

مجموعه کتاب های EQ را
با دو جلد مجزا به دو شیوه بخوانید:

۱. کتاب را از ابتدا باز کنید و
درسنامه های طبقه بندی شده مطابق با
امتحانات نهایی را بخوانید.

۲. کتاب را ۱۸۰ درجه بچرخانید و
نمونه سوالات امتحان نهایی و
نوبت اول را بخوانید.

فصل ۱ | محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

فراوانی سؤالات مطرح شده در امتحان‌های هماهنگ کشوری در ۵ سال اخیر

مبحث	خرداد	شهریور	دی
مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی	۳	۳	۳
تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری	۳	۲	۴
بسط دوجمله‌ای	۱	۳	۱
ب.م.م. - ک.م.م.	۱	۲	—
معادله‌ی درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن	۲	۲	۵
ماکسیمم و مینیمم توابع درجه‌ی ۲ و تعیین علامت ضرایب آن از روی نمودار	۲	۲	۱
معادلات شامل عبارات گویا	۲	—	—
معادلات شامل عبارات گنگ	۲	۲	۲
حل معادلات به روش هندسی	۲	۱	۲
قدر مطلق و ویژگی‌های آن	۳	۱	۲
معادلات و نامعادلات قدر مطلق	—	۱	۳
حل نامعادلات به روش هندسی	۲	۳	۱

۸ دنباله‌ی حسابی و ویژگی‌های آن

تعریف: دنباله‌ای که هر جمله‌اش از افزودن مقدار ثابتی به جمله‌ی قبل به دست می‌آید را دنباله‌ی حسابی می‌نامیم. این مقدار ثابت را با d نمایش می‌دهیم و به آن قدرنسبت می‌گوییم.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{\text{مثلاً}} a_{14} = a_1 + 13d = a_2 + 12d = \dots$$

↓ ↓ ↓
جمله‌ی اول جمله‌ی اول قدرنسبت

مثال | مطلوب است جمله‌ی ۵۱ ام دنباله‌ی: $2, 5, 8, \dots$

$$d = 5 - 2 = 3, a_1 = 2, a_{51} = a_1 + 50d$$

$$\Rightarrow a_{51} = 2 + 50 \times 3 = 152$$

۸ مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی از دستور زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

مثال | مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را بیابید. (۱ نمره) (دی ۹۱)

$$-5, -3, -1, \dots$$

$$d = a_2 - a_1 = -3 - (-5) = 2, S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10(-10 + 38) = 280$$

مثال | در دنباله‌ی حسابی $3, 9, 15, \dots$ حداقل چندجمله‌ی آن را باید جمع کنیم تا

حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟ (۷۵ نمره) (دی ۹۳)

$$d = a_2 - a_1 = 9 - 3 = 6$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \times 3 + (n-1)6] > 300 \Rightarrow \frac{n}{2}(6 + 6n - 6) > 300$$

$$\Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10$$

پس حداقل باید ۱۱ جمله جمع شود.

مثال | در یک دنباله‌ی حسابی $a_9 + a_{25} = 100$ می‌باشد. مجموع ۳۳ جمله‌ی اول را بیابید.

$$\text{حل | } a_9 + a_{25} = 100 \Rightarrow a_1 + 8d + a_1 + 24d = 100 \Rightarrow 2a_1 + 32d = 100$$

$$S_{33} = \frac{33}{2}(2a_1 + 32d) = \frac{33}{2} \times 100 = 33 \times 50 = 1650$$

مثال | مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از دستور $S_n = n(n-4)$ به دست می‌آید. مجموع ۴ جمله‌ی سوم این دنباله را بیابید.

$$\text{حل | } a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = S_{12} - S_8 = \text{مجموع ۴ جمله‌ی سوم}$$

$$= 12 \times 8 - 8 \times 4 = 64$$

مثال | مجموع اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۶ را بیابید.

$$\text{حل | } 12, 18, 24, \dots, 96 \Rightarrow n = \frac{96-12}{6} + 1 = 15$$

$$S_{15} = 12 + 18 + 24 + \dots + 96 = \frac{15}{2}(12 + 96) = \frac{15}{2} \times 108 = 810$$

۸ چند نکته‌ی کاربردی از دنباله‌ی حسابی

(۱) تعداد جملات دنباله‌ی حسابی از دستور $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ به دست می‌آید.

(۲) در دنباله‌های حسابی، S_n عبارتی درجه‌ی دوم برحسب n است که در آن ضریب n^2 نصف d می‌باشد.

(۳) اگر زوایای یک مثلث تشکیل تصاعد حسابی دهند، آن‌گاه یکی از زاویه‌ها 60° می‌باشد.

(۴) اگر طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d دهند، طول این اضلاع $3d, 4d, 5d$ می‌باشد.

مثال | طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر طول ضلع کوچک‌تر ۳ باشد، محیط مثلث را بیابید.

$$\text{حل | } \text{اضلاع مثلث } 3d, 4d, 5d \text{ هستند. پس } 3d = 3 \text{ در نتیجه } d = 1. \text{ بنابراین}$$

$$\text{طول دو ضلع دیگر } 4d = 4 \text{ و } 5d = 5 \text{ است. پس:}$$

$$\text{محیط مثلث} = 3 + 4 + 5 = 12$$

$$\text{نکته | در تمام دنباله‌ها داریم: } S_1 = a_1 \text{ و } a_n = S_n - S_{n-1}$$

مثال | در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = 2n(n-1)$ می‌باشد، a_n را بیابید.

حل |

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n(n-1) - 2(n-1)(n-2)$$

$$= 2n^2 - 2n - 2n^2 + 6n - 4 = 4n - 4$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 = S_1 \Rightarrow a_1 &= 0 \\ d = 2 \times (n^2 \text{ ضریب}) &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = 0 + 4(n-1) = 4n - 4$$

مثال | در دنباله‌های حسابی زیر، چند عدد دو رقمی مشترک وجود دارد؟

$$1, 3, 5, 7, \dots \quad 4, 7, 10, 13, \dots$$

$$d_1 = 2, d_2 = 3 \Rightarrow d = 3, 2 \text{ م.م.ک.} = [2, 3] = 6$$

مشترک

$$13 = \text{اولین جمله‌ی مشترک دو رقمی}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 13 + (n-1) \times 6 \Rightarrow a_n = 6n + 7$$

مشترک

$$13 \leq a_n < 99 \Rightarrow 13 \leq 6n + 7 < 99 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, \dots, 15 \Rightarrow \text{تعداد} = 15$$

۸ دنباله هندسی و ویژگی‌های آن

● **تعریف:** دنباله‌ای که هر جمله‌اش از ضرب مقدار ثابتی در جمله‌ی قبل به دست می‌آید را دنباله‌ی هندسی می‌نامیم. این مقدار ثابت را با q نمایش می‌دهیم و آن را قدرنسبت می‌نامیم.

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

$$\Rightarrow a_n = a_1q^{n-1} \xrightarrow{\text{مثلاً}} a_1 = a_1q^0 = a_2q^{-1} = \dots$$

قدرنسبت جمله‌ی اول جمله‌ی عمومی

مثال: جملات سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.

$$\left. \begin{aligned} a_3 = 12 &\Rightarrow a_1q^2 = 12 \\ a_6 = 96 &\Rightarrow a_1q^5 = 96 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a_1q^5}{a_1q^2} = \frac{96}{12} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$a_1q^2 = 12 \Rightarrow a_1 \times (2)^2 = 12 \Rightarrow a_1 = 3$$

۸ مجموع جملات دنباله هندسی

● مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی از دستورات زیر به دست می‌آید.

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1 - a_nq}{1 - q}$$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی با $a_1 = 2$ و $q = -2$ ، مجموع چند جمله‌ی ابتدایی برابر ۲۲ است؟

$$S_n = 22 \Rightarrow \frac{2(1 - (-2)^n)}{1 - (-2)} = 22 \Rightarrow 1 - (-2)^n = 33$$

$$\Rightarrow (-2)^n = -32 \Rightarrow n = 5$$

۸ حد مجموع جملات دنباله هندسی

● در دنباله‌ی هندسی اگر $|q| < 1$ ، آن‌گاه حد مجموع جملات (مجموع بی‌شمار جمله) دنباله از دستور $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$ به دست می‌آید.

مثال: مجموع $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ را بیابید. (۷۵/نمره) (شهریور ۹۴)

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

۸ تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

● الگوریتم تقسیم:

$$\begin{array}{r} P(x) \quad | \quad x - a \\ \hline \quad \quad Q(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

$$\xrightarrow{x=a} P(a) = 0 \times Q(a) + R \Rightarrow R = P(a)$$

(۱) باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x - a)$ برابر با $P(a)$ است.

(۲) درجه‌ی باقی‌مانده‌ی هر تقسیم همواره کوچک‌تر از درجه‌ی مقسوم علیه است.

(۳) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر شود، مقسوم بر مقسوم علیه بخش‌پذیر است.

(۴) اگر چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x - a)$ بخش‌پذیر باشد، $P(a) = 0$ است.

(۵) اگر $x = a$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $P(x) = 0$ باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای

$P(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است و برای تعیین سایر ریشه‌های معادله‌ی $P(x) = 0$

کافی است خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $x - a$ را مساوی صفر قرار دهیم.

تذکر طلایی: برای حل هر سؤال در این بخش می‌توان از الگوریتم تقسیم استفاده کرد.

نکته

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ بر $2x + 1$ را بیابید. (۷۵/نمره)

(شهریور ۹۴)

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow R = P\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{8} - 1 + 2 = \frac{7}{8}$$

حل

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن را بر $x - 1$ بیابید.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 2 \Rightarrow 2 - m + 2 = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow P(x) = 2x^4 + 2x + 2$$

حل

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow R = P(1) = 2 + 2 + 2 = 6$$

مثال: مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x) = 3x^3 - 2x + 2m$ بر

(شهریور ۹۱)

$x - 2$ بخش‌پذیر باشد. (۱/نمره)

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow P(2) = 24 - 4 + 2m = 0 \Rightarrow m = -10$$

حل

مثال: هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x + 3$ و $x - 2$ به ترتیب ۷ و ۲

باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + x - 6$ را به دست آورید. (۷۵/نمره) (دی ۸۸)

$$f(-3) = 7, f(2) = 2$$

حل

فرض کنیم باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + x - 6$ برابر $ax + b$ باشد. پس:

$$f(x) = (x^2 + x - 6).Q(x) + ax + b$$

$$\left. \begin{aligned} f(-3) = 0 - 3a + b &\Rightarrow -3a + b = 7 \\ f(2) = 0 + 2a + b &\Rightarrow 2a + b = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1, b = 5 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = x + 5$$

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱۲ باشد،

باقی‌مانده‌ی تقسیم $x.P(x - 5)$ بر $(x - 3)$ را بیابید.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow P(-2) = 12$$

حل

$$\text{فرض کنیم: } x.P(x - 5) = (x - 3).Q(x) + R$$

$$\xrightarrow{x=3} 3P(-2) = 0 + R \Rightarrow 3 \times 12 = R \Rightarrow R = 36$$

مثال: m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $x^4 - 3x^2 + mx + n$ بر $x^2 - 5x + 6$

بخش‌پذیر باشد.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$$

حل

$$\left\{ \begin{aligned} P(2) = 0 &\Rightarrow 16 - 12 + 2m + n = 0 \\ P(3) = 0 &\Rightarrow 81 - 27 + 3m + n = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m + n = -4 \\ 3m + n = -54 \end{cases} \Rightarrow m = -50, n = 96$$

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها

(۱) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) برابر است با حاصل ضرب عامل‌های مشترک با کوچک‌ترین توان.

(۲) کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) برابر است با حاصل ضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بزرگ‌ترین توان.

$$\text{مثلاً: } 36 = 2^2 \times 3^2, 81 = 3^4 \\ \Rightarrow \text{ب.م.م} = (36, 81) = 3^2 = 9, \text{ ک.م.م} = [36, 81] = 2^2 \times 3^4 = 324$$

مثال سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می‌شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک‌بار، دومین زنگ هر ۲۴ دقیقه یک‌بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک‌بار زده می‌شود. بعد از اولین بار که هر ۳ زنگ زده شوند، حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره با هم زده شوند؟ (۱ نمره) (شهریور ۹۳)

حل اگر در لحظه‌ی t هر سه زنگ با هم به صدا درآیند، داریم:

$$\left. \begin{aligned} t &= 18k \\ t &= 24k' \\ t &= 32k'' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حداقل زمان مورد نظر} = [18, 24, 32] \\ = [2 \times 3^2, 2^3 \times 3, 2^5] = 2^5 \times 3^2 = 32 \times 9 = 288$$

مثال ۱۴۴ لیتر آب میوه، ۴۵ لیتر شیر و ۶۳ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم‌های یکسان بسته‌بندی شده است. حداقل تعداد شیشه‌ها را بیابید (گنجایش شیشه‌ها را برحسب لیتر، عدد طبیعی فرض کنید). (۱ نمره) (خرداد ۹۱)

حل فرض کنیم حجم شیشه‌ها d باشد. پس:

$$\left. \begin{aligned} 144 &= nd \\ 45 &= n'd \\ 63 &= n''d \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = 63, 45, 144 \text{ م.م.ب} = (144, 45, 63) = 9 \\ \Rightarrow n = 16, n' = 5, n'' = 7 \Rightarrow \text{حداقل تعداد شیشه‌ها} = 16 + 5 + 7 = 28$$

مثال ک.م.م دو عبارت $16ab^2$ و $8b^3$ را بیابید. (۲/۲۵ نمره) (شهریور ۹۴)

حل $8b^3 = 2^3 b^3, 16ab^2 = 2^4 ab^2 \Rightarrow \text{ک.م.م} = 2^4 ab^2 = 16ab^2$

معادله‌ی درجه‌ی دوم

معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را با فرض $a \neq 0$ معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌نامیم که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$ است و داریم:

(الف) اگر $\Delta < 0$ ، آن‌گاه معادله، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

(ب) اگر $\Delta = 0$ ، آن‌گاه معادله، یک ریشه‌ی مضاعف به صورت $x = \frac{-b}{2a}$ دارد.

(ج) اگر $\Delta > 0$ ، آن‌گاه معادله، دو ریشه‌ی حقیقی دارد که از دستور زیر به دست می‌آیند:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(۱) اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه:

$$1) \text{ مجموع ریشه‌ها} = S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$2) \text{ حاصل ضرب ریشه‌ها} = P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$3) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$4) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$

$$5) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}; \alpha, \beta \geq 0$$

نکته

مثال در چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ و a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ بوده و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.

حل $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P(1) = 4$

$$\Rightarrow 1 + a + 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow P(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 4a - 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 10 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = \frac{-2}{3}$$

مثال a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ برابر ۲ باشد، سپس جواب‌های دیگر معادله را به دست آورید.

حل چون $x = 2$ یک جواب معادله است، پس معادله بر $x - 2$ بخش پذیر می‌باشد:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - x + 2 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & \\ \hline -x + 2 & \\ -x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{ریشه‌های دیگر: } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + b^n$$

$$\text{مثلاً: } (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

(۱) بسط $(a + b)^n$ دارای $n + 1$ جمله است و مجموع ضرایب این بسط برابر با 2^n می‌باشد.

به‌طور کلی برای تعیین مجموع ضرایب هر چندجمله‌ای کافی است به جای تمام متغیرهایش عدد ۱ را قرار دهیم.

(۲) جمله‌ی $(k + 1)$ ام بسط $(a + b)^n$ از دستور $\binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$ به دست می‌آید.

نکته

مثال جمله‌ی سوم بسط $(x + \frac{2}{x})^5$ را بنویسید. (۲/۲۵ نمره) (دی ۹۳)

حل جمله‌ی سوم $= \binom{5}{2} (x)^{5-2} (\frac{2}{x})^2 = 10x^3 \times \frac{4}{x^2} = 40x$

مثال حاصل $(x - 2)^4$ را به دست آورید. (۲/۲۵ نمره) (شهریور ۹۳)

حل $(x - 2)^4 = x^4 + 4x^3(-2) + 6x^2(-2)^2 + 4x(-2)^3 + (-2)^4 \\ = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

مثال حاصل عبارت $(1 - \frac{2}{x})^5$ را به دست آورید. (۲/۲۵ نمره) (شهریور ۹۰)

حل $(1 - \frac{2}{x})^5 = 1 - 5(\frac{2}{x}) + 10(\frac{2}{x})^2 - 10(\frac{2}{x})^3 + 5(\frac{2}{x})^4 - (\frac{2}{x})^5 \\ = 1 - \frac{10}{x} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^3} + \frac{80}{x^4} - \frac{32}{x^5}$

$$\alpha \cdot \beta = 28 \Rightarrow P = 28$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x-7)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \rightarrow \alpha \\ x=4 \rightarrow \beta \end{cases}$$

مثال اگر جمع دو عدد $\frac{7}{6}$ و حاصل ضربشان $-\frac{1}{4}$ باشد، آن دو عدد را بیابید. (۱ نمره)

(تمرین ۱ صفحه ۱۹ - شهریور ۹۴)

$$S = \frac{7}{6}, P = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 6} 6x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 49 + 72 = 121 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$$

حل

نکته

(۲) تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم (معادله‌ی درجه‌ی دومی که مجموع ریشه‌هایش

S و حاصل ضرب آن‌ها P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

(۳) در معادله‌ی درجه‌ی دوم اگر $\frac{c}{a} < 0$ آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه

دارد و اگر $c = 0$ ، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها $x = 0$ و دیگری $x = -\frac{b}{a}$ است.

مثال بدون حل معادله و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت جواب‌های

معادله‌ی $x^2 + x - 5 = 0$ بحث کنید. (۱/۲۵ نمره) (شهریور ۹۴)

دو ریشه‌ی حقیقی دارد. $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 20 = 21 > 0 \Rightarrow$

$$P = \frac{c}{a} = -5 < 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها}$$

پس دو ریشه، مختلف‌العلامه هستند. (یکی مثبت و یکی منفی)

$$S = \frac{-b}{a} = -1 < 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}$$

بنابراین ریشه‌ای که قدرمطلقش بزرگ‌تر است، منفی می‌باشد.

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید

که ریشه‌های آن 2α و 2β باشند.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{5}{4}, \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -\frac{5}{4}$$

$$S_{\text{جدید}} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

$$P_{\text{جدید}} = 2\alpha \cdot 2\beta = 4\alpha\beta = 4 \times -\frac{5}{4} = -5$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - 5 = 0$$

مثال در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر

بزرگ‌تر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید. (۱/۲۵ نمره) (دی ۹۲)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \beta + 2 \\ S &= \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta + 2 + \beta = 4 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\beta = 1 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{صدق در}} 2 - 8 + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، مقدار عددی هر یک

از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 \quad \text{ب) } \alpha^2 + \delta\beta$$

$$S = -\frac{b}{a} = 5, P = \frac{c}{a} = 1$$

حل الف)

$$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = P(S^2 - 2P) = 1(25 - 2) = 23$$

ب) چون α ریشه‌ی معادله است، در معادله صدق می‌کند. پس:

$$\alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 5\alpha - 1$$

$$\alpha^2 + \delta\beta = 5\alpha - 1 + \delta\beta = 5(\alpha + \beta) - 1 = 5 \times 5 - 1 = 24$$

مثال یک معادله‌ی چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بنویسید که $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ یک

جواب آن باشد.

$$x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 = 3 + 2 + 2\sqrt{6} \Rightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^4 - 10x^2 + 25 = 24 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

مثال طول و عرض مستطیلی را بیابید که محیط آن ۲۲ سانتی‌متر و مساحت آن

۲۸ سانتی‌متر باشد.

$$\text{حل فرض کنیم: } \text{عرض مستطیل} = \beta \text{ و } \text{طول مستطیل} = \alpha$$

$$2(\alpha + \beta) = 22 \Rightarrow \alpha + \beta = 11 \Rightarrow S = 11$$

نکته

۱- معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی

$ax^2 + bx + c = 0$ باشد، به صورت $cx^2 + bx + a = 0$ است.

۲- بعضی معادله‌های درجه‌ی بالاتر هستند که قابل تبدیل به معادله‌ی درجه‌ی

دوم می‌باشند. برای حل این معادلات از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

مثال معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی

$$3x^2 - 4x - 5 = 0 \text{ باشد.}$$

حل کافی است جای a و c را عوض کنیم، پس:

مثال معادله‌ی $(x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$ را حل کنید. (۱/۲۵ نمره) (شهریور ۹۲)

حل از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم $t = (x^2 - 1)^2$ ، پس:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$t = -2 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = -2 \text{ غرق}$$

$$t = 1 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

مثال معادله‌ی $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0$ را حل کنید. (۱/۲۵ نمره)

(دی ۹۱)

$$\frac{x^2}{3} - 2 = t \Rightarrow t^2 - 11t + 10 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-10) = 0$$

حل

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ t = 10 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 10 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 12 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6 \end{cases}$$

۸ ماکسیمم و مینیمم توابع درجه‌ی دوم

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید که در آن $a \neq 0$ است.

(۱) اگر $a > 0$ ، آن‌گاه نمودار f به صورت  است و مینیمم دارد.

(۲) اگر $a < 0$ ، آن‌گاه نمودار f به صورت  است و ماکسیمم دارد.

(۳) در نقطه‌ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ دارای کم‌ترین مقدار (مینیمم) یا بیشترین

مقدار (ماکسیمم) است که این نقطه را رأس سهمی می‌نامیم.

(۴) خط قائم $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن نمودار f است.

(۵) تابع درجه‌ی دوم، همواره محور y ها را در نقطه‌ای به عرض c قطع می‌کند:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = c$$

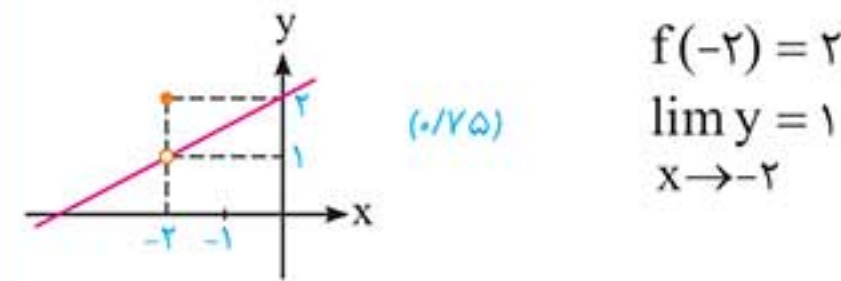
نکته

مثال | در یک مزرعه‌ی شالیکاری دو کارگر که با هم کار می‌کنند، کار را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند؟

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \quad (0.25) \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \quad (0.25) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad (0.25) \\ \cos x = \frac{1}{2} \quad (0.25) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (0.25) \end{cases}$$

$$\tan \frac{4\pi}{3} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$



$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x^3 + x^4 + x + 1)}{x-1} = 5 \quad (0.25)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} |\sin \frac{x}{2}|}{\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = -\sqrt{2} \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] + a) = 1 + a \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \quad (0.25) \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad (0.25)$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 1 - (a^2 + 1)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = 2a \quad (0.25)$$

$$\text{الف) } y' = (2 \cdot x^2)(\cos x) - (\sin x)(4x^2 + 2)$$

$$\text{ب) } y' = \frac{2x + \cos x}{2\sqrt{x^2 + \sin x - 1}}$$

$$\text{ج) } y' = 3 \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$S(R) = \pi R^2 \quad (0.25) \Rightarrow S'(R) = 2\pi R \quad (0.25) \Rightarrow S'(\frac{1}{2}) = \pi \quad (0.25)$$

$$\frac{5(x-2)-4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \quad (0.25) \Rightarrow \frac{5x-14}{x} = x-4; x \neq 2$$

$$\Rightarrow 5x-14 = x^2-4x \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow x^2-9x+14=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ غلطی} \quad (0.25) \\ x=7 \quad (0.25) \end{cases}$$

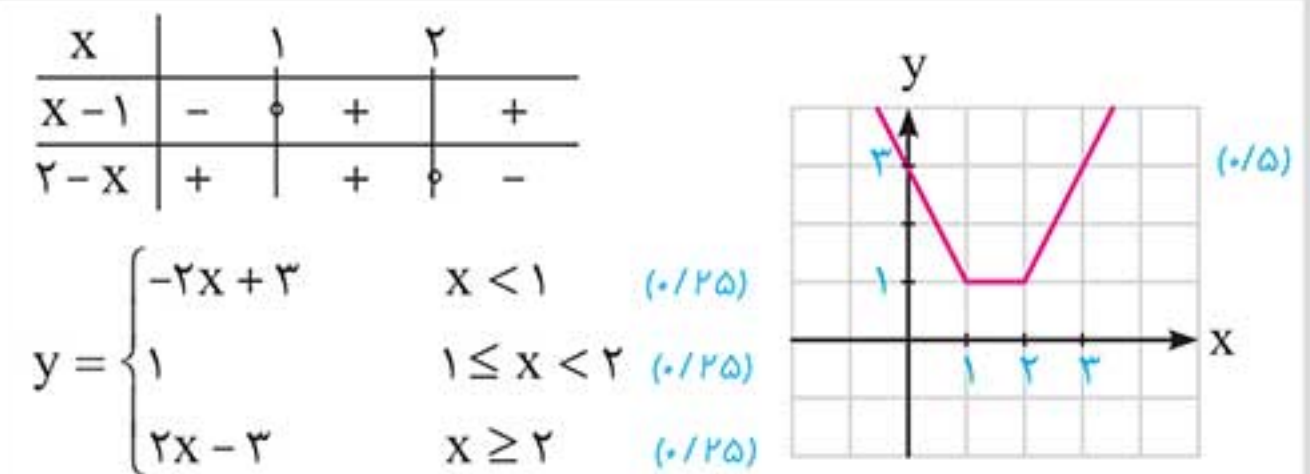
$$\text{الف) } P(-1) = 2 \quad (0.25)$$

$$\text{ب) } 2^6 \quad (0.25)$$

$$\text{ج) } x = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow f(2) = 12 - 24 + 1 = -11 \quad (0.25)$$

$$P, \frac{1}{2}P, \frac{1}{4}P, \dots \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{2} \quad (0.25) \Rightarrow S_p = \frac{P}{1 - \frac{1}{2}} = 2P \quad (0.25)$$



$$\begin{cases} D_f: x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1 \quad (0.25) \\ D_g: x \geq 0, x \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \quad (0.25) \end{cases}$$

پس مساوی نیستند، زیرا دامنه‌ها برابر نیستند. (0.25)

$$\text{الف) } 2f - g = \left\{ \left(1, -\frac{1}{2}\right), (-1, -2) \right\} \quad (0.25)$$

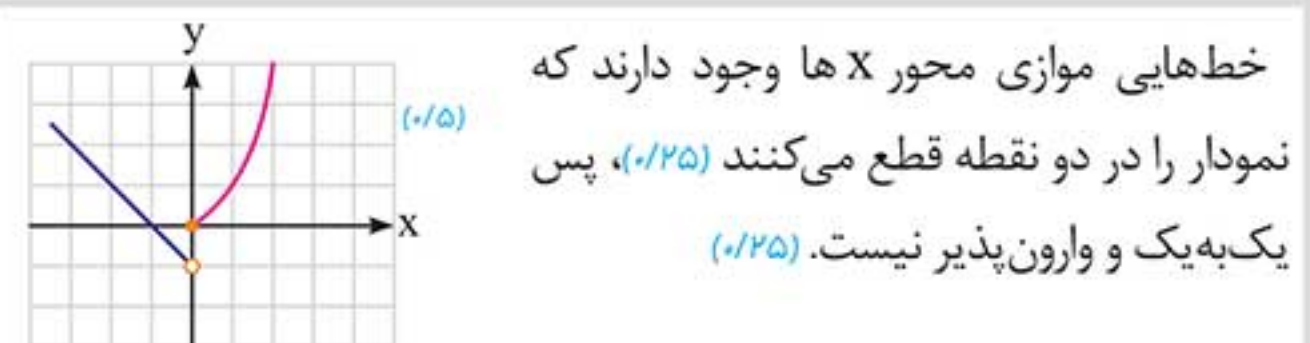
$$\text{ب) } \text{gof} = \{(0, \sqrt{2}), (1, 2)\} \quad (0.25)$$

$$\text{ج) } \left(\frac{f}{g}\right)(1) = -\frac{2}{3} \quad (0.25)$$

$$\text{i) } f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x) \text{ زیرا: } \quad (0.25)$$

$$\text{ii) الف} \quad (0.25)$$

$$\text{iii) ب} \quad (0.25) \text{ زیرا: } -2 \leq 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$



$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ قق} \quad (0.25)$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

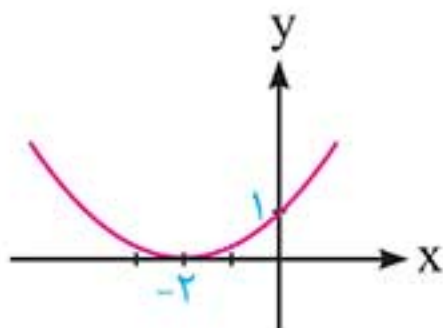
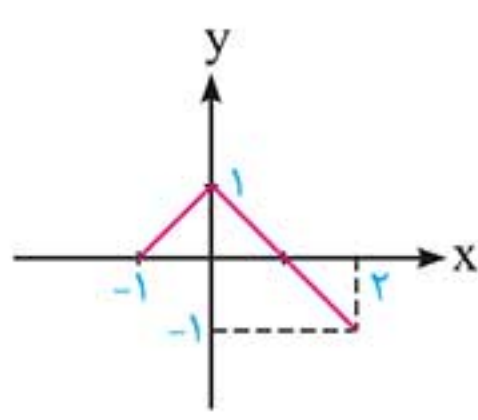
$$\sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ قق} \quad (0.25)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (0.25)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (0.25)$$

۱	معادله‌ی $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$ را حل کنید.	۱
۰/۷۵	جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. الف) باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 4$ بر $x+1$ برابر با است. ب) مجموع ضرایب بسط دوجمله‌ای $(3x-1)^6$ برابر است. ج) کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ برابر با است.	۲
۱	 یک مثلث با محیط P در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچک‌تر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچک‌تر انجام دهید. این عمل را به‌طور متوالی انجام دهید. مجموع محیط‌های مثلث‌های به‌دست آمده چقدر است؟	۳
۱/۲۵	ابتدا ضابطه‌ی تابع $y = x-1 + 2-x $ را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید، سپس نمودار آن را رسم کنید.	۴
۰/۷۵	آیا دو تابع زیر مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل ارایه کنید. $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases}$	۵
۱/۵	اگر $f = \{(0, 2), (1, -1), (3, -\frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 0)\}$ و $g = \{(2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{4})\}$ باشند؛ الف) تابع $g - f$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید. ب) تابع $g \circ f$ را به‌دست آورید. ج) مقدار $(\frac{f}{g})(1)$ را محاسبه کنید.	۶
۰/۷۵	گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید. i. تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است. ii. تابع $y = x^2 - 1$ در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ است. iii. تابع $y = f(x)$ با دامنه‌ی $[-2, 1]$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع $g(x) = -f(2x) + 1$ بازه‌ی است. الف) $[-4, 2]$ ب) $[-1, \frac{1}{4}]$	۷
۱	به کمک رسم نمودار، ثابت کنید تابع مقابل وارون پذیر نیست. $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x-1 & ; x < 0 \end{cases}$	۸
۱	α زاویه‌ای حاده و β زاویه‌ای منفرجه است و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را محاسبه کنید.	۹
۱/۲۵	معادله‌ی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.	۱۰
۰/۷۵	مقدار $\tan^{-1}(\tan \frac{4\pi}{3})$ را حساب کنید.	۱۱
۰/۷۵	نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ی ۲- تعریف شده باشد، در این نقطه حد داشته ولی حد آن غیر از مقدار تابع در عدد ۲- باشد.	۱۲
۱/۷۵	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$	۱۳
۱/۵	مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; 0 \leq x < 1 \\ [x] + a & ; x \geq 1 \end{cases}$	۱۴
۱/۵	با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در نقطه‌ی a محاسبه کنید.	۱۵
۲/۵	مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست). الف) $y = (4x^5 + 2)\cos x$ ب) $y = \sqrt[3]{x^2 + \sin x} - 1$ ج) $y = 1 + 3\cos^{-1} x$	۱۶
۱	آهنگ تغییرات مساحت دایره به شعاع $R = 4$ را به‌دست آورید.	۱۷
۲۰	جمع نمره	

۹	دنباله‌ی داده شده، دنباله‌ی هندسی با $a_1 = 1$ و $q = 3$ است. پس داریم: $S_n > 1000 \Rightarrow \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} > 1000 \Rightarrow \frac{3^n - 1}{3 - 1} > 1000 \Rightarrow 3^n - 1 > 2000$ $\Rightarrow 3^n > 2001 \Rightarrow n \geq 7 \Rightarrow$ لااقل ۷ جمله را باید جمع کنیم. توجه کنید که $3^6 = 729$ و $3^7 = 2187$ می‌باشند.	۱
۱۰	$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -1, -2$ $\Rightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \Rightarrow -1 - 2m - n - 1 = 0 \\ P(-2) = 0 \Rightarrow -4 - 4m - 2n - 1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} -2m - n = 2 \\ -4m - 2n = 5 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2m - n = 2 \\ 8m + 4n = -10 \end{cases}$ $\Rightarrow -6m = 5 \Rightarrow m = -\frac{5}{6} \Rightarrow n = \frac{1}{6}$	۲
۱۱	الف) $(3x^2 - y)^2 = (3x^2)^2 + 2(3x^2)(-y) + (-y)^2$ $= 9x^4 - 6x^2y + y^2$ ب) $\frac{(1+a+a^2+a^3+a^4)(1-a)(1+a)}{a(1-a^5)} = \frac{(1-a^5)(1+a)}{a(1-a^5)} = \frac{1+a}{a}$	۳
۱۲	$\begin{cases} 250 = 2 \times 5^3 \\ 200 = 2^3 \times 5^2 \\ 125 = 5^3 \end{cases} \Rightarrow \text{م.م.ب} = 5^2 = 25$ $\Rightarrow \text{تعداد کلاس‌ها} = \frac{250 + 200 + 125}{25} = \frac{575}{25} = 23$	۴
	$\begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \\ f(-2) = 0 \Rightarrow 4a - 2b + 1 = 0 \\ x = \frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a \end{cases} \Rightarrow 4a - 8a + 1 = 0$ $-4a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 1$	۵
۱۳	طرفین به توان ۲ $2 + \sqrt{x-3} = 5 - x \Rightarrow \sqrt{x-3} = 3 - x$ طرفین به توان ۲ $x - 3 = (3 - x)^2 \Rightarrow (3 - x)^2 + 3 - x = 0$ $\Rightarrow (3 - x)(3 - x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ قق} \\ x = 4 \text{ غق} \end{cases}$ در معادله‌ی اولیه صدق نمی‌کند.	۶
۱۴	$y = x+2 $ $y = 4-x^2 $ $\Rightarrow \text{مجموعه‌ی جواب} = [1, 3] \cup \{-2\}$	۷
	$y = 1 - f(2x)$ $\Rightarrow D = [-\frac{1}{2}, 1] \text{ و } R = [0, 2]$	۸
	الف) $3f = \{(2, 3), (-1, 9), (1, 6), (-2, 6), (4, 0)\}$ ب) $\Rightarrow 2 + 3f = \{(2, 5), (-1, 11), (1, 8), (-2, 8), (4, 2)\}$ $f \circ g = \{(4, 2), (-2, 2), (3, 3), (0, 0)\} \Rightarrow R_{f \circ g} = \{2, 3, 0\}$ $\begin{cases} f \text{ دامنه‌ی } x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ g \text{ دامنه‌ی } x \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{x-1}{x} \geq 2\} = [-1, 0)$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 2 = \sqrt{\frac{-x-1}{x}}$ پس دامنه‌ی f نسبت به صفر متقارن است. $f(-x) + f(x) = \log\left(\frac{-x+2}{2+x}\right) + \log\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ $= \log\left(\frac{-x+2}{2+x} \times \frac{x+2}{2-x}\right) = \log 1 = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ پس f فرد است.	
	$f(x) = (x^2 - 1)^2$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1^2 - 1)^2 = (x_2^2 - 1)^2 \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 $ $\xrightarrow{x_1, x_2 > 1} x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 $ $\xrightarrow{x_1, x_2 > 1} x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ یک به یک است.}$ معکوس پذیر است. $y = (x^2 - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x^2 - 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{y} = x^2$ $\Rightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{y}} \xrightarrow{x > 1} x = \sqrt{1 + \sqrt{y}}$ $\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \sqrt{1 + \sqrt{x}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$	
	$1 < x < 2 \Rightarrow 1 - x < 0$ $\Rightarrow 2x + 1 - x = 2x - 1 + x = 3x - 1$ در بازه‌ی $(-\infty, 1]$ نزولی، در بازه‌ی $[1, 2)$ صعودی و در بازه‌ی $[2, +\infty)$ ثابت است.	
	$S = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$ ، $P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$ $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P}$ $\Rightarrow \text{جواب} = \frac{\frac{25}{9} + \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{31}{3}$	

۱	در دنباله‌ی $1, 3, 9, \dots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا مجموع آن‌ها بیشتر از ۱۰۰۰ شود؟	۱
۱/۵	مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 - 2mx^2 + nx - 1$ بر $x^2 + 3x + 2$ بخش پذیر باشد.	۲
۲	الف) بسط دوجمله‌ای $(3x^2 - y)^4$ را بنویسید. ب) عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. $\frac{(1 + a + a^2 + a^3 + a^4)(1 - a^2)}{a - a^6}$	۳
۱/۲۵	دبیرستانی ۲۵۰ دانش‌آموز پایه‌ی اول و ۲۰۰ دانش‌آموز پایه‌ی دوم و ۱۲۵ دانش‌آموز پایه‌ی سوم دارد. اگر بخواهیم تمام کلاس‌های مدرسه، جمعیت یکسان داشته باشند، حداقل چند کلاس لازم است؟	۴
۱/۵	نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. a ، b و c را به دست آورید. 	۵
۱/۲۵	معادله‌ی مقابل را حل کنید. $\sqrt{2 + \sqrt{x - 3}} = \sqrt{5 - x}$	۶
۱/۵	نامعادله‌ی مقابل را به روش هندسی حل کنید. $ 4 - x^2 \leq x + 2 $	۷
۱	اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $y = 1 - f(2x)$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید. 	۸
۱/۵	اگر $f = \{(2, 1), (-1, 3), (1, 2), (-2, 2), (4, 0)\}$ و $g = \{(-1, 5), (4, -2), (-2, 1), (3, -1), (0, 4)\}$ باشند، الف) $2 + 3f$ را تشکیل دهید. ب) برد $f \circ g$ را مشخص کنید.	۹
۱/۷۵	اگر $f(x) = \sqrt{x - 2}$ و $g(x) = \frac{x - 1}{x}$ باشند، دامنه و ضابطه‌ی $f \circ g$ را به دست آورید.	۱۰
۱/۵	زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \log\left(\frac{x + 2}{2 - x}\right)$ را بررسی کنید.	۱۱
۱/۵	تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ ؛ $x \in (1, +\infty)$ مفروض است. نشان دهید f در بازه‌ی داده شده معکوس پذیر است، سپس ضابطه‌ی وارون آن را بنویسید.	۱۲
۱/۵	تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص نمایید. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & ; x \leq 1 \\ 2x + 1 - x & ; 1 < x < 2 \\ -2 & ; x \geq 2 \end{cases}$	۱۳
۱/۲۵	اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 5x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ را بیابید.	۱۴
۲۰	جمع نمره	