

مشتق

رحیم قهرمان



به نام پروردگار مهربان



کتاب‌های
موضوعی

عشق

مؤلف: رحیم قهرمان



مهرگان

مقدمه مؤلف

کتاب‌های موضوعی مهرماه برای آن دسته از دانش‌آموزانی تألیف می‌شود که می‌خواهند روی یک موضوع تمرکز کنند و تمام مشکلات خود را با خواندن این کتاب حل کنند. کتابی که در دست دارید، به موضوع مشتق پرداخته، آن هم به دلیل اهمیت بالایی که این مبحث، در امتحانات نهایی و هم در کنکور به خود اختصاص داده است؛ در امتحانات نهایی سال سوم (ریاضی - تجربی) ۷ نمره و در کنکور سراسری نیز ۴ تست مرتبط با مشتق مطرح می‌شود.

ویژگی‌های این کتاب

- ۱ منطبق با آخرین تغییرات کتب درسی (حسابان، حساب و دیفرانسیل، ریاضی ۳ و ریاضی عمومی تجربی)
- ۲ آموزش کامل مفاهیم و اثبات قضایا و فرمول‌های مشتق
- ۳ بررسی سؤالات هماهنگ کشوری (داخل و خارج کشور)
- ۴ در برگرفته‌ی نکات تستی کنکور سراسری داخل و خارج کشور
- ۵ شامل سه فصل همراه با تست‌هایی مرتبط و پاسخ‌هایی کاملاً تشریحی؛ در پاسخ تست‌ها هر جا نیاز است تا مباحث ریاضی پایه مطرح شود، این موارد به عنوان یادآوری گفته شده است تا سطح آموزش و یادگیری دانش‌آموزان را ارتقا دهد.
- ۶ مبحث آهنگ تغییرات به مشتق، این بخش را نیز همراه با مشتق مطرح شده است.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای احمد اختیاری، مدیریت محترم انتشارات مهرماه که در امر تألیف این اثر از هیچ مساعدتی دریغ ننموده‌اند، قدردانی کنم. از استاد گرامی جناب آقای میثم حمزه‌لویی که نظرات علمی ارزشمندی در مورد کتاب ارائه نمودند و سرکار خانم سمیه جباری و مدیر هنری جناب آقای محسن فرهادی کمال تشکر را دارم. با سپاس از آقای جواد محمودی که با دستان هنرمند خود به این اثر جان بخشید و در صفحه‌آرایی و طراحی اشکال کتاب با نهایت دقت سنگ تمام گذاشت و در انتها از سرکار خانم صغری ولدی که زحمت حروف‌چینی کتاب را بر عهده داشتند و سرکار خانم مینا نظری که ویراستاری کتاب را بر عهده داشتند و سرکار خانم زهرا امینیان که با دقت فراوان این کتاب را نمونه‌خوانی کردند سپاس گزارم. شما می‌توانید نظرات و پیشنهادات خود را به نشانی اینترنتی rahimghahreman@yahoo.com یا با ارتباط یا از طریق سامانه پیامک به شماره ۳۰۰۰۷۲۱۲۰ مطرح نمایید.

فهرست

۲۹	مشتق توابع ساده شدنی
۳۰	مشتق تابع قدر مطلق
۳۱	مشتق توابع شامل جزء صحیح
۳۳	قواعد مشتق‌گیری در یک نگاه
	مجموعه تست (۱)
۳۴	قواعد مشتق‌گیری
۳۵	مشتق توابع ساده شدنی
۳۹	مشتق‌گیری از تابع با عامل صفرشونده
۴۰	مشتق توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح
۴۱	تعریف مشتق
۴۵	مشتق چپ و مشتق راست
۴۹	مشتق‌پذیری
۵۴	زاویه‌ی بین دو نیم‌مماس چپ و راست
۵۵	پاسخ‌نامه‌های کلیدی مجموعه تست (۱)
۵۶	پاسخ‌های تشریحی مجموعه تست (۱)
۱۱۰	قاعده‌ی مشتق زنجیری
۱۱۱	مشتق تابع مرکب
۱۱۲	مشتق توابع زوج و فرد
۱۱۳	معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی واقع بر آن
۱۱۶	یافتن طول نقطه‌ی تماس وقتی ضریب زاویه‌ی خط مماس معلوم باشد
۱۱۷	معادله‌ی خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر آن

۸	خط مماس بر منحنی
۸	تعیین خط مماس بر منحنی
۱۰	تعریف مشتق
۱۱	تابع مشتق
۱۱	مشتق‌پذیری و پیوستگی
۱۲	مشتق چپ و مشتق راست
۱۸	نقاط مشتق‌پذیر و مشتق‌ناپذیر توابع مهم
۲۱	مشتق‌پذیری در بازه - دامنه‌ی تابع مشتق
۲۲	بررسی نقاط مشتق‌ناپذیر بر روی نمودار تابع
۲۲	قضیه‌ها و روش‌های محاسبه‌ی تابع مشتق
۲۲	قضیه‌ی (۱): مشتق $f(x) = c$
۲۲	قضیه‌ی (۲): مشتق تابع $f(x) = x^n$
۲۳	قضیه‌ی (۳): مشتق توابع $g(x) = cf(x)$ و $g(x) = f(cx)$
۲۳	قضیه‌ی (۴): مشتق مجموع و تفاضل دو تابع $(f(x) \pm g(x))$
۲۴	قضیه‌ی (۵): مشتق ضرب دو تابع $(f(x).g(x))$
۲۵	قضیه‌ی (۶): مشتق توابع توان‌دار $(f^n(x))$
۲۶	قضیه‌ی (۷): مشتق تقسیم دو تابع $(\frac{f(x)}{g(x)})$
۲۷	قضیه‌ی مشتق توابع مثلثاتی
۲۹	قواعد خاص در مشتق‌گیری از توابع

۱۴۶	مشتق‌گیری ضمنی
۱۴۸	مشتق تابع معکوس
۱۵۰	مشتق توابع معکوس مثلثاتی
۱۵۲	مشتق توابع نمایی و لگاریتمی
۱۵۳	تابع نمایی رشد و زوال
۱۵۴	مشتق مرتبه n ام
۱۵۷	پاسخ‌نامه‌ی کلیدی مجموعه تست (۲)
۱۵۸	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی مجموعه تست (۲)
۲۰۶	آهنگ تغییرات و انواع آن
۲۰۹	سرعت متوسط، سرعت لحظه‌ای و شتاب
۲۱۱	بررسی حرکت یک متحرک به کمک تابع حرکت و مشتق آن
۲۱۳	کاربرد اقتصادی آهنگ تغییر
۲۱۵	آهنگ تغییرات کمیت‌های وابسته
	مجموعه تست (۳)
۲۱۹	آهنگ تغییرات متوسط و لحظه‌ای
۲۲۰	سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای
۲۲۱	کاربرد اقتصادی آهنگ تغییر
۲۲۲	آهنگ تغییرات کمیت‌های وابسته
۲۲۶	پاسخ‌نامه‌ی کلیدی مجموعه تست (۳)
۲۲۷	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی مجموعه تست (۳)

۱۱۸	بررسی اوضاع نسبی دو منحنی یا خط و منحنی
۱۲۰	زاویه‌ی بین دو منحنی یا خط و منحنی
۱۲۲	معادله‌ی خط مماس بر منحنی از نقطه‌ای غیرواقع بر منحنی
۱۲۴	معادله‌ی خط قائم بر منحنی از نقطه‌ای غیرواقع بر منحنی
۱۲۴	مشتق‌گیری ضمنی
۱۲۷	مشتق تابع معکوس
۱۲۸	خط‌های مماس و قائم بر تابع معکوس
۱۲۹	مشتق توابع معکوس مثلثاتی
۱۳۱	مشتق توابع نمایی و لگاریتمی
۱۳۲	تابع نمایی و رشد و زوال
۱۳۴	مشتق مراتب بالاتر
۱۳۵	نکات مشتق مراتب بالاتر
	مجموعه تست (۲)
۱۳۸	قاعده‌ی زنجیری
۱۳۸	مشتق تابع مرکب
۱۴۰	مشتق توابع زوج و فرد
۱۴۱	معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر آن
۱۴۲	معادله‌ی خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر منحنی
۱۴۳	بررسی اوضاع نسبی خط و منحنی (دو منحنی)
۱۴۵	زاویه‌ی بین دو منحنی یا خط و منحنی
۱۴۵	معادلات خطوط مماس و قائم از نقطه‌ای غیرواقع بر منحنی

اراده‌ی انسان معادله‌ایست که همیشه جواب دارد.

the 1990s, the number of people in the world who are under 15 years of age is expected to increase from 1.1 billion to 1.5 billion.

As the world's population grows, the demand for food and other resources will increase. This will put pressure on the environment and on the world's food supply.

One way to meet this demand is to increase the amount of food that is produced. This can be done by using more land for agriculture.

Another way to meet this demand is to increase the efficiency of food production. This can be done by using better farming techniques.

Both of these methods have their own problems. Increasing the amount of land used for agriculture can lead to deforestation and the loss of biodiversity.

Increasing the efficiency of food production can lead to the use of more pesticides and fertilizers, which can be harmful to the environment.

One solution is to use sustainable farming practices. This means using methods that are good for the environment and that can be continued for a long time.

Sustainable farming practices include using natural fertilizers, rotating crops, and using less water.

By using sustainable farming practices, we can meet the world's growing demand for food without harming the environment.

There are many other ways to meet the world's growing demand for food. We need to find ways to use our resources wisely and to protect the environment.

Only then can we ensure that there is enough food for everyone in the world.

The world's population is growing, and the demand for food is increasing. We need to find ways to meet this demand without harming the environment.

One way to do this is to use sustainable farming practices. This means using methods that are good for the environment and that can be continued for a long time.

Sustainable farming practices include using natural fertilizers, rotating crops, and using less water.

By using sustainable farming practices, we can meet the world's growing demand for food without harming the environment.

There are many other ways to meet the world's growing demand for food. We need to find ways to use our resources wisely and to protect the environment.

Only then can we ensure that there is enough food for everyone in the world.

The world's population is growing, and the demand for food is increasing. We need to find ways to meet this demand without harming the environment.

One way to do this is to use sustainable farming practices. This means using methods that are good for the environment and that can be continued for a long time.

Sustainable farming practices include using natural fertilizers, rotating crops, and using less water.

By using sustainable farming practices, we can meet the world's growing demand for food without harming the environment.

There are many other ways to meet the world's growing demand for food. We need to find ways to use our resources wisely and to protect the environment.

Only then can we ensure that there is enough food for everyone in the world.

مشتق تابع مرکب و معادله‌ی خط مماس



یافتن طول نقطه‌ی تماس وقتی ضریب زاویه‌ی خط مماس معلوم باشد

در بعضی از مسائل و تست‌های مربوط به خط مماس، معادله‌ی خط مماس مورد سؤال واقع نمی‌شود، بلکه مختصات نقطه یا نقاطی را از ما می‌خواهند که معادله‌ی خط مماس بر منحنی در آن نقاط دارای شرایط ویژه‌ای باشد. به عنوان مثال در آن نقطه، خط مماس موازی خطی باشد، که معادله‌ی آن داده شده است. لذا برای این منظور از تابع مشتق گرفته و برابر ضریب زاویه‌ی مورد نظر قرار می‌دهیم و طول نقطه‌ی تماس و از آن‌جا نقطه‌ی تماس را می‌یابیم.

مثال

نقطه‌ای از تابع $f(x) = 3x^2 - 4x$ را بیابید که ضریب زاویه‌ی خط مماس از آن خط برابر ۸ شود.

پاسخ: اگر طول نقطه را x_0 در نظر بگیریم، آن‌گاه $f'(x_0) = 8$ ، لذا:

$$f'(x) = 6x - 4 \xrightarrow{f'(x_0) = 8} 6x_0 - 4 = 8 \Rightarrow 6x_0 = 12 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$f(x) = 3x^2 - 4x \xrightarrow{x_0 = 2} f(2) = 3(2)^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$$

پس نقطه‌ی مورد نظر $(2, 4)$ است.

مثال

نقاطی از منحنی $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$ را تعیین کنید که در آن نقاط، خط مماس بر منحنی، افقی باشد.

پاسخ: خط مماس بر منحنی افقی باشد، یعنی شیب خط مماس بر منحنی باید صفر باشد. باید از تابع f مشتق بگیریم، آن را برابر صفر قرار دهیم.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} - 4x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{3} \\ x=3 \Rightarrow f(3) = -1 \end{cases}$$

لذا مختصات نقاط تماس مورد نظر برابر $A(1, \frac{1}{3})$ ، $B(3, -1)$ است.

مثال

خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{\cot x}$ در نقطه‌ای به طول x_0 متعلق به بازه‌ی $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ موازی با خط $y - 2x = 5$ می‌باشد. مجموع مقادیر ممکن برای x_0 را بیابید.

پاسخ: شیب خط مماس $m = 2$ است که باید برابر مشتق تابع در نقطه‌ای به طول (x_0) باشد، یعنی $f'(x_0) = 2$ پس:

$$f(x) = \frac{1}{\cot x} = \tan x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x \xrightarrow{x=x_0} f'(x_0) = 1 + \tan^2 x_0$$

$$\xrightarrow{m=f'(x_0)=2} 1 + \tan^2 x_0 = 2 \Rightarrow \tan^2 x_0 = 1 \Rightarrow \tan x_0 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3\pi}{4} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \\ x_0 = \frac{5\pi}{4} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0 \text{ مجموع مقادیر} = \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = 2\pi$$

معادله‌ی خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر آن

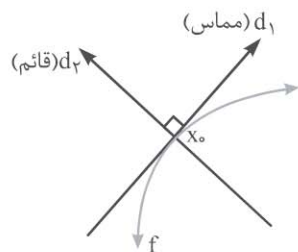
شیب خط قائم بر منحنی در نقطه‌ی $x = x_0$ و معادله‌ی آن عبارت است از:

(۱) وقتی $f'(x_0)$ مخالف صفر است:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

(۲) وقتی $f'(x_0)$ برابر صفر است:

(یعنی خط قائم، موازی محور y ها است.) $x = x_0$



منظور از خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، خطی است که بر خط مماس بر منحنی در این نقطه، عمود باشد. (به شکل مقابل دقت کنید.)

تذکر:

مثال

معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - x$ را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی به دست آورید. (هماهنگ کشوری- فرداد ۹۱)

پاسخ: با توجه به طول نقطه‌ی تماس یعنی $x = 1$ مختصات نقطه‌ی تماس را کامل می‌کنیم.

$$f(x) = 2x^3 - x \xrightarrow{x=1} f(1) = 2(1)^3 - 1 = 1$$

نقطه‌ی تماس $A(1, 1)$ است. از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = 2x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 1 \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = f'(1) = 6(1)^2 - 1 = 5$$

$$m_{\text{مماس}} = 5 \xrightarrow{m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}}} m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{5}$$

در نتیجه معادله‌ی خط قائم به صورت زیر است:

$$y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$$

مثال

معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $y = \sqrt{4 + \cos x}$ را در نقطه‌ی $(\frac{\pi}{2}, 2)$ بنویسید. (هماهنگ شهر تهران- دی ۸۲)

پاسخ: از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \sqrt{4 + \cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{4 + \cos x}} \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = f'(\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{2}}{2\sqrt{4 + \cos \frac{\pi}{2}}} = \frac{-1}{4} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = -\frac{1}{4} \xrightarrow{m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}}} m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4 \Rightarrow m_{\text{قائم}} = 4$$

در نتیجه معادله‌ی خط قائم به صورت زیر است:

$$y - 2 = 4(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = 4x - 2\pi + 2$$



$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\sin^{-1} x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

اثبات ب) می‌دانیم تابع $f(x) = \cos x$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ معکوس‌پذیر است و معکوس آن $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ است. حال بنا به فرمول مشتق تابع معکوس داریم:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \Rightarrow (\cos^{-1} x)' = \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

$$(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1}(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\cos(\cos^{-1} x))^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow (\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

نتایج:

(۱) برای هر x حقیقی نیز داریم:

$$\text{الف) } (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ب) } (\cot^{-1} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

(۲) همواره داریم: (u تابعی بر حسب x است).

تابع	مشتق تابع
۱) $y = \sin^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۲) $y = \cos^{-1} u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۳) $y = \tan^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
۴) $y = \cot^{-1} u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

مثال

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

ب) $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1}(x)\right)$

ج) $f(x) = (1 + \tan x) \cos^{-1} x$

(هماهنگ فارغ از کشور - دی ۸۶)

(تمرین کتاب درسی مسابان)

(هماهنگ کشوری - شهریور ۹۰)

پاسخ:

الف) $f'(x) = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

ب) $f(x) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1}(x)\right)\right)' \Rightarrow f'(x) = 2\left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} x\right)\right)' \left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} x\right)\right)$

$f'(x) = 2\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} x\right)\right) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} x\right)\right)$

ج) $f'(x) = (1 + \tan^2 x) \cos^{-1} x + (1 + \tan x) \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

مثال 

مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{3}(\sin^{-1} 3x)^3$ را در نقطه‌ای به طول $x = \frac{1}{6}$ حساب کنید.

پاسخ: 

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3(\sin^{-1} 3x)' (\sin^{-1} 3x)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \times (\sin^{-1} 3x)^2 \xrightarrow{x=\frac{1}{6}}$$

$$f'\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{\sqrt{1-\frac{9}{36}}} \times \left(\sin^{-1} \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{36} \times \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی 

اگر u تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x باشد، داریم:

تابع	مشتق تابع
۱) $\begin{cases} y = e^x \\ y = e^u \end{cases}$	$y' = e^x$ $y' = u' e^u$
۲) $\begin{cases} y = \ln x \\ y = \ln u \quad (u > 0) \end{cases}$	$y' = \frac{1}{x}$ $y' = \frac{u'}{u}$
۳) $\begin{cases} y = \ln x \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\}) \\ y = \ln u \quad (u \neq 0) \end{cases}$	$y' = \frac{1}{x}$ $y' = \frac{u'}{u}$
۴) $\begin{cases} y = a^x \\ y = a^u \end{cases}$	$y' = a^x \ln a$ $y' = u' a^u \ln a$
۵) $\begin{cases} y = \log_a^x \\ y = \log_a^u \end{cases}$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$ $y' = \frac{u'}{u} \times \frac{1}{\ln a}$

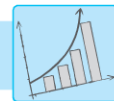
نکته 

مشتق تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = (p(x))^{g(x)}$ در صورتی که $p(x)$ و $g(x)$ در دامنه‌ی تابع f مثبت باشند، با استفاده از لگاریتم طبیعی مشتق تابع f به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$f(x) = (p(x))^{g(x)} \xrightarrow[\text{(لگاریتم طبیعی)}]{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} \ln f(x) = \ln(p(x))^{g(x)} \xrightarrow{\ln u^n = n \ln u} \ln f(x) = g(x) \ln p(x)$$

$$\ln f(x) = g(x) \ln p(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) \ln p(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} g(x)$$

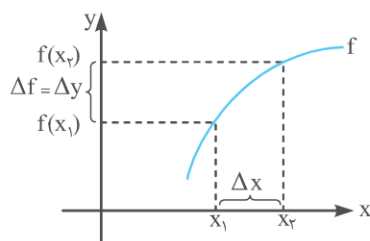
$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = f(x) \left(g'(x) \ln p(x) + g(x) \frac{p'(x)}{p(x)} \right)}$$



آهنگ تغییرات و انواع آن (آهنگ تغییرات متوسط لحظه‌ای)

در بسیاری از مسائل طبیعی همواره با کمیت‌هایی روبه‌رو هستیم که به یکدیگر وابستگی دارند. به عنوان مثال اندازه‌ی حجم یک کره به شعاع آن وابسته است. همچنین ارتفاع مایعی که درون یک ظرف استوانه‌ای است، که ته آن سوراخ است و با زمان تغییر می‌کند و در این‌گونه موارد مهم است که بدانیم که مثلاً وقتی شعاع کره تغییر می‌کند، تغییرات حجم کره چگونه است و یا با گذشت زمان میزان تغییر ارتفاع مایع در ظرف استوانه‌ای چگونه می‌باشد. پاسخ به این سوالات را می‌توان در مدل‌بندی ریاضی به نام **آهنگ تغییر جست‌وجو** کرد.

آهنگ تغییرات متوسط:



اگر f تابعی بر حسب x باشد، اگر مقدار متغیر از x_1 به x_2 افزایش یابد، مقدار تابع f از $f(x_1)$ به $f(x_2)$ تغییر می‌کند در این صورت نسبت تغییرات تابع f به تغییرات متغیر x را **آهنگ تغییرات متوسط** تابع f در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ گویند.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

داریم:

تذکر:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad x_2 = x_1 + h \quad \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

اگر $x_2 - x_1 = h$ فرض کنیم، داریم:

آهنگ تغییرات لحظه‌ای (آنی):

اگر f تابعی بر حسب x باشد، حد آهنگ تغییرات متوسط (وقتی تغییرات متغیر به سمت صفر نزدیک شود. $x_2 - x_1 = h \rightarrow 0$) **آهنگ تغییرات لحظه‌ای (آنی)** و یا به صورت مختصر، آهنگ تغییرات تابع f در $x = x_1$ گویند، که همان $f'(x_1)$ است. (مقدار مشتق تابع f در $x = x_1$) داریم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

تذکر:

منظور از آهنگ تغییر همان آهنگ تغییر آنی یا لحظه‌ای است.

مثال

تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از $x_1 = 3$ به $x_2 = 8$ تغییر می‌کند، به دست آورید.

(هماهنگ فارع از کشور- فرداد ۹۱)

پاسخ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(8) - f(3)}{8 - 3} = \frac{\sqrt{8+1} - \sqrt{3+1}}{5} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$$

مثال

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{2}{x+1}$ نسبت به متغیر x وقتی از ۱ به $1/2$ تغییر می‌کند را به دست آورید.

(همانگ کشوری- شهریور ۸۷)

پاسخ: ✓

$$\text{آهنگ متوسط تغییرات} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1/2) - f(1)}{1/2 - 1} = \frac{\frac{2}{2/2} - 1}{-1/2} = \frac{-1}{-1/2} = 2$$

علامت منفی بدان معنی است که وقتی متغیر x افزایش می‌یابد، مقدار تابع f کم می‌شود.

مثال

تابع $f(x) = x^2 + 5x - 6$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی که متغیر از $x_1 = 1$ به $x_2 = 4$ تغییر می‌کند، تعیین کنید.

(همانگ کشوری- شهریور ۹۰)

پاسخ: ✓

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(4^2 + 5(4) - 6) - (1^2 + 5(1) - 6)}{4 - 1} = \frac{30 - 0}{3} = 10$$

مثال

آهنگ تغییرات متوسط حجم مکعبی به ضلع x سانتی‌متر را نسبت به تغییرات x وقتی x از ۲ به ۵ سانتی‌متر تغییر می‌کند، بیابید.

(همانگ کشوری- دی ۸۶)

پاسخ: ✓ حجم مکعب به ضلع x از رابطه‌ای $V(x) = x^3$ حاصل می‌شود. بنابراین برای محاسبه‌ی آهنگ تغییرات متوسط آن از $x_1 = 2$ به $x_2 = 5$ داریم:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(x_2) - V(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{V(5) - V(2)}{5 - 2} = \frac{125 - 8}{3} = 39$$

مثال

اگر $f(t) = 30 + 10t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری باشد (t برحسب ساعت)، آهنگ تغییرات متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول، پس از زمان $t_1 = 2$ حساب کنید.

(همانگ کشوری- شهریور ۸۸)

پاسخ: ✓ با توجه به فرض مسأله باید آهنگ تغییرات متوسط جمعیت را بین ساعت‌های $t_1 = 2$ و $t_2 = 7$ به دست آوریم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{30 + 10 \times 49 - (30 + 10 \times 4)}{7 - 2} = 90$$

به طور متوسط در ۵ ساعت، ۹۰ باکتری به جمعیت این نوع باکتری اضافه می‌شود.

۳۹. جسمی به فاصله‌ی ۱۸ سانتی‌متر از یک عدسی نازک ($p = 18 \text{ cm}$) به فاصله‌ی کانونی ۶ سانتی‌متر ($f = 6 \text{ cm}$) قرار دارد. اگر جسم با سرعت ۶٪ سانتی‌متر بر ثانیه به عدسی نزدیک شود، فاصله‌ی تصویر از عدسی (q) چگونه تغییر می‌کند؟

(مشابه سراسری ریاضی فارغ از کشور ۸۴)

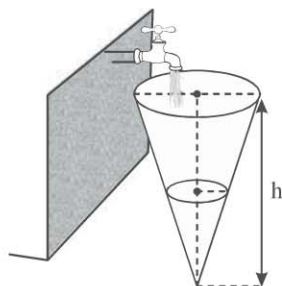
$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}\right)$$

(۱) با سرعت $\frac{15}{100} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ به عدسی نزدیک می‌شود. (۲) با سرعت $\frac{15}{100} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ از عدسی دور می‌شود.

(۳) با سرعت $\frac{15}{100} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ به عدسی نزدیک می‌شود. (۴) با سرعت $\frac{15}{100} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ از عدسی دور می‌شود.

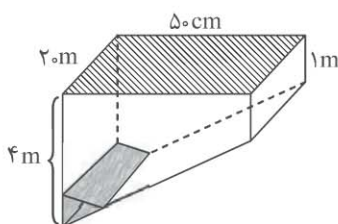
۴۰. اندازه‌ی شعاع قاعده و ارتفاع مخروطی به گونه‌ای است که حجم آن همواره برابر مقدار ثابتی است. هرگاه شعاع قاعده‌ی این مخروط با سرعت ۵٪ سانتی‌متر بر ثانیه افزایش یابد در لحظه‌ای که شعاع $\frac{3}{4}$ ارتفاع مخروط است، آهنگ تغییر ارتفاع چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

(۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$



۴۱. آب با آهنگ 24π متر مکعب بر ثانیه وارد یک مخزن مخروطی، مانند شکل مقابل می‌شود. اگر ارتفاع مخروط ۱۶ متر و قطر قاعده‌ی آن نیز ۱۶ متر باشد، در لحظه‌ای که ارتفاع آب به ۱۲ متر می‌رسد، آهنگ تغییر ارتفاع آب درون مخزن کدام است؟

(۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$



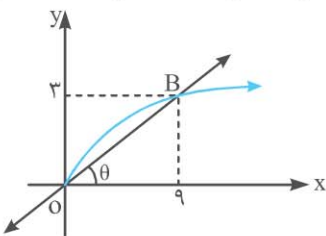
۴۲. در یک استخر به طول ۵۰ متر و عرض ۲۰ متر، ارتفاع بخش کم عمق ۱ متر و ارتفاع بخش عمیق ۴ متر است. آب با سرعت ۰٫۳٪ متر مکعب در دقیقه وارد استخر می‌شود. در لحظه‌ای که ارتفاع آب استخر ۱ متر است، سرعت افزایش ارتفاع آب در استخر چند سانتی‌متر بر دقیقه است؟

(۱) 9×10^{-5} (۲) 8×10^{-5} (۳) 9×10^{-3} (۴) 8×10^{-2}

۴۳. هواپیمایی به طور افقی در ارتفاع ۵ کیلومتری سطح زمین حرکت می‌کند و درست از بالای تلسکوپی که رد آن را می‌گیرد، می‌گذرد. وقتی که زاویه‌ی بالا آمدن تلسکوپ $\frac{\pi}{3}$ است، تغییرات زاویه‌ی α با آهنگ $\frac{\pi \text{ Rad}}{6 \text{ min}}$ کم می‌شود. سرعت هواپیما در این لحظه چقدر است؟

(۱) $\frac{9\pi \text{ km}}{10 \text{ min}}$ (۲) $\frac{10\pi \text{ km}}{9 \text{ min}}$ (۳) $\frac{5\pi \text{ km}}{9 \text{ min}}$ (۴) $\frac{9\pi \text{ km}}{5 \text{ min}}$

۴۴. ذره‌ای روی منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ واقع در ربع اول در حال حرکت است. اگر در نقطه‌ی B به طول ۹، مولفه‌ی سرعت لحظه‌ای روی محور x ها با آهنگ ۹٪ افزایش یابد، آهنگ تغییر زاویه‌ی θ کدام است؟ (θ اندازه‌ی زاویه‌ی OB با محور x ها در هر لحظه است)



- (۱) ۱۵٪ و کاهش می‌یابد.
(۲) ۱۵٪ و افزایش می‌یابد.
(۳) ۱۵٪ و کاهش می‌یابد.
(۴) ۱۵٪ و افزایش می‌یابد.

۴۵. در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $BC = 10$. اگر اندازه‌ی ساق مثلث $5\sqrt{2}$ باشد، آنگاه تغییر ارتفاع AH نسبت به تغییرات زاویه‌ی B کدام است؟

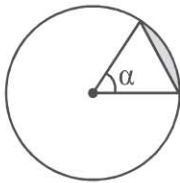
- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $10\sqrt{2}$ (۳) ۲۰ (۴) ۱۰

۴۶. اگر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۲۰ سانتی‌متر با سرعت $1^\circ/\text{s}$ رادیان بر ثانیه افزایش یابد، در لحظه‌ای که این زاویه برابر $\frac{\pi}{6}$ است، مساحت مثلث با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۱۰ (۳) ۴۰ (۴) ۲۰

۴۷. طول دو ضلع مثلثی ۴ متر و ۵ متر است و زاویه‌ی میان آن‌ها با آهنگ $\frac{\text{Rad}}{\text{s}} 6^\circ/\text{s}$ زیاد می‌شود. وقتی که زاویه‌ی میان ضلع‌ها با طول ثابت $\frac{\pi}{3}$ است، مساحت مثلث با چه آهنگی زیاد می‌شود؟

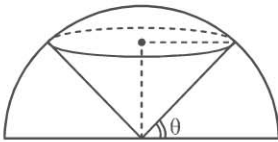
- (۱) $6^\circ/\text{s}$ (۲) $3^\circ/\text{s}$ (۳) $3^\circ/\text{s}$ (۴) $5^\circ/\text{s}$



۴۸. در شکل مقابل، α برحسب رادیان است. اگر $r = 4$ شعاع دایره و آهنگ تغییر α ، ۲ درجه بر ثانیه باشد، در لحظه‌ای که $\alpha = \frac{\pi}{3}$ باشد، آهنگ تغییر آبی مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟

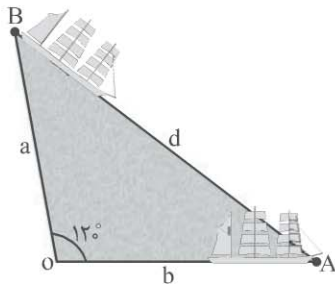
- (۱) $\frac{\pi(2-\sqrt{3})}{180}$ (۲) $\frac{\pi(2-\sqrt{3})}{90}$ (۳) $\frac{\pi}{90}$ (۴) $\frac{2\pi}{45}$

۴۹. مخروطی درون یک نیم‌کره به شعاع ۱۰ محاط شده است. اگر در شکل مقابل θ با آهنگ $2^\circ/\text{s}$ رادیان بر ثانیه کاهش یابد، آهنگ کاهش حجم مخروط وقتی θ به $\frac{\pi}{3}$ می‌رسد، چقدر است؟



- (۱) $\frac{1000\pi}{3}$ (۲) $\frac{125\pi}{3}$ (۳) $\frac{125\pi}{4}$ (۴) $\frac{1000\pi}{7}$

۵۰. دو کشتی A ، B بر دو مسیر به طور مستقیم در حرکت‌اند و از نقطه‌ی O ، با زاویه‌ی $\angle AOB = 12^\circ$ از یکدیگر دور می‌شوند. در لحظه‌ی معینی که $OA = 8\text{ km}$ و $OB = 6\text{ km}$ است، کشتی A با آهنگ $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ حرکت می‌کند و کشتی B با آهنگ $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ حرکت می‌کند. فاصله‌ی بین آن‌ها با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



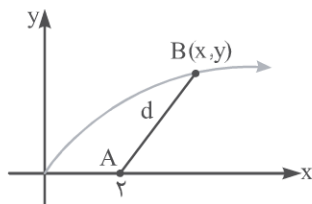
- (۱) $\frac{260}{\sqrt{37}}$ (۲) $\frac{520}{\sqrt{37}}$ (۳) $\frac{260}{3\sqrt{37}}$ (۴) $\frac{520}{3\sqrt{37}}$

۵۱. دنده‌ای دور پیستی دایره‌ای شکل به شعاع ۱۰۰ متر با سرعت ثابت $7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به سرعت می‌دود. دوست این دنده به فاصله‌ی ۲۰۰ متری مرکز پیست ایستاده است. وقتی که فاصله‌ی این دو دوست ۲۰۰ متر است، فاصله‌ی میان آن‌ها با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

- (۱) $\frac{5}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (۲) $\frac{5\sqrt{15}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (۳) $\frac{\sqrt{15}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (۴) $\frac{7\sqrt{15}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$



۳۸- گزینه‌ی «۴» فرض می‌کنیم ذره در نقطه‌ی $B(x, y)$ روی منحنی $y = \sqrt{x}$ واقع باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی $B(x, y)$ تا نقطه‌ی $A(2, 0)$ برابر است با:



$$d = AB = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \xrightarrow{y=\sqrt{x}}$$

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

با توجه به فرض مسأله $x'_t = 4 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ و d'_t را وقتی $x = 3$ است، محاسبه می‌کنیم.

$$d'_t = \frac{2x'_t x - 3x'_t}{2\sqrt{x^2 - 3x + 4}} \Rightarrow d'_t = \frac{2 \times 4 \times 3 - 3 \times 4}{2\sqrt{9 - 9 + 4}} = \frac{12}{4} = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

۳۹- گزینه‌ی «۴» با توجه به فرض $f = 6 \text{ cm}$ و $p = 18 \text{ cm}$ پس: $\frac{1}{18} + \frac{1}{q} = \frac{1}{6} \Rightarrow q = 9$

یعنی زمانی که جسم در فاصله‌ی ۱۸ سانتی‌متری عدسی قرار دارد، تصویر جسم در فاصله‌ی ۹ سانتی‌متری عدسی قرار دارد. با

مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ نسبت به زمان و با توجه به ثابت بودن مقدار f داریم: $\frac{-p'_t}{p^2} - \frac{q'_t}{q^2} = 0$ یا $\frac{q'_t}{q^2} = \frac{-p'_t}{p^2}$

طبق فرض، جسم با سرعت $\frac{6}{\text{s}} \text{ cm}$ به عدسی نزدیک می‌شود لذا $p'_t = -\frac{6}{\text{s}} \text{ cm}$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{q'_t}{q^2} = \frac{-(-6)}{18^2} \Rightarrow q'_t = \frac{6 \times 9^2}{9^2 \times 2^2} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} \Rightarrow q'_t = \frac{15}{100} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

چون نزدیک شدن را با علامت منفی نشان دادیم، علامت مثبت نشان می‌دهد تصویر جسم با سرعت $\frac{15}{100} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ از عدسی دور می‌شود.

۴۰- گزینه‌ی «۱»

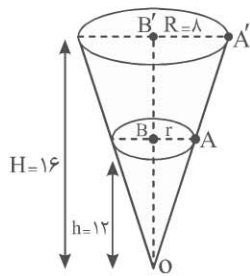
$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \xrightarrow{\text{نسبت به زمان مشتق می‌گیریم}} \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left(2r \left(\frac{dr}{dt} \right) h + r^2 \left(\frac{dh}{dt} \right) \right)$$

چون در صورت مسأله قید شده حجم مقدار ثابتی است، بنابراین $\frac{dV}{dt} = 0$. داریم:

$$0 = \frac{\pi}{3} \left(2r \left(\frac{dr}{dt} \right) h + r^2 \left(\frac{dh}{dt} \right) \right) \xrightarrow{\text{فاکتور از } r} \frac{\pi}{3} r \left(2 \left(\frac{dr}{dt} \right) h + r \left(\frac{dh}{dt} \right) \right) = 0$$

$$\xrightarrow{r = \frac{3}{4} h \text{ طبق فرض مسئله}} \frac{\pi}{3} r \left(2 \left(\frac{dr}{dt} \right) h + \frac{3}{4} h \left(\frac{dh}{dt} \right) \right) = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } h} \frac{\pi}{3} r h \left(2 \left(\frac{dr}{dt} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{dh}{dt} \right) \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{3} r h \left(2 \left(\frac{dr}{dt} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{dh}{dt} \right) \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} r h = 0 & (\text{غ ق ق}) \\ 2 \frac{dr}{dt} + \frac{3}{4} \frac{dh}{dt} = 0 \xrightarrow{\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}} \frac{dh}{dt} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$



۴۱- گزینه‌ی «۳»

$$OAB \sim OA'B' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h}{H} \Rightarrow \frac{r}{16} = \frac{12}{16} \Rightarrow r = \frac{3}{4}h$$

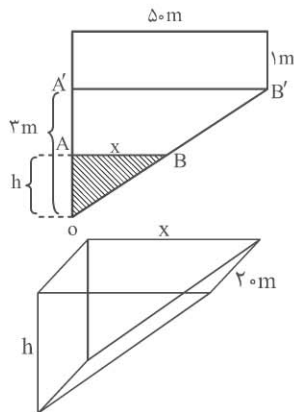
از طرفی حجم آب داخل مخزن، برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{r=\frac{3}{4}h} V = \frac{\pi}{12} h^3$$

چون آهنگ افزایش حجم آب داخل مخزن $V_t' = 24\pi \frac{m^3}{s}$ می‌باشد، در لحظه‌ای که $h=12$ داریم:

$$V = \frac{\pi}{12} h^3 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به زمان}} V_t' = \frac{\pi}{4} h^2 h_t' \xrightarrow{V_t'=24\pi} 24\pi = \frac{\pi}{4} \times 144 \times h_t' \Rightarrow h_t' = \frac{96}{144} = \frac{2}{3}$$

۴۲- گزینه‌ی «۳»



با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث $OA'B'$ داریم:

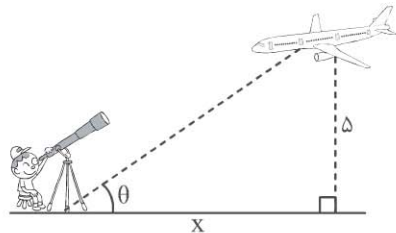
$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{h}{1} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = \frac{50}{3}h$$

حجم آب درون استخر به صورت یک منشور با قاعده‌ی مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAB است (شکل مقابل). بنابراین برای محاسبه‌ی حجم آن باید مساحت قاعده ضرب در ارتفاع کنیم. (ارتفاع منشور همان عرض استخر می‌باشد.)

$$V = 20 \times \frac{xh}{2} = 10 \times xh \xrightarrow{x=\frac{50}{3}h} V = \frac{500}{3} h^2 \Rightarrow$$

$$V_t' = \frac{1000}{3} h \times h_t' \xrightarrow{\frac{V_t' = 0.3 \frac{m^3}{min}}{h=1}} 0.3 = \frac{1000}{3} \times 1 \times h_t' \Rightarrow h_t' = 0.0009 \frac{m}{min} \xrightarrow{\text{تبدیل به } \frac{cm}{min} \text{ به } (\times 100)} h_t' = 0.09 \frac{cm}{min}$$

۴۳- گزینه‌ی «۲»

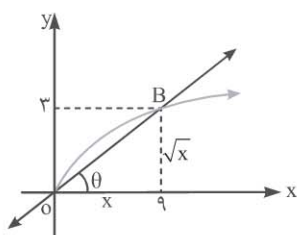


$$\cot \theta = \frac{x}{\delta} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به زمان}} -(1 + \cot^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\delta} \frac{dx}{dt} \xrightarrow{1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\delta} \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\pi}{6}} \rightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{3}}\right)\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\delta} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \left(-\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right)\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\delta} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{10\pi}{9} \frac{km}{min}$$

۴۴- گزینه‌ی «۳»



$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به زمان}} \rightarrow$$

$$(1 + \tan^2 \theta) \theta_t' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} x_t' \xrightarrow{\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{x}}} \rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right) \theta_t' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} x_t'$$

$$\xrightarrow{\frac{x=9}{x_t' = 0.9}} \rightarrow \left(1 + \frac{1}{9}\right) \theta_t' = \frac{-1}{2 \times 9 \times 3} \times \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{10}{9} \theta_t' = -\frac{1}{60} \Rightarrow \theta_t' = -0.015$$

بزودی از مجموعه
کتاب‌های موضوعی
منتشر می‌شود

مفاهیم و
تناسب‌های
معنایی

مثلثات

گرامر
Grammar

استوکیومتری
و سایر مسائل شیمی

درک مطلب
Comprehension

ترجمه، تعریب
مفهوم درک مطلب
عربی کنکور

تجزیه، ترکیب
و اعراب‌گذاری
عربی کنکور

