# ریاضیات ۲

سال دوم دبیرستان

ویژه دانش آموزان ممتاز

مؤلف: رسول حاجی زاده

انتشارات خوشخوان

# فهرست

# فصل اول

## الگو و دنباله

## دنباله

اگر تعدادی عدد را پشت سر هم بنویسیم آن‌گاه آن تعداد عدد را یک دنباله گویند که اگر تعداد آن اعداد محدود باشد آن دنباله را متناهی و اگر تعداد آن اعداد نامحدود باشد آن دنباله را نامتناهی گویند.
هر یک از اعضاء دنباله را یک جمله گویند.

جملات اول، دوم، سوم، ...، $n$اُم یک دنباله را به ترتیب با $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، $a_n$ نمایش می‌دهند. البته جمله‌ی $n$اُم دنباله یعنی $a_n$ را معمولاً به صورت $\{a_n\}$ نیز نمایش داده و به آن جمله‌ی عمومی می‌گویند.

به عنوان مثال اگر دنباله‌ی $a_n = \frac{۱}{n}$ را در نظر بگیرید، این دنباله به هر عدد طبیعی معکوس آن را نسبت می‌دهد به عبارت دیگر داریم:

| $n$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | ۱ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۳}$ | $\frac{۱}{۴}$ | $\frac{۱}{۵}$ |

جمله‌ی اول این دنباله ۱، جمله‌ی دوم $\frac{۱}{۲}$، جمله‌ی سوم $\frac{۱}{۳}$ و ... می‌باشند. به این ترتیب به ازای هر $n$ طبیعی می‌توان جمله $n$اُم را حدس زد. به عنوان مثالی دیگر اگر دنباله‌ی $a_n = \frac{n+۱}{n}$ را در نظر بگیرید، جمله‌ی اول این دنباله با قرار دادن عدد یک به جای $n$ به‌دست می‌آید:

$$a_۱ = \frac{۱+۱}{۱} = ۲$$

و به همین ترتیب داریم:

$$a_۲ = \frac{۲+۱}{۲} = \frac{۳}{۲} \quad , \qquad a_۳ = \frac{۳+۱}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

بنابراین می‌توانیم دنباله را به صورت زیر هم نشان دهیم:

$$۲, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۴}, \frac{۶}{۵}, \dots, \frac{n+۱}{n}, \dots$$

**مثال ۱** چهار جمله‌ی اول یک دنباله به صورت زیر است. جمله‌ی بعدی دنباله چیست؟

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \dots$$

حل: جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $a_n = \frac{۱}{۲^n}$ می‌باشد. بنابراین جمله‌ی پنجم با قرار دادن عدد ۵ به جای $n$ در جمله‌ی عمومی به‌دست می‌آید:

$$a_۵ = \frac{۱}{۲^۵} = \frac{۱}{۳۲}$$

**مثال ۲** جمله‌ی $n$اُم (جمله‌ی عمومی) دنباله‌های زیر را بنویسید.

$$a)\ ۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱, \dots \qquad b)\ ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, \dots$$

حل:

$$a)\ a_n = (-۱)^{n-۱} \qquad b)\ b_n = ۲n$$

* آیا همیشه می‌توان جمله‌ی عمومی یک دنباله را حدس زد؟

پاسخ این پرسش منفی است. زیرا:

اولاً: در بعضی از دنباله‌ها جمله‌ی عمومی مشخص نیست. به عنوان مثال دنباله‌ی اعداد اول، دنباله‌ی تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد طبیعی $n$ و ...

ثانیاً: از راه‌های متفاوت می‌توان دنباله‌های اعداد را تشکیل داد و لذا ممکن است که دو یا چند دنباله‌ی مختلف در بعضی از جمله‌ها مشترک باشند.

**مثال ۳** **چهار جمله‌ی اول دنباله‌ای به صورت روبه‌رو است:** $۱, ۱, ۱, ۱$

**جمله‌ی بعدی چیست؟**

حل: به نظر می‌رسد که جمله‌ی عمومی در این دنباله باید به صورت $a_n = ۱$ و جمله‌ی بعدی در دنباله عدد ۱ باشد ولی ممکن است چهار عدد فوق، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی زیر باشند:

$$۱, ۱, ۱, ۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۱, ۱, ۱, ۱, ۰, ۰, ۰, ۰$$

که به صورت زیر تعریف می‌شود. عدد $n$ را می‌توان به صورت $۸k + r$ نوشت به طوری که

$$r, k \in W \quad , \quad k \geq ۰ \qquad b_n = \begin{cases} ۰ & ۵ \leq r \leq ۸ \\ ۱ & ۱ \leq r \leq ۴ \end{cases}$$

پس اصولاً معرفی دنباله به صورت $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ کامل نیست و حتماً باید جمله‌ی عمومی دنباله را مشخص کرد.

**مثال ۴** **یک دنباله از عددها به این صورت ساخته می‌شود:**

**عدد اول این دنباله برابر با ۱ و پس از آن هر عدد برابر با مجموع عددهای قبل از خودش به اضافه‌ی یک است.**

**$n$اُمین عنصر این دنباله برابر با چند است؟**

الف) $n$ ب) $۲n - ۱$ ج) $۲^n - ۱$ د) $۲^n$ هـ) $۲^{n-۱}$

حل: دنباله‌ی خواسته شده به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$a_۱ = ۱ \qquad a_۲ = ۱ + ۱ = ۲$$
$$a_۳ = ۱ + ۲ + ۱ = ۴ \qquad a_۴ = ۱ + ۲ + ۴ + ۱ = ۸$$
$$a_۵ = ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱ = ۱۶ \qquad \cdots$$
$$\Rightarrow \{a_n\} = ۲^{n-۱}$$

بنابراین گزینه (هـ) صحیح است.

(یادآوری می‌شود که حاصل $۱ + ۲^{n-۲} + \cdots + ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۱ + ۲^۰$ با توجه به اتحاد $(x^n - ۱) = (x - ۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x^۲ + x^۱ + x^۰)$ برابر با $۲^{n-۱}$ به‌دست می‌آید.)

**مثال ۵** **اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله به شکل $a_n = ۳^n + ۸۶$ تعریف شود آن‌گاه در آن دنباله چند عدد سه‌رقمی وجود دارد؟**

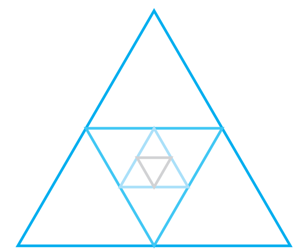
حل:

$$۱۰۰ \leq ۳^n + ۸۶ < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۴ \leq ۳^n < ۹۱۴ \Rightarrow n = ۳ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۵ \text{ یا } ۶$$

معلوم می‌شود که جملات سوم تا ششم آن دنباله همگی سه‌رقمی هستند.

**مثال ۶** **وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری در وسط آن ایجاد شود. در وسط این مثلث نیز به همان ترتیب مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری ایجاد می‌کنیم و این کار را $n$ بار انجام می‌دهیم. می‌دانیم که در شکل حاصل مجموعاً ۴۵ مثلث می‌توان شمرد. $n$ برابر است با:**

الف) ۹  ب) ۱۰  ج) ۱۱  د) ۱۲  هـ) ۲۲


شکل ۱-۱

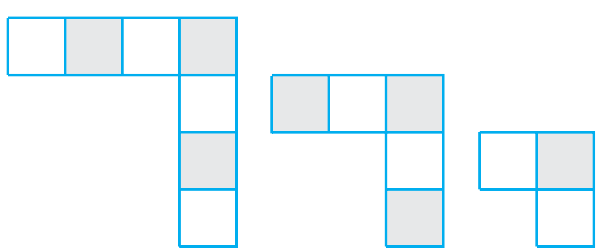
حل: دنباله‌ی تعداد مثلث‌های ایجاد شده به شکل مقابل می‌باشد (شکل ۱ـ۱ برای $n = ۳$ رسم شده است):
$۵, ۹, ۱۳, \cdots$

در هر مرحله ۴ مثلث به تعداد مثلث‌های مرحله‌ی قبل اضافه می‌شود، بنابراین جمله‌ی عمومی آن دنباله به شکل $a_n = ۱ + \underbrace{۴ + ۴ + \cdots + ۴}_{n \text{تا}}$ یا $a_n = ۱ + ۴n$ به‌دست می‌آید، پس

$$۱ + ۴n = ۴۵ \Rightarrow ۴n = ۴۴ \Rightarrow n = ۱۱$$

معلوم می‌شود که گزینه‌ی (ج) صحیح است.

**مثال ۷** **شکل‌های زیر با چوب کبریت ساخته شده‌اند:**


شکل ۱-۲

الف. **در ساختن ۲۰اُمین شکل چند چوب کبریت به کار می‌رود و آن شکل چند مربع دارد؟**

ب. **در ساختن چندمین شکل ۷۰ چوب کبریت به کار می‌رود؟**

ج. **اگر کلاً ۱۵۰۰ چوب کبریت داشته باشیم و آن اشکال را از شماره‌ی ۱ تا شماره‌ی $i$ بسازیم آن‌گاه $i$ چند است و کل مربع‌های موجود در آن $i$ شکل چقدر خواهد بود؟**

حل: الف. در ساختن اولین شکل ۱۰ چوب کبریت به کار می‌رود. شکل دوم همان شکل اول است فقط دو شکل به صورت‌های ⊔ و ⊔ به آن اضافه شده است، بنابراین شکل دوم دارای ۱۶ چوب کبریت، به همین ترتیب تعداد چوب کبریت‌ها ۶ تا ۶ تا بیش‌تر می‌شود. معلوم می‌شود که تعداد چوب کبریت‌ها در شکل $n$اُم برابر $۶n + ۴$ خواهد شد. بنابراین دنباله‌ی تعداد چوب کبریت‌ها به شکل زیر می‌شود:

$$\{a_n\} \ : \ ۱۰, ۱۶, ۲۲, \cdots, ۶n + ۴, \cdots$$

تعداد چوب کبریت‌های ۲۰اُمین شکل برابر $۴ + ۲۰ \times ۶$ یعنی ۱۲۴ به‌دست می‌آید.
دنباله‌ی مربوط به تعداد مربع‌ها نیز به شکل زیر می‌باشد:

$$\{b_n\} \; : \; ۳, ۵, ۷, \cdots, ۲n + ۱, \cdots$$

بنابراین تعداد مربع‌ها در ۲۰اُمین شکل برابر $۱ + ۲۰ \times ۲$ یعنی ۴۱ خواهد شد.

ب. $۶n + ۴ = ۷۰ \Rightarrow ۶n = ۶۶ \Rightarrow n = ۱۱$

ج.

$$۱۰ + ۱۶ + ۲۲ + \cdots + ۶i + ۴ \leq ۱۵۰۰$$
$$\Rightarrow (۶ \times ۱ + ۴) + (۶ \times ۲ + ۴) + (۶ \times ۳ + ۴) + \cdots + (۶i + ۴) \leq ۱۵۰۰$$
$$\Rightarrow ۶(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + i) + ۴i \leq ۱۵۰۰^{*}$$
$$\Rightarrow ۳i(i + ۱) + ۴i \leq ۱۵۰۰$$
$$\Rightarrow i(۳i + ۷) \leq ۱۵۰۰ \Rightarrow i_{\max} = ۲۱$$

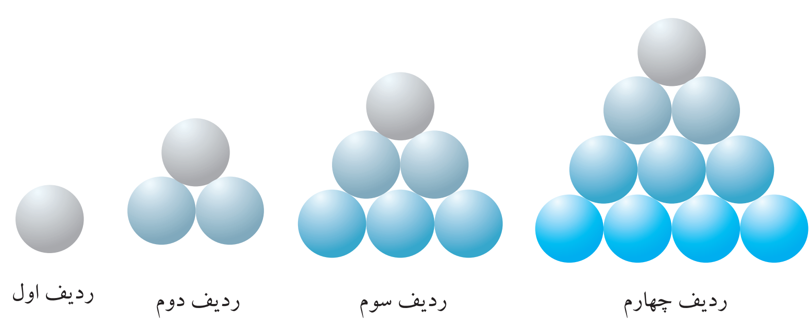
معلوم است که در ۲۱اُمین شکل، $۱ + ۲۱ \times ۲$ یعنی ۴۳ مربع وجود دارد، پس:

$$\text{تعداد کل مربع‌ها} = ۳ + ۵ + ۷ + \cdots + ۴۳$$
$$= (۲ \times ۱ + ۱) + (۲ \times ۲ + ۱) + (۲ \times ۳ + ۱) + \cdots + (۲ \times ۲۱ + ۱)$$
$$= ۲ \times \frac{۲۱ \times ۲۲}{۲} + ۲۱ \times (۱) = ۴۸۳$$

**مثال ۸** **قرار است با تعدادی کره‌ی مشابه دنباله‌ای از هرم‌های مثلث‌القاعده‌ی منتظم، بسازیم به طوری که در قاعده‌ی اولین هرم، سه کره و در کل آن چهار کره، در قاعده‌ی دومین هرم، شش کره و در کل آن ده کره به کار رفته است:**

**الف. در قاعده‌ی پنجمین هرم چند کره به کار می‌رود؟**
**ب. در ساختن پنجمین هرم کلاً چند کره به کار می‌رود؟**
**ج. در قاعده‌ی چندمین هرم ۳۶ کره به کار می‌رود؟**
**د. در ساختن چندمین هرم کلاً ۱۲۰ کره به کار رفته است؟**

حل. الف. اگر از بالا به این هرم نگاه کنیم، شکل هر ردیف به طور مستقل به صورت زیر می‌باشند:




شکل ۱-۳

*) یادآوری می‌شود که مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا $m$ برابر $\frac{m(m+۱)}{۲}$ می‌باشد.

بنابراین در هرم $n$اُم در ردیف اول یک کره، در ردیف دوم $۲+۱$ کره، در ردیف سوم $۳+۲+۱$ کره، در ردیف چهارم $۴+۳+۲+۱$ کره، ... و در ردیف $(n+۱)$اُم (یعنی قاعده‌ی هرم) $(n+۱)+\cdots+۳+۲+۱$ کره قرار دارد، بنابراین دنباله‌ی تعداد کره‌های موجود در قاعده‌های هرم‌ها به شکل زیر خواهد بود:

$$\{a_i\}\ :\ ۳,۶,۱۰,\cdots,\frac{(i+۱)(i+۲)}{۲},\cdots \Rightarrow a_۵=\frac{۶\times ۷}{۲}=۲۱$$

ب. با توجه به توضیحات قسمت قبل معلوم می‌شود که در ردیف‌های اول تا ششمِ پنجمین هرم به ترتیب ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵ و ۲۱ کره موجود است که مجموع آن‌ها ۵۶ می‌شود.

ج. $\frac{(i+۱)(i+۲)}{۲}=۳۶ \Rightarrow (i+۱)(i+۲)=۷۲ \Rightarrow (i+۱)=۸ \Rightarrow i=۷$

د. فرض می‌کنیم در $m$اُمین هرم ۱۲۰ کره به کار رفته باشد، پس:

$$۱+(۱+۲)+(۱+۲+۳)+\cdots+(۱+۲+۳+\cdots+(m+۱))=۱۲۰$$

$$\Rightarrow ۱+\frac{۲\times ۳}{۲}+\frac{۳\times ۴}{۲}+\cdots+\frac{(m+۱)(m+۲)}{۲}=۱۲۰$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{m+۱}\frac{i(i+۱)}{۲}=۱۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{m+۱} i^۲+\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{m+۱} i=۱۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{(m+۱)(m+۲)(۲m+۳)}{۱۲}+\frac{(m+۱)(m+۲)}{۴}=۱۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{(m+۱)(m+۲)(۲m+۶)}{۱۲}=۱۲۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(m+۲)(m+۳)=۷۲۰ \Rightarrow m+۱=۸ \Rightarrow m=۷$$

## رابطه‌های بازگشتی

در تعدادی از دنباله‌ها بین هر جمله و جمله‌های قبل از آن رابطه‌ای برقرار است که به آن «**رابطه‌ی بازگشتی**» می‌گویند. در چنین دنباله‌هایی با معلوم بودن بعضی از جملات می‌توان به کمک رابطه‌ی بازگشتی موجود، جمله‌های دیگر را به‌دست آورد.

**مثال ۹** دنباله‌ی زیر را مشخص کنید:

$$\begin{cases} u_n=u_{n-۱}+۱\\ u_۱=۱\end{cases}$$

حل: جمله‌ی اول این دنباله عدد ۱ و هر جمله یک واحد از جمله‌ی قبلی‌اش بیش‌تر است. لذا $\{u_n\}$ همان دنباله‌ی اعداد طبیعی می‌باشد.

$$u_۲=u_۱+۱=۱+۱=۲$$

$$u_۳=u_۲+۱=۲+۱=۳$$

$$u_۴=u_۳+۱=۳+۱=۴$$

**مثال ۱۰** دنباله‌ی زیر دارای رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد. آن را مشخص کنید.

$$۷, ۱۲, ۱۸, ۲۵, ۳۳, \cdots$$

حل: در این دنباله اختلاف هر دو جمله ۳ تا بیش‌تر از شماره‌ی جمله‌ی بزرگ‌تر است؛ یعنی:

$$\begin{cases} u_n = u_{n-۱} + (n+۳) \\ u_۱ = ۷ \end{cases}$$

**مثال ۱۱** فاکتوریل* هر عدد را می‌توان به صورت بازگشتی تعریف کرد. آن را مشخص کنید.

حل:
$$n! = n(n-۱)!$$

بنابراین دنباله‌ای که شامل فاکتوریل اعداد طبیعی باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} u_n = n.(u_{n-۱}) \\ u_۱ = ۱ \end{cases} \qquad ۱, ۲, ۶, ۲۴, ۱۲۰, ۷۲۰, \cdots$$

**مثال ۱۲** دنباله‌ی فیبوناچی به شکل زیر تعریف می‌شود. ده جمله‌ی اول آن را بنویسید.

$$\begin{cases} a_۱ = ۱ \\ a_۲ = ۱ \\ a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} \quad n \geq ۳ \end{cases}$$

حل:

$$a_۱ = ۱ \quad , \quad a_۲ = ۱ \Rightarrow a_۳ = ۱ + ۱ = ۲ \quad , \quad a_۴ = ۲ + ۱ = ۳$$
$$a_۵ = ۳ + ۲ = ۵ \quad , \quad a_۶ = ۵ + ۳ = ۸ \quad , \quad a_۷ = ۸ + ۵ = ۱۳$$
$$a_۸ = ۱۳ + ۸ = ۲۱ \quad , \quad a_۹ = ۲۱ + ۱۳ = ۳۴ \quad , \quad a_{۱۰} = ۳۴ + ۲۱ = ۵۵$$

**مثال ۱۳** $n$ نقطه در یک صفحه چنانند که هیچ سه‌تایی از آن‌ها در یک راستا نیستند. چند پاره‌خط وجود دارد که آن نقاط را دوبه‌دو به هم وصل می‌کنند؟ *

حل: تعداد خطوط مربوط به $i$ نقطه را $a_i$ در نظر می‌گیریم. با اضافه شدن نقطه‌ی $(i+۱)$اُم به خطوط قبلی به تعداد $i$ خط اضافه می‌شود چون آن نقطه به تمام $i$ نقطه‌ی قبلی وصل می‌شود، بنابراین رابطه‌ی بازگشتی $a_{i+۱} = a_i + i$ برقرار است و چون $a_۱ = ۰$ بنابراین خواهیم داشت:

$$a_۱ = ۰$$
$$a_۲ = a_۱ + ۱$$
$$a_۳ = a_۲ + ۲$$
$$a_۴ = a_۳ + ۳$$
$$\vdots$$

*) $n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$

*) صورت سؤال را به این شکل نیز می‌توان مطرح کرد: «یک $n$ضلعی محدب روی هم چند ضلع و قطر دارد؟»

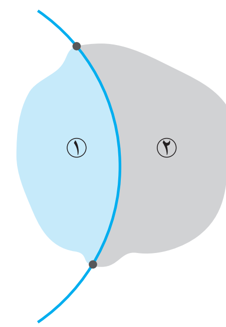
$$a_{n-۱} = a_{n-۲} + (n-۲)$$
$$a_n = a_{n-۱} + (n-۱)$$

با جمع کردن طرفین تساوی‌های به‌دست آمده و حذف عبارت‌های یکسان از طرفین تساوی، به تساوی $a_n = (۱+۲+۳+\cdots+(n-۱))$ خواهیم رسید. بنابراین:

$$a_n = ۱+۲+۳+\cdots+(n-۱) = \frac{(n-۱)\times n}{۲}$$

**مثال ۱۴** **از تلاقی ۱۰ دایره در یک صفحه حداکثر چند ناحیه ایجاد می‌شود؟**

حل: می‌دانیم دو دایره حداکثر در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. فرض می‌کنیم از ترسیم $k$ دایره در یک صفحه حداکثر $a_k$ ناحیه ایجاد شده باشد، با ترسیم دایره‌ی $(k+۱)$اُم اولاً $k$ دایره‌ی قبلی را حداکثر در $۲k$ نقطه قطع می‌کند و ثانیاً از یک نقطه تلاقی تا نقطه‌ی تلاقی بعدی یک ناحیه به دو ناحیه تقسیم می‌شود (همانند شکل ۱ـ۴)، بنابراین به تعداد نقاط تلاقی به نواحی قبلی، ناحیه اضافه می‌شود. در نتیجه رابطه‌ی $a_{k+۱} = a_k + ۲k$ برقرار می‌باشد. از آن‌جا که $a_۱ = ۲$، خواهیم داشت:



شکل ۱-۴

$$a_۱ = ۲$$
$$a_۲ = a_۱ + ۲(۱)$$
$$a_۳ = a_۲ + ۲(۲)$$
$$a_۴ = a_۳ + ۲(۳)$$
$$\vdots$$
$$a_{n-۱} = a_{n-۲} + ۲(n-۲)$$
$$a_n = a_{n-۱} + ۲(n-۱)$$

با جمع کردن طرفین تساوی‌های به‌دست آمده و حذف عبارت‌های یکسان از طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$a_n = ۲ + ۲(۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)) = ۲ + n(n-۱) = n^۲ - n + ۲$$
$$\Rightarrow a_{۱۰} = ۱۰^۲ - ۱۰ + ۲ = ۹۲$$

## دنباله‌ی حسابی (تصاعد حسابی)

دنباله‌ای را که تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی آن مقداری ثابت مانند $d$ باشد، تصاعد حسابی یا تصاعد عددی می‌نامیم و $d$ را قدرنسبت تصاعد می‌گوییم.

به عبارت دیگر اگر در دنباله‌ای هر جمله برابر باشد با حاصل‌جمع جمله‌ی قبل و یک مقدار ثابت، به آن دنباله یک تصاعد حسابی می‌گوییم. بنابراین یک تصاعد حسابی به قدرنسبت $d$ دنباله‌ای به صورت $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ است به طوری که:

$$a_{n+۱} = a_n + d \quad \text{یا} \quad a_{n+۱} - a_n = d$$

به عنوان مثال، دنباله‌ی اعداد طبیعی یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ۱ می‌باشد و همچنین دنباله‌ی اعداد طبیعی که بر ۳ بخش‌پذیرند یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ۳ است.

**مثال ۱۵** قدرنسبت تصاعدهای عددی زیر را به‌دست آورید.

الف) $۱, \frac{۷}{۶}, \frac{۴}{۳}, \cdots$ ب) $۱۲/۵, ۹/۲۵, ۶, \cdots$

ج) $۳-۲y, ۳+۲y, ۳+۶y, \cdots$ د) $۲x-۳y, ۳x-۲y, ۴x-y, ۵x, \cdots$

ه) $\sqrt{۲}-۱, ۲\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲}+۱, \cdots$

حل:

الف) $d=\frac{۷}{۶}-۱=\frac{۱}{۶}$

ب) $d=۹/۲۵-۱۲/۵=-۳/۲۵$

ج) $d=۳+۲y-(۳-۲y)=۴y$

د) $d=۳x-۲y-(۲x-۳y)=x+y$

ه) $d=۲\sqrt{۲}-(\sqrt{۲}-۱)=\sqrt{۲}+۱$

**نکته ۱.** اگر سه عدد $a$، $b$ و $c$ سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد حسابی باشند، خواهیم داشت:

$$b-a=c-b \Rightarrow b=\frac{a+c}{۲}$$

«عدد $b$ را واسطه‌ی عددی دو عدد $a$ و $c$ می‌نامند.»

**مثال ۱۶** مقدار $m$ را طوری تعیین کنید که سه عدد $\frac{m-۱}{۲}$، $-۲m$ و $\frac{۲m+۱}{۲}$ تشکیل یک تصاعد عددی بدهند.

حل:

$$-۴m=\frac{۲m+۱}{۲}+\frac{m-۱}{۲} \Rightarrow -۸m=۳m \Rightarrow m=۰$$

**نکته ۲.** اگر قدرنسبت یک تصاعد حسابی مثبت باشد، آن تصاعد **صعودی** است.
اگر قدرنسبت یک تصاعد حسابی منفی باشد، آن تصاعد **نزولی** است.

## جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی

اگر $a_۱$ جمله‌ی اول و $d$ قدرنسبت یک تصاعد عددی باشد، داریم:

$$a_۲=a_۱+d$$
$$a_۳=a_۲+d=a_۱+۲d$$
$$a_۴=a_۳+d=a_۱+۳d$$
$$a_۵=a_۴+d=a_۱+۴d$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_n=a_{n-۱}+d=a_۱+(n-۱)d$$

بنابراین جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی به صورت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ می‌باشد.

**مثال ۱۷** جمله‌ی عمومی تصاعد عددی را بنویسید که جمله‌ی اول آن ۵− و قدرنسبت آن ۳ باشد.

حل:
$$a_n = -۵ + (n-۱)(۳) \Rightarrow a_n = ۳n - ۸$$

**مثال ۱۸** تصاعد عددی روبه‌رو را در نظر بگیرید: $-۲, ۳, ۸, ۱۳, ۱۸, \ldots$

جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

حل: جمله‌ی اول این تصاعد ۲− بوده و قدرنسبت آن به شکل زیر یافت می‌شود:
$$d = ۳ - (-۲) = ۵$$

بنابراین جمله‌ی عمومی این تصاعد به صورت زیر است:
$$a_n = -۲ + (n-۱)(۵) \Rightarrow a_n = ۵n - ۷$$

**مثال ۱۹** جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی به صورت $a_n = ۳n - ۲$ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدرنسبت این تصاعد را به‌دست آورید.

حل:
$$\left.\begin{array}{l} a_۱ = ۳ \times ۱ - ۲ = ۱ \\ a_۲ = ۳ \times ۲ - ۲ = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow d = a_۲ - a_۱ = ۴ - ۱ = ۳$$

**مثال ۲۰** در یک تصاعد حسابی قدرنسبت $(-\frac{۱}{۲})$ و جمله‌ی پانزدهم ۱۰ می‌باشد. جمله‌ی اول و جمله‌ی عمومی این تصاعد را بنویسید.

حل:
$$a_{۱۵} = a_۱ + (۱۵ - ۱)(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۱۰ = a_۱ + (-۷) \Rightarrow a_۱ = ۱۷$$
$$\text{جمله‌ی عمومی} = a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۱۷ + (n-۱)(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow a_n = -\frac{۱}{۲}n + \frac{۳۵}{۲}$$

**مثال ۲۱** در یک تصاعد عددی جمله‌ی اول و دوازدهم به ترتیب ۷− و ۱۵ می‌باشد، قدرنسبت این تصاعد چقدر است؟

حل:
$$a_۱ = -۷ \ , \ a_{۱۲} = ۱۵$$
$$a_{۱۲} = a_۱ + ۱۱d \Rightarrow d = \frac{a_{۱۲} - a_۱}{۱۱} = \frac{۱۵ - (-۷)}{۱۱} = ۲$$

**مثال ۲۲** در یک تصاعد عددی قدرنسبت ۱۱ و جمله‌ی اول ۱− است. چندمین جمله‌ی این تصاعد برابر ۲۱۹ است؟

حل:
$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$
$$۲۱۹ = -۱ + (n-۱)(۱۱) \Rightarrow (n-۱) = \frac{۲۲۰}{۱۱} = ۲۰ \Rightarrow n = ۲۱$$