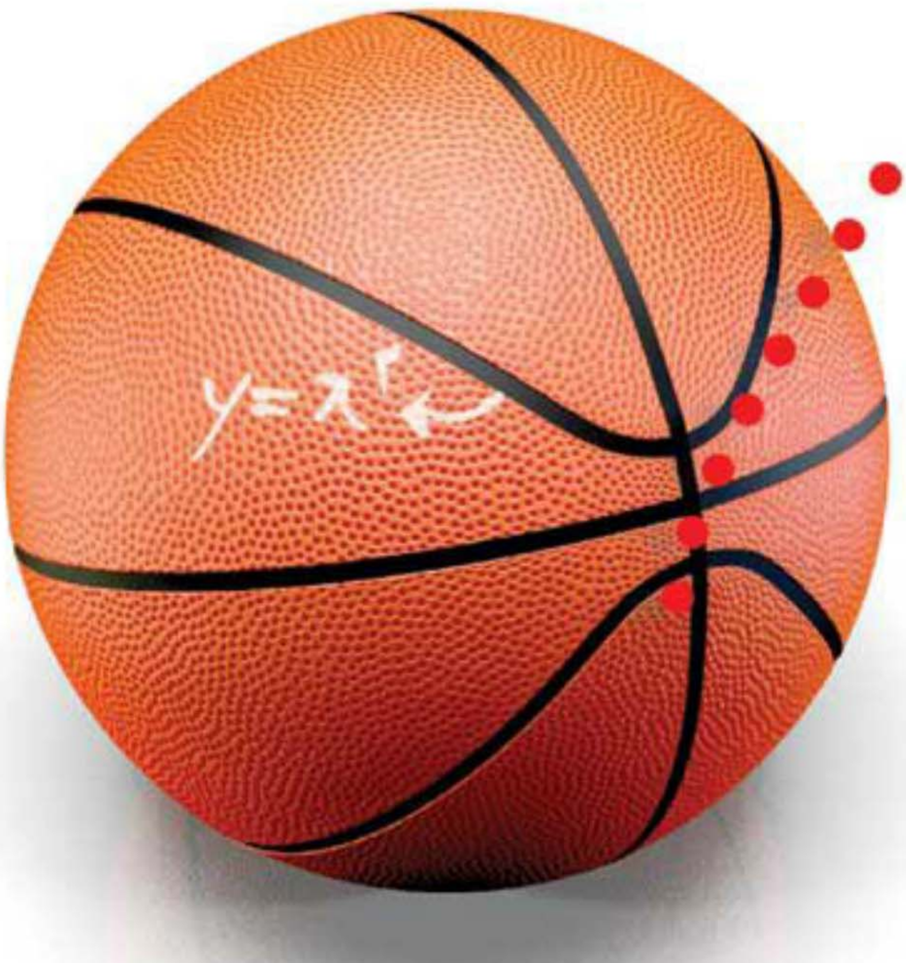
کتاب‌های موضوعی

مهروماه

مشتق

رحیم قهرمان



به نام پروردگار مهربان

کتاب‌های موضوعی

مُشتَق

مؤلف: رحیم قهرمان

مهروماه

مقدمه مؤلف

کتاب‌های موضوعی مهروماه برای آن دسته از دانش‌آموزانی تالیف می‌شود که می‌خواهند روی یک موضوع تمرکز کنند و تمام مشکلات خود را با خواندن این کتاب حل کنند. کتابی که در دست دارید، به موضوع مشتق پرداخته، آن هم به دلیل اهمیت بالایی که این مبحث، در امتحانات نهایی و هم در کنکور به خود اختصاص داده است؛ در امتحانات نهایی سال سوم (ریاضی- تجربی) ۷ نمره و در کنکور سراسری نیز ٤ تست مرتبط با مشتق مطرح می‌شود.

ویژگی‌های این کتاب

۱ **منطبق با آخرین تغییرات کتب درسی (حسابان، حساب و دیفرانسیل، ریاضی ۳ و ریاضی عمومی تجربی)**

۲ **آموزش کامل مفاهیم و اثبات قضایا و فرمول‌های مشتق**

۳ **بررسی سؤالات هماهنگ کشوری (داخل و خارج کشور)**

٤ **در برگیرنده‌ی نکات تستی کنکور سراسری داخل و خارج کشور**

٥ **شامل سه فصل همراه با تست‌هایی مرتبط و پاسخ‌هایی کاملاً تشریحی؛** در پاسخ تست‌ها هر جا نیاز است تا مباحث ریاضی پایه مطرح شود، این موارد به عنوان یادآوری گفته شده است تا سطح آموزش و یادگیری دانش‌آموزان را ارتقا دهد.

٦ **مبحث آهنگ تغییرات به مشتق، این بخش را نیز همراه با مشتق مطرح شده است.**

در پایان بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای احمد اختیاری، مدیریت محترم انتشارات مهروماه که در امر تألیف این اثر از هیچ مساعدتی دریغ ننموده‌اند، قدردانی کنم. از استاد گرامی جناب آقای میثم حمزه‌لویی که نظرات علمی ارزشمندی در مورد کتاب ارائه نمودند و سرکار خانم سمیه جباری و مدیر هنری جناب آقای محسن فرهادی کمال تشکر را دارم. با سپاس از آقای جواد محمودی که با دستان هنرمند خود به این اثر جان بخشید و در صفحه‌آرایی و طراحی اشکال کتاب با نهایت دقت سنگ‌تمام گذاشت و در انتها از سرکار خانم صغری ولدی که زحمت حروف‌چینی کتاب را بر عهده داشتند و سرکار خانم مینا نظری که ویراستاری کتاب را بر عهده داشتند و سرکار خانم زهرا امینیان که با دقت فراوان این کتاب را نمونه‌خوانی کردند سپاس‌گزارم. شما می‌توانید نظرات و پیشنهادات خود را به نشانی اینترنتی rahimghahreman@yahoo.com یا با ارتباط یا ار طریق سامانه پیامک به شماره ۳۰۰۰۷۲۱۲۰ مطرح نمایید.

فهرست

اراده‌ی انسان معادله‌ایست که همیشه جواب دارد.

فصل ۲

مشتق تابع مرکب و معادله‌ی خط مماس

یافتن طول نقطه‌ی تماس وقتی ضریب زاویه‌ی خط مماس معلوم باشد

در بعضی از مسائل و تست‌های مربوط به خط مماس، معادله‌ی خط مماس مورد سؤال واقع نمی‌شود، بلکه مختصات نقطه یا نقاطی را از ما می‌خواهند که معادله‌ی خط مماس بر منحنی در آن نقاط دارای شرایط ویژه‌ای باشد. به عنوان مثال در آن نقطه، خط مماس موازی خطی باشد، که معادله‌ی آن داده شده است.

لذا برای این منظور از تابع مشتق گرفته و برابر ضریب زاویه‌ی مورد نظر قرار می‌دهیم و طول نقطه‌ی تماس و از آن‌جا نقطه‌ی تماس را می‌یابیم.

مثال

نقطه‌ای از تابع $f(x)=۳x^۲-۴x$ را بیابید که ضریب زاویه‌ی خط مماس از آن خط برابر ۸ شود.

پاسخ: اگر طول نقطه را $x_\circ$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $f'(x_\circ)=۸$، لذا:

$$f'(x)=۶x-۴ \xlongequal{f'(x_\circ)=۸} ۶x_\circ-۴=۸ \Rightarrow ۶x_\circ=۱۲ \Rightarrow x_\circ=۲$$

$$f(x)=۳x^۲-۴x \xrightarrow{x_\circ=۲} f(۲)=۳(۲)^۲-۴(۲)=۱۲-۸=۴$$

پس نقطه‌ی مورد نظر $(۲,۴)$ است.

مثال

نقاطی از منحنی $f(x)=\frac{x^۳}{۳}-۲x^۲+۳x-۱$ را تعیین کنید که در آن نقاط، خط مماس بر منحنی، افقی باشد.

پاسخ: خط مماس بر منحنی افقی باشد، یعنی شیب خط مماس بر منحنی باید صفر باشد. باید از تابع f مشتق بگیریم، آن را برابر صفر قرار دهیم.

$$f(x)=\frac{x^۳}{۳}-۲x^۲+۳x-۱ \Rightarrow f'(x)=\frac{۳x^۲}{۳}-۴x+۳=x^۲-۴x+۳$$

$$\xrightarrow{f'(x)=\circ} x^۲-۴x+۳=\circ \Rightarrow (x-۱)(x-۳)=\circ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{۳} \\ x=۳ \Rightarrow f(۳)=-۱ \end{cases}$$

لذا مختصات نقاط تماس مورد نظر برابر $A(۱,\frac{۱}{۳})$, $B(۳,-۱)$ است.

مثال

خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{\cot x}$ در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ متعلق به بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ موازی با خط $y-۲x=۵$ می‌باشد. مجموع مقادیر ممکن برای $x_\circ$ را بیابید.

پاسخ: شیب خط مماس $m=۲$ است که باید برابر مشتق تابع در نقطه‌ای به طول $(x_\circ)$ باشد، یعنی $f'(x_\circ)=۲$. پس:

$$f(x)=\frac{۱}{\cot x}=\tan x \Rightarrow f'(x)=۱+\tan^۲ x \xrightarrow{x=x_\circ} f'(x_\circ)=۱+\tan^۲ x_\circ$$

$$\xrightarrow{m=f'(x_\circ)=۲} ۱+\tan^۲ x_\circ=۲ \Rightarrow \tan^۲ x_\circ=۱ \Rightarrow \tan x_\circ=\pm۱ \Rightarrow \begin{cases} x_\circ=\frac{۳\pi}{۴} \in (\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}) \\ x_\circ=\frac{۵\pi}{۴} \in (\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_\circ \text{ مجموع مقادیر } =\frac{۳\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}=۲\pi$$

معادله‌ی خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر آن

شیب خط قائم بر منحنی در نقطه‌ی $x = x_{\circ}$، $m' = -\frac{۱}{f'(x_{\circ})}$ و معادله‌ی آن عبارت است از:

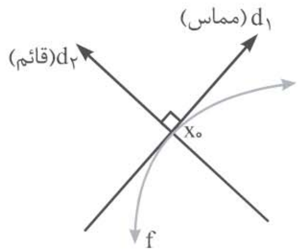
۱) وقتی $f'(x_{\circ})$ مخالف صفر است:

$$\mathbf{y - f(x_{\circ}) = -\frac{۱}{f'(x_{\circ})}(x - x_{\circ})}$$

۲) وقتی $f'(x_{\circ})$ برابر صفر است: $\mathbf{x = x_{\circ}}$ (یعنی خط قائم، موازی محور y ها است.)

تذکر:

منظور از خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای به طول $x_{\circ}$ روی منحنی، خطی است که بر خط مماس بر منحنی در این نقطه، عمود باشد. (به شکل مقابل دقت کنید.)



مثال

معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = ۲x^۳ - x$ را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی به دست آورید. (هماهنگ کشوری- خرداد ۹۱)

پاسخ: با توجه به طول نقطه‌ی تماس یعنی $x = ۱$ مختصات نقطه‌ی تماس را کامل می‌کنیم.

$$f(x) = ۲x^۳ - x \xrightarrow{x=۱} f(۱) = ۲(۱)^۳ - ۱ = ۱$$

نقطه‌ی تماس $A(۱,۱)$ است. از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = ۲x^۳ - x \Rightarrow f'(x) = ۶x^۲ - ۱ \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = f'(۱) = ۶(۱)^۲ - ۱ = ۵$$

$$m_{\text{مماس}} = ۵ \xrightarrow{m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{m_{\text{مماس}}}} m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{۵}$$

در نتیجه معادله‌ی خط قائم به صورت زیر است:

$$\text{معادله‌ی خط قائم}: y - ۱ = -\frac{۱}{۵}(x - ۱) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۵}x + \frac{۶}{۵}$$

مثال

معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $y = \sqrt{۴ + \cos x}$ را در نقطه‌ی $(\frac{\pi}{۲}, ۲)$ بنویسید. (هماهنگ شهر تهران- دی ۸۲)

پاسخ: از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \sqrt{۴ + \cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x}{۲\sqrt{۴ + \cos x}} \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = f'(\frac{\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{-\sin\frac{\pi}{۲}}{۲\sqrt{۴ + \cos\frac{\pi}{۲}}} = \frac{-۱}{۴} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = -\frac{۱}{۴} \xrightarrow{m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{m_{\text{مماس}}}} m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{-\frac{۱}{۴}} = ۴ \Rightarrow m_{\text{قائم}} = ۴$$

در نتیجه معادله‌ی خط قائم به صورت زیر است:

$$\text{معادله‌ی خط قائم}: y - ۲ = ۴(x - \frac{\pi}{۲}) \Rightarrow y = ۴x - ۲\pi + ۲$$

$$(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\sin^{-1}x))^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

اثبات ب) می‌دانیم تابع $f(x)=\cos x$ در بازه‌ی $[0,\pi]$ معکوس‌پذیر است و معکوس آن $f^{-1}(x)=\cos^{-1}x$ است. حال بنا به فرمول مشتق تابع معکوس داریم:

$$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\Rightarrow(\cos^{-1}x)'=\frac{1}{-\sin(\cos^{-1}x)}\xrightarrow{\sin^2x=1-\cos^2x}$$

$$(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}(x))}}=\frac{-1}{\sqrt{1-(\cos(\cos^{-1}x))^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

نتایج:

۱) برای هر x حقیقی نیز داریم:

الف) $(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$ ب) $(\cot^{-1}x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

۲) همواره داریم: (u تابعی برحسب x است.)

تابع	مشتق تابع
۱) $y=\sin^{-1}u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۲) $y=\cos^{-1}u$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۳) $y=\tan^{-1}u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
۴) $y=\cot^{-1}u$	$y'=\frac{-u'}{1+u^2}$

مثال

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ (هماهنگ خارج از کشور- دی ۸۶)

ب) $f(x)=\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}(x))$ (تمرین کتاب درسی حسابان)

ج) $f(x)=(1+\tan x)\cos^{-1}x$ (هماهنگ کشوری- شهریور ۹۰)

پاسخ:

الف) $f'(x)=\frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$

ب) $f(x)=(\tan(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}(x)))^2\Rightarrow f'(x)=2(\tan(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x))'(\tan(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x))$

$$f'(x)=2(1+\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x))\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\tan(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x))$$

ج) $f'(x)=(1+\tan^2x)\cos^{-1}x+(1+\tan x)(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}})$

مثال

مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}(\sin^{-۱}۳x)^{۳}$ را در نقطه‌ای به طول $x=\frac{۱}{۶}$ حساب کنید.

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{۱}{۳}\times ۳(\sin^{-۱}۳x)'(\sin^{-۱}۳x)^{۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{\sqrt{۱-۹x^{۲}}}\times(\sin^{-۱}۳x)^{۲}\xrightarrow{x=\frac{۱}{۶}}$$

$$f'(\frac{۱}{۶})=\frac{۳}{\sqrt{۱-\frac{۹}{۳۶}}}\times(\sin^{-۱}\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{\pi^{۲}}{۳۶}\times\frac{۶}{\sqrt{۳}}=\frac{\pi^{۲}}{۶\sqrt{۳}}$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

اگر u تابعی مشتق‌پذیر برحسب x باشد، داریم:

مشتق تابع	تابع
$y'=e^{x}$ $y'=u'e^{u}$	۱) $\begin{cases}y=e^{x}\\ y=e^{u}\end{cases}$
$y'=\frac{۱}{x}$ $y'=\frac{u'}{u}$	۲) $\begin{cases}y=\text{Ln}x\\ y=\text{Ln}u\ \ (u>۰)\end{cases}$
$y'=\frac{۱}{x}$ $y'=\frac{u'}{u}$	۳) $\begin{cases}y=\text{Ln}\lvert x\rvert\ \ (x\in\mathbb{R}-\{۰\})\\ y=\text{Ln}\lvert u\rvert\ \ (u\neq۰)\end{cases}$
$y'=a^{x}\text{Ln}a$ $y'=u'a^{u}\text{Ln}a$	۴) $\begin{cases}y=a^{x}\\ y=a^{u}\end{cases}$
$y'=\frac{۱}{x\text{Ln}a}$ $y'=\frac{u'}{u}\times\frac{۱}{\text{Ln}a}$	۵) $\begin{cases}y=\log_{a}^{x}\\ y=\log_{a}^{u}\end{cases}$

نکته

مشتق تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(p(x))^{g(x)}$ در صورتی که p(x) و g(x) در دامنه‌ی تابع f مثبت باشند، با استفاده از لگاریتم طبیعی مشتق تابع f به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$f(x)=(p(x))^{g(x)}\xrightarrow[\text{(لگاریتم طبیعی)}]{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}\text{Ln }f(x)=\text{Ln}(p(x))^{g(x)}\xrightarrow{\text{Ln}u^{n}=n\text{Ln}u}$$

$$\text{Ln }f(x)=g(x)\text{ Ln }p(x)\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{f'(x)}{f(x)}=g'(x)\text{ Ln }p(x)+\frac{p'(x)}{p(x)}g(x)$$

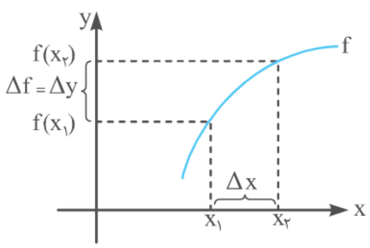
$$\Rightarrow\boxed{f'(x)=f(x)(g'(x)\text{Ln}p(x)+g(x)\frac{p'(x)}{p(x)})}$$

آهنگ تغییرات

آهنگ تغییرات و انواع آن (آهنگ تغییرات متوسط لحظه‌ای)

در بسیاری از مسائل طبیعی همواره با کمیت‌هایی روبه‌رو هستیم که به یکدیگر وابستگی دارند. به عنوان مثال انـدازه‌ی حجـم یک کره به شعاع آن وابسته است. هم‌چنین ارتفاع مایعی که درون یک ظرف استوانه‌ای است، که ته آن سوراخ است و با زمـان تغییر می‌کند و .... در این‌گونه موارد مهم است که بدانیم که مثلاً وقتی شعاع کره تغییر می‌کند، تغییرات حجم کـره چگونـه است و یا با گذشت زمان میزان تغییر ارتفاع مایع در ظرف استوانه‌ای چگونه می‌باشـد. پاسـخ بـه ایـن سـوالات را مـی‌تـوان در مدل‌بندی ریاضی به نام **آهنگ تغییر** جست‌وجو کرد.

آهنگ تغییرات متوسط:



اگر f تابعی برحسب x باشد، اگر مقدار متغیر از $x_{۱}$ به $x_{۲}$ افزایش یابد، مقـدار تابع f از $f(x_{۱})$ به $f(x_{۲})$ تغییر می‌کند در این صورت نسبت تغییرات تـابع f به تغییرات متغیر x را **آهنگ تغییرات متوسط** تابع f در بازه‌ی $[x_{۱},x_{۲}]$ گویند.

داریم:
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{۲})-f(x_{۱})}{x_{۲}-x_{۱}}$$

تذکـر:

اگر $x_{۲}-x_{۱}=h$ فرض کنیم، داریم:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\xlongequal{x_{۲}=x_{۱}+h}\frac{f(x_{۱}+h)-f(x_{۱})}{h}$$

آهنگ تغییرات لحظه‌ای (آنی):

اگر f تابعی برحسب x باشد، حد آهنگ تغییرات متوسط (وقتی تغییرات متغیر به سمت صفر نزدیک شود. $(x_{۲}-x_{۱}=h\to ۰$ **آهنگ تغییرات لحظه‌ای (آنی)** و یا به صورت مختصر، آهنگ تغییرات تابع f در $x=x_{۱}$ گویند، که همان $\mathbf{f'(x_{۱})}$ است. (مقدار مشتق تابع f در $x=x_{۱}$) داریم:

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_{۱}+h)-f(x_{۱})}{h}$$

تذکـر:

منظور از آهنگ تغییر همان آهنگ تغییر آنی یا لحظه‌ای است.

مثـال

تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از $x_{۱}=۳$ به $x_{۲}=۸$ تغییر می‌کند، بـه دست آورید.

(هماهنگ خارج از کشور- خرداد ۹۱)

پاسخ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{۲})-f(x_{۱})}{x_{۲}-x_{۱}}=\frac{f(۸)-f(۳)}{۸-۳}=\frac{\sqrt{۸+۱}-\sqrt{۳+۱}}{۵}=\frac{۳-۲}{۵}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۱}{۵}$$

مثال

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\frac{۲}{x+۱}$ نسبت به متغیر x وقتی از ۱ به ۱/۲ تغییر می‌کند را به دست آورید.

(هماهنگ کشوری- شهریور ۸۷)

پاسخ:

$$\text{آهنگ تغییرات متوسط}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۱/۲)-f(۱)}{۱/۲-۱}=\frac{\frac{۲}{۲/۲}-۱}{۰/۲}=\frac{-۵}{۱۱}$$

علامت **منفی** بدان معنی است که وقتی متغیر x افزایش می‌یابد، مقدار تابع f **کم** می‌شود.

مثال

تابع $f(x)=x^۲+۵x-۶$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی که متغیر از $x_۱=۱$ به $x_۲=۴$ تغییر می‌کند، تعیین کنید.

(هماهنگ کشوری- شهریور ۹۰)

پاسخ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{(۴^۲+۵(۴)-۶)-(۱+۵(۱)-۶)}{۴-۱}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۳۰-۰}{۳}=۱۰$$

مثال

آهنگ تغییرات متوسط حجم مکعبی به ضلع x سانتی‌متر را نسبت به تغییرات x وقتی x از ۲ به ۵ سانتی‌متر تغییر می‌کند، بیابید.

(هماهنگ کشوری- دی ۸۶)

پاسخ: حجم مکعب به ضلع x از رابطه‌ای $V(x)=x^۳$ حاصل می‌شود. بنابراین برای محاسبه‌ی آهنگ تغییرات متوسط آن از $x_۱=۲$ به $x_۲=۵$ داریم:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}=\frac{V(x_۲)-V(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{V(۵)-V(۱)}{۵-۲}=\frac{۱۲۵-۸}{۳}=۳۹$$

مثال

اگر $f(t)=۳۰+۱۰t^۲$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری باشد (t برحسب ساعت)، آهنگ تغییرات متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول، پس از زمان $t_۱=۲$ حساب کنید.

(هماهنگ کشوری- شهریور۸۸)

پاسخ: با توجه به فرض مسأله باید آهنگ تغییرات متوسط جمعیت را بین ساعت‌های $t_۱=۲$ و $t_۲=۷$ به دست آوریم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}=\frac{۳۰+۱۰\times۴۹-(۳۰+۱۰\times۴)}{۵}=۹۰$$

به طور متوسط در ۵ ساعت، ۹۰ باکتری به جمعیت این نوع باکتری اضافه می‌شود.

۳۹. جسمی به فاصله‌ی ۱۸ سانتی‌متر از یک عدسی نازک $(p=18cm)$ به فاصله‌ی کانونی ۶ سانتی‌متر $(f=6cm)$ قرار دارد. اگر جسم با سرعت ۰/۶ سانتی‌متر بر ثانیه به عدسی نزدیک شود، فاصله‌ی تصویر از عدسی (q) چگونه تغییر می‌کند؟ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f})$

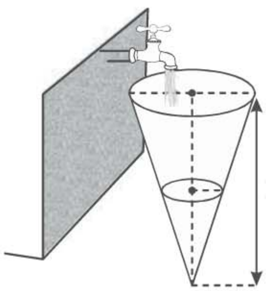
(مشابه سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۴)

۱) با سرعت $0/15\frac{cm}{s}$ به عدسی نزدیک می‌شود.
۲) با سرعت $1/5\frac{cm}{s}$ از عدسی دور می‌شود.
۳) با سرعت $1/5\frac{cm}{s}$ به عدسی نزدیک می‌شود.
۴) با سرعت $0/15\frac{cm}{s}$ از عدسی دور می‌شود.

۴۰. اندازه‌ی شعاع قاعده و ارتفاع مخروطی به گونه‌ای است که حجم آن همواره برابر مقدار ثابتی است. هرگاه شعاع قاعده‌ی این مخروط با سرعت ۰/۵ سانتی‌متر بر ثانیه افزایش یابد در لحظه‌ای که شعاع $\frac{3}{4}$ ارتفاع مخروط است، آهنگ تغییر ارتفاع چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

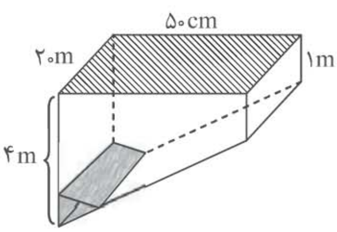
۱) $-\frac{4}{3}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $-\frac{1}{4}$
۴) $\frac{4}{3}$

۴۱. آب با آهنگ 24π متر مکعب بر ثانیه وارد یک مخزن مخروطی، مانند شکل مقابل می‌شود. اگر ارتفاع مخروط ۱۶ متر و قطر قاعده‌ی آن نیز ۱۶ متر باشد، در لحظه‌ای که ارتفاع آب به ۱۲ متر می‌رسد، آهنگ تغییر ارتفاع آب درون مخزن کدام است؟



۱) $\frac{1}{12}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

۴۲. در یک استخر به طول ۵۰ متر و عرض ۲۰ متر، ارتفاع بخش کم‌عمق ۱ متر و ارتفاع بخش عمیق ۴ متر است. آب با سرعت ۰/۰۳ مترمکعب در دقیقه وارد استخر می‌شود. در لحظه‌ای که ارتفاع آب استخر ۱ متر است، سرعت افزایش ارتفاع آب در استخر چند سانتی‌متر بر دقیقه است؟

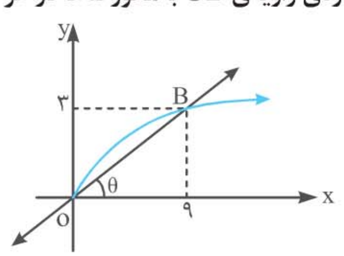


۱) 9×10^{-5}
۲) 8×10^{-5}
۳) 9×10^{-3}
۴) 8×10^{-3}

۴۳. هواپیمایی به طور افقی در ارتفاع ۵ کیلومتری سطح زمین حرکت می‌کند و درست از بالای تلسکوپی که رد آن را می‌گیرد، می‌گذرد. وقتی که زاویه‌ی بالا آمدن تلسکوپ $\frac{\pi}{3}$ است، تغییرات زاویه‌ی α با آهنگ $\frac{\pi}{6}\frac{Rad}{min}$ کم می‌شود. سرعت هواپیما در این لحظه چقدر است؟

۱) $\frac{9\pi}{10}\frac{km}{min}$
۲) $\frac{10\pi}{9}\frac{km}{min}$
۳) $\frac{5\pi}{9}\frac{km}{min}$
۴) $\frac{9\pi}{5}\frac{km}{min}$

۴۴. ذره‌ای روی منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ واقع در ربع اول در حال حرکت است. اگر در نقطه‌ی B به طول ۹، مولفه‌ی سرعت لحظه‌ای روی محور x ها با آهنگ ۰/۹ افزایش یابد، آهنگ تغییر زاویه‌ی θ کدام است؟ (θ اندازه‌ی زاویه‌ی OB با محور x ها در هر لحظه است)



۱) ۰/۱۵ و کاهش می‌یابد.
۲) ۰/۱۵ و افزایش می‌یابد.
۳) ۰/۰۱۵ و کاهش می‌یابد.
۴) ۰/۰۱۵ و افزایش می‌یابد.

۴۵. در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $BC = ۱۰$. اگر اندازه‌ی ساق مثلث $۵\sqrt{۲}$ باشد، آن‌گاه آهنگ تغییر ارتفاع AH نسبت به تغییرات زاویه‌ی B کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

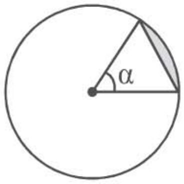
۴۶. اگر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۲۰ سانتی‌متر با سرعت ۰/۱ رادیان بر ثانیه افزایش یابد، در لحظه‌ای که این زاویه برابر $\frac{\pi}{۶}$ است، مساحت مثلث با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

۴۷. طول دو ضلع مثلثی ۴ متر و ۵ متر است و زاویه‌ی میان آن‌ها با آهنگ $۰/۰۶\frac{Rad}{s}$ زیاد می‌شود. وقتی که زاویه‌ی میان ضلع‌ها با طول ثابت $\frac{\pi}{۳}$ است، مساحت مثلث با چه آهنگی زیاد می‌شود؟

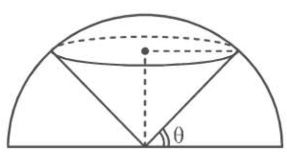
۱) ۰/۶ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۰۳ ۴) ۰/۵

۴۸. در شکل مقابل، α برحسب رادیان است. اگر $r = ۴$ شعاع دایره و آهنگ تغییر α، ۲ درجه بر ثانیه باشد، در لحظه‌ای که $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ باشد، آهنگ تغییر آنی مساحت قسمت هاشورخورده چقدر است؟



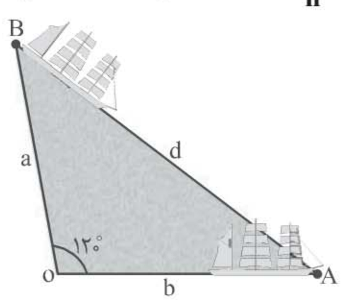
۱) $\frac{\pi(۲-\sqrt{۳})}{۱۸۰}$ ۲) $\frac{\pi(۲-\sqrt{۳})}{۹۰}$ ۳) $\frac{\pi}{۹۰}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۴۵}$

۴۹. مخروطی درون یک نیم‌کره به شعاع ۱۰ محاط شده است. اگر در شکل مقابل θ با آهنگ ۰/۲ رادیان بر ثانیه کاهش یابد، آهنگ کاهش حجم مخروط وقتی θ به $\frac{\pi}{۳}$ می‌رسد، چقدر است؟



۱) $\frac{۱۰۰۰\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱۲۵\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۱۲۵\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۱۰۰۰\pi}{۷}$

۵۰. دو کشتی A, B بر دو مسیر به طور مستقیم در حرکت‌اند و از نقطه‌ی O، با زاویه‌ی $A\hat{O}B = ۱۲۰^\circ$ از یکدیگر دور می‌شوند. در لحظه‌ی معینی که $OA = ۸km$ و $OB = ۶km$ است، کشتی A با آهنگ $۲۰\frac{km}{h}$ حرکت می‌کند و کشتی B با آهنگ $۳۰\frac{km}{h}$ حرکت می‌کند. فاصله‌ی بین آن‌ها با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

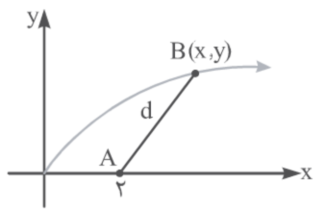


۱) $\frac{۲۶۰}{\sqrt{۳۷}}$ ۲) $\frac{۵۲۰}{\sqrt{۳۷}}$ ۳) $\frac{۲۶۰}{۳\sqrt{۳۷}}$ ۴) $\frac{۵۲۰}{۳\sqrt{۳۷}}$

۵۱. دونده‌ای دور پیستی دایره‌ای شکل به شعاع ۱۰۰ متر با سرعت ثابت $۷\frac{m}{s}$ به سرعت می‌دود. دوست این دونده به فاصله‌ی ۲۰۰ متری مرکز پیست ایستاده است. وقتی که فاصله‌ی این دو دوست ۲۰۰ متر است، فاصله‌ی میان آن‌ها با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

۱) $\frac{۵}{۴}\frac{m}{s}$ ۲) $\frac{۵\sqrt{۱۵}}{۴}\frac{m}{s}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}\frac{m}{s}$ ۴) $\frac{۷\sqrt{۱۵}}{۴}\frac{m}{s}$

۳۸- گزینه‌ی «۴» فرض می‌کنیم ذره در نقطه‌ی $B(x,y)$ روی منحنی $y=\sqrt{x}$ واقع باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی $B(x,y)$ تا نقطه‌ی $A(۲,۰)$ برابر است با:



$$d=AB=\sqrt{(x-۲)^۲+y^۲}\xrightarrow{y=\sqrt{x}}$$

$$d=\sqrt{(x-۲)^۲+x}=\sqrt{x^۲-۳x+۴}$$

با توجه به فرض مسأله $x'_t=۴\frac{cm}{s}$ و d'_t را وقتی $x=۳$ است، محاسبه می‌کنیم.

$$d'_t=\frac{۲x'_tx-۳x'_t}{۲\sqrt{x^۲-۳x+۴}}\Rightarrow d'_t=\frac{۲\times۴\times۳-۳\times۴}{۲\sqrt{۹-۹+۴}}=\frac{۱۲}{۴}=۳\frac{cm}{s}$$

۳۹- گزینه‌ی «۴» با توجه به فرض $f=۶cm$ و $p=۱۸cm$ پس: $\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow q=۹$

یعنی زمانی که جسم در فاصله‌ی ۱۸ سانتی‌متری عدسی قرار دارد، تصویر جسم در فاصله‌ی ۹ سانتی‌متری عدسی قرار دارد. با مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}$ نسبت به زمان و با توجه به ثابت بودن مقدار f داریم: $\frac{q'_t}{q^۲}=\frac{-p'_t}{p^۲}$ یا $\frac{-p'_t}{p^۲}-\frac{q'_t}{q^۲}=۰$

طبق فرض، جسم با سرعت $۰/۶\frac{cm}{s}$ به عدسی نزدیک می‌شود لذا $p'_t=-۰/۶\frac{cm}{s}$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{q'_t}{q^۲}=\frac{-(-۰/۶)}{۱۸^۲}\Rightarrow q'_t=\frac{۰/۶\times۹^۲}{۹^۲\times۲^۲}=\frac{۳}{۲۰}=\frac{۱۵}{۱۰۰}\Rightarrow q'_t=۰/۱۵\frac{cm}{s}$$

چون نزدیک شدن را با علامت منفی نشان دادیم، علامت مثبت نشان می‌دهد تصویر جسم با سرعت $۰/۱۵\frac{cm}{s}$ از عدسی دور می‌شود.

۴۰- گزینه‌ی «۱»

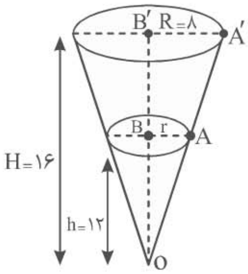
$$V=\frac{\pi}{۳}r^۲h\xrightarrow{\text{نسبت به زمان مشتق می‌گیریم}}\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{۱}{۳}\pi r^۲h)\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{۳}\overbrace{(۲r(\frac{dr}{dt})h+r^۲\frac{dh}{dt})}^{\text{مشتق حاصل ضرب}}$$

چون در صورت مسأله قید شده حجم مقدار ثابتی است، بنابراین $\frac{dV}{dt}=۰$. داریم:

$$۰=\frac{\pi}{۳}(۲r(\frac{dr}{dt})h+r^۲\frac{dh}{dt})\xrightarrow{\text{فاکتور از } r}\frac{\pi}{۳}r(۲(\frac{dr}{dt})h+r(\frac{dh}{dt}))=۰$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض مسئله } r=\frac{۳}{۴}h}\frac{\pi}{۳}r(۲(\frac{dr}{dt})h+\frac{۳}{۴}h(\frac{dh}{dt}))=۰\xrightarrow{\text{فاکتور از } h}$$

$$\frac{\pi}{۳}rh(\frac{۲dr}{dt}+\frac{۳dh}{۴dt})=۰\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{۳}rh=۰ & \text{(غ ق ق)}\\ \frac{۲dr}{dt}+\frac{۳}{۴}\frac{dh}{dt}=۰\xrightarrow{\frac{dr}{dt}=\frac{۱}{۲}}\frac{dh}{dt}=-\frac{۴}{۳}\end{cases}$$



۴۱- گزینه‌ی «۳»

$$OAB \sim OA'B' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h}{H} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{R}{H} = \frac{۸}{۱۶} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}h$$

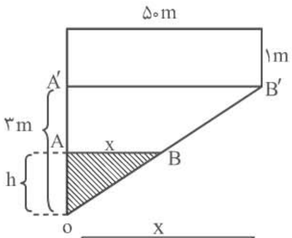
از طرفی حجم آب داخل مخزن، برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h \xrightarrow{r=\frac{۱}{۲}h} V = \frac{\pi}{۱۲}h^{۳}$$

چون آهنگ افزایش حجم آب داخل مخزن $V'_t = ۲۴\pi \frac{m^{۳}}{s}$ می‌باشد، در لحظه‌ای که $h = ۱۲$، داریم:

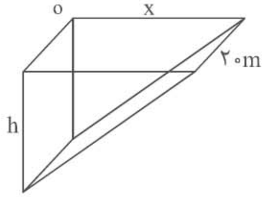
$$V = \frac{\pi}{۱۲}h^{۳} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به زمان}} V'_t = \frac{\pi}{۴}h^{۲}h'_t \xrightarrow{V'_t=۲۴\pi} ۲۴\pi = \frac{\pi}{۴}\times ۱۴۴ \times h'_t \Rightarrow h'_t = \frac{۹۶}{۱۴۴} = \frac{۲}{۳}$$

۴۲- گزینه‌ی «۳»



با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث $OA'B'$ داریم:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{h}{۳} = \frac{x}{۵۰} \Rightarrow x = \frac{۵۰}{۳}h$$

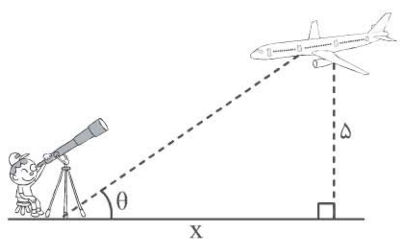


حجم آب درون استخر به صورت یک منشور با قاعده‌ی مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAB است (شکل مقابل). بنابراین برای محاسبه‌ی حجم آن باید مساحت قاعده ضرب در ارتفاع کنیم. (ارتفاع منشور همان عرض استخر می‌باشد.)

$$V = ۲۰ \times \frac{xh}{۲} = ۱۰xh \xrightarrow{x=\frac{۵۰}{۳}h} V = \frac{۵۰۰}{۳}h^{۲} \Rightarrow$$

$$V'_t = \frac{۱۰۰۰}{۳}h \times h'_t \xrightarrow[h=۱]{V'_t=۰/۰۳\frac{m^{۳}}{min}} ۰/۰۳ = \frac{۱۰۰۰}{۳}\times ۱ \times h'_t \Rightarrow h'_t = ۰/۰۰۰۰۹\frac{m}{min} \xrightarrow[(\times ۱۰۰)]{\text{تبدیل به } \frac{cm}{min}} h'_t = ۰/۰۰۹\frac{cm}{min}$$

۴۳- گزینه‌ی «۲»

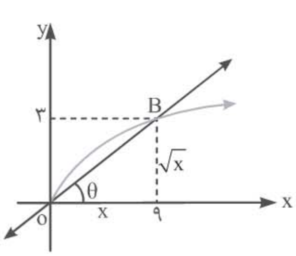


$$\cot\theta = \frac{x}{۵} \xrightarrow[\text{نسبت به زمان}]{\text{مشتق}} -(۱+\cot^{۲}\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۵}\frac{dx}{dt} \xrightarrow{۱+\cot^{۲}\theta=\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}}$$

$$-\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۵}\frac{dx}{dt} \xrightarrow[\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\pi}{۶}]{\theta=\frac{\pi}{۳}}$$

$$(-\frac{۱}{\sin^{۲}\frac{\pi}{۳}})(-\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۵}\frac{dx}{dt} \Rightarrow (-\frac{۱}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}})(-\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۵}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{۱۰\pi}{۹}\frac{km}{min}$$

۴۴- گزینه‌ی «۳»



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۱}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به زمان}}$$

$$(۱+\tan^{۲}\theta)\theta'_t = \frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}x'_t \xrightarrow{\tan\theta=\frac{۱}{\sqrt{x}}} (۱+\frac{۱}{x})\theta'_t = \frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}x'_t$$

$$\xrightarrow[x'_t=۰/۹]{x=۹} (۱+\frac{۱}{۹})\theta'_t = \frac{-۱}{۲\times \cancel{۹}\times ۳}\times\frac{\cancel{۹}}{۱۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۹}\theta'_t = -\frac{۱}{۶۰} \Rightarrow \theta'_t = -۰/۰۱۵$$

بزودی از مجموعه
کتاب‌های موضوعی
منتشر می‌شود

مفاهیم و
تناسب‌های
معنایی

مثلثات

گرامر
Grammar

استوکیومتری
و سایر مسائل شیمی

درک مطلب
Comprehension

ترجمه، تعریب
مفهوم و درک مطلب
عربی کنکور

تجزیه، ترکیب
و اعراب‌گذاری
عربی کنکور

9786005799439

انتشارات مهروماه
۶۶۴۰۸۴۰۰-۳
www.mehromah.ir
sms: ۳۰۰۰۷۲۱۲۰