ثروتی ، عباس ، ۱۳۶۱ –

ترکیبیات (آنالیز ترکیبی)/ مولفان : عباس ثروتی ، سعید نعمتی .

-تهران : خوشخوان ، ۱۳۸۳ . ۲۰۸ ص .: مصور ، جدول .

ISBN 964-8601-36-4

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا

۱.آنالیز ترکیبی . ۲ . آنالیزترکیبی -- مسائل ، تمرین ها و غیره . الف . نعمتی سعید ۱۳۶۰ . ب . عنوان

QA / ۱۶۴ / ۴ت۴ث۳ ۵۱۱/۶

کتابخانه ملی ایران ۸۳/۳۸۹۰۶م

ترکیبیات

(آنالیز ترکیبی)

انتشارات خوشخوان

ناشر : انتشارات خوشخوان

مولفان : عباس ثروتی ، سعید نعمتی

حروفچین: خانم پور حسین

چاپ ششم : پاییز ۱۳۹۱

تیراژ : ۲۵۰۰

قیمت : **۵۶۰۰ تومان**

چاپ : دانش پژوه

شابک : ۴-۳۶-۸۶۰۱-۹۶۴ ISBN 964-8601-36-4

آدرس : تهران – خیابان انقلاب – خیابان فخررازی – کوچه انوری – پلاک ۱۹

تلفن : ۶۶۴۹۴۰۲۰ – ۰۲۱

پیش گفتار ناشر

مسابقه‌ها ،کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش آموزان ایفا می کنند و باید به جرات ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقات جهان را تا حد زیادی افزایش دهند .

کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند . لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی خلا موجود مخصوصا برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود . در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق‌تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آن در زمانی نه چندان دور مدال آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده اند ، که کتاب‌هایی را تالیف و به دانش‌آموران ارائه می نماید . امید است مورد پسند و استفاده‌ی دانش‌آموزان این مرز و بوم قرار گیرد .

رسول حاجی‌زاده

مدیریت انتشارات خوشخوان

مقدمهٔ مؤلفین

علم به سرعت در جادهٔ پیشرفت و ترقی در حال حرکت است. در هر لحظه گره‌ای جدید بر فرش بیکران آن زده می‌شود و هر روز تلاشی بیش از پیش برای مطالعه و کنکاش در هر گرهٔ آن نیاز است. برای زدن گره‌ای جدید خواندن گره‌های دیگر آن ضروری است، چرا که بشر نقشه‌ای برای بافت این فرش ندارد و باید بدون نقشه آن را کامل کند. زبان خواندن این بی‌منتها گره نیز چیزی نیست جز ریاضیات.

سابقهٔ تاریخی مسابقات ریاضی به سال ۱۸۹۴ میلادی برمی‌گردد که مسابقات ریاضی دانش‌آموزی در کشور مجارستان آغاز شد و پس از آن رفته‌رفته، کشورهای دیگر به منظور تشویق و ترغیب دانش‌آموزان به فراگیری ریاضیات به برگزاری مسابقات ریاضی دست زدند تا اینکه در سال ۱۹۵۹ میلادی کشور رومانی به ابتکار برگزاری اولین المپیاد بین‌المللی ریاضی دست زد. در اولین المپیاد فقط ۶ کشور حضور داشتند، ولی به مرور کشورهای بیشتری به المپیاد پیوستند به طوری که در حال حاضر بیش از ۸۵ کشور با تیمهایی متشکل از ۶ دانش‌آموز دبیرستانی در المپیاد شرکت می‌کنند و المپیاد بین‌المللی ریاضی معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است. کشور ما هم از جملهٔ کشورهایی است که در این زمینه سرمایه‌گزاری کرده و به آن بها می‌دهد. به طوری که یکی از مهمترین شاخصهای نخبه‌شناسی در ایران، برگزیدگی در آزمونهای مختلف المپیادهای علمی است. موفقیت در آزمونهای المپیاد نیاز به مطالعه و تمرین فراوان دارد و علاوه بر تسلط روی مطالب کتب درسی، خواندن کتب مرتبط غیر درسی نیز ضروری است.

کتابی که پیش‌رو دارید، اولین جلد از مجموعه کتابهای ترکیبیات می‌باشد. ترکیبیات شاخه‌ای از ریاضیات است که شامل مباحثی چون آنالیز ترکیبی، اصل لانه کبوتری، اصل ناوردایی، استقراء ریاضی، روابط بازگشتی، نظریهٔ گرافها، نظریهٔ مجموعه‌ها و ... می‌باشد. این شاخه از ریاضیات کاربردهای فراوانی در سایر علوم دارد و به جرأت می‌توان گفت ترکیبیات پرکاربردترین شاخه از ریاضیات در میان سایر شاخه‌ها و مباحث آن است.

در این کتاب سعی شده است تا همهٔ موضوعات مطرح در آنالیز ترکیبی به‌صورت ساده و روان ارائه شود. ویژگی اصلی این کتاب دارا بودن مسائل طبقه‌بندی شده در هر موضوع به همراه پاسخ تشریحی آن می‌باشد. در انتهای هر بخش از کتاب، تمریناتی برای سنجش یادگیری خواننده آمده است. این تمرینات شامل دو بخش می‌باشند. بخش (الف) مسائل آسان و بخش (ب) مسائل مشکل‌تر را در بر می‌گیرد. لازم به ذکر است که برخی از تمرینات ارائه شده برای تکمیل بحث ارائه شده می‌باشد و لذا حل دقیق همهٔ مسائل را توصیه می‌کنیم. ضمناً در انتهای فصل اول، مسائل متنوعی از آنالیز ترکیبی جمع‌آوری شده است که اکثراً مسائل مطرح شده در المپیادهای ریاضی و

۱-۱ اصول اولیه شمارش

همانطور که برای بنای یک ساختمان ابتدا نیاز به پی‌ریزی محل است، معماری همه علوم هم براساس یک سری پی‌ها و زیربناها می‌باشد. از این پی‌ها به عنوان اصل یاد می‌شود یعنی مفهومی که نیاز به اثبات ندارد و بدیهی می‌باشد. نمونه این اصول بخصوص در ریاضیات به وفور یافت می‌شوند مانند رابطه مساحت مستطیل یا اصل خوشترتیبی در تئوری اعداد و غیره. اما شاید اصول مطرح در علم ترکیبیات بسیار پرکاربردتر از اصول دیگر باشد. در این بخش ۴ اصل بنیادی این علم را معرفی می‌کنیم. البته اصول دیگری هم وجود دارند که در ادامه معرفی خواهند شد. مثالهای ساده زیر را در نظر بگیرید:

- فرض کنید شما تشنه هستید و به یک بقالی می‌روید تا یک نوشیدنی بنوشید. این بقالی ۴ نوع آبمیوه، ۳ نوع نوشابه و ۱ نوع دوغ دارد. شما به چند طریق می‌توانید با صرف یک نوشیدنی عطشتان را رفع کنید؟

  اقلام مذکور را به‌صورت زیر فهرست می‌کنیم:

آبمیوه ۱	نوشابه ۱	دوغ
آبمیوه ۲	نوشابه ۲	
آبمیوه ۳	نوشابه ۳	
آبمیوه ۴		

  با استفاده از هر یک از ۸ نوشیدنی بالا می‌توان تشنگی را رفع کرد پس پاسخ این سؤال ۸ یا همان ۴ + ۳ + ۱ است. □

- حال فرض کنید شما علاوه بر اینکه تشنه هستید، گرسنه هم می‌باشید و می‌خواهید یک نوشابه با یک کیک یا یک کلوچه بخورید. این کار را به چند طریق می‌توانید انجام دهید؟

  حالتهای ممکن را به‌صورت زیر فهرست می‌کنیم:

نوشابه ۱ و کیک	نوشابه ۲ و کیک	نوشابه ۳ و کیک
نوشابه ۱ و کلوچه	نوشابه ۲ و کلوچه	نوشابه ۳ و کلوچه

  هر یک از ۶ حالت فوق هدف شما را برآورده می‌سازند لذا پاسخ این سؤال ۶ یا همان ۳ × ۲ است. □

■ **اصل جمع:** اگر برای انجام کار A مجبور به انجام یکی از کارهای $A_۱$، $A_۲$، . . . و A_r باشیم به طوری که هیچ دوکاری اشتراک نداشته باشند (یعنی نتوان آن دو را با هم انجام داد)

و کار A_1 به n_1 طریق، کار A_2 به n_2 طریق، ... و کار A_r به n_r طریق قابل انجام باشند آنگاه کار A به $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ طریق قابل انجام است.

مثال ۱-۱-۱: برای رفتن از شهر x به شهر y، ۳ راه زمینی، ۱ راه دریایی و ۱ راه هوایی وجود دارد به چند طریق می‌توان از شهر x به شهر y رفت؟

حل: (هدف) کار A: رفتن از x به y

کار A_1: رفتن از x به y از طریق زمین $\quad n_1 = 3$

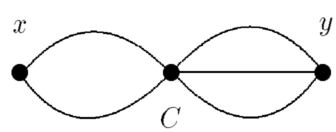
کار A_2: رفتن از x به y از طریق دریا $\quad n_2 = 1$

کار A_3: رفتن از x به y از طریق هوا $\quad n_3 = 1$

هرکدام از کارهای A_1، A_2 و A_3 به تنهایی هدف مساله که رفتن از x به y است را برآورده می‌کنند لذا از اصل جمع استفاده می‌کنیم: $? = n_1 + n_2 + n_3 = 5$ $\square$

■ **اصل ضرب:** اگر برای انجام کار A، انجام همه کارهای A_1، A_2، ... و A_r به ترتیب و پشت سر هم لازم باشد به طوری که کار A_1 به n_1 طریق، کار A_2 به n_2 طریق، ... وکار A_r به n_r طریق قابل انجام باشد آنگاه کار A به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$ طریق قابل انجام است.

مثال ۱-۱-۲: برای رفتن از شهر x به شهر y باید مطابق شکل از شهر C عبور کرد. به چند طریق می‌توان از x به y رفت؟



حل: (هدف) کار A: رفتن از x به y

کار A_1: رفتن از x به C $\quad n_1 = 2$

کار A_2: رفتن از C به y $\quad n_2 = 3$

هر یک ازکارهای A_1 و A_2 به تنهایی هدف مسأله را برآورده نمی‌کنند اما اگر این دوکار را پشت سر هم انجام دهیم چنین خواهد شد. لذا از اصل ضرب استفاده می‌کنیم: $? = n_1 \times n_2 = 6$ $\square$

تفصیلی که در راه حلهای مثالهای اخیر آمده است صرفاً برای توضیح مناسب اصول ضرب و جمع می‌باشد. لذا از این پس راه حلها موجزتر ارائه می‌شوند.

همانطور که ملاحظه کردید مفاهیمی که دو اصل مذکور بدان اشاره دارند، بسیار ساده است. مهم، استفاده از این اصول در حل مسائل است. در ادامه مثالهای متنوعی آورده شده است تا کاربردهای مختلف این اصول در حل مسائل نشان داده شود.

اما مجدداً به بحث انتخاب جایگاه اول برمی‌گردیم و مثال بیشتر دربارهٔ اصل متمم را به مسائل و تمارین آتی موکول می‌کنیم.

مثال ۱-۱-۸: یک ساختمان ۱۰ طبقه و چهار رنگ مختلف داریم. به چند طریق می‌توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۴ رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو طبقه مجاوری همرنگ نباشند؟

حل: طبقه اول ساختمان با هر یک از ۴ رنگ، قابل رنگ‌آمیزی است. اما پس از آن اگر به ترتیب در مورد رنگ طبقات بحث کنیم، رنگ هر طبقه نباید با رنگ طبقه قبلی یکی باشد لذا با ۳ رنگ قابل رنگ آمیزی است و در نتیجه: $? = ۴ \times ۳^{۹}$

بدیهی است این استدلال را از هر طبقه دیگری (غیر از طبقه اول) نیز می‌توان شروع و به ترتیب رنگ آمیزی کرد. □

مثال ۱-۱-۹: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد ۶ رقمی مضرب ۵ بین ۲۰۰۰۰۰ و ۴۰۰۰۰۰ با ارقام غیر تکراری می‌توان ساخت؟

حل: در اینجا دو جایگاه حائز اهمیت هستند (جایگاه سمت راست و جایگاه سمت چپ). لذا استدلال را باید از این دو جایگاه آغاز کنیم که هر کدام مستقل از دیگری به ۲ حالت می‌توانند تعیین شوند. بقیه جایگاهها هم مانند مثالهای قبل تعیین می‌شوند.

$$\underset{(۲,۳)}{\underline{۲}}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underset{(۰,۵)}{\underline{۲}}$$

$$? = ۲ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۹۶$$

دقت کنید که در اینجا دو جایگاهی که حائز اهمیت هستند با ارقامی متفاوت پر می‌شوند و لذا به تناقضی برنمی‌خوریم؛ اما مثال بعد اینگونه نیست. □

مثال ۱-۱-۱۰: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد ۶ رقمی مضرب ۵ با ارقام غیر تکراری می‌توان ساخت؟

حل: در اینجا هم دو جایگاه دارای شرایط خاص داریم. یکی جایگاه سمت راست که باید ۰ یا ۵ باشد و دیگری جایگاه سمت چپ که صفر نباید باشد. اگر استدلال را مشابه قبل آغاز کنیم برای جایگاه سمت راست ۲ حالت داریم اما تعداد حالت‌های جایگاه سمت چپ را نمی‌توانیم

تعیین کنیم. زیرا اگر در جایگاه سمت راست ۰ قرار گیرد در جایگاه سمت چپ ۵ انتخاب داریم و اگر در جایگاه سمت راست ۵ قرار گیرد در جایگاه سمت چپ ۴ انتخاب داریم. همین امر ما را بر آن می‌دارد تا مسأله را به دو حالت تقسیم کنیم:

I) رقم یکان صفر باشد

$\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱}$

II) رقم یکان ۵ باشد

$\underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱}$

در هر دو حالت رقم یکان مشخص است پس برای آن یک حالت داریم و بقیه جایگاهها مطابق مثالهای قبلی تعیین می‌شوند؛ فقط در حالت II باید صفر نبودن رقم سمت چپ مد نظر قرار گیرد در حالی که در حالت I به علت استفاده از صفر در یکان، نیاز به این کار نیست. حال توجه کنید که هر یک از دو حالت در نظر گرفته شده با یکدیگر اشتراکی ندارند (شامل عدد یکسانی نمی‌شوند) و هر کدام به تنهایی شرایط مسأله را برآورده می‌کنند. لذا برای بدست آوردن جواب نهایی از اصل جمع استفاده می‌شود:

$$? = (۵\times۴\times۳\times۲\times۱\times۱) + (۴\times۴\times۳\times۲\times۱\times۱) = ۱۲۰ + ۹۶ = ۲۱۶ \qquad \square$$

مثال ۱-۱-۱۱: چند عدد ۷ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد به طوری که:

الف) هیچ شرطی برای آن نداشته باشیم.

ب) فرد باشند.

ج) زوج باشند.

حل:

الف) $\underset{\text{صفر نباید باشد}}{\underline{۹}}\ \underline{۹}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴} \rightarrow ? = ۹\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴$

ب) $\underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{\{۱,۳,۵,۷,۹\}}{\underline{۵}} \rightarrow ? = ۸\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۵$

رقم سمت چپ، صفر و آن رقم که در یکان بکار رفته نمی‌تواند باشد.

ج) $\mathrm{I}: \underline{۹}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{\{۰\}}{\underline{۱}} \qquad \mathrm{II}: \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{\{۲,۴,۶,۸\}}{\underline{۴}}$

$$\begin{aligned} ? &= (۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۱) + (۸\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۴) \\ &= ۴۱\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴ \end{aligned}$$