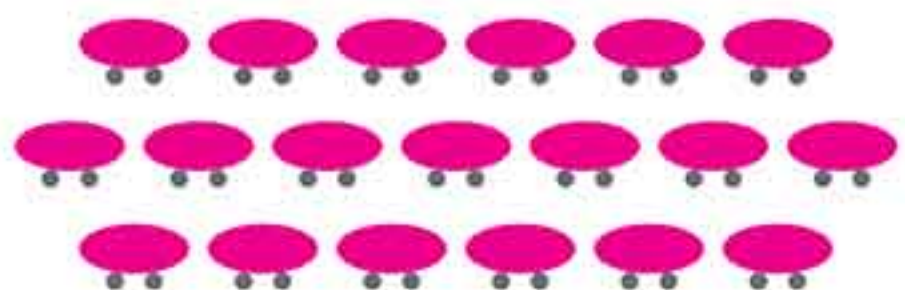
$$\text{لیتر} \quad 225 = 5 \times 45 = \text{ظرفیت مخزن}$$

مثال ۳۹. علی روز اول $\frac{1}{4}$ کتابش، روز دوم نصف باقی‌مانده‌ی کتاب و روز سوم $\frac{5}{6}$ باقی‌مانده‌ی آن را خواند. اکنون چه کسری از کتاب علی باقی مانده است؟

مرحله به مرحله قسمت‌هایی که علی از کتابش را مطالعه می‌کند، رسم می‌کنیم:



مثال ۴۰. در یک پارکینگ، ۱۹ دوچرخه و ماشین وجود دارد. اگر تعداد چرخ‌های آن‌ها، روی هم ۵۰ چرخ باشد، در این پارکینگ چند دوچرخه وجود دارد؟



ابتدا ۱۹ وسیله رسم می‌کنیم و می‌دانیم ماشین و دوچرخه هر کدام حداقل ۲ چرخ دارند. پس در ابتدا به هر کدام ۲ چرخ می‌دهیم:



تا این جای کار، $38 = 19 \times 2$ چرخ را مورد استفاده قرار داده‌ایم و هنوز $50 - 38 = 12$ چرخ باقی مانده است. اکنون می‌توانیم با دادن ۲ چرخ به هر وسیله، آن را تبدیل به ماشین کنیم. ۱۲ چرخ را اگر به دسته‌های ۲ تایی تقسیم کنیم، ۶ دسته درست می‌شود، پس ۶ تا از وسیله‌ها تبدیل به ماشین شده و بقیه دوچرخه باقی می‌مانند.

الف) به سوالات زیر پاسخ کامل دهید.

۱) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(فردار ۹۲ - مناطق تهران)

$$\text{الف)} \quad \frac{1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5}}{1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5}} \div \frac{1 - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}} =$$

$$\text{ب)} \quad (3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}) \div (\frac{3}{4} + \frac{1}{6}) =$$

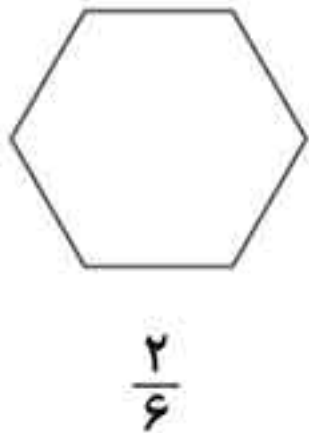
$$\text{ج)} \quad \frac{2\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{7}{10} - \frac{6}{20}} =$$

$$\text{د)} \quad (4\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4}) + (1\frac{3}{2} + \frac{6}{5}) =$$

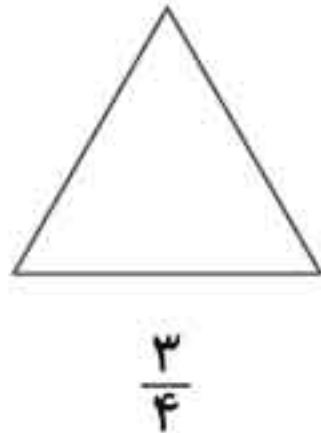
(فردار ۹۲ - مناطق تهران)

۲) با تقسیم هر شکل به قسمت‌های مساوی، کسر مورد نظر را با رنگ کردن نشان دهید.

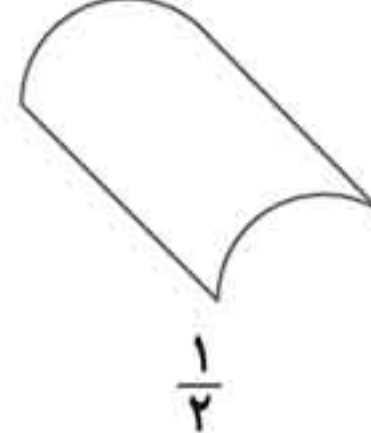
الف)



ب)



ج)



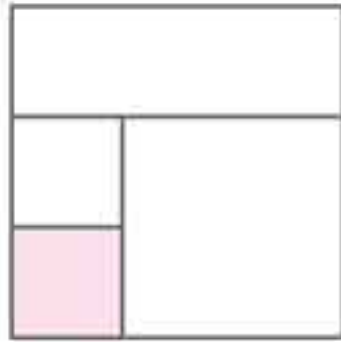
د)



(فردار ۹۲ - مناطق تهران)

۳) هریک از شکل‌های زیر، چه کسری را نشان می‌دهند؟

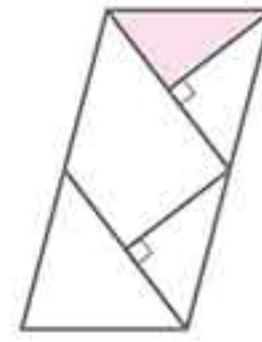
الف)



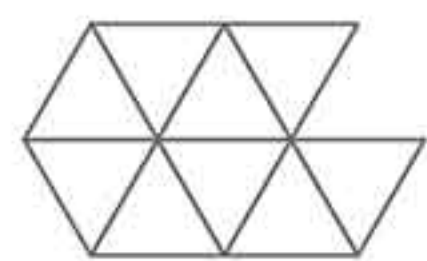
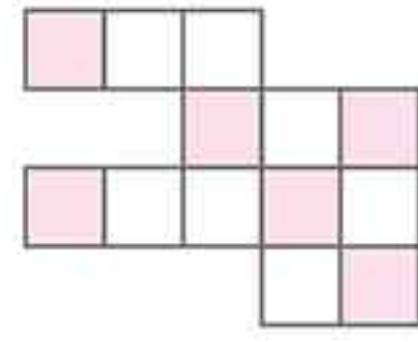
ب)



ج)



د)

۴) الف) سهیلا $\frac{9}{6}$ را به صورت شکل مقابل نشان داده است. یک واحد آن را با رنگ کردن شکل نشان دهید.

(فردار ۹۲ - منطقه ۱۵ تهران)

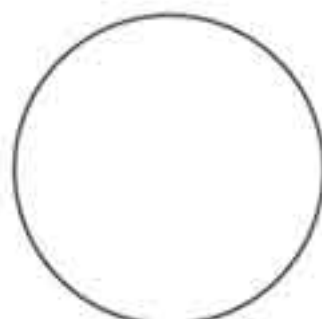
ب) کسر $\frac{9}{6}$ چه کسری کم دارد تا ۲ واحد شود؟

(فردار ۹۲ - منطقه ۲ تهران)

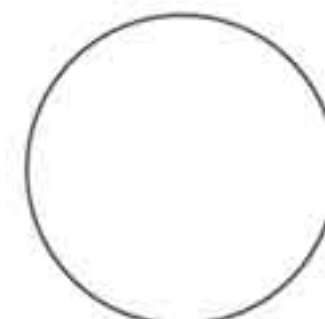
۵) با رسم شکل، نشان دهید که دو کسر $\frac{2}{3}$ و $\frac{8}{12}$ با هم برابرند.۶) شکل‌های زیر را به ۱۲ و ۹ قسمت تقریباً مساوی تقسیم کنید، سپس در صورت امکان $\frac{1}{4}$ از هر کدام را رنگ کنید.

(فردار ۹۲ - منطقه ۱۹ تهران)

الف)



ب)



امتحانی

نمونه سوالات (با پاسخ)
خودآزمایی

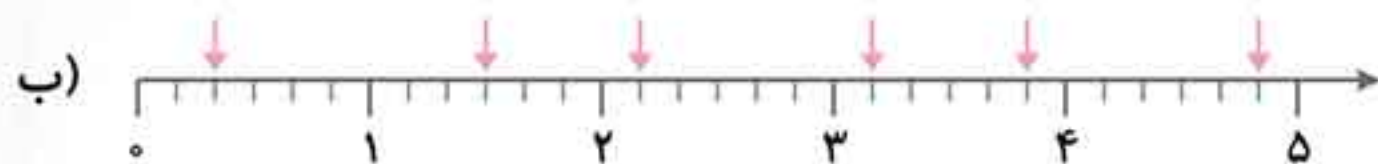
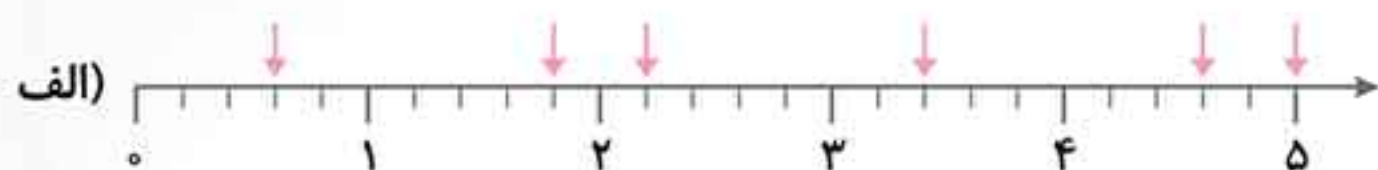
تکمیلی

نمونه سوالات (با پاسخ)
خودآزمایی

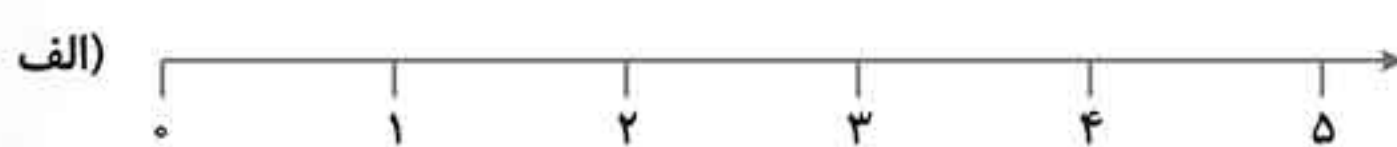
سوالات تیزهوشانه

(فردار ۹۲ - منطقه‌ی ۳ تهران)

۷) هریک از نقاط مشخص شده روی محورها، چه عددی را نشان می‌دهد؟



۸) هریک از نقاط زیر را روی محور نشان دهید.



$$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1\frac{3}{4}$$



$$1\frac{3}{5}, 3\frac{2}{5}, 1\frac{6}{5}$$



$$1\frac{3}{7}, 1\frac{2}{7}, \frac{2}{7}$$

(فردار ۹۲ - استان‌های مختلف)

۹) کسرهای زیر را با هم مقایسه کنید.

الف) $\frac{88}{100} \square \frac{8}{10}$

ب) $\frac{5}{6} \square \frac{9}{4}$

ج) $3\frac{3}{7} \square \frac{18}{7}$

د) $\frac{51}{9} \square 6$

ه) $\frac{29}{55} \square \frac{29}{37}$

و) $\frac{17}{3} \square \frac{10}{3}$

ز) $\frac{5}{9} \square \frac{4}{6}$

ح) $8\frac{3}{10} \square 5\frac{10}{3}$

ط) $4\frac{7}{3} \square 7$

(فردار ۹۲ - استان‌های مختلف)

۱۰) هریک از کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{18 \times 77}{55 \times 42} =$

ب) $\frac{90 \times 21 \times 24 \times 27}{81 \times 30 \times 36 \times 7} =$

ج) $\frac{96 \times 125 \times 8}{64 \times 50} =$

د) $\frac{48 \times 36 \times 49}{18 \times 42 \times 32} =$

۱۱) الگوی عددی زیر را ادامه دهید.

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{7}{14}, \frac{10}{19}, \frac{13}{24}, \dots$$

(فردار ۹۲ - مناطق تهران)

۱۲) حاصل عبارت‌های زیر را با کمک محور به دست آورید.

الف) $2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} =$

ب) $\frac{5}{10} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} =$

ج) $2\frac{2}{3} + 2\frac{4}{6} =$

د) $3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3} =$

(فردار ۹۲ - استان‌های مختلف)

۱۳) حاصل جمع و تفریق‌های زیر را با رسم شکل نشان دهید.

الف) $3\frac{2}{4} + 1\frac{1}{2} =$

ب) $3\frac{2}{5} - 2\frac{2}{3} =$

ج) $7 - 4\frac{3}{4} =$

د) $1\frac{1}{3} + 2\frac{5}{6} =$

(فردار ۹۲ - منطقه‌ی ۱۸ تهران)

۱۴) حاصل ضرب‌های زیر را با رسم شکل به دست آورید.

الف) $3\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{3} =$

ب) $2\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{5} =$

۱۵) حاصل ضرب و تقسیم‌های زیر را با رسم شکل به دست آورید.

الف) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} =$

ب) $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} =$

ج) $\frac{4}{5} \div \frac{1}{3} =$

د) $\frac{7}{8} \div \frac{2}{8} =$

فصل اول / کسر متعارفی

(فردار ۹۲ - استان های مختلف)

۱۶ درون هر عدد مناسب بنویسید تا تساوی های زیر برقرار شوند.

الف) $\frac{۷۲}{۳۶} = \frac{\square}{۶} = \square$

ب) $\frac{۱۱}{\square} = \frac{۷۷}{۷}$

ج) $\frac{۷}{۹} = \frac{۴۹}{\square}$

د) $\frac{۲۵}{\square} = \frac{۱۰}{۸}$

ه) $\frac{۱۲}{۱۸} = \frac{\square}{۱۲}$

و) $\frac{\square}{۶} = \frac{\square}{۱} = ۵$

ز) $\frac{۳۶}{\square} = \frac{۲۰}{\square} = \frac{۱۶}{\square} = ۴$

ح) $\frac{۱}{۶} = \frac{\square}{\square}$

ط) $\frac{۱۶}{\square} = ۴ = \frac{۳۲}{\square}$

$\frac{۱}{۵}, \dots, \dots, \dots, \frac{۱}{۳}$

۱۷ بین دو کسر $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$ ، سه کسر بنویسید.۱۸ اگر از یک کتاب داستان ۵۰۰ صفحه ای در یک روز، $\frac{۱}{۵}$ از $\frac{۳}{۴}$ آن را مطالعه کنیم، چند صفحه از کتاب **نخوانده** باقی می ماند؟ (فردار ۹۲ - البرز)۱۹ مرضیه $\frac{۱}{۴}$ پولش را بستنی و $\frac{۱}{۴}$ آن را دفتر خرید. اگر ۶۰۰ تومان برایش باقی مانده باشد، کل پول مرضیه چه قدر است؟

(فردار ۹۲ - ملایر)

(حل با رسم شکل)

۲۰ در یک پارکینگ روی هم ۱۸ تا دوچرخه و اتومبیل وجود دارد. اگر تعداد چرخ های آنها روی هم ۶۰ تا باشد، در این پارکینگ چند

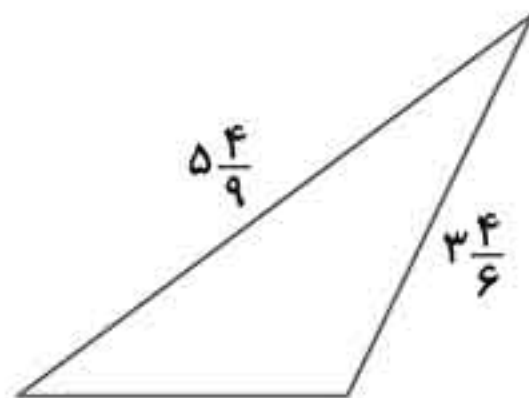
(فردار ۹۲ - کاشان)

دوچرخه و چند اتومبیل وجود دارد؟

۲۱ کشاورزی $\frac{۲}{۵}$ زمین خود را لوبیا و $\frac{۱}{۴}$ باقی مانده را نخود کاشته است. چه کسری از زمین او زیر کشت **نرفته** است؟ (با رسم شکل)

(فردار ۹۲ - شاهرود)

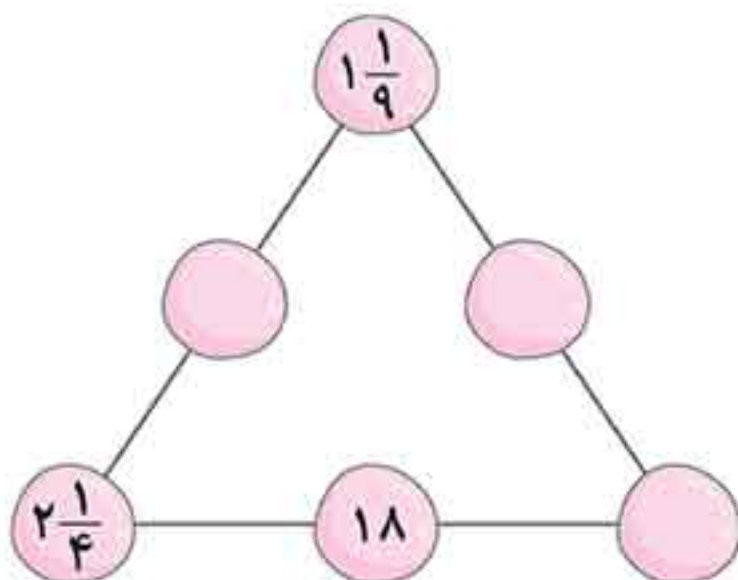
۲۲ اگر محیط مثلث مقابل ۱۲ متر باشد، اندازه ی ضلع سوم آن چند متر است؟



۲۳ در شکل زیر، عدد وسط هر ضلع مثلث، برابر با حاصل ضرب اعداد دو سر ضلع است. شکل را

(فردار ۹۳ - دبستان مصباح - منطقه ی ۱ تهران)

کامل کنید.

۲۴ علی روز اول، $\frac{۱}{۴}$ باغی را درخت کاشت. روز دوم $\frac{۲}{۳}$ باقی مانده ی همان باغ و روز سوم $\frac{۱}{۴}$

باقی مانده ی همان باغ را درخت کاشت. اگر او روز اول ۲۴۰ درخت کاشته باشد، هنوز چند

(فردار ۹۳ - دبستان کیمپای علم - منطقه ی ۳ تهران)

درخت دیگر می تواند بکارد؟



امتحانی

نمونه سوالات (با پاسخ)
خودآزمایی

تکمیلی

نمونه سوالات (با پاسخ)
خودآزمایی

سوالات تیزهوشانه