مجموعه کتاب های EQ را
با دو جلد مجزا به دو شیوه بخوانید:

۱. کتاب را از ابتدا باز کنید و
درسنامه‌های طبقه بندی شده مطابق با
امتحانات نهایی را بخوانید.

۲. کتاب را ۱۸۰ درجه بچرخانید و
نمونه سوالات امتحان نهایی و
نوبت اول را بخوانید.

فصل ۱: استدلال ریاضی

فراوانی سؤالات مطرح شده در امتحان‌های هماهنگ کشوری در ۷ سال اخیر:

مبحث	خرداد	شهریور	دی
استقرای ریاضی	۶	۶	۷
استقرای تعمیم‌یافته	۱	۱	-
استدلال استنتاجی	۳	۴	۳
مثال نقض	۳	۴	۵
قضیه‌ی شرطی	۱	-	۱
اثبات بازگشتی	۷	۵	۵
برهان خلف	۵	۷	۷
اصل لانه کبوتر	۷	۷	۷

انواع استدلال (۱/۵ نمره)

۱- درک شهودی: شهود می‌تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد.

۲- استدلال تمثیلی یا قیاسی: قیاس در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون می‌باشد.

۳- استدلال استقرایی (روش تجربی یا علمی): استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است. (دی ۹۱ و ۹۴_ شهریور ۸۹)

۴- استقرای ریاضی:
الف) اصل استقرا
ب) اصل استقرای تعمیم یافته

الف) اصل استقرا: فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره‌ی عدد طبیعی n باشد. اگر $P(1)$ درست باشد و از درستی $P(k)$، درستی $P(k+1)$ نتیجه شود؛ در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست است.

سؤالات استقرای ریاضی را بر اساس روش حل آن‌ها به ۳ تیپ تقسیم می‌کنیم:

تیپ ۱ یک تساوی داریم که در سمت چپ آن، بین جملات ۱اُم تا nاُم، علامت جمع قرار دارد.

کلید طلایی حل جمله‌ی آخر یا $k+1$ اُم (که در سمت چپ تساوی حکم استقرا ایجاد شده) را به طرفین تساوی فرض استقرا اضافه می‌کنیم.

صورت کلی طرح سؤال تیپ ۱: با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

۱) $$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$ (شهریور ۹۳)

حل: ۱) $P(1):\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1+1}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ درست است.

فرض استقرا: ۲) $P(k):\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

حکم استقرا: ۳) $P(k+1):\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$

به طرفین فرض $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ را اضافه می‌کنیم:

اثبات: طرف چپ حکم: $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$:طرف راست حکم

۲) $$2+6+10+\cdots+(4n-2)=2n^2$$ (دی ۹۳ و ۹۱)

کلید حل $2+6+\cdots+(4k-2)+(4k+2)=2k^2+(4k+2)=2(k+1)^2$

۳) $$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$ (شهریور ۹۰ _ خرداد ۸۵ خارج از کشور)

کلید حل $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+(n+1)\right)=\cdots=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

۴) $$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$$ (خرداد ۸۸)

کلید حل $\frac{0}{1!}+\dots+\frac{k-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=\dots=1-\frac{1}{(k+1)!}$

۵) $$1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n=(n-1)\times 2^{n+1}+2$$ (شهریور ۸۸)

کلید حل $1\times 2^1+\cdots+k\times 2^k+(k+1)\times 2^{k+1}=(k-1)\times 2^{k+1}+2+(k+1)\times 2^{k+1}$

$$=2^{k+1}(k-1+k+1)+2=\cdots=k\times 2^{k+2}+2$$

تذکر طلایی: *وقتی $P(k+1)$ را می نویسید، علاوه بر جمله‌ی $k+1$اُم حتماً جمله‌ی kاُم را هم بنویسید.*

پاورقی: *فراوانی این نوع سؤالات از همه بیشتر بوده و حل آن‌ها از همه ساده‌تر است.*

تیپ ۲ یک نامساوی داریم.

کلید طلایی حل *عبارتی را پیدا می‌کنیم که با جمع یا ضرب آن در طرفین نامساوی فرض استقرا، در طرف چپ نامساوی، حکم استقرا ساخته شود. (این عبارت بعد از نوشتن حکم، کاملاً مشخص می‌شود.) معمولاً برای نتیجه‌گیری آخر، از یک نامساوی بدیهی استفاده می‌کنیم.*

صورت کلی طرح سؤال تیپ ۲: با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

۱) $$(1+\sqrt{2})^n\ge 1+n\sqrt{2}$$ (شهریور ۸۵)

حل: ۱) $P(1):(1+\sqrt{2})^1\ge 1+1\times\sqrt{2}\Rightarrow 1+\sqrt{2}\ge 1+\sqrt{2}$ درست است.

فرض استقرا: ۲) $P(k):(1+\sqrt{2})^k\ge 1+k\sqrt{2}$

حکم استقرا: ۳) $P(k+1):\underbrace{(1+\sqrt{2})^{k+1}}_{A}\ge\underbrace{1+(k+1)\sqrt{2}}_{B}$

برای اثبات، طرفین فرض استقرا را در $(1+\sqrt{2})$ ضرب می‌کنیم:

طرف چپ حکم: $(1+\sqrt{2})^k(1+\sqrt{2})\ge(1+k\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

$$\Rightarrow(1+\sqrt{2})^{k+1}\ge 1+\sqrt{2}+k\sqrt{2}+2k$$

طرف راست حکم: $\Rightarrow\underbrace{(1+\sqrt{2})^{k+1}}_{A}\ge\underbrace{1+(k+1)\sqrt{2}+2k}_{C}\ge 1+(k+1)\sqrt{2}$

از نامساوی بدیهی $2k\ge 0\ (k\in\mathbb{N})$ استفاده کردیم.

② $1+2+3+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$ (تمرین کتاب درسی)

کلید حل

$1+2+\cdots+k+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1)$

$\Rightarrow 1+\cdots+k+(k+1)<\frac{1}{8}(4k^2+4k+1)+\frac{1}{8}(8k+8)\Rightarrow\cdots$

$\Rightarrow 1+\cdots+k+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+3)^2$

تذکر طلایی: در اثبات نامساوی‌ها، به نوعی در رابطه‌ی حکم داریم $(A<B)\ A>B$ و در اثبات به $(A<C)\ A>C$ می‌رسیم. برای رسیدن به نتیجه باید $(C<B)\ C>B$ را ثابت کنیم.

پاورقی: از این تیپ تا به حال فقط به همان صورت سؤال ۱، در امتحان، سؤال آمده است.

تیپ ۳ بخش‌پذیری یک عبارت بر یک عدد.

کلید طلایی حل یک عدد مناسب در طرفین فرض استقرا، ضرب می‌کنیم (برای این‌کار، از عددی که توان دارد کمک می‌گیریم.) به طوری که در سمت چپ تساوی، حکم استقرا ساخته شود.

صورت کلی طرح سؤال تیپ ۳: برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید:

① $P_n=11^n-1$ بر عدد ۱۰ بخش‌پذیر است. (خرداد ۸۷)

حل: ۱) $11^1-1=10=10\times1$ درست است.

فرض استقرا: ۲) $P(k): P_k=11^k-1=10q$

حکم استقرا: ۳) $P(k+1): P_{k+1}=11^{k+1}-1=10q'$

برای اثبات، طرفین فرض استقرا را در ۱۱ ضرب می‌کنیم:

$(11^k-1)\times11=10q\times11\Rightarrow 11^{k+1}-11=10q\times11$

$\Rightarrow 11^{k+1}-1=10q\times11+10\Rightarrow 11^{k+1}-1=10(q\times11+1)\Rightarrow 11^{k+1}-1=10q'$ ✓

② 5^n-4n-1 بر عدد ۱۶ بخش‌پذیر است. (خرداد ۸۶)

کلید حل

$(5^k-4k-1)\times5=16q\times5\Rightarrow\cdots\Rightarrow 5^{k+1}-4k-16k-4-1=16q\times5$

$\Rightarrow 5^{k+1}-4k-4-1=16q\times5+16k\Rightarrow\cdots\Rightarrow 5^{k+1}-4(k+1)-1=16q'$

③ $3^{2n}-1$ مضرب ۸ است. (دی ۸۵ خارج از کشور)

کلید حل

$(3^{2k}-1)\times3^2=8q\times3^2\Rightarrow\cdots\Rightarrow 3^{2k+2}-8-1=8q\times9$

$\Rightarrow\cdots\Rightarrow 3^{2k+2}-1=8q'$

تذکر طلایی: اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه آن را به صورت $b=aq$ می‌نویسیم.

پاورقی: در این تیپ سؤالات، باید با بازی با اعداد، مضرب مورد نظر را در سمت راست ایجاد کنیم و هیچ نکته‌ی خاصی ندارد.

۱/۵ نمره ادامه‌ی استقرای ریاضی (استقرای تعمیم‌یافته)

ب) اصل استقرای تعمیم‌یافته: فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره‌ی عدد طبیعی n باشد. اگر $P(m)$ برای $m>1$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k\ge m$ درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n\ge m$ درست است.

سؤالات این قسمت را براساس صورت سؤال، می‌توان به ۲ تیپ دسته‌بندی کرد:

تیپ ۱ نامساوی‌ها

کلید طلایی حل در مرحله‌ی اول، m مناسب را پیدا می‌کنیم و ادامه‌ی اثبات را با استفاده از روش‌های دسته‌بندی شده در سؤالات استقرای ریاضی ادامه می‌دهیم.

صورت کلی طرح سؤال تیپ۱: ابتدا عدد طبیعی مناسب $m>1$ را یافته و سپس با استفاده از اصل استقرای تعمیم یافته، درستی هر یک از روابط زیر را برای هر عدد طبیعی $n\ge m$ ثابت کنید.

① $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}>n$ (شهریور ۸۹)

حل: $m=1\Rightarrow 1>1$ غلط ، $m=2\Rightarrow 1+\sqrt{2}>2$ ✓

$m=3\Rightarrow 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}>3$ ✓

پس $n\ge2$ است.

تذکر طلایی: همیشه به اولین mای که رابطه به ازای آن برقرار است، اطمینان نمی‌کنیم، چون ممکن است به ازای m بعدی درست نباشد و از m بزرگ‌تری به بعد رابطه درست باشد.

به همین دلیل در بالا، $m=3$ را هم بررسی کردیم.

۱) $P(2): 1+\sqrt{2}>2$ درست است.

فرض استقرا: ۲) $P(k): 1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}>k$

حکم استقرا: ۳) $P(k+1): 1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}>k+1$

اثبات: $1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}>k+\sqrt{k+1}$

حال برای اثبات حکم، کافی است نشان دهیم: $k+\sqrt{k+1}>k+1$

$k\ge2\Rightarrow k+1\ge3\Rightarrow\sqrt{k+1}\ge\sqrt{3}>1\Rightarrow k+\sqrt{k+1}>k+1$

$\Rightarrow 1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}>k+\sqrt{k+1}>k+1$ ✓

② $2^n>n^2$ (دی ۸۶ خارج از کشور)

حل: $m=1\Rightarrow 2^1>1^2$ ✓ ، $m=2\Rightarrow 2^2>2^2$ غلط ، $m=3\Rightarrow 2^3>3^2$ غلط

$m=4\Rightarrow 2^4>4^2$ غلط ، $m=5\Rightarrow 2^5>5^2$ ✓ ، $m=6\Rightarrow 2^6>6^2$ ✓

پس $n\ge5$ است.

دقت کردید که این رابطه، به ازای $m=1$ درست بود ولی به ازای mهای بعدی تا $m=5$ برقرار نبود.

۱) $P(5): 2^5>5^2$ درست است.

فرض استقرا: ۲) $P(k): 2^k>k^2$

حکم استقرا: ۳) $P(k+1): 2^{k+1}>(k+1)^2$

اثبات: $2^k\times2>k^2\times2\Rightarrow 2^{k+1}>2k^2$

حال کافی است نشان دهیم $2k^2>(k+1)^2$ می‌باشد:

$2k^2>(k+1)^2\Rightarrow 2k^2>k^2+2k+1\Rightarrow k^2-2k-1>0\Rightarrow k^2-2k-1+2>2$

$\Rightarrow (k-1)^2>2$ همواره برقرار $\xrightarrow{\text{زیرا}} k\ge5\Rightarrow k-1\ge4\Rightarrow (k-1)^2\ge16>2$

$\Rightarrow 2^{k+1}>2k^2>(k+1)^2$ ✓

③ $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<\frac{n}{2}$ (نهایی ۸۲)

کلید حل $m=3$ و $1+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}-1}$

کافی است نشان دهیم $\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k+1}{2}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{1}{2}$ که همواره برقرار است، زیرا:

$k\ge3\Rightarrow 2^k\ge2^3\Rightarrow\cdots\Rightarrow 2^{k+1}-1\ge2^4-1\Rightarrow\cdots\Rightarrow\frac{1}{2^{k+1}-1}\le\frac{1}{15}<\frac{1}{2}$

④ $n! > 2^n$ (تمرین کتاب درسی)

کلید حل $m = 4$ و $k!\times(k+1) > 2^k \times (k+1)$

کافی است نشان دهیم $2^k \times (k+1) > 2^{k+1}$ که با توجه به $k \ge 4$ و درنتیجه $k+1 \ge 5 > 2$ بدیهی است.

پاورقی: *معمولاً در سؤالات امتحان نهایی m مناسب در صورت سؤال داده می‌شود.*

تیپ ۲ سؤالات هندسی

کلید طلایی حل دانستن نکات طلایی بیان شده

صورت کلی طرح سؤال تیپ ۲: با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

① **تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$. $(n \ge 3)$** (تمرین کتاب درسی)

حل: $(n \ge 3)$ است و داریم:

$$1)\ P(3): \text{تعداد قطرهای ۳ ضلعی محدب} = \frac{3(3-3)}{2} = 0 \checkmark$$

فرض استقرا: $2)\ P(k):$ تعداد قطرهای k ضلعی محدب $= \frac{k(k-3)}{2}$

حکم استقرا: $3)\ P(k+1):$ تعداد قطرهای $(k+1)$ ضلعی محدب $= \frac{(k+1)(k-2)}{2}$

نکته‌ی طلایی: *اگر به یک n ضلعی محدب، یک ضلع اضافه کنیم، به تعداد قطرهای آن $n-1$ واحد اضافه می‌شود.*

اثبات: تعداد قطرهای $(k+1)$ ضلعی محدب = تعداد قطرهای k ضلعی محدب + $(k-1)$

$$= \frac{k(k-3)}{2} + (k-1) = \frac{k(k-3)+2(k-1)}{2} = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

② **مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(2n-4)\times 90^\circ$. $(n \ge 3)$** (تمرین کتاب درسی)

نکته‌ی طلایی: *اگر به یک n ضلعی محدب، یک ضلع اضافه کنیم، به مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° اضافه می‌شود.*

پاورقی: *تنها سؤالات این تیپ، همین دو سؤال است که در کتاب درسی آمده و تا به حال هم در امتحان نهایی مطرح نشده‌اند، ولی خوب شاید امسال بیاید.*

ادامه‌ی انواع استدلال (۱ نمره)

۵- استدلال استنتاجی: استدلال استنتاجی، روش نتیجه‌گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. (دی ۹۱)

هنگامی که از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است. (شهریور ۸۹)

احکامی که همیشه برقرار هستند را قضایای کلی می‌نامند. (شهریور ۸۹)

نکات طلایی حل

۱- مضرب صحیح یک عدد مانند a را به صورت ka که $k \in \mathbb{Z}$، نشان می‌دهیم.

۲- دو عدد زوج متوالی را می‌توانیم به صورت ($2k$ و $2(k+1)$) یا ($2(k-1)$ و $2k$) یا ... در نظر بگیریم. $(k \in \mathbb{Z})$

۳- دو عدد فرد متوالی را می‌توانیم به صورت ($2k+1$ و $2k+3$) یا ($2k-1$ و $2k+1$) یا ... در نظر بگیریم. $(k \in \mathbb{Z})$

۴- فرم کلی یک عدد گویا به صورت $\frac{m}{n}$ است که در آن $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ می‌باشد.

صورت کلی طرح سؤال: با استدلال استنتاجی ثابت کنید:

① **اگر مربع‌های دو عدد فرد را از هم کم کنیم، حاصل عدد زوجی خواهد بود.** (خرداد ۸۹ ـ دی ۸۳)

حل: $(2k+1)^2 - (2k'+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4k'^2 - 4k' - 1$

$$= \underbrace{2(2k^2 - 2k'^2 + 2k - 2k')}_{\text{حاصل همواره مضرب ۴ و ۸ هم هست}} = 2k''$$

② **حاصل‌ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.** (خرداد ۸۶)

حل: $(2k-2)2k(2k+2) = (4k^2-4)(2k) = 8k^3 - 8k = 8(k^3-k) = 8k'$

③ **اگر ۳ واحد به سه برابر عدد فردی اضافه کنیم، عدد حاصل مضرب ۶ می‌باشد.** (دی ۸۶)

کلید حل $x = 2k+1 \Rightarrow 3x+3 = 3(2k+1)+3 \Rightarrow \dots$

④ **مجموع دو عدد گویا، عددی گویا است.** (دی ۸۲ خارج از کشور)

کلید حل $\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \dots = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ که $m, r \in \mathbb{Z}$ و $n, s \in \mathbb{N}$

پاورقی: *اگر ۴ نکته‌ی گفته شده را که بسیار ساده هم هستند، فراموش نکنید، اثبات سؤالات این بخش، بسیار بسیار راحت خواهد بود.*

مثال نقض (۰/۷۵ نمره)

تعریف: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گویند. (شهریور ۸۹)

صورت کلی طرح سؤال: کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ برای عبارت‌های نادرست، مثال نقض بیاورید.

① **الف) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گویا است.** نادرست (دی ۹۱)

$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

ب) مربع هر عدد فرد به اضافه‌ی یک، عددی زوج است. درست

ج) برای هر عدد طبیعی n، $2^n + 3$ عددی اول است. نادرست

$n = 5 \Rightarrow 2^5 + 3 = 35 \Rightarrow$ اول نیست.

② **الف) اگر $x > 1$، آن‌گاه $4 - x^2 < 3$.** درست (خرداد ۸۸)

ب) مکعب هر عدد فرد منهای یک، عددی زوج است. درست

سؤالات دیگر:

الف) گزاره‌های درست:

③ **حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $6k+5$ به شکل $6k'+1$ است.** (دی ۸۸)

④ **هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.** (خرداد ۸۲ خارج از کشور)

نام	آزمون (۱)	تاریخ امتحان
نام خانوادگی	نوبت اول - دی ماه	موضوع امتحان

ردیف	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید: الف) برای هر عدد طبیعی n، $۳^{۲n} - ۲^{n}$ بر ۷ بخش‌پذیر است. ب) $۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \dots + \frac{۱}{n^۲} < ۲ - \frac{۱}{n}$ $(n \geq ۲)$	۳/۲۵
۲	با استدلال استنتاجی نشان دهید، حاصل‌ضرب دو عدد به شکل $۴q + ۳$ به‌صورت $۴q' + ۱$ می‌باشد.	۱
۳	با ارائه‌ی یک مثال نقض، درستی احکام زیر را رد کنید. الف) اگر $x + y$ فرد باشد، آن‌گاه x و y هر دو فرد هستند. ب) اگر $x \geq y$، آن‌گاه $\frac{y}{x} \leq ۱$. ج) تمام اعداد گویا معکوس دارند.	۱/۲۵
۴	با استدلال بازگشتی برای اعداد حقیقی a، b و c ثابت کنید: $a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + ac + bc$.	۱/۲۵
۵	با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: الف) اگر $y = ۳$ و $x^۲ + ۲y = ۲۲$، آن‌گاه $x = ۴$ است. ب) اگر d، d' و d'' سه خط راست باشند و $d \parallel d'$ و $d' \parallel d''$، آن‌گاه $d \parallel d''$.	۲
۶	زیر مجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر کدام حداقل شامل دو عضو هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۴ است.	۱/۲۵
۷	اگر $A = \{۱,\{۲\},\{۱,۲\}\}$ باشد، $P(A)$ را بنویسید.	۱/۵
۸	اگر مجموعه‌ی $A = \{\varnothing, x, \{x\}, \{\varnothing\}\}$ باشد، کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ الف) $\{x\} \subset A$ ب) $\varnothing \subset A$ ج) $\{\{\varnothing\}\} \in A$ د) $\{\varnothing\} \subset A$	۱
۹	به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A) = A \cup B$	۱/۲۵
۱۰	اگر $i \in \mathbb{N}$، $A_i = [-i + ۱, ۳i]$ باشد، حاصل عبارات $\bigcap_{i=۱}^{۳} A_i$ و $\bigcup_{i=۱}^{۳} A_i$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۱۱	مقادیر x و y را چنان بیابید تا دو زوج مرتب $(۲^{x-y}, -۱۲)$ و $(۱۲۸, xy)$ با هم مساوی باشند.	۱/۲۵
۱۲	اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \mid x \mid < ۳\}$ و $B = [-۱, ۴)$، آن‌گاه نمودار $A \times B$ را رسم کنید.	۱/۵
۱۳	نمودار رابطه‌ی $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y \leq - \mid x \mid + ۱\}$ را رسم کنید.	۱/۵
۱۴	تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, \{a\}\}$ را بنویسید.	۰/۷۵
	جمع نمره	۲۰

۱ الف)

۱) $P(۱): ۳^۲ - ۲^۱ = ۹ - ۲ = ۷ = ۱ \times ۷$ درست است. (۰/۲۵)

۲) $P(k): ۳^{۲k} - ۲^k = ۷q$ فرض استقرا: (۰/۲۵)

۳) $P(k+۱): ۳^{۲(k+۱)} - ۲^{k+۱} = ۷q'$ حکم استقرا: (۰/۲۵)

اثبات: طرفین فرض استقرا را در $۳^۲$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{(۳^{۲k} - ۲^k)۳^۲ = ۷q \times ۳^۲}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۳^{۲k+۲} - ۲^k \times ۹ = ۶۳q \Rightarrow ۳^{۲k+۲} - ۲^k \times ۲ - ۲^k \times ۷ = ۶۳q$$

$$\Rightarrow \underbrace{۳^{۲k+۲} - ۲^{k+۱} = ۶۳q + ۷ \times ۲^k}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۳^{۲k+۲} - ۲^{k+۱} = ۷(۹q + ۲^k) \Rightarrow ۳^{۲(k+۱)} - ۲^{k+۱} = ۷q' \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ ـ انواع استدلال ـ تیپ ۳)

ب)

۱) $P(۲): ۱ + \frac{۱}{۴} < ۲ - \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۴} < \frac{۳}{۲}$ درست است. (۰/۲۵)

۲) $P(k): ۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \dots + \frac{۱}{k^۲} < ۲ - \frac{۱}{k}$ فرض استقرا: (۰/۲۵)

۳) $P(k+۱) = ۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \dots + \frac{۱}{k^۲} + \frac{۱}{(k+۱)^۲} < ۲ - \frac{۱}{k+۱}$ حکم استقرا: (۰/۲۵)

اثبات: طرفین فرض استقرا را با $\frac{۱}{(k+۱)^۲}$ جمع می‌کنیم:

طرف چپ حکم : $۱ + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{k^۲} + \frac{۱}{(k+۱)^۲} < ۲ - \frac{۱}{k} + \frac{۱}{(k+۱)^۲}$ (۰/۲۵)

حال کافی است ثابت کنیم:

$$۲ - \frac{۱}{k} + \frac{۱}{(k+۱)^۲} < ۲ - \frac{۱}{k+۱} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{k} + \frac{۱}{(k+۱)^۲} < -\frac{۱}{k+۱} \Rightarrow \underbrace{\frac{(k+۱)^۲ - k}{k(k+۱)^۲} > \frac{۱}{k+۱}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \frac{k^۲ + k + ۱}{k(k+۱)} > ۱ \Rightarrow k^۲ + k + ۱ > k^۲ + k \Rightarrow ۱ > ۰$$ همواره برقرار (۰/۲۵)

پس نامساوی همواره برقرار و حکم درست است، یعنی:

$$۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \dots + \frac{۱}{k^۲} + \frac{۱}{(k+۱)^۲} < ۲ - \frac{۱}{k+۱}$$

(فصل ۱ ـ استقرای تعمیم‌یافته ـ تیپ ۱)

۲

$$\underbrace{(۴q_۱ + ۳)(۴q_۲ + ۳)}_{(۰/۲۵)} = ۱۶q_۱q_۲ + ۱۲q_۱ + ۱۲q_۲ + \underbrace{۹}_{۸+۱}{}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۴(۴q_۱q_۲ + ۳q_۱ + ۳q_۲ + ۲) + ۱}_{(۰/۲۵)} = ۴q' + ۱ \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ ـ استدلال استنتاجی)

۳ الف) $۵ = ۲ + ۳ = x + y$ فرد است ولی $x = ۲$ (۰/۲۵) و $y = ۳$ که x زوج است. (۰/۲۵)   ب) اگر $x = -۲$ و $y = -۳$ (۰/۲۵)، آن‌گاه $-۳ \geq -۲$ ولی $\frac{-۳}{-۲} \geq ۱$. (۰/۲۵)

ج) $x = ۰$ گویا است و معکوس ندارد. (۰/۲۵) (فصل ۱ ـ مثال نقض)

۴

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + ac + bc \Leftrightarrow \underbrace{۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ - ۲ab - ۲ac - ۲bc \geq ۰}_{(۰/۲۵)}$$

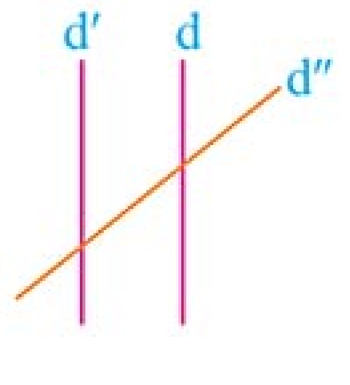
$$\Leftrightarrow \underbrace{a^۲ - ۲ab + b^۲ + a^۲ - ۲ac + c^۲ + b^۲ - ۲bc + c^۲ \geq ۰}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{(a-b)^۲ + (a-c)^۲ + (b-c)^۲ \geq ۰}_{(۰/۲۵)}$$ همواره برقرار (۰/۲۵)

چون تمام روابط فوق برگشت‌پذیر هستند، حکم برقرار می‌باشد. (۰/۲۵) (فصل ۱ ـ اثبات بازگشتی)

۵ الف)

فرض خلف : $x \neq ۴$ (۰/۲۵)

$$۲y = ۲۲ - x^۲ \xrightarrow{x \neq ۴} \underbrace{۲y \neq ۲۲ - ۱۶}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{۲y \neq ۶ \Rightarrow y \neq ۳}_{(۰/۲۵)}$$ تناقض با فرض سؤال



پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۰/۲۵) (فصل ۱ ـ برهان خلف ـ تیپ ۶)

ب) فرض خلف: d موازی d'' نباشد، (۰/۲۵) پس متقاطع هستند. از طرفی طبق فرض، $d \parallel d'$ است. بنابراین d' و d'' متقاطع هستند، (۰/۲۵) یعنی موازی نیستند که با فرض سؤال، یعنی $d' \parallel d''$ در تناقض است (۰/۲۵). پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۰/۲۵)

(فصل ۱ ـ برهان خلف ـ تیپ ۵)

نام نام خانوادگی	پاسخ آزمون (۱) نوبت اول - دی‌ماه	تاریخ امتحان موضوع امتحان

۶ مجموعه‌ی داده شده را به گروه‌هایی تقسیم می‌کنیم که حاصل‌ضرب اعضای هر کدام از آن‌ها برابر ۲۴ باشد:

$\{۱،۲۴\}،\{۲،۱۲\}،\{۳،۸\}،\{۴،۶\}$ (۰/۵) (هر دو مورد صحیح (۰/۲۵))

حال برای نوشتن یک زیرمجموعه‌ی ۵ عضوی، از هر کدام از مجموعه‌های فوق، ابتدا یک عضو (۰/۲۵) انتخاب می‌کنیم. اکنون ۴ عضو داریم و برای عضو پنجم مجبوریم از یکی از مجموعه‌ها یک عضو دیگر انتخاب کنیم که با عضو قبلی انتخاب‌شده از آن، حاصل‌ضربی برابر ۲۴ خواهند داشت. (۰/۲۵) پس هر زیرمجموعه‌ی ۵ عضوی، حداقل شامل دو عضو است که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲۴ می‌باشد. (۰/۲۵) (فصل ۱ ـ اصل لانه کبوتر ـ تیپ ۵)

۷ $P(A)=\{\underbrace{\varnothing،\{۱\}،\{\{۲\}\}،\{\{۱،۲\}\}}_{(۰/۵)}،\underbrace{\{۱،\{۲\}\}،\{۱،\{۱،۲\}\}}_{(۰/۵)}،\underbrace{\{\{۲\}،\{۱،۲\}\}،\{۱،\{۲\}،\{۱،۲\}\}}_{(۰/۵)}\}$

(فصل ۲ ـ مجموعه‌ی توانی)

۸ الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج) نادرست (۰/۲۵) د) درست (۰/۲۵) (فصل ۲ ـ زیرمجموعه ـ مجموعه‌ی تهی)

۹

$$(A\cap B)\cup(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B)\cup\underbrace{(A\cap B')}_{(۰/۲۵)}\cup(B\cap A')=\underbrace{(A\cap(B\cup B'))}_{(۰/۲۵)}\cup(B\cap A')$$

$$=\underbrace{(A\cap U)}_{(۰/۲۵)}\cup(B\cap A')=A\cup(B\cap A')=\underbrace{(A\cup B)\cap(A\cup A')}_{(۰/۲۵)}=(A\cup B)\cap U=A\cup B \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۲ ـ جبر مجموعه‌ها، تیپ ۱)

۱۰ $\underset{(۰/۲۵)}{A_۱=[۰،۳]}$ ، $\underset{(۰/۲۵)}{A_۲=[-۱،۶]}$ ، $\underset{(۰/۲۵)}{A_۳=[-۲،۹]}$

$\bigcap_{i=۱}^{۳}A_i=[۰،۳]$ (۰/۲۵) ، $\bigcup_{i=۱}^{۳}A_i=[-۲،۹]$ (۰/۲۵)

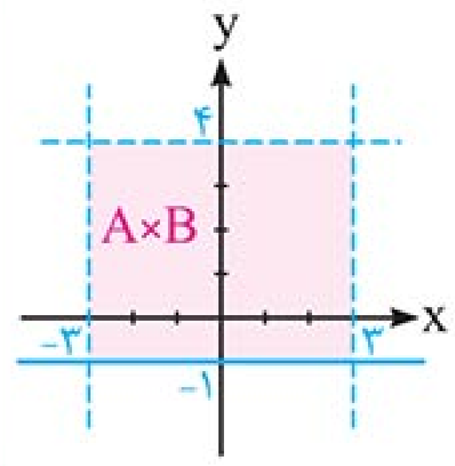
(فصل ۲ ـ جبر مجموعه‌ها)

۱۱

$$(۱۲۸،xy)=(۲^{x-y}،-۱۲)\Rightarrow\begin{cases}۲^{x-y}=۱۲۸=۲^۷\Rightarrow x-y=۷\ (۰/۲۵)\Rightarrow x=۷+y\\ xy=-۱۲\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

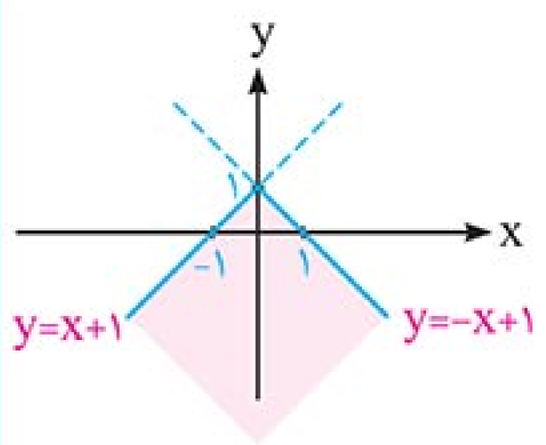
$$\Rightarrow(۷+y)y=-۱۲\Rightarrow \underbrace{y^۲+۷y+۱۲=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow(y+۳)(y+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}y=-۳\Rightarrow x=۴\ (۰/۲۵)\\ y=-۴\Rightarrow x=۳\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

(فصل ۲ ـ زوج مرتب)

۱۲ 

$A=\{x\,|\,-۳<x<۳\}=(-۳،۳)$ (۰/۲۵)

رسم نمودار (۱/۲۵) (فصل ۲ ـ رسم نمودار حاصل‌ضرب دکارتی)

۱۳ 

$$y=-|x|+۱\Rightarrow y=\begin{cases}-x+۱ & x\geq ۰\\ x+۱ & x<۰\end{cases}$$

(۰/۵)

رسم نمودار (۱) (فصل ۲ ـ رابطه)

۱۴ $\underset{(۰/۲۵)}{\{a\}}$ ، $\underset{(۰/۲۵)}{\{\{a\}\}}$ / $\underset{(۰/۲۵)}{\{a،\{a\}\}}$

(فصل ۲ ـ افراز یک مجموعه)