



کامل ترین مرجع امتحانات نهایی



حسابان

هانی احمدزاده، اکرم فضلی



چند سالی است که اثر چند درصدی (!) معدّل در کنکور سراسری و افزایش هر ساله‌ی آن، دانش‌آموزان را به تلاش بیش‌تر جهت کسب معدّل بالاتر واداشته است. شاید همه با این نظر موافق باشند که بهترین راه آماده شدن برای آزمون‌های نهایی، مرور و بررسی همه‌ی سؤالات مطرح‌شده در سال‌های اخیر است. اما متأسفانه در بازار رنگارنگ کتاب هنوز چنین مرجع کامل و دقیقی که بتوان با اطمینان به آن اتکا کرد نیامده است.

بر این اساس مهر و ماه با تلاشی مضاعف، مجموعه‌ی کامل چهارده جلدی **مرجع نهایی** سال سوم را با ویژگی‌های زیر فراهم کرده است:

۱ تمامی سؤالات طرح‌شده در این مجموعه همگی از آزمون‌های نهایی در دهه‌ی اخیر هستند.

بنابراین با داشتن این مجموعه مطمئن باشید تمامی سؤالات طرح‌شده در آزمون‌های نهایی را خواهید داشت.

۲ سؤالات به صورت موضوعی منطبق بر عناوین کتاب درسی یا عناوین آزمون‌ها دسته‌بندی شده‌اند. مثلاً در درس ادبیات و دین و زندگی سؤالات به صورت خط به خط کتاب درسی چیده شده‌اند و در درسی مثل زبان فارسی قالب کتاب همان قالب آزمون است. در درسی مثل عربی یک سری سؤالات درس به درس و یک‌سری (مطابق با آزمون) ترکیبی چیده شده‌اند. در پایان هر کتاب هم چند دوره از امتحانات به صورت کامل همراه با بارم‌بندی آمده است تا با ساختار کلی و چیدمان امتحان آشنا شوید و بتوانید در آموخته‌های خود را بسنجید.

بنابراین برای مرور مطالب در هر درس با روشی متفاوت و اصولی نسبت به بقیه‌ی دروس مواجه می‌شوید که تسلط شما را بر مفاهیم کتاب و آزمون در زمان کم بالا ببرد.

۳ تمامی سؤالات به صورت مختصر و مفید پاسخ داده شده‌اند.

بنابراین فرصت دارید درستی معلومات خود را به بهترین وجه محک بزنید.

۴ این مجموعه صرفاً سؤال و پاسخ نیست در جای جای آن (بسته به ضرورت و نه زیاده‌گویی!) مشاوره‌های تخصصی آن درس آمده است تا خود را در متن کار تنها نبینید. در ابتدای کتاب هم توصیه‌های کلی مشاوره‌ای، نحوه‌ی بارم‌بندی و ... آمده که توصیه می‌کنیم حتماً آن را مطالعه کنید.

پس این مشاوره‌ها را جدی بگیرید و ایده‌های طرح‌شده را عملی کنید تا با آرامش و اطمینان در جلسه اطمینان شرکت کنید.

۵ چون این مجموعه به صورت موضوعی آماده شده است، در ضمن تدریس معلّم در طی سال نیز بسیار کارآمد خواهد بود، البته همان طور که گفته شد برای آمادگی قطعی و آشنایی همه‌جانبه‌ی شما عزیزان، در انتهای کتاب چند آزمون به همراه کلید تصحیح آورده‌ایم.

بنابراین با نحوه‌ی نمره‌دهی و تصحیح اوراق نیز آشنا می‌شوید.

در پایان، امیدوارم این مجموعه‌ی ارزشمند، گامی در جهت کاهش دغدغه‌های آموزشی شما عزیزان باشد.



مقدمه‌ی مؤلف

بعد از آزمون کنکور سراسری، امتحان‌های نهایی بزرگ‌ترین و مهم‌ترین آزمون را برای دانش‌آموزان تشکیل می‌دهند. به خصوص که در سال‌های اخیر درصدی از معدل کتبی آزمون‌های نهایی در نتیجه کنکور سراسری تأثیر داده شده است. به این ترتیب سعی و تلاش دانش‌آموزان در کسب نتیجه هر چه مطلوب‌تر در این آزمون‌هاست. از طرفی در بین تمام درس‌های رشته ریاضی فیزیک سال سوم دبیرستان، حسابان مهم‌ترین و مشکل‌ترین درس به شمار می‌آید که از قضا بیشترین واحد درسی را نیز به خود اختصاص داده است. به این ترتیب این سوال برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود که چگونه می‌توان در کنار یادگیری کامل و اساسی این درس پایه‌ای، بهترین نتیجه را در آزمون نهایی به دست آورد؟ پس از سال‌ها تجربه، بیشتر دبیران و دانش‌آموزان به این نتیجه رسیده‌اند که بررسی و تحلیل سوالات سال‌های گذشته بهترین و مطمئن‌ترین راه برای آمادگی در امتحان‌های نهایی است.

در سال تحصیلی ۹۰ - ۸۹ کتاب درسی حسابان تغییرات اساسی یافته است. به این ترتیب تنها ۷ دوره آزمون نهایی از کتاب جدید به عمل آمده. واضح است که تحلیل و بررسی تنها این هفت دوره آزمون، برای یادگیری مطالب متنوع درس حسابان و حتی برای آمادگی در امتحان نهایی کافی نیست. اما با بررسی این ۷ دوره آزمون می‌توان رویکرد طراحان را به راحتی تشخیص داد. طراحان سوالات امتحان نهایی درس حسابان مانند سال‌های قبل، تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی را به عنوان مرجع انتخاب سوال خود قرار داده‌اند. به گونه‌ای که به جرات می‌توان گفت تاکنون سوالاتی خارج از چارچوب تمرینات و مثال‌های کتاب درسی در این ۷ دوره آزمون مطرح نشده. به این ترتیب مجموعه تمرینات کتاب درسی در کنار آزمون‌های دوسال اخیر و سوالات گزینش شده از آزمون‌های سال‌های قبل‌تر، مجموعه‌ای کامل از سوالات برای آمادگی در امتحان نهایی و یادگیری مطالب درس حسابان را تشکیل می‌دهد.

کتابی که پیش روی شماست، به عنوان کامل‌ترین مرجع آمادگی در امتحان نهایی درس حسابان دارای ویژگی‌های زیر است:

- ۱ شامل تمامی سوالات آزمون‌های نهایی درس حسابان سال‌های ۸۲ تا ۸۸ که مرتبط با کتاب درسی جدید بوده‌اند.
- ۲ شامل تمامی سوالات آزمون‌های نهایی درس حسابان سال‌های ۸۹ تا ۹۱.
- ۳ شامل تمامی تمرینات و مثال‌های متن کتاب درسی که قابلیت مطرح شدن در آزمون نهایی را دارند.
- ۴ طبقه بندی موضوعی سوالات در قالب ایستگاه‌های آموزشی، مطابق با طبقه‌بندی کتاب درسی.
- ۵ شامل درسنامه‌های کامل و در عین حال مختصر از مطالب مورد نیاز برای آمادگی در آزمون ۱۴۰۶ نهایی.
- ۶ حل ساده، شیوا، روان و در عین حال کامل سوالات به گونه‌ای که دانش‌آموز با ارائه آن‌ها در آزمون نهایی، نمره‌ای را از دست ندهد.

۷ همسو بودن حل سوالات و آموزه‌های این کتاب با نحوه بیان و رویکرد کتاب درسی حسابان.

۸ ارائه یک بخش مشاوره در ابتدای هر فصل که شامل میزان اهمیت ایستگاه‌های آن در آزمون‌های نهایی و به علاوه میزان اهمیت کل فصل در کنکور سراسری می‌باشد. جدول ارائه شده به طور کامل به دانش‌آموز این امکان را می‌دهد که برای جمع‌آوری نمره مطلوب خود در آزمون نهایی، برنامه‌ریزی مناسب را انجام دهد. به علاوه پیشنهاد ما برای سه تیپ کلی دانش‌آموزان شامل ناپلثونی‌ها (دانش‌آموزان کم حوصله و کم کار)، متوسط‌ها (دانش‌آموزان معمولی از لحاظ تحصیلی) و تراکتور‌ها (دانش‌آموزان قوی از لحاظ تحصیلی) صراحتاً مطرح شده.

ذکر این مطلب ضروریست که میزان تقسیم نمره در ۵ فصل کتاب درسی، در آزمون نهایی به ترتیب برابر ۴ و ۴ و ۳ و ۴ و ۵ می‌باشد. ضمن سپاسگذاری از اعتماد شما، امیدواریم که تلاش‌ها و وسواس ما در تهیه ی این کتاب، نه تنها تأثیر مثبتی در نتیجه‌ی آزمون نهاییتان داشته باشد بلکه در یادگیری مطالب درس حسابان نیز شما را یاری رساند.

در پایان از جناب آقای نصیری، مدیر پروژه‌ی مجموعه کتاب‌های مرجع نهایی برای همفکری در تهیه این کتاب، سرکار خانم سمیه طاهرخانی صفحه‌آرایی و سرکار خانم سمانه ملا حروف‌چینی کتاب و جناب آقای احمد اختیاری مدیریت محترم انتشارات مهر و ماه بسیار سپاسگزاریم.

هانی احمدزاده

اکرم فضلی

فهرست

محاسبات جبری معادلات و نامعادلات

فصل اول

۷ سؤالات امتحانی ?

۱۶ پاسخ نامه‌ی تشریحی ✓

فصل دوم

تابع

۴۳ سؤالات امتحانی ?

۵۱ پاسخ نامه‌ی تشریحی ✓

مثلثات

فصل سوم

۷۳ سؤالات امتحانی ?

۷۸ پاسخ نامه‌ی تشریحی ✓

فصل چهارم

حد و پیوستگی

۹۳ سؤالات امتحانی ?

۱۰۰ پاسخ نامه‌ی تشریحی ✓

مشتق توابع

فصل پنجم

۱۱۹ سؤالات امتحانی ?

۱۲۶ پاسخ نامه‌ی تشریحی ✓

پیوست‌ها

۱۴۷ آزمون‌های نهایی

۱۵۲ پاسخ نامه‌ی تشریحی آزمون‌های نهایی

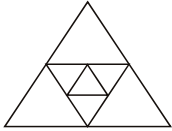


فصل اول

سوالات امتحانی

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

1. در دنباله‌ی حسابی ... , 11 , 8 , 5 حداقل چند جمله‌ی آن را باید جمع کنیم تا حاصل از 500 بیشتر شود؟ (مسائل صفحه‌ی 5 کتاب درسی)
 2. علی می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او روز اول 1000 تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز 0/9 پول واریزی در روز قبل را در صندوق قرار دهد، پس از 50 روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او، هیچ‌گاه از 10000 تومان بیشتر نخواهد شد؟ (مسائل صفحه‌ی 5 کتاب درسی)
 3. برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو، لایه‌هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش 99 درصد کاهش یابد؟ (مسائل صفحه‌ی 5 کتاب درسی)
 4. یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن‌ها را به هم وصل کنید و مثلث کوچک‌تر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچک‌تر انجام دهید. این عملیات را به طور متوالی ادامه دهید. مجموع محیط مثلث‌های به دست آمده (با احتساب مثلث اولیه) چقدر است؟ مجموع مساحت مثلث‌های به دست آمده چقدر است؟
- 

(مسائل صفحه‌ی 5 کتاب درسی)
5. قطار سریع‌السیری به‌طور آزمایشی، فاصله‌ی دو شهر را بار اول در 4 ساعت طی کرده است، طبق برنامه‌ی تعیین شده، در هر رفت یا برگشت 5 دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود، تا مدت زمان این مسافت به 2 ساعت پیش‌بینی شده برسد، تعداد نوبت‌های آزمایشی کدام است؟ (سراسری انسانی 86)
 6. در یک دنباله‌ی هندسی مجموع هشت جمله‌ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله‌ی اول آن است، جمله‌ی هفتم چند برابر جمله‌ی اول است؟ (سراسری ریاضی 85)
 7. مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی ... و 10 و 6 و 2 برابر جمله‌ی سیزدهم است؟ (آزاد تهرانی 85)
 8. حد مجموع یک دنباله‌ی هندسی بی‌پایان که قدرنسبت آن $0/1$ بوده، برابر 1 شده است؛ هرگاه با استفاده از جمله‌ی اول و قدرنسبت این دنباله، یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود؛ مجموع سه جمله‌ی نخست آن را بیابید. (آزاد انسانی 85)
 9. حاصل مجموع $x^{12} + \dots + x^2 + x + 1$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی 87)
 10. دستمزد روزانه‌ی یک کارگر مبتدی 1200 تومان می‌باشد و در پایان هر هفته 10 درصد به دستمزد وی اضافه می‌شود. در هفته‌ی چهارم دستمزد روزانه‌ی وی چقدر است؟ (آزمایشی سنجش انسانی 88)
 11. تویی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع 5 متری برسد، می‌خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می‌کند؟ (فرداد 90)
 12. در دنباله‌ی حسابی ... , 14, 10, 6, 2 حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از 200 بیشتر شود؟ (فرداد 90)
 13. در دنباله‌ی هندسی نامتناهی زیر، مجموع تمام جملات را بیابید.
- $$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$
- (دی 91)
14. مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را بیابید:
- $$-5, -3, -1, \dots$$

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

15. $P(x)$ یک چند جمله‌ای درجه 2 است و ضریب بزرگ‌ترین توان آن 1 است. در هر یک از حالت‌های زیر $P(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط مورد نظر صدق کند.
- (الف) $P(1) = 0$, $P(2) = 0$ (ب) $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ (ج) $P(1) = -1$, $P(-1) = 2$
16. مقدار m را چنان بیابید که چند جمله‌ای $P(x) = x^3 - mx^2 - x + 4$ بر $2x + 1$ بخش‌پذیر باشد. (مسائل صفحه‌ی 10 کتاب درسی)

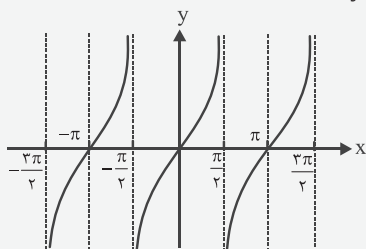


17. در چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ ، a ، b را طوری بیابید که باقیمانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر 4 بوده و بر $x+2$ بخش پذیر باشد.
(مسائل صفحه‌ی 10 کتاب درسی)
18. m ، n را چنان بیابید که چند جمله‌ای $x^4 - 3x^3 + mx + n$ بر $x^2 - 5x + 6$ بخش پذیر باشد.
(مسائل صفحه‌ی 10 کتاب درسی)
19. نشان دهید عبارت $x-2$ یک فاکتور (عامل) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ است، سپس معادله‌ی $f(x) = 0$ را حل کنید.
(مسائل صفحه‌ی 10 کتاب درسی و دی 90)
20. a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ برابر 2 باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را به دست آورید.
(مسائل صفحه‌ی 10 کتاب درسی و دی 90)
21. a و b را چنان بیابید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + 2bx - 3$ بر $x-3$ بخش پذیر بوده و باقیمانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر 4- باشد.
(فرداد 81)
22. m را چنان بیابید که چند جمله‌ای $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + mx - 3$ بر $2x+1$ بخش پذیر باشد.
(شهریور 81)
23. باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x+1$ و $x-1$ به ترتیب 3 و 1 می‌باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ را بر $x^2 - 1$ به دست آورید.
(شهریور 82)
24. اگر $2x^3 + 3x^2 - 2mx + n$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد، نشان دهید $4 = n + 4m$.
(دی 82)
25. در صورتی که دو چند جمله‌ای $x^2 + 3x - 2$ و $x^3 - 4x^2 + 5x + a$ در تقسیم بر $x+2$ هم باقیمانده باشند، مقدار a را تعیین کنید.
(فرداد 83)
26. مقدار k را طوری پیدا کنید که باقیمانده‌ی تقسیم $p(x) = x^3 - 2kx - 3$ بر $x-2$ مساوی یک باشد.
(شهریور 84)
27. نشان دهید $2x-5$ یک فاکتور $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ می‌باشد، سپس فاکتورهای دیگر $f(x)$ را تعیین کنید.
(دی 84)
28. اگر باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب برابر 1 و 4 باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 2$ را حساب کنید.
(فرداد 85)
29. اگر $2x^3 - 3x^2 + ax - b$ بر $x-2$ بخش پذیر باشد، نشان دهید: $2a + 4 = b$.
(فرداد 86)
30. مقدار k را چنان بیابید که چند جمله‌ای $5x^2 - 5x + k - 7$ بر $x-2$ بخش پذیر باشد.
(شهریور 86)
31. در صورتی که دو چند جمله‌ای $2x^2 - 5x + 4$ و $x^2 + ax$ در تقسیم بر $x-1$ هم باقیمانده باشند، مقدار عددی a را مشخص کنید.
(دی 86)
32. اگر باقیمانده‌ی تقسیم تابع چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x+2$ و $x-3$ به ترتیب 1 و 2 باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x - 6$ را حساب کنید.
(دی 87)
33. مقدار k را طوری تعیین کنید که عبارت $8x^3 + 4x^2 - kx - 8$ بر $2x-1$ بخش پذیر باشد.
(فرداد 88)
34. هرگاه باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x+3$ و $x-2$ به ترتیب 2 و 7 باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + x - 6$ را به دست آورید.
(دی 88)
35. اگر باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر x مساوی 2 و بر $x+2$ مساوی 1 باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + 2x$ را به دست آورید.
(شهریور 89)
36. مقادیر m ، n را چنان به دست آورید که چند جمله‌ای $x^2 + mx + n$ بر $(x-2)$ و $(x+1)$ بخش پذیر باشد.
(دی 89)
37. مقدار k را چنان بیابید که چند جمله‌ای $p(x) = 2x^3 - kx^2 - x + 3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد.
(فرداد 90)
38. مقدار m را چنان بیابید که چند جمله‌ای $P(x) = 3x^3 - 2x + 2m$ بر $x-2$ بخش پذیر باشد.
(شهریور 91)

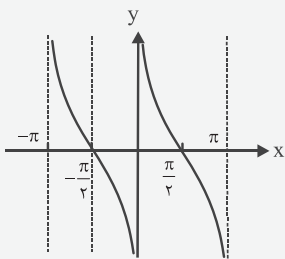
بسط دو جمله‌ای و مروری بر اتحادهای جبری

39. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:
(الف) $(1-x)^7$ (ب) $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^6$ (ج) $(2x-3y)^4$
(مسائل صفحه‌ی 10 کتاب درسی)
40. عبارات زیر را تجزیه کنید.
 $A = x^9 - x^3y^3$ ، $B = (a^6 + 1)^2 - (a^6 - 1)^2$
(مسائل صفحه‌ی 10 کتاب درسی)

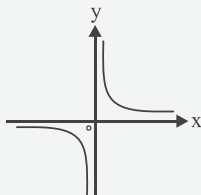
$$y = \tan x \quad 7.$$



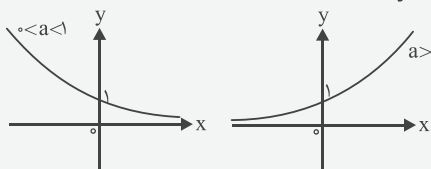
$$y = \cot x \quad 8.$$



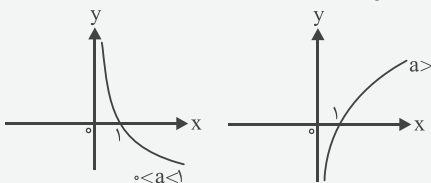
$$y = \frac{1}{x} \quad 9.$$



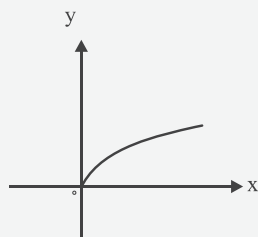
$$y = a^x \quad 10.$$



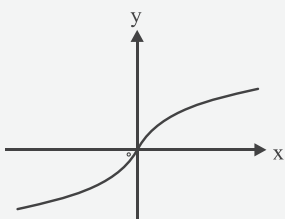
$$y = \log x \quad 11.$$



$$y = \sqrt{x} \quad 12.$$



$$y = \sqrt[3]{x} \quad 13.$$



ایستگاه 12

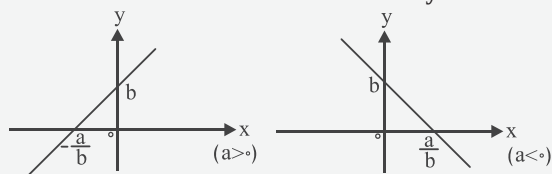
حل معادلات و نامعادلات به روش هندسی

روشی که اینجا داریم بررسی می‌کنیم درسته که زیاد دقیق نیست، ولی بهمون کمک می‌کنه که بفهمیم، معادلمون چند تا جواب داره.

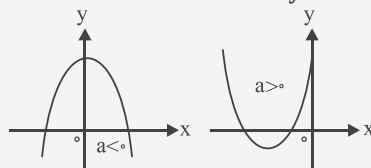
بعضی وقتا حل معادله با این روش راحت‌تر از اینکه به خوایم به شکل مستقیم معادله رو حل کنیم، فقط کافیه اونو به صورت $P(x) = Q(x)$ بنویسیم. که تو این حالت نمودارای $P(x)$ ، $Q(x)$ رو می‌دونیم چه شکلیه. جاهایی که $P(x)$ ، $Q(x)$ همدیگه رو قطع می‌کنن جوابای معادله‌ی اولیمونه.

اینجا چند تا نمودار و براتون معرفی می‌کنم که بیشتر وقتا سروکله شون پیدا میشه:

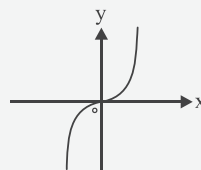
$$y = ax + b \quad 1.$$



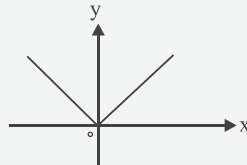
$$y = ax^2 + bx + c \quad 2.$$



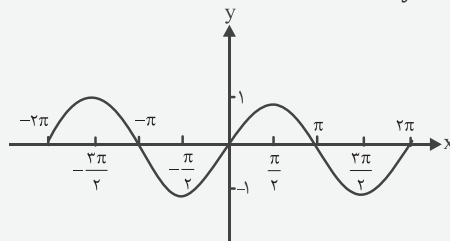
$$y = x^3 \quad 3.$$



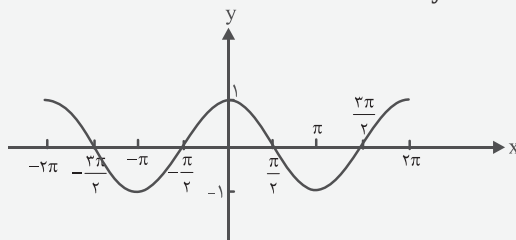
$$y = |x| \quad 4.$$



$$y = \sin x \quad 5.$$



$$y = \cos x \quad 6.$$



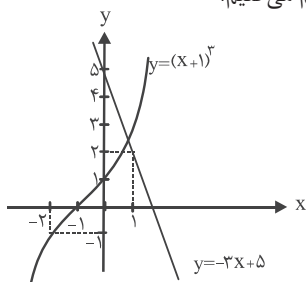


همان‌طور که مشخص است $x=2$ یک جواب معادله و جواب دیگر در بازه‌ی $-1 < x < 0$ قرار دارد و البته $x=4$ نیز جواب معادله می‌باشد که در شکل مشخص نمی‌باشد. به صورت جبری نمی‌توان این معادله را حل کرد.

(د) توجه داریم که: $\sqrt{x} + 2x = x^2 + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 - 2x + 2$

حال نمودار دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2 - 2x + 2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. توجه داریم که $x=1$ یک جواب معادله می‌باشد. این معادله را نمی‌توان به کمک جبری حل کرد.

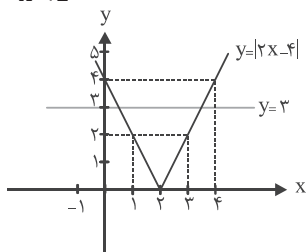
(هـ) دو نمودار $y = (x+1)^3$ و $y = -3x + 5$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشخص است یک جواب معادله در بازه‌ی $0 < x < 1$ واقع است. این معادله را نمی‌توان به روش جبری حل کرد.

141. الف) ابتدا توجه داریم که:

$$y = \begin{cases} 2x - 4 & x \geq 2 \\ -2x + 4 & x < 2 \end{cases}$$

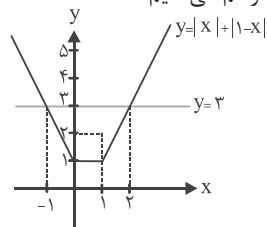


با توجه به شکل $x=0/5$, $x=3/5$ دو جواب معادله می‌باشند.

(ب) به کمک تعیین علامت، عبارت را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

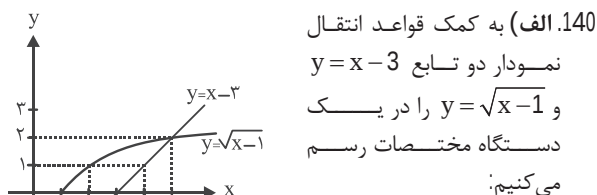
$$y = \begin{cases} -2x + 1 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

حال نمودار آن را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار $x=-1$, $x=2$ دو جواب معادله می‌باشند.

برای حل تقریبی بعضی از نامعادلات اونا رو به شکل $P(x) < Q(x)$ تبدیل می‌کنیم که نمودارهای $P(x)$, $Q(x)$ رو می‌شناسیم. در این صورت x هایی که به ازای اونا نمودار $P(x)$ بالاتر از نمودار $Q(x)$ قرار داره، جواب‌های مسأله‌مون هستن.



140. الف) به کمک قواعد انتقال

نمودار دو تابع $y = x - 3$ و $y = \sqrt{x - 1}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

به نظر می‌رسد که $x=5$ جواب مسأله می‌باشد.

حال به کمک روش جبری جواب مسأله را می‌یابیم:

$$\sqrt{x-1} = x-3 \xrightarrow{x \geq 3} x-1 = (x-3)^2 \Rightarrow$$

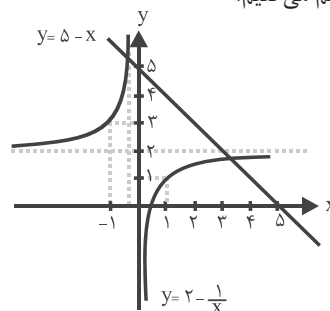
$$x^2 + 9 - 6x = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \geq 3 & i \# i \# \\ x = 2 < 3 & i \# i \# \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

(ب) کمی ساده سازی انجام می‌دهیم:

$$\frac{2x-1}{x} = 5-x \Rightarrow 2 - \frac{1}{x} = 5-x$$

حال نمودار دو تابع $y = 2 - \frac{1}{x}$, $y = 5 - x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



به نظر می‌رسد دو تابع در بازه‌های $-1 < x < 0$, $3 < x < 4$ دارای جواب باشد.

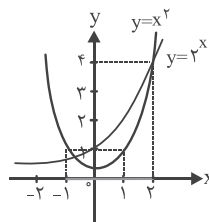
با توجه به دامنه‌ی معادله، $x \neq 0$ پس می‌توانیم، طرفین معادله را در x ضرب کنیم:

$$\frac{2x-1}{x} = 5-x \Rightarrow 2x-1 = 5x-x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 4 = 13$$

$$\boxed{x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}}$$

(ج) نمودار دو تابع $y = 2^x$, $y = x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



سوالات امتحانی

فصل سوم
مثلثات

توابع مثلثاتی

1. نمودار تابع $y = 2\cos x - 1$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید. (فرداد 81)
2. نشان دهید تابع $f(x) = \cot(\frac{x}{2})$ متناوب است. سپس دوره تناوب اصلی آن را پیدا کنید. (فرداد 89)
3. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{[\cos \pi x]}$ را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است)
4. اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f^{-1}(\sin x)$ را بیابید. (سراسری ریاضی 90)

اتحادهای مثلثاتی

5. درستی تساوی زیر را ثابت کنید. (شهریور 82)

$$\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan x \tan 3x$$
6. عبارت زیر را به حاصل ضرب تبدیل کنید: (فرداد 83)

$$A = \cos 2x - \cos 4x + \sin 3x$$
7. درستی رابطه‌ی روبه‌رو را ثابت کنید: (دی 83)

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$$
8. عبارت روبه‌رو را به حاصل جمع تبدیل کنید. (فرداد 84)

$$A = \sin 2x \sin 3x$$
9. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید. ($\alpha \neq 0$) (شهریور 84)

$$\frac{2\sin \alpha \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha - 1$$
10. اگر $\tan 20^\circ = 0.36$ ، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ را بیابید. (سراسری تجربی 84)
11. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید. (فرداد 85)

$$\sin 25^\circ \cos 65^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 50^\circ$$
12. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید. (دی 85)

$$\cos 20^\circ + \cos 140^\circ + \cos 100^\circ = 0$$
13. ساده شده‌ی عبارت $\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$ را به دست آورید. (سراسری ریاضی 85)
14. حاصل عبارت $\cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (سراسری ریاضی 86)
15. عبارت مقابل را به حاصل ضرب تبدیل کنید. (دی 87)

$$A = 2\cos x - 1$$
16. درستی رابطه‌ی مقابل را بررسی کنید.

$$\frac{4\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)}{\sin 5\alpha + \sin \alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha}$$
17. حاصل عبارت $2 + \frac{1}{\cos 20^\circ}$ را بیابید. (سراسری ریاضی 87)
18. درستی رابطه‌ی زیر را بررسی کنید. (فرداد 88)

$$\frac{\sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos 5\alpha - \cos 3\alpha} = \cot 4\alpha$$



(شهریور 88)

19. عبارت $A = \cos^2 5x - \cos^2 x$ را به حاصل ضرب تبدیل کنید.

(دی 88)

20. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\sin 40^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 80^\circ$$

(سراسری ریاضی 88)

21. اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha}$ کدام است.

(سراسری ریاضی 88)

22. دوره تناوب اصلی، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \tan 3x - \cot 3x$ کدام است؟

(سراسری تجربی 88)

23. اگر $\tan \frac{2\pi}{3} \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است.

(شهریور 89)

24. عبارت زیر را به حاصل ضرب تبدیل کنید.

$$A = 2\cos x + \sqrt{3}$$

(دی 89)

25. اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$2\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos 2\alpha$$

(دی 89)

26. درستی اتحاد $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ را ثابت کنید.

(سراسری ریاضی 89)

27. نشان دهید $(\cos 10^\circ - \cos 70^\circ)(\tan 70^\circ - \cot 100^\circ) = 2\cos 20^\circ$

(فرورداد 90)

28. درستی اتحاد $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x + \cos x$ را ثابت کنید.

(شهریور 90)

29. اگر α و β زاویه‌هایی در ربع سوم باشند و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ، مقدار $\sin(\alpha + \beta)$ را محاسبه کنید.

(تمرین در کلاس کتاب درسی صفحه‌ی 114)

30. ثابت کنید برای هر دو زاویه‌ی α و β داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

(تمرین در کلاس کتاب درسی صفحه‌ی 114)

31. ثابت کنید برای هر زاویه‌ی α داریم:

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha \quad (\text{ب}) \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \quad (\text{الف})$$

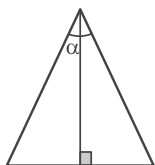
32. اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = \frac{-5}{13}$ ، مقدارهای $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$

(مسائل صفحه‌ی 116 کتاب درسی)

 $\tan(\alpha + \beta)$ را تعیین کنید.33. با استفاده از مثلث متساوی الساقین زیر که طول ساق‌های آن واحد است و زاویه رأس آن α است، با محاسبه مساحت آن از دو طریق نتیجه بگیرید:

$$\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

(مسائل صفحه‌ی 116 کتاب درسی)



(مسائل کتاب درسی صفحه‌ی 116)

34. نمودار $y = 3 - 6\sin^2 x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید. دوره تناوب این تابع چقدر است؟

(مسائل کتاب درسی صفحه‌ی 116)

35. برای یک زاویه‌ی دلخواه α که برای آن $\tan 2\alpha$ تعریف شده است، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

(مسائل کتاب درسی صفحه‌ی 116)

36. اگر α زاویه‌ای در بازه‌ی $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ باشد که $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \frac{\alpha}{2}$ را محاسبه کنید.

(مسائل کتاب درسی صفحه‌ی 117)

37. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$$

(دی 90)

38. نشان دهید برای دو زاویه‌ی α داریم:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

(فرورداد 91)

39. سینوس زاویه‌ی $22/5^\circ$ را حساب کنید.

(شهریور 91)

40. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

(دی 91)

41. فرمول $\sin 2\alpha$ را از فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ به دست آورید.

سوالات امتحانی

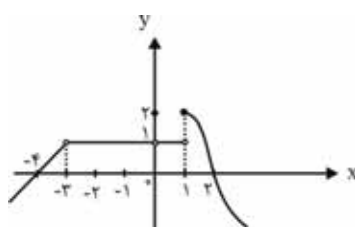
فصل چهارم

حد و پیوستگی توابع



مفهوم حد و مفهوم همسایگی

- مقدار a را چنان بیابید که تابع f با ضابطه $f(x) = a[x] + [x+1]$ در نقطه‌ی $x = -1$ حد داشته باشد. ([] نماد جزء صحیح است.) (شهریور 82)
- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = [x] + [-x]$ مفروض است. حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید. ([] نماد جزء صحیح است.) (دی 84)
- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = a[x] + [x+1]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود باشد. ([] نماد جزء صحیح است.) (شهریور 85)
- با توجه به نمودار تابع f در شکل زیر، حاصل هریک از عبارات زیر را بنویسید. (دی 86)



الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

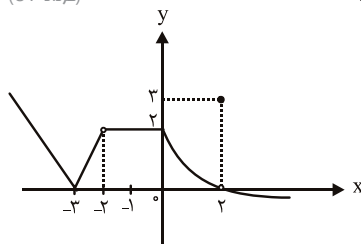
ب) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$

(فرداد 87)

- نمودار تابع f در شکل زیر داده شده است، حاصل هریک از حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(شهریور 84)

- آیا $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{[x-2]}$ وجود دارد؟ چرا؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(فرداد 88)

- آیا $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x^2 - 1}$ وجود دارد؟ چرا؟

- نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی 3 تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد، ولی حد آن غیر از مقدار تابع در 3 باشد. (فرداد 90)

- نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در 2 تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف 2 تعریف شده باشد، و در این نقطه حد داشته باشد. (شهریور 90)

- با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{1-x} + 1$ ، مقدار حد را در اطراف نقطه $a=1$ بررسی کنید. (دی 90)

- نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست 2 تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ 2 تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد. (فرداد 91)

- با رسم نمودار تابع زیر در اطراف نقطه‌ی داده شده، وجود حد و حد راست، حد چپ را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ بررسی کنید: (شهریور 91)

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

- حد تابع $y = \sqrt{2-x}$ را در $x_0 = 2$ در صورت وجود بیابید.

- با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه a داده شده، وجود حد راست و حد چپ و مقدار حد را در آن نقاط بررسی کنید. (تمرین کتاب درسی)

ج) $a=2, y=x-[x]$

$$a=2, y = \begin{cases} x^2+1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ -x^2+9 & x > 2 \end{cases} \quad \text{ب) } a = \frac{1}{2}, y = [x] \quad \text{الف)}$$

هـ) $a=0, y = \frac{x}{|x|}$

د) $a=-3, y=1-\sqrt{1-x}$



(تمرین کتاب درسی)

15. در هر یک از حالت‌های زیر، نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد.
- (الف) تابع در یک همسایگی 2 تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.
- (ب) تابع در 1 تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف 1 تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.
- (ج) تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد.
- (د) تابع در یک همسایگی 1- تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در 1- باشد.
- (هـ) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.
- (و) تابع در یک همسایگی محذوف تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد ولی حد راست نداشته باشد.



قضایای حد توابع

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید:

- | | | | |
|-------------|---|-------------|---|
| (فردا 87) | 23. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{[x]+[-x]}$ | (دی 82) | 16. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{2+[\sin x]}$ |
| (شهریور 87) | 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]+ x }{x+1}$ | (دی 82) | 17. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x}$ |
| (فردا 89) | 25. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x]-3}{x^2-9}$ | (دی 84) | 18. $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{[\sin x]}$ |
| (دی 90) | 26. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x]-3}$ | (فردا 85) | 19. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{[x]-2}$ |
| (دی 90) | 27. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-[x])$ | (دی 85) | 20. $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{5-[x]}{x-6}$ |
| (دی 91) | 28. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(\sqrt{x+1})$ | (فردا 86) | 21. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{1-[x]}$ |
| | | (شهریور 86) | 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{[x]+[-x]}$ |

(تمرین کتاب درسی)

29. ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ معادل آن است که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$ 30. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} [x]-1 & x < -1 \\ x-1 & x > -1 \end{cases}$ مفروض است. حدود زیر را محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

31. تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ مفروض است. حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.
- (الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ (ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ (ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x)$

(فردا 86)

32. آیا $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2-x}$ وجود دارد؟ چرا؟33. اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در اطراف نقطه‌ی a تعریف شده‌اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد، نشان دهید $f+g$ در a حد ندارد.

(تمرین کتاب درسی)

34. دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ‌کدام در صفر حد ندارد ولی $f+g$ در صفر حد دارد.

(تمرین کتاب درسی)

35. دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده‌اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد. با این حال $f.g$ در a حد داشته باشد.

(تمرین کتاب درسی)

محاسبه‌ی حد در توابع کسری

- | | | | |
|-------------|--|-------------|---|
| (شهریور 82) | 39. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}$ | (شهریور 83) | 36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ |
| (فردا 83) | 40. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ | (شهریور 82) | 37. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ |
| (دی 83) | 41. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ | (شهریور 82) | 38. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+9} + \frac{x^2+x}{x}$ |

مجموعه کتاب‌های مرجع نهایی



ویژگی‌های کتاب

- ✓ کامل‌ترین مرجع سؤالات امتحان نهایی
- ✓ همه‌ی سؤالات امتحان نهایی از سال ۸۴ تا سال ۹۲
- ✓ طبقه‌بندی سؤالات براساس عناوین کتاب درسی
- ✓ چیدمان سؤالات براساس ترتیب موضوع و سال
- ✓ پاسخ‌های تشریحی و مختصر و مفید
- ✓ نمونه امتحانات کامل سال‌های اخیر در انتهای کتاب

انتشارات مهرماه
۳-۸۴۰۰۸۴۴۰
www.mehromah.ir
sms: ۳۰۰۰۷۲۱۲۰



9 786005 799736