



کامل ترین مرجع امتحانات نهایی



جبر و احتمال

طاهره نشاط



چند سالی است که اثر چند درصدی (!) معدّل در کنکور سراسری و افزایش هر ساله‌ی آن، دانش‌آموزان را به تلاش بیش‌تر جهت کسب معدّل بالاتر واداشته است. شاید همه با این نظر موافق باشند که بهترین راه آماده شدن برای آزمون‌های نهایی، مرور و بررسی همه‌ی سؤالات مطرح‌شده در سال‌های اخیر است. اما متأسفانه در بازار رنگارنگ کتاب هنوز چنین مرجع کامل و دقیقی که بتوان با اطمینان به آن اتکا کرد نیامده است.

بر این اساس مهر و ماه با تلاشی مضاعف، مجموعه‌ی کامل چهارده جلدی **مرجع نهایی** سال سوم را با ویژگی‌های زیر فراهم کرده است:

۱ تمامی سؤالات طرح‌شده در این مجموعه همگی از آزمون‌های نهایی در دهه‌ی اخیر هستند.

بنابراین با داشتن این مجموعه مطمئن باشید تمامی سؤالات طرح‌شده در آزمون‌های نهایی را خواهید داشت.

۲ سؤالات به صورت موضوعی منطبق بر عناوین کتاب درسی یا عناوین آزمون‌ها دسته‌بندی شده‌اند. مثلاً در درس ادبیات و دین و زندگی سؤالات به صورت خط به خط کتاب درسی چیده شده‌اند و در درسی مثل زبان فارسی قالب کتاب همان قالب آزمون است. در درسی مثل عربی یک سری سؤالات درس به درس و یک‌سری (مطابق با آزمون) ترکیبی چیده شده‌اند. در پایان هر کتاب هم چند دوره از امتحانات به صورت کامل همراه با بارم‌بندی آمده است تا با ساختار کلی و چیدمان امتحان آشنا شوید و بتوانید در آموخته‌های خود را بسنجید.

بنابراین برای مرور مطالب در هر درس با روشی متفاوت و اصولی نسبت به بقیه‌ی دروس مواجه می‌شوید که تسلط شما را بر مفاهیم کتاب و آزمون در زمان کم بالا ببرد.

۳ تمامی سؤالات به صورت مختصر و مفید پاسخ داده شده‌اند.

بنابراین فرصت دارید درستی معلومات خود را به بهترین وجه محک بزنید.

۴ این مجموعه صرفاً سؤال و پاسخ نیست در جای جای آن (بسته به ضرورت و نه زیاده‌گویی!) مشاوره‌های تخصصی آن درس آمده است تا خود را در متن کار تنها نبینید. در ابتدای کتاب هم توصیه‌های کلی مشاوره‌ای، نحوه‌ی بارم‌بندی و ... آمده که توصیه می‌کنیم حتماً آن را مطالعه کنید.

پس این مشاوره‌ها را جدی بگیرید و ایده‌های طرح‌شده را عملی کنید تا با آرامش و اطمینان در جلسه اطمینان شرکت کنید.

۵ چون این مجموعه به صورت موضوعی آماده شده است، در ضمن تدریس معلّم در طی سال نیز بسیار کارآمد خواهد بود، البته همان طور که گفته شد برای آمادگی قطعی و آشنایی همه‌جانبه‌ی شما عزیزان، در انتهای کتاب چند آزمون به همراه کلید تصحیح آورده‌ایم.

بنابراین با نحوه‌ی نمره‌دهی و تصحیح اوراق نیز آشنا می‌شوید.

در پایان، امیدوارم این مجموعه‌ی ارزشمند، گامی در جهت کاهش دغدغه‌های آموزشی شما عزیزان باشد.



مقدمه‌ی مؤلف

بعد از آزمون کنکور سراسری، امتحان‌های نهایی بزرگ‌ترین و مهم‌ترین آزمون را برای دانش‌آموزان تشکیل می‌دهند. به خصوص که در سال‌های اخیر درصدی از معدل کتبی آزمون‌های نهایی در نتیجه کنکور سراسری تاثیر داده شده است. به این ترتیب سعی و تلاش دانش‌آموزان در کسب نتیجه هر چه مطلوب‌تر در این آزمون‌هاست. پس از سال‌ها تجربه، بیشتر دبیران و دانش‌آموزان به این نتیجه رسیده‌اند که بررسی و تحلیل سوالات سال‌های گذشته بهترین و مطمئن‌ترین راه برای آمادگی در امتحان‌های نهایی است.

کتابی که پیش روی شماست، به عنوان کامل‌ترین مرجع آمادگی در امتحان نهایی درس جبر دارای ویژگی‌های زیر است:

- ۱ شامل تمامی سوالات آزمون‌های نهایی درس جبر سال‌های ۸۴ تا ۹۲
 - ۲ شامل تمامی تمرینات و مثال‌های متن کتاب درسی که قابلیت مطرح شدن در آزمون نهایی را دارند.
 - ۳ طبقه بندی موضوعی سوالات در قالب ایستگاه‌های آموزشی، مطابق با طبقه‌بندی کتاب درسی.
 - ۴ شامل درسنامه‌های کامل و در عین حال مختصر از مطالب مورد نیاز برای آمادگی در آزمون نهایی.
 - ۵ حل ساده، شیوا، روان و در عین حال کامل سوالات به گونه‌ای که دانش‌آموز با ارائه آن‌ها در آزمون نهایی، نمره‌ای را از دست ندهد.
 - ۶ همسو بودن حل سوالات و آموزه‌های این کتاب با نحوه بیان و رویکرد کتاب درسی جبر.
- ضمن سپاسگذاری از اعتماد شما، امیدواریم که تلاش‌ها و وسواس ما در تهیه ی این کتاب، نه تنها تاثیر مثبتی در نتیجه‌ی آزمون نهایی‌تان داشته باشد بلکه در یادگیری مطالب درس جبر نیز شما را یاری رساند.
- در پایان از جناب آقای نصیری، مدیر پروژه‌ی مجموعه کتاب‌های مرجع نهایی برای همفکری در تهیه این کتاب، سرکار خانم سمیه طاهرخانی صفحه‌آرایی و سرکار خانم سمانه ملا حروف‌چینی کتاب و جناب آقای احمد اختیاری مدیریت محترم انتشارات مهر و ماه بسیار سپاسگزاریم.

موفق و سربلند باشید

طاهره نشاط

فهرست

استدلال ریاضی

فصل اول

- ۸ سؤالات امتحانی ?
۱۳ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ✓

فصل دوم

مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه

- ۲۸ سؤالات امتحانی ?
۳۴ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ✓

احتمال و پدیده‌های تصادفی

فصل سوم

- ۵۲ سؤالات امتحانی ?
۵۶ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ✓

فصل چهارم

احتمال و اندازه‌گیری شانس

- ۶۴ سؤالات امتحانی ?
۶۹ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ✓

پیوست‌ها

- ۸۴ آزمون‌های نهایی اخیر
۸۹ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی آزمون‌های نهایی اخیر



فصل اول استدلال ریاضی

سوالات امتحانی

استقرای ریاضی

1. با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید: (فرداد 82)
 $8 + 14 + 20 + \dots + (6n + 2) = n(3n + 5) \quad (n \in \mathbb{N})$
2. با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $3^{2n} - 2^n$ بر 7 بخش پذیر است. (شهریور 82)
 $3^{2n} - 2^n = 7r$
3. با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $4^n + 5 = 3r$ بر 3 بخش پذیر است. (شهریور 83)
 $4^n + 5 = 3r$
4. با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید: (دی 83 و شهریور 84)
 $(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (n \in \mathbb{N})$
5. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید: (فرداد 84)
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$
6. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید: (دی 84)
 $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$
7. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید: (فرداد 85 و دی 89)
 $\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n} \quad (n \in \mathbb{N})$
8. برای هر عدد طبیعی n ، با استفاده از استقرای ریاضی درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید. (شهریور 85)
 $(1 + \sqrt{2})^n \geq 1 + \sqrt{2}n$
9. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید: (دی 85)
 $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$
10. برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید، $5^n - 4n - 1$ بر عدد 16 بخش پذیر است. (فرداد 86)
11. برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید: (شهریور 86)
 $3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3(n^2 + n)}{2}$
12. با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: (دی 86)
 $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$
13. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n عدد $p_n = 11^n - 1$ بر عدد 10 بخش پذیر است. (فرداد 87)
14. به روش استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: (شهریور 87)
 $(1 + \sqrt{7})^n \geq 1 + \sqrt{7}n$
15. به روش استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: (دی 87)
 $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$
16. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: (فرداد 88)
 $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$
17. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: (شهریور 88)
 $1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n = (n-1) \times 2^{n+1} + 2$



18. با استفاده از اصل استقرای ریاضی درستی رابطه‌ی زیر را برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید: (دی 88)

$$(1 + \sqrt{3})^n \geq 1 + n\sqrt{3}$$

19. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: (فرداد 89)

$$(1 \times 3) + (2 \times 5) + (3 \times 7) + \dots + (n \times (2n + 1)) = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{6}$$

20. جای خالی را، با عبارت‌های مناسب کامل کنید. (شهریور 89)

- (الف) استدلال روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.
 (ب) هنگامی از استدلال استفاده می‌کنیم که مطمئن هستیم نتیجه مسئله همیشه درست است.
 (ج) احکامی که همیشه برقرار هستند را می‌نامند.
 (د) مثال نقض، مثالی است که نشان می‌دهد نتیجه‌ی کلی است.

21. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید رابطه‌ی زیر به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است. (فرداد 90)

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

22. با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید که رابطه‌ی زیر برقرار است. (شهریور 90)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

استقرای تعمیم یافته

23. برای هر عدد طبیعی $n \geq 3$ ، با استفاده از اصل استقرا درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید. (دی 82)

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2}$$

24. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید: (فرداد 83)

$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \quad (n > 1, n \in \mathbb{N})$$

25. با استفاده از اصل استقرای ریاضی، به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، ثابت کنید: (شهریور 89)

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > n$$

استدلال استنتاجی

26. ثابت کنید اگر x و y گویا باشند $x - y$ نیز گویاست. (فرداد 82)

27. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از حاصل ضرب دو عدد فرد، یک واحد کم کنیم عدد حاصل بر 2 بخش پذیر است. (شهریور 82)

28. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به مربع یک عدد فرد 3 واحد اضافه کنیم عددی مضرب 4 به دست می‌آید. (دی 82)

29. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع سه عدد زوج متوالی مضرب 3 است. (فرداد 83)

30. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم یک عدد زوج حاصل می‌شود. (شهریور 83)

31. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع مربعات دو عدد فرد، یک عدد زوج است. (دی 83)

32. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که اگر 7 برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم حاصل همواره عددی فرد است. (فرداد 84)

33. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به حاصل ضرب دو عدد فرد، 1 واحد اضافه کنیم عددی زوج به دست می‌آید. (شهریور 84)

34. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مربع یک عدد فرد یک واحد اضافه کنیم یک عدد زوج حاصل می‌شود. (دی 84)

35. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب 6 است. (فرداد 85)

36. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل ضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب 24 است. (شهریور 85)

37. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل ضرب دو عدد فرد یک عدد فرد است. (دی 85)

38. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب 8 است. (فرداد 86)

39. به روش استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل جمع سه برابر هر عدد زوج با یک عدد فرد همواره فرد است. (شهریور 86)

40. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر 3 واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم عدد حاصل مضرب 6 می‌باشد. (دی 86)

41. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مکعب عدد فردی یک واحد اضافه کنیم عدد زوجی به دست می‌آید. (فرداد 87)

42. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب 4 می‌باشد. (شهریور 87)

43. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید 3 برابر مربع یک عدد فرد منهای 3، مضرب 12 است. (دی 87)

39. هر یک از اعداد دو رقمی، مشتکل از ارقام 1، 2، 3 و 4 (بدون تکرار ارقام) را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به تصادف بر می‌داریم. مطلوب است تعیین:
- (الف) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب 6 باشد. (ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد. (دی 88)
40. کیسه‌ای دارای 4 مهره‌ی یکسان است که 2 تا سفید و 2 تا قرمز هستند. از این کیسه 2 مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است: (شهریور 89)
- (الف) پیشامد A آنکه فقط یکی از مهره‌ها سفید باشد. (ب) پیشامد B آنکه حداقل یکی از مهره‌ها قرمز باشد.
41. تاس و سکه‌ی سالمی را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:
- (الف) پیشامد A آنکه سکه رو یا تاس 4 باشد. (ب) پیشامد B آنکه سکه رو و تاس 4 باشد. (دی 89)
42. با عبارات مناسب جای خالی را تکمیل کنید.
- هر، یک زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای است. (فرداد 90)
43. روی 15 کارت یکسان، اعداد از یک تا 15 را نوشته‌ایم، کارت‌ی را به تصادف خارج می‌کنیم:
- (الف) پیشامد A را طوری بنویسید که عدد روی کارت مضرب 3 یا اول باشد. (ب) پیشامد B آنکه عدد روی کارت فرد و اول باشد. (فرداد 90)
44. با اعداد طبیعی کوچک‌تر از 6، اعداد دو رقمی می‌سازیم:
- (الف) پیشامد A را طوری بنویسید که تمام اعضای آن، اعداد زوج و کم‌تر از 40 باشند. (ب) پیشامد B را طوری بنویسید که تمام اعضای آن، اعداد فرد و بیشتر از 40 باشند. (شهریور 90)

عملیات بر روی پیشامدها

45. یک سکه‌ی سالم را 3 بار می‌اندازیم. مطلوب است تعیین پیشامد $A \cap B$ به طوری که A پیشامدی است که در آن حداقل یک بار سکه پشت بیاید و B پیشامدی است که در آن سکه فقط دو بار رو بیاید. (فرداد 82)
46. هر یک از اعداد طبیعی بازه‌ی (30, 20) را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یکی را به طور تصادفی بر می‌داریم. مطلوب است تعیین پیشامد $A \cap B$ که A پیشامدی است که در آن عدد روی کارت، عددی زوج باشد و B پیشامدی است که در آن عدد روی کارت مضرب 5 باشد. (دی 82)
47. سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر رو بیاید سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً یک بار سکه به پشت بیاید و B پیشامدی باشد که در آن دقیقاً دو بار سکه به رو بیاید، پیشامد $A' \cup B$ را تعیین کنید. (فرداد 83)
48. خانواده‌ای دارای 3 فرزند است. در ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده اگر A پیشامدی باشد که در آن فقط دو فرزند پسر باشد و B پیشامدی باشد که در آن فقط فرزند اول دختر باشد، پیشامد $A \cup B$ را تعیین کنید. (شهریور 83)
49. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از 16 را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یکی را به طور تصادفی بر می‌داریم. اگر A پیشامد آن باشد که عدد روی کارت، مضرب 3 و B پیشامد آن باشد که عدد روی کارت، یک رقمی باشد، پیشامد $A \cap B$ را تعیین کنید. (دی 83 و شهریور 84)
50. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم اگر رو بیاید، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد آن باشد که در آن دقیقاً یک بار سکه رو بیاید و B پیشامد آن باشد که در پرتاب سکه حداقل دو بار پشت بیاید، پیشامد $A \cap B'$ را تعیین کنید. (فرداد 84)
51. هر یک از اعداد دو رقمی که با ارقام 1، 2، 3 و 4 می‌توان نوشت را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به تصادف بر می‌داریم. اگر پیشامد A آن باشد که عدد روی کارت مضرب 6 و پیشامد B آن باشد که عدد روی کارت اول باشد، پیشامد $A \cap B'$ را تعیین کنید. (دی 84)
52. یک سکه‌ی سالم را 3 بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد آن باشد که حداقل دو بار رو بیاید و B پیشامد آن باشد که فقط دو بار پشت بیاید، پیشامد $A \cap B'$ را مشخص کنید. (فرداد 85)
53. یک سکه و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم. اگر پیشامد A آن باشد که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید و پیشامد B آن باشد که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید، پیشامد $A' \cup B'$ را مشخص کنید. (شهریور 85)
54. یک سکه را 3 بار می‌اندازیم. اگر پیشامد A آن باشد که حداقل 2 بار سکه رو بیاید و پیشامد B آن باشد که هر سه بار سکه به یک طرف ظاهر شود، پیشامد $A \Delta B$ را مشخص کنید. (فرداد 86)
55. هر یک از اعداد زوج طبیعی کوچک‌تر یا مساوی 20 را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور قرعه بر می‌داریم. اگر A پیشامدی باشد که در آن عدد روی کارت مضرب 5 و B پیشامدی باشد که در آن عدد روی کارت کوچک‌تر از 6 باشد، پیشامد $A' \cap B$ را مشخص کنید. (شهریور 86)
56. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از 18 را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور قرعه کاری را بر می‌داریم. اگر پیشامد A آن باشد که عدد روی کارت مضرب 3 و پیشامد B آن باشد که عدد روی کارت مجذور کامل باشد، پیشامد $A - B$ را مشخص کنید. (دی 86)
57. دو مکعب سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد A آن باشد که مجموع اعداد رو شده 8 شود و پیشامد B آن باشد که حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب 15 شود، پیشامد $A - B$ را مشخص کنید. (فرداد 87)



58. فضای نمونه ای حاصل از تمام اعداد دو رقمی با ارقام 0، 3 و 5 را در نظر بگیرید. اگر A پیشامد آن باشد که اعداد دو رقمی، مضرب 5 باشند و پیشامد B آن باشد که اعداد دو رقمی، بزرگ تر از 50 باشند، پیشامد $A \cap B'$ را مشخص کنید. (شهریور 87)
59. یک تاس سالم را دو بار می اندازیم. اگر B پیشامد آن باشد که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب اول باشد و C پیشامد آن باشد که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب یکسان باشد، پیشامد آنکه C رخ دهد ولی B رخ ندهد را بیابید. (دی 87)
60. چهار سکه را با هم پرتاب می کنیم. اگر در پیشامد A حداقل 3 بار رو بیاید و در پیشامد B فقط یک بار پشت بیاید، پیشامد $A - B$ را بیابید. (فرداد 88)
61. تاس و سکه ای سالمی را با هم پرتاب می کنیم. اگر A پیشامدی باشد که در آن تاس عدد بزرگ تر از 3 باشد و B پیشامدی باشد که در آن سکه پشت بیاید، پیشامد $A - B$ را مشخص کنید. (شهریور 88)
62. هر یک از اعداد دو رقمی متشکل از ارقام 1، 2، 3 و 4 (بدون تکرار ارقام) را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت ها یکی را به تصادف بر می داریم. اگر A پیشامد آن باشد که عدد روی کارت مضرب 6 باشد و پیشامد B آن باشد که در آن عدد روی کارت اول باشد، پیشامد $A \cap B'$ را بیابید. (دی 88)
63. در پرتاب دو تاس اگر A پیشامد آن باشد که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب مساوی باشد و پیشامد B آن باشد که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب عددی اول باشد، پیشامد C که در آن A رخ دهد ولی B رخ ندهد را بیابید. (فرداد 89)
64. کیسه ای دارای 4 مهره ی یکسان است که 2 تا سفید و 2 تا قرمز هستند. از این کیسه 2 مهره به تصادف خارج می کنیم. اگر در ترکیب رنگ های مهره های خارج شده پیشامد A آن باشد که فقط یکی از مهره ها سفید باشد و پیشامد B آن باشد که حداقل یکی از مهره ها قرمز باشد، پیشامد $A \cup B'$ را بیابید. (شهریور 89)
65. اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S باشند، برای قسمت های «الف» و «ب» ابتدا یک عبارت مجموعه ای نوشته و سپس نمودار ون هر یک را رسم کنید.
- (الف) فقط پیشامد B رخ دهد. (ب) هر سه پیشامد با هم رخ دهند.

پدرآستانه:

$$n(B) = \binom{3}{2} \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15 \Rightarrow P(B) = \frac{15}{120}$$

ب

12.

$$n(S) = \binom{32}{2} = \frac{32 \times 31}{2} = 496$$

الف با توجه به اینکه 8 نفر دانش آموز در ردیف اول نشسته اند داریم:

$$n(A) = \binom{8}{2} = 28$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{28}{496}$$

$$n(B) = \binom{8}{1} \binom{8}{1} = 64 \Rightarrow P(B) = \frac{64}{496}$$

ب

13.

$$n(S) = \binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 495$$

یعنی 3 نفر سال دوم و یک نفر سال اول، یا هر 4 نفر سال دوم باشند،

$$n(A) = \binom{7}{3} \binom{5}{1} + \binom{7}{4} = 35 \times 5 + 35 = 210$$

پس:

$$\Rightarrow P(A) = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}$$

14.

$$n(S) = \binom{9}{5} = 126$$

الف یعنی 5 نفر را از بین 4 کارمند و 2 تکنسین انتخاب کنیم. پس

$$n(A) = \binom{6}{5} = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$$

داریم:

ب یعنی یا یک کارمند یا هیچ کارمند.

$$n(B) = \binom{4}{1} \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 20 + 1 = 21 \Rightarrow P(B) = \frac{21}{126} = \frac{1}{6}$$

15.

$$n(S) = \binom{12}{4} = 495$$

الف اگر تنها یک دانشجوی فیزیک انتخاب شود، پس 3 نفر دیگر باید

از رشته‌ی شیمی انتخاب شوند. یعنی:

$$n(A) = \binom{7}{1} \binom{5}{3} = 7 \times 10 = 70 \Rightarrow P(A) = \frac{70}{495}$$

ب یعنی 3 نفر دانشجوی فیزیک و یک نفر دانشجوی شیمی یا هر 4

نفر دانشجوی رشته فیزیک باشند. پس داریم:

$$n(B) = \binom{7}{3} \binom{5}{1} + \binom{7}{4} = 35 \times 5 + 35 = 210$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{210}{495}$$

16.

$$n(S) = \binom{8}{2} = 28$$

الف هر دو سالم باشند. یعنی:

$$n(A) = \binom{5}{2} = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

7. ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را تعیین می‌کنیم.

$$n(S) = \binom{3+4}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

پس برای الف داریم:

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{4}{2} = 3 + 6 = 9$$

$$P(A) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

زیرا یا دو مهره سفید هستند یا سیاه.

ولی برای ب داریم:

$$n(B) = \binom{3}{1} \times \binom{4}{1} = 12 \Rightarrow P(B) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

8.

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(4, 6), (5, 6), (5, 5), (6, 6), (6, 5), (6, 4)\}$$

$$n(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

در نتیجه:

9.

$$n(S) = \binom{15}{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{6} = 455$$

الف یعنی همه از لامپ‌های سالم انتخاب شده باشند. پس داریم:

$$n(A) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

ب یعنی یکی از لامپ‌ها معیوب و 2 تای دیگر سالم باشند. پس

$$n(B) = \binom{5}{1} \binom{10}{2} = 5 \times 45 = 225$$

داریم:

$$\Rightarrow P(B) = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$$

10.

$$n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$$

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{5}{2} = 3 \times 10 = 30 \Rightarrow P(A) = \frac{30}{56}$$

الف

ب یعنی هر سه سفید یا هر سه سیاه.

(یا) در احتمال به معنی + و (و) به معنی ضرب است)

$$n(A) = \binom{3}{3} + \binom{5}{3} = 1 + 10 = 11$$

$$P(A) = \frac{11}{56}$$

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

الف

برای این که تعداد اعضای پیشامد A که مهره‌ها هم‌رنگ نباشند را بیابیم می‌توانیم کل حالات را منهای حالاتی کنیم که مهره‌ها هم‌رنگ هستند. پس داریم:

$$n(A) = n(S) - n(A')$$

$$= 120 - \left[\binom{5}{3} + \binom{3}{3} \right] = 120 - [10 + 1] = 109$$

$$P(A) = \frac{109}{120}$$

در نتیجه:



الف A را پیشامد اعداد مضرب 2 و B را پیشامد اعداد مضرب 3 می گیریم. پس داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

اما $A \cup B$ پیشامد اعداد مضرب 2 یا مضرب 3 است. پس:

$$n(A \cup B) = \frac{30}{2} + \frac{30}{3} - \frac{30}{6} = 15 + 10 - 5 = 20$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

ب اعداد مضرب 2 و 3، اعداد مضرب 6 هستند. پس داریم:

$$n(A) = \frac{30}{6} = 5$$

یعنی بین اعداد از 1 تا 30، 5 عدد مضرب 6 وجود دارد. در نتیجه:

$$P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

23

$$n(S) = \binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

$$n(A) = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{15}{55}$$

الف

ب یعنی 2 مهره قرمز یا دو مهره سفید است. پس داریم:

$$n(B) = \binom{6}{2} + \binom{5}{2} = 15 + 10 = 25 \Rightarrow P(B) = \frac{25}{55}$$

24

$$n(S) = \binom{10}{3} = 120$$

الف یعنی 2 مهره آبی و یک مهره سفید است، یا هر سه مهره آبی است. پس داریم:

$$n(A) = \binom{6}{2} \binom{4}{1} + \binom{6}{3} = 15 \times 4 + 20 = 80$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$$

ب یعنی 3 مهره سفید باشد. در نتیجه:

$$n(B) = \binom{4}{3} = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

25

$$n(S) = \binom{10}{4} = 210$$

یعنی هر رأس روی یک خط باشد. پس داریم:

$$n(A) = \binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 2 \times 4 \times 3 = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{24}{210}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{24}{210}$$

26

$$n(S) = 7^4$$

زیرا هر نفر ممکن است در هر روز از 7 روز هفته متولد شده باشد. برای محاسبه تعداد حالاتی که هیچ دو نفری از 4 نفر در یک روز هفته متولد نشده باشند، داریم:

$$n(A) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \Rightarrow P(A) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{7^4}$$

ب یعنی یکی سالم و یکی فاسد است. پس داریم:

$$n(B) = \binom{3}{1} \binom{5}{1} = 15 \Rightarrow P(B) = \frac{15}{28}$$

17

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{7^5}$$

18. در حالت کلی می خواهیم سه نقطه از بین 12 نقطه انتخاب کنیم

$$n(S) = \binom{12}{3} = 220$$

یعنی:

برای به دست آوردن تعداد حالاتی که نقاط انتخابی رئوس مثلث باشند یا دو نقطه از خط بالا انتخاب می کنیم و یک نقطه از خط پایین و یا 2 نقطه از خط پایین و یک نقطه از خط بالا. پس داریم:

$$n(A) = \binom{5}{2} \binom{7}{1} + \binom{5}{1} \binom{7}{2} = 10 \times 7 + 5 \times 21 = 70 + 105 = 175$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{175}{220}$$

19

$$n(S) = \binom{12}{4} = 495$$

یعنی باید پیشامدی را در نظر بگیریم که دو پیچ و دو مهره داشته

$$n(A) = \binom{5}{2} \times \binom{7}{2} = 10 \times 21 = 210$$

باشد. پس:

$$P(A) = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}$$

20

$$n(S) = \binom{10}{5} = 252$$

$$n(A) = \binom{4}{2} \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120$$

الف

$$\Rightarrow P(A) = \frac{120}{252} = \frac{10}{21}$$

$$n(B) = \binom{6}{5} = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{252} = \frac{1}{42}$$

ب

21

$$n(S) = \binom{16}{3} = 560$$

الف اگر هر سه نفر رشته ی ریاضی باشند، آن گاه:

$$n(A) = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

$$P(A) = \frac{20}{560} = \frac{1}{28}$$

ب اگر دو نفر رشته ی تجربی و یک نفر رشته ی ریاضی باشد، آن گاه:

$$n(B) = \binom{6}{1} \binom{10}{2} = 6 \times 45 = 270$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{270}{560} = \frac{27}{56}$$

22

$$n(S) = \binom{30}{1} = 30$$

بسمه تعالی			
سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		کلیه رشته‌های نظری	ساعت شروع: 8 صبح
مدت امتحان: 120 دقیقه		تاریخ امتحان: 1391/3/10	
سال سوم آموزش متوسطه			
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خردادماه سال 1391			
ردیف	سوالات		
نمره			
1	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید: $(1+\sqrt{3})^n \geq 1+n\sqrt{3}$		
2	کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ (با ذکر دلیل) (الف) اگر a, b دو عدد صحیح و فرد به طوری که هر دو مضربی از 5 باشند، آن‌گاه مجموع آن‌ها مضرب 10 است. (ب) اگر a, b, c اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است.		
3	50 عدد طبیعی متمایز را در نظر گرفته و هر یک از این اعداد را بر عدد 24 تقسیم کرده‌ایم، حداقل چندتا از آن‌ها باقیمانده‌ی یکسانی را بر 24 خواهند داشت و چرا؟		
4	اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$		
5	با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $(5n+3)$ زوج باشد، آنگاه n یک عدد فرد است.		
6	مجموعه‌های $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$ و $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ مفروضند: (الف) A و B را با نوشتن عضوهای مشخص کنید. (ب) $A \Delta B$ را مشخص کنید. (ج) $(A \Delta B) \times A$ را مشخص کرده و نمودار آن را رسم کنید.		
7	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، ثابت کنید: (الف) $(C \cap A \cap B) \cup (A - C) \cup (A - B) = A$ (ب) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$		
8	رابطه‌ی R روی R^2 به صورت روبه‌رو زیر تعریف شده است: (الف) نشان دهید که این رابطه هم‌ارزی است. (ب) کلاس هم‌ارزی $[(1, 2)]$ را مشخص کنید.		
9	یک طرف سکه‌ی سالمی عدد 1 و در طرف دیگر آن عدد 2 نوشته‌ایم، این سکه را 3 بار پرتاب می‌کنیم: (الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی را بنویسید. (ب) پیشامد A ، که در آن مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب اول و دوم برابر 3 باشد را مشخص کنید. (پ) پیشامد B ، که در آن عدد ظاهر شده در پرتاب دوم برابر 1 باشد را بنویسید. (ت) پیشامد آنکه B رخ دهد ولی A رخ ندهد را تعیین کنید.		
10	درون کیسه‌ای 5 مهره‌ی سفید و 6 مهره‌ی سیاه و 4 مهره‌ی قرمز وجود دارد، از این کیسه 3 مهره باهم به تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است: (الف) احتمال آنکه دقیقاً 2 تا از مهره‌های خارج شده سفید باشند. (ب) احتمال آنکه مهره‌های خارج شده از 3 رنگ مختلف باشند.		
11	تاس سالمی را 12 بار پرتاب می‌کنیم، احتمال آنکه 4 بار عدد فرد، روی تاس ظاهر شده باشد، چقدر است؟		
12	سه نفر دونه a, b, c در یک مسابقه شرکت می‌کنند. احتمال برد a نصف احتمال برد b و احتمال برد b ، $\frac{1}{3}$ احتمال برد c است: (الف) احتمال برد هر یک از دونده‌ها را بیابید. (ب) احتمال آن که b یا c برنده شوند را تعیین کنید.		
13	تیری را به سمت هدفی مربع شکل به ضلع 4 پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که نقطه‌ی اصابت تیر درون دایره‌ای به شعاع $\frac{0}{5}$ که مرکز آن منطبق بر مرکز مربع است، قرار بگیرد.		
14	اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که داشته باشیم: $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. مطلوب است محاسبه‌ی: $P(A - B)$.		
«موفق باشید»			



بسمه تعالی			
سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		کلیه رشته های نظری	ساعت شروع: 9 صبح
مدت امتحان: 120 دقیقه		تاریخ امتحان: 1391/6/25	
سال سوم آموزش متوسطه			
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریورماه سال 1391			
ردیف	سوالات		
نمره			
1	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید: $1 \times 2 + 2 \times 5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$		
2	با استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر x یک عدد صحیح و مضرب 3 باشد، آن گاه $x(x+3)$ مضرب 18 است.		
3	می دانیم که $\sqrt{2}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ نیز گنگ می باشد.		
4	اگر a, b اعداد حقیقی باشند به طوری که $(ab < 0)$ ، ثابت کنید: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$		
5	مدرسه ای 601 نفر دانش آموز دارد. حداقل چند نفر از آن ها ماه تولدشان یکسان است و چرا؟		
6	اگر $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, n < 4\}$ و $B = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 1\}$ دو مجموعه باشند: الف) A و B را با نوشتن عضوها مشخص کنید و سپس اعضای $A \times B$ را بنویسید. ب) اگر R یک رابطه از A در B به صورت روبه رو زیر باشد: $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y < 6\}$ عضوهای رابطه ی R را مشخص کنید.		
7	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید: $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$		
8	اگر $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$ مطلوب است: $A_2 - (A_1 \cap A_3)$		
9	رابطه ی R روی \mathbb{R}^2 به صورت روبه رو زیر تعریف شده است: الف) نشان دهید رابطه ی R هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-1, 2)]$ را مشخص کنید.		
10	یک سکه و یک تاس سالم را باهم پرتاب می کنیم. الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید. ب) پیشامد A که در آن سکه پشت و عدد تاس بزرگ تر از 3 باشد را مشخص کنید. پ) پیشامد B که در آن سکه رو و عدد تاس زوج باشد را بنویسید. ت) پیشامد $A' \cap B'$ را بنویسید.		
11	کیسه ای شامل 5 مهره ی سفید و 6 مهره ی سیاه است. از این کیسه 3 مهره باهم به تصادف بیرون می آوریم، مطلوب است احتمال آنکه حداقل 2 مهره ی سفید خارج شده باشد.		
12	اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی باشد و داشته باشیم: $p(a) = 3p(b)$, $p(c) = \frac{1}{2}$, $p(d) = \frac{1}{8}$ مطلوب است محاسبه ی: $p(a')$, $p(b)$.		
13	آزمونی شامل 15 سؤال دو گزینه ای (درست - غلط) می باشد. دانش آموزی به طور تصادفی به همه ی سؤالات این آزمون پاسخ می دهد، احتمال آنکه دقیقاً به 7 سؤال پاسخ درست داده باشد، چقدر است؟		
14	دو عدد حقیقی به تصادف از بازه ی $[-1, 2]$ انتخاب می کنیم. احتمال آنکه مجموع این دو عدد مثبت باشد را محاسبه کنید.		
15	از مجموعه ی اعداد $\{1, 2, \dots, 1000\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم: الف) احتمال آنکه عدد انتخابی بر 3 یا 5 بخش پذیر باشد را بیابید. ب) احتمال آنکه عدد انتخابی بر 3 بخش پذیر باشد ولی بر 5 بخش پذیر نباشد را بیابید.		
«موفق باشید»			

مجموعه کتاب‌های مرجع نهایی



ویژگی‌های کتاب

- ✓ کامل‌ترین مرجع سؤالات امتحان نهایی
- ✓ همه‌ی سؤالات امتحان نهایی از سال ۸۴ تا سال ۹۲
- ✓ طبقه‌بندی سؤالات براساس عناوین کتاب درسی
- ✓ چیدمان سؤالات براساس ترتیب موضوع و سال
- ✓ پاسخ‌های تشریحی و مختصر و مفید
- ✓ نمونه امتحانات کامل سال‌های اخیر در انتهای کتاب

انتشارات مهرماه
۳-۸۴۰۰۸۴۴۰
www.mehromah.ir
sms: ۳۰۰۰۷۲۱۲۰



9 786005 799736