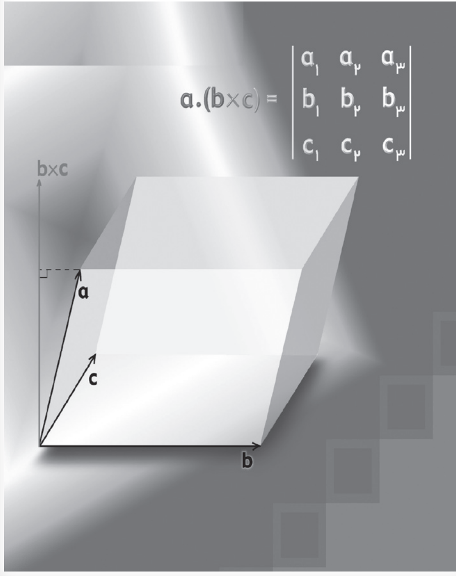


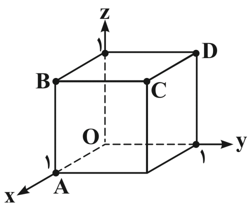
هندسه تحلیلی و جبر خطی

فصل اول: بردارها — ۱۸۶ تست

آزمون اول

نقطه و بردار در فضای سه‌بعدی

سطح (I)



۱- شکل مقابل، یک مکعب به ضلع واحد است. مختصات کدام نقطه صحیح نیست؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $A(1,0,0)$ ۲) $B(1,0,1)$ ۳) $C(1,1,0)$ ۴) $D(0,1,1)$

۲- نقطه‌ی $A(1,2,3)$ مفروض است. کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) تصویر A روی محور xها، نقطه‌ی $(1,0,0)$ است.
۲) تصویر A روی صفحه‌ی xy، نقطه‌ی $(1,2,0)$ است.
۳) قرینه‌ی A نسبت به محور zها، نقطه‌ی $(1,2,-3)$ است.
۴) قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی yz، نقطه‌ی $(-1,2,3)$ است.

۳- نوع مثلثی که رأس‌هایش $A(1,0,1)$، $B(1,1,1)$ و $C(1,1,0)$ باشند، کدام است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین

۴- اگر سه نقطه‌ی $A(1,2,-1)$، $B(3,0,1)$ و $C(1,2,1)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، طول میانه‌ی AM کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۵- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2,-2,3)$ نسبت به نقطه‌ی $M(2,0,1)$، از محور yها چه فاصله‌ای دارد؟ (مشابه آزاد ۹۱)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۳

۶- چند نقطه روی محور Ox وجود دارند که از نقطه‌ی $A(1,2,3)$ به فاصله‌ی $\sqrt{5}$ باشند؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۷- اگر بردار $a=(1,2,-1)$ قطر یک مکعب باشد، طول یال مکعب کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۸- بردار $a=(1,2,3)$ مفروض است. کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) تصویر $\vec{a}$ روی محور Oy، بردار $(0,2,0)$ است.
۲) تصویر $\vec{a}$ روی صفحه‌ی xz، بردار $(1,-2,3)$ است.
۳) قرینه‌ی $\vec{a}$ نسبت به محور Oz، بردار $(-1,-2,3)$ است.
۴) قرینه‌ی $\vec{a}$ نسبت به صفحه‌ی yz، بردار $(-1,2,3)$ است.

۹- نقاط $A(1,2,-1)$، $B(2,0,1)$، $C(3,1,2)$ و D مفروض‌اند. اگر بردارهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ مساوی باشند، اندازه‌ی تصویر بردار $\overrightarrow{AD}$ روی صفحه‌ی xy کدام است؟

۱) ۳ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۰- نقاط $A(6,-1,6)$، $B(1,-1,1)$ و M در رابطه‌ی $2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{BM}$ صدق می‌کنند. فاصله‌ی نقطه‌ی M از صفحه‌ی xz کدام است؟

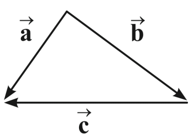
۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{10}$ ۳) ۳ ۴) ۱

۱۱- اگر دو بردار $v_1=(2,1,m+1)$ و $v_2=(-1,2k,1)$ موازی باشند، آن‌گاه m و k برابر است با:

۱) $\begin{cases} m=-3 \\ k=\frac{-1}{4} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} m=-3 \\ k=\frac{1}{4} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} m=3 \\ k=\frac{1}{4} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} m=3 \\ k=-\frac{1}{4} \end{cases}$

۱۲- اگر $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{MP}+3\overrightarrow{PN}=\vec{0}$، آن‌گاه زاویه‌ی بین دو بردار $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{MN}$ چند درجه است؟ (سراسری تجربی ۸۸ خارج از کشور)

۱) صفر ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸۰



۱۳- در شکل مقابل اگر طول بردارهای a، b و c به‌ترتیب ۳، ۵ و ۷ باشد، اندازه‌ی بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۴- در مستطیل ABCD حاصل $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$ کدام است؟

۱) $۲\overrightarrow{BC}$ ۲) $\overline{o}$ ۳) $۲\overrightarrow{DA}$ ۴) $۲\overrightarrow{AB}$

۱۵- اگر $\vec{v}_1=۲\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}_۲=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ باشد، حاصل $\dfrac{|\vec{v}_1-۲\vec{v}_۲|}{|\vec{v}_1+۲\vec{v}_۲|}$ کدام است؟ (آزاد ۸۱)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۶- بردارهای $a=(-۱،۱،۱)$ و $b=(۲،-۱،۳)$ دو ضلع یک مثلث‌اند. طول ضلع سوم مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۴}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۷- اگر $\vec{a}=۲m\vec{i}-m\vec{j}+۲m\vec{k}$ برداری یکه باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\pm\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\pm\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) ±۱ ۴) $\pm\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۸- اگر $\vec{a}=(-۱،۲،۰)$ و $\vec{b}=(۱،۱،-۲)$، بردار یکه‌ی نظیر بردار $\vec{a}-۲\vec{b}$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳},\frac{-۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۲) $(-\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۳) $(-\frac{۳}{۵},۰,\frac{۴}{۵})$ ۴) $(-\frac{۴}{۵},\frac{۳}{۵},۰)$

سطح (۲)

۱۹- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A(x،y،z) از محور xها، محور yها و صفحه‌ی xy به‌ترتیب برابر $\sqrt{۱۳}$، $\sqrt{۱۴}$ و ۳ باشد، فاصله‌ی A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۲۰- اگر چهار نقطه‌ی A(۱،۲،-۱)، B(۲،-۱،۱)، C(۳،۰،۲) و D، رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD بوده و نقطه‌ی G(a،b،c) مرکزثقل مثلث ACD باشد، مقدار a + b + c کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\dfrac{۵}{۳}$ ۴) $\dfrac{۸}{۳}$

۲۱- مکان‌هندسی نقاطی از صفحه‌ی xy که از نقطه‌ی A(۱،۲،-۳) به فاصله‌ی ۵ باشند کدام است؟

۱) نقطه ۲) دایره ۳) کره ۴) تهی

۲۲- اگر طول تصویر قائم بردار $a=(a_1،a_۲،a_۳)$ بر صفحه‌های xy، yz و xz به‌ترتیب ۳، ۲ و $\sqrt{۱۱}$ باشد، $a_۲$ کدام است؟

۱) ±۱ ۲) $\pm\sqrt{۳}$ ۳) $\pm۲\sqrt{۲}$ ۴) $\pm\sqrt{۲}$

۲۳- بردار a = (m - ۱،n + ۲،m + n) بر صفحه‌ی xy عمود است. در این‌صورت:

۱) بردار b = (۲m + n،m،n - m) با محور Oy موازی است.

۲) بردار c = (m،n + ۲،۲m - n) با صفحه‌ی xy موازی است.

۳) بردار d = (۲،۲m + n،m - ۱) با محور Ox موازی است.

۴) بردار e = (m،n،۲m + n) با صفحه‌ی xz موازی است.

۲۴- بردار a با بردار b = (۲،۱،-۲) موازی است. اگر $|\vec{a}|=۶$، مجموع مؤلفه‌های $\vec{a}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ±۲ ۴) ±۳

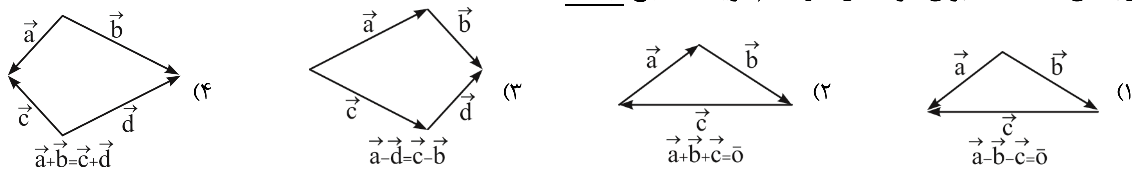
۲۵- دو بردار a = (۰،۳،m) و b = (۳n - ۶،n + ۳،m + ۲) با هم موازی‌اند. حاصل m + n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۶- اگر سه نقطه‌ی A(۱،۲،-۱)، B(۲،m،۱) و C(n،-۱،۳) روی یک خط باشند، mn کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۳}{۴}$ ۴) $\dfrac{۴}{۳}$

۲۷- رابطه‌ی داده شده برای هر شکل، در کدام گزینه صحیح نیست؟



۲۸- اگر چهار بردار $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ در تساوی $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})$ صدق کنند، چهارضلعی ABCD همواره کدام است؟ $(k>۱)$ (سراسری تجربی ۷۳)

۱) ذوزنقه ۲) لوزی ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) مستطیل

۲۹- به ازای کدام مقدار m، بردار $a=(۱،۲،m)$ را می‌توان به‌صورت مجموع دو بردار در راستای بردارهای $(۲،۱-،۰)$ و $(۲،۳،۱-)$ نوشت؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۳۰- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر باشند، زاویه‌ی بین $\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\vec{v}=\vec{a}|\vec{b}|+\vec{b}|\vec{a}|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) حاده ۳) قائمه ۴) منفرجه

۳۱- اگر AM، BN و CP میانه‌های مثلث ABC باشند، حاصل $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$ کدام است؟

۱) $\overrightarrow{AB}$ ۲) $\overrightarrow{AC}$ ۳) $۳\overrightarrow{AM}$ ۴) $\vec{o}$

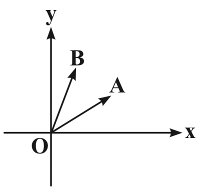
۳۲- در مثلث ABC نقطه‌ی G محل برخورد میانه‌هاست. حاصل $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ کدام است؟

۱) $۳\overrightarrow{GA}$ ۲) $\vec{o}$ ۳) $۳\overrightarrow{BC}$ ۴) $\overrightarrow{AB}$

۳۳- اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b منفرجه باشد، آن‌گاه:

۱) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$ ۲) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$ ۳) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ۴) $(\vec{a}+\vec{b})\parallel(\vec{a}-\vec{b})$

۳۴- دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ در فضای $\mathbb{R}^۲$ با طول‌های مساوی، با محور Ox به‌ترتیب زاویه‌های ۴۳° و ۷۵° می‌سازند. زاویه‌ی $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ با محور Ox چند درجه است؟



۱) ۶۰ ۲) ۵۸ ۳) ۵۷ ۴) ۵۹

۳۵- بردارهای $u=(۲،۱-،۱)$ و $v=(-۴،۳،۳)$ قطرهای یک متوازی‌الاضلاع‌اند. اندازه‌ی ضلع کوچک‌تر متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۴}$ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۶}$

۳۶- اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+m\vec{j}+۳\vec{k}$ و $\vec{e}_a=n\vec{i}+\frac{\sqrt{۳}}{۴}\vec{j}+p\vec{k}$ باشد، مقدار $m+n+p$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}-\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}+\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۴}-\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۴}+\sqrt{۳}$

سطح (۳)

۳۷- سه نقطه‌ی $A(۲،۱،-۱)$، $B(۱،-۳،۲)$ و $C(x،y،z)$ در فضا مفروض‌اند. حداقل مقدار $|AC|+|BC|$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۲۶}$ ۴) ۵

۳۸- چند نقطه مانند M در فضا وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $A(-۲،۲،۱)$ برابر ۳ و از نقطه‌ی $B(۱،۲،-۳)$ برابر ۴ باشد؟

۱) دو ۲) یک ۳) بی‌شمار ۴) صفر

۳۹- $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر و ناموازی‌اند. به ازای کدام مقدار n، بردارهای $\vec{u}=۲\vec{a}-۳\vec{b}$ و $\vec{v}=۳\vec{a}+(n-۱)\vec{b}$ موازی‌اند؟

۱) $-\frac{۲}{۷}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۷}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

۴۰- نقطه‌ی M روی ضلع BC از مثلث ABC به‌گونه‌ای قرار دارد که $۲\overrightarrow{BM} = ۳\overrightarrow{MC}$. کدام رابطه صحیح است؟

۱) $\overrightarrow{AM} = \frac{۳}{۵}\overrightarrow{AB} + \frac{۲}{۵}\overrightarrow{AC}$
۲) $\overrightarrow{AM} = \frac{۲}{۵}\overrightarrow{AB} + \frac{۳}{۵}\overrightarrow{AC}$
۳) $\overrightarrow{AM} = \frac{۳}{۵}\overrightarrow{AB} - \frac{۲}{۵}\overrightarrow{AC}$
۴) $\overrightarrow{AM} = \frac{۲}{۵}\overrightarrow{AB} - \frac{۳}{۵}\overrightarrow{AC}$

۴۱- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نقطه‌ی M محل برخورد قطرها و P نقطه‌ی دلخواهی از فضا می‌باشـد. حاصـل $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ کدام است؟

۱) $\overline{o}$
۲) $۲\overrightarrow{PM}$
۳) $۳\overrightarrow{PM}$
۴) $۴\overrightarrow{PM}$

۴۲- در شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ حاصل $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$ کدام است؟

۱) $۳\overrightarrow{AD}$
۲) $۳\overrightarrow{BC}$
۳) $۲\overrightarrow{AD}$
۴) $۲\overrightarrow{BC}$

۴۳- در شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ حاصل $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ کدام است؟

۱) $۲\overrightarrow{AD}$
۲) $۳\overrightarrow{AD}$
۳) $۴\overrightarrow{AD}$
۴) $۵\overrightarrow{BC}$

۴۴- اگر در ذوزنقه‌ی $ABCD$ داشته باشیم $AD = DC = BC = \frac{AB}{۲}$، در این‌صورت حاصل $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ کدام است؟

۱) $\overrightarrow{DC}$
۲) $\overrightarrow{CD}$
۳) $\frac{۳}{۴}\overrightarrow{CD}$
۴) $\frac{۳}{۴}\overrightarrow{DC}$

۴۵- بردارهای $a = (۱،۲،-۲)$ و $b = (۳،۰،۴)$ مفروض‌اند. کدام بردار در راستای نیمساز زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است؟

۱) $(۱۴،۱۰،۱)$
۲) $(۳،۵،۲)$
۳) $(۳،۲،-۱)$
۴) $(۷،۵،۱)$

۴۶- اگر زاویه‌ی بین بردارهای a و b برابر $\frac{\pi}{۴}$ و $|\vec{b}| = ۲|\vec{a}|$ باشد، زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}|\vec{b}| - \vec{b}|\vec{a}|$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۸}$
۲) $\frac{۵\pi}{۶}$
۳) $\frac{۳\pi}{۸}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

آزمون اول

نقطه و بردار در فضای سه بعدی

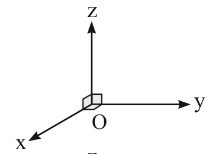
سطح (۱)

۱- (۳)

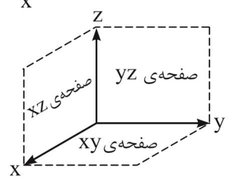
نکته(۱): الف) فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

یعنی فضای $\mathbb{R}^3$ مجموعه‌ی تمام سه‌تایی‌های مرتبی است که مؤلفه‌های آن‌ها، اعداد حقیقی باشند.



ب) دستگاه مختصات سه‌بعدی در $\mathbb{R}^3$، از سه محور همرس و دوبه‌دو عمود بر هم تشکیل می‌شود. محل همرسی محورها را مبدأ مختصات می‌نامیم.



ج) هر دو محور مختصات، یک صفحه‌ی مختصات را تشکیل می‌دهند.

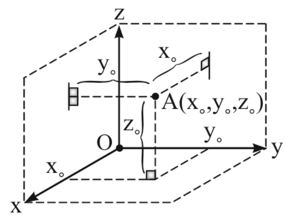
د) مختصات هر نقطه از $\mathbb{R}^3$ را به‌صورت یک سه‌تایی مرتب (x,y,z) نشان می‌دهیم که در آن:

۱) x (طول) برابر است با فاصله‌ی جهت‌دار آن نقطه از صفحه‌ی yz.

۲) y (عرض) برابر است با فاصله‌ی جهت‌دار آن نقطه از صفحه‌ی xz.

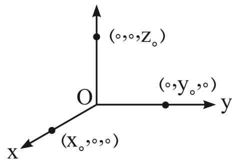
۳) z (ارتفاع) برابر است با فاصله‌ی جهت‌دار آن نقطه از صفحه‌ی xy.

هـ) نقطه‌ی $O(0,0,0)$ را مبدأ مختصات گوییم.

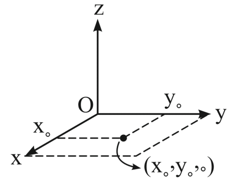


نکته(۲): الف) اگر نقطه‌ای روی محور xها قرار داشته باشد، مختصات آن به‌صورت $(x_0,0,0)$ می‌باشد.

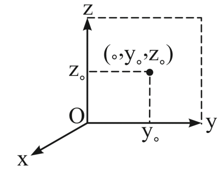
ب) اگر نقطه‌ای روی محور yها قرار داشته باشد، مختصات آن به‌صورت $(0,y_0,0)$ می‌باشد.



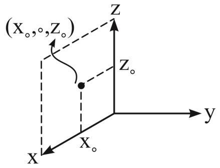
ج) اگر نقطه‌ای روی محور zها قرار داشته باشد، مختصات آن به‌صورت $(0,0,z_0)$ می‌باشد.



د) اگر نقطه‌ای روی صفحه‌ی xy قرار داشته باشد، مختصات آن به‌صورت $(x_0,y_0,0)$ می‌باشد.

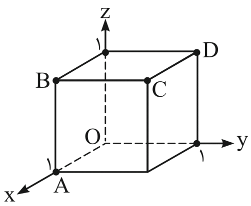


هـ) اگر نقطه‌ای روی صفحه‌ی yz قرار داشته باشد، مختصات آن به‌صورت $(0,y_0,z_0)$ می‌باشد.



و) اگر نقطه‌ای روی صفحه‌ی xz قرار داشته باشد، مختصات آن به‌صورت $(x_0,0,z_0)$ می‌باشد.

با توجه به نکات فوق داریم:



$A=(1,0,0)$ ✓

$B=(1,0,1)$ ✓

$C=(1,1,1)$ ✗

$D=(0,1,1)$ ✓

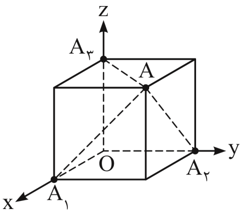
۲- (۳)

نکته(۱): نقطه‌ی $A(x,y,z)$ مفروض است. در این‌صورت:

الف) تصویر نقطه‌ی A روی محور xها، نقطه‌ی $A_1(x,0,0)$ است.

ب) تصویر نقطه‌ی A روی محور yها، نقطه‌ی $A_2(0,y,0)$ است.

ج) تصویر نقطه‌ی A روی محور zها، نقطه‌ی $A_3(0,0,z)$ است.



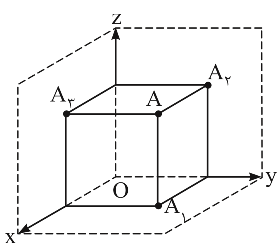
تذکر: برای یافتن مختصات تصویر یک نقطه روی یک محور مختصات، مؤلفه‌ی نظیر آن محور را ثابت نگه داشته و به‌جای مؤلفه‌های دیگر، صفر قرار می‌دهیم.

نکته(۲): نقطه‌ی $A(x,y,z)$ مفروض است. در این‌صورت:

الف) تصویر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی xy، نقطه‌ی $A_1(x,y,0)$ است.

ب) تصویر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی yz، نقطه‌ی $A_2(0,y,z)$ است.

ج) تصویر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی xz، نقطه‌ی $A_3(x,0,z)$ است.



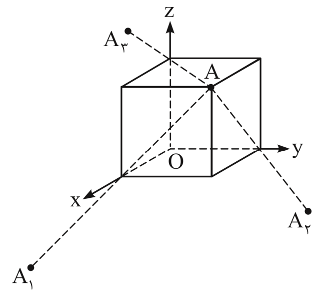
تذکر: برای یافتن تصویر یک نقطه روی یک صفحه‌ی مختصات، مؤلفه‌های نظیر آن صفحه را ثابت نگه داشته و به‌جای مؤلفه‌ی دیگر، صفر قرار می‌دهیم.

نکته(۳): نقطه‌ی $A(x,y,z)$ مفروض است. در این‌صورت:

الف) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور xها، نقطه‌ی $A_1(x,-y,-z)$ است.

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور yها، نقطه‌ی $A_2(-x,y,-z)$ است.

ج) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور zها، نقطه‌ی $A_3(-x,-y,z)$ است.



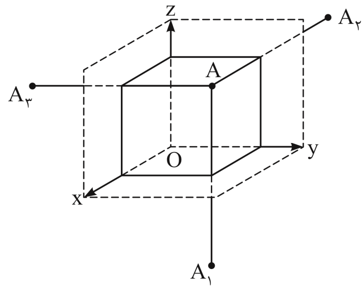
تذکر: برای یافتن قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک محور مختصات، مؤلفه‌ی نظیر آن محور را ثابت نگه داشته و مؤلفه‌های دیگر را قرینه می‌کنیم.

نکته(٤): نقطه‌ی $A(x,y,z)$ مفروض است. در این‌صورت:

الف) قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی xy، نقطه‌ی $A_1(x,y,-z)$ است.

ب) قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی yz، نقطه‌ی $A_2(-x,y,z)$ است.

ج) قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی xz، نقطه‌ی $A_3(x,-y,z)$ است.



تذکر: برای یافتن قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک صفحه‌ی مختصات، مؤلفه‌های نظیر آن صفحه را ثابت نگه داشته و مؤلفه‌ی دیگر را قرینه می‌کنیم.

با توجه به نکات فوق، گزینه‌ی (۳) غلط است. زیرا قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1,2,3)$ نسبت به محور zها، نقطه‌ی $(-1,-2,3)$ می‌باشد.

۳- (۴)

نکته: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

نتیجه: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ از مبدأ مختصات، از رابطه‌ی روبه‌رو محاسبه می‌شود: $|OA|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$|AB|=\sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(1-1)^2}=1$$

$$|BC|=\sqrt{(1-1)^2+(1-1)^2+(0-1)^2}=1$$

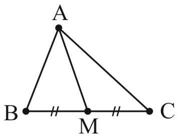
$$|AC|=\sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$$

از آن‌جا که $|AB|=|BC|$ و $1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$، مثلث ABC در رأس B قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

۴- (۳)

نکته: دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ در فضا مفروض‌اند. در این‌صورت، مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$M=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$



M وسط BC است. $\Rightarrow M=\frac{B+C}{2}$

$$\Rightarrow M=\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+0}{2},\frac{1+1}{2}\right)=(2,1,1)$$

$$\Rightarrow |AM|=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{6}$$

۵- (۱)

نکته(۱): اگر قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی M، نقطه‌ی B باشد، آن‌گاه نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB است و داریم:

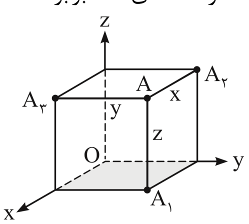
$$M=\frac{A+B}{2}\Rightarrow B=2M-A$$

نکته(۲): نقطه‌ی $A(x,y,z)$ مفروض است. در این‌صورت:

الف) فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی xy برابر است با $|AA_1|=|z|$.

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی yz برابر است با $|AA_2|=|x|$.

ج) فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی xz برابر است با $|AA_3|=|y|$.



نکته(۳): مطابق شکل زیر، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ از محورهای مختصات، برابر با قطرهای مستطیل‌های جانبی است. پس:

الف) فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور xها برابر است با:

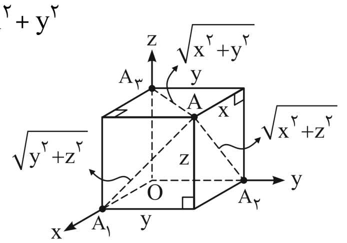
$$|AA_1|=\sqrt{y^2+z^2}$$

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور yها برابر است با:

$$|AA_2|=\sqrt{x^2+z^2}$$

ج) فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور zها برابر است با:

$$|AA_3|=\sqrt{x^2+y^2}$$



اگر قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی M را B فرض کنیم، داریم:

$$B=2M-A=2(2,0,1)-(2,-2,3)=(2,2,-1)$$

$\Rightarrow$ فاصله‌ی B از محور yها $=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

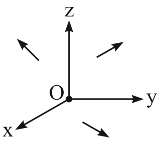
۶- (۱) فرض کنیم نقطه‌ی $M(x,۰,۰)$ روی محور xها، جواب مسأله باشد. پس داریم:

$$|AM|=\sqrt{۵} \Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲+۴+۹}=\sqrt{۵} \Rightarrow (x-۱)^۲=-۸$$

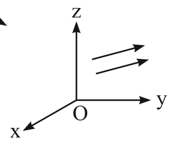
از آن‌جا که معادله‌ی فوق فاقد جواب است، چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

۷- (۱)

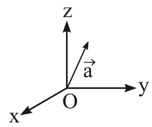
نکته(۱): هر پاره‌خط جهت‌دار در فضا را پیکان گوییم.



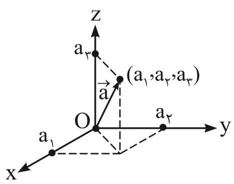
نکته(۲): دو پیکان را که هم‌راستا، هم‌اندازه و هم‌جهت باشند، هم‌ارز گوییم.



نکته(۳): پیکانی را که نقطه‌ی آغازش مبدأ مختصات باشد، بردار گوییم.



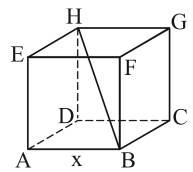
نکته(۴): مختصات یک بردار عبارت است از مختصات نقطه‌ی انتهایی آن بردار. اگر نقطه‌ی انتهایی بردار a نقطه‌ی $(a_۱,a_۲,a_۳)$ باشد، می‌نویسیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$.



نکته(۵): اندازه‌ی بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را با نماد $|\vec{a}|$ نشان می‌دهیم و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$$

یادآوری: اگر طول یال یک مکعب برابر x باشد، طول قطر مکعب برابر است با $x\sqrt{۳}$.



$$AB=x \Rightarrow HB=x\sqrt{۳}$$

$$\vec{a}=(۱,۲,-۱) \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{۱+۴+۱}=\sqrt{۶}$$

حال اگر اندازه‌ی یال مکعب را x فرض کنیم، داریم:

$$|\vec{a}|=x\sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۶}=x\sqrt{۳} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۲}$$

۸- (۲)

نکته(۱): بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ مفروض است. در این‌صورت:

الف) تصویر بردار a روی محور xها، بردار $(a_۱,۰,۰)$ است.

ب) تصویر بردار a روی محور yها، بردار $(۰,a_۲,۰)$ است.

ج) تصویر بردار a روی محور zها، بردار $(۰,۰,a_۳)$ است.

نکته(۲): بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ مفروض است. در این‌صورت:

الف) تصویر بردار a روی صفحه‌ی xy، بردار $(a_۱,a_۲,۰)$ است.

ب) تصویر بردار a روی صفحه‌ی xz، بردار $(a_۱,۰,a_۳)$ است.

ج) تصویر بردار a روی صفحه‌ی yz، بردار $(۰,a_۲,a_۳)$ است.

نکته(۳): بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ مفروض است. در این‌صورت:

الف) قرینه‌ی بردار a نسبت به محور xها، بردار $(a_۱,-a_۲,-a_۳)$ است.

ب) قرینه‌ی بردار a نسبت به محور yها، بردار $(-a_۱,a_۲,-a_۳)$ است.

ج) قرینه‌ی بردار a نسبت به محور zها، بردار $(-a_۱,-a_۲,a_۳)$ است.

نکته(۴): بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ مفروض است. در این‌صورت:

الف) قرینه‌ی بردار a نسبت به صفحه‌ی xy، بردار $a=(a_۱,a_۲,-a_۳)$ است.

ب) قرینه‌ی بردار a نسبت به صفحه‌ی yz، بردار $(-a_۱,a_۲,a_۳)$ است.

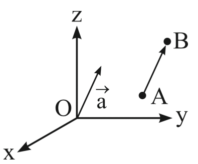
ج) قرینه‌ی بردار a نسبت به صفحه‌ی xz، بردار $(a_۱,-a_۲,a_۳)$ است.

تذکر: برای یافتن تصویر (یا قرینه‌ی) بردار $a=(x,y,z)$ نسبت به محورها یا صفحات مختصات، کافی است تصویر (یا قرینه‌ی) نقطه‌ی انتهایی آن (یعنی نقطه‌ی (x,y,z)) را بیابیم.

با توجه به نکات فوق، گزینه‌ی (۲) صحیح نیست. زیرا تصویر بردار $a=(۱,۲,۳)$ روی صفحه‌ی xz، بردار $a'=(۱,۰,۳)$ می‌باشد.

۹- (۲)

نکته(۱): اگر نقاط $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ به‌ترتیب ابتدا و انتهای پیکان AB باشند، مختصات بردار هم‌ارز با این پیکان از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:



$$\overrightarrow{AB}=B-A=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$

نکته(۲): دو بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ را مساوی گوییم هرگاه مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به‌نظیر با هم مساوی باشند.

$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow (a_۱=b_۱,a_۲=b_۲,a_۳=b_۳)$$

اگر مختصات نقطه‌ی D را (x,y,z) فرض کنیم، داریم:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD} \Rightarrow C-A=D-B \Rightarrow (۲,-۱,۳)=(x-۲,y,z-۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲=۲ \\ y=-۱ \\ z-۱=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ y=-۱ \Rightarrow D=(۴,-۱,۴) \\ z=۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=D-A=(۳,-۳,۵)$$

$$\Rightarrow \text{xy روی صفحه‌ی } \overrightarrow{AD} \text{ تصویر} =(۳,-۳,۰)$$

$$\Rightarrow \text{xy روی صفحه‌ی } \overrightarrow{AD} \text{ طول تصویر} =\sqrt{۹+۹+۰}=۳\sqrt{۲}$$

۱۰- (۴)

نکته: اگر λ یک عدد حقیقی و $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ یک بردار باشد، آن‌گاه:

الف) $\lambda\vec{a}=(\lambda a_۱,\lambda a_۲,\lambda a_۳)$

ب) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$

روش اول: فرض کنیم $M=(x,y,z)$. در این‌صورت:

$$۲\overrightarrow{MA}=۳\overrightarrow{BM} \Rightarrow ۲(A-M)=۳(M-B)$$

$$\Rightarrow ۲(۶-x,-۱-y,۶-z)=۳(x-۱,y+۱,z-۱)$$

$$\Rightarrow (۱۲-۲x,-۲-۲y,۱۲-۲z)=(۳x-۳,۳y+۳,۳z-۳)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۲-۲x=۳x-۳ \\ -۲-۲y=۳y+۳ \\ ۱۲-۲z=۳z-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ y=-۱ \\ z=۳ \end{cases} \Rightarrow M=(۳,-۱,۳)$$

$\Rightarrow$ فاصله‌ی M از صفحه‌ی xz $=|y|=|-۱|=۱$

روش دوم:

$$۲\overrightarrow{MA}=۳\overrightarrow{BM} \Rightarrow ۲(A-M)=۳(M-B) \Rightarrow ۲A-۲M=۳M-۳B$$

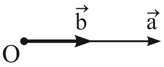
$$\Rightarrow ۲A+۳B=۵M \Rightarrow M=\frac{۲A+۳B}{۵}=\frac{۲(۶,-۱,۶)+۳(۱,-۱,۱)}{۵}$$

$\Rightarrow M=(۳,-۱,۳) \Rightarrow$ فاصله‌ی M از صفحه‌ی xz $=|-۱|=۱$

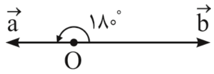
۱۱- (۱)

نکته(۱): دو بردار a و b را موازی گوییم هرگاه مضربی از یک‌دیگر باشند. یعنی $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. $(\lambda\in\mathbb{R})$

تذکر: الف) اگر $\lambda>۰$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌جهت‌اند و زاویه‌ی بین آن‌ها صفر درجه است.



ب) اگر $\lambda<۰$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در خلاف جهت یک‌دیگرند و زاویه‌ی بین آن‌ها ۱۸۰° است.



نکته(۲): اگر دو بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ موازی باشند، آن‌گاه $\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\frac{a_۳}{b_۳}$ و برعکس.

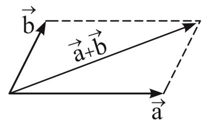
$$\vec{v}_۱ \parallel \vec{v}_۲ \Rightarrow \frac{۲}{-۱}=\frac{۱}{۲k}=\frac{m+۱}{۱} \Rightarrow \begin{cases} ۲k=-\frac{۱}{۲} \\ m+۱=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-\frac{۱}{۴} \\ m=-۳ \end{cases}$$

۱۲- (۴)

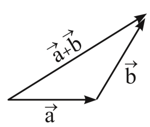
نکته(۱): الف) دو بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ مفروض‌اند. در این‌صورت مجموع آن‌ها را با $\vec{a}+\vec{b}$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

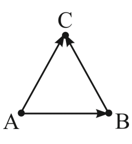
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,a_۳+b_۳)$$

ب) تعبیر هندسی جمع دو بردار (روش متوازی‌الاضلاع): اگر با دو بردار a و b یک متوازی‌الاضلاع بسازیم، آن‌گاه $\vec{a}+\vec{b}$ قطری از متوازی‌الاضلاع است که از مبدأ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ شروع می‌شود.



ج) تعبیر هندسی جمع دو بردار (روش مثلثی): اگر ابتدای بردار b منطبق بر انتهای بردار a باشد، آن‌گاه $\vec{a}+\vec{b}$ ضلع سوم مثلثی است که با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود.



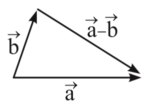


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

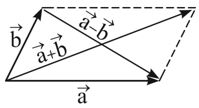
نکته(۲): الف) دو بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ مفروض‌اند. در این‌صورت تفاضل آن‌ها را با $\vec{a}-\vec{b}$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_۱-b_۱,a_۲-b_۲,a_۳-b_۳)$$

ب) تعبیر هندسی تفاضل دو بردار: دو بردار a و b مفروض‌اند. در این‌صورت $\vec{a}-\vec{b}$ برداری است که از انتهای $\vec{b}$ به انتهای $\vec{a}$ رسم شود.



نتیجه: دو بردار a و b مفروض‌اند. در این‌صورت $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی‌اند که با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود.



روش اول:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+۳\overrightarrow{MP}+۳\overrightarrow{PN}=\vec{o}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{AC}+۳(\underbrace{\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}}_{MN})=\vec{o}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}+۳\overrightarrow{MN}=\vec{o} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=-۳\overrightarrow{MN}$$

بنابراین بردار AC مضربی منفی از بردار MN است. در نتیجه این دو بردار، موازی و در خلاف جهت یک‌دیگرند. پس زاویه‌ی بین آن‌ها ۱۸۰° می‌باشد.

روش دوم: با توجه به تعریف بردار هم‌ارز با پیکان داریم:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+۳\overrightarrow{MP}+۳\overrightarrow{PN}=\vec{o}$$

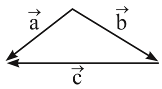
$$\Rightarrow (B-A)+(C-B)+۳(P-M)+۳(N-P)=\vec{o}$$

$$\Rightarrow (C-A)+۳(N-M)=\vec{o} \Rightarrow \overrightarrow{AC}+۳\overrightarrow{MN}=\vec{o}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=-۳\overrightarrow{MN}$$

از آن‌جا که $\overrightarrow{AC}$ مضربی منفی از $\overrightarrow{MN}$ می‌باشد، این دو بردار با هم موازی و در خلاف جهت یک‌دیگرند. پس زاویه‌ی بین آن‌ها برابر ۱۸۰ درجه می‌باشد.

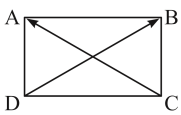
۱۳- (۱) با توجه به شکل داریم $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. پس:



$$\vec{a}+\underbrace{\vec{b}+\vec{c}}_{\vec{a}}=\vec{a}+\vec{a}=۲\vec{a}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|۲\vec{a}|=۲|\vec{a}|=۶$$

۱۴- (۳) با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} \\ \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})$$

$$=(\underbrace{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}}_{\vec{o}})+\overrightarrow{DA}+\underbrace{\overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{DA}}=۲\overrightarrow{DA}$$

۱۵- (۱)

نکته: الف) بردارهای $i=(۱,۰,۰)$، $j=(۰,۱,۰)$ و $k=(۰,۰,۱)$ را بردارهای یکه‌ی محورهای مختصات گوییم.

ب) هر بردار دلخواه $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را می‌توان به‌صورت $\vec{a}=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$ نشان داد.

$$\vec{v}_۱=(۲,۳,۱) \text{ و } \vec{v}_۲=(۱,-۱,۱)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_۱-۲\vec{v}_۲=(۲,۳,۱)-(۲,-۲,۲)=(۰,۵,-۱)$$

$\Rightarrow |\vec{v}_۱ - ۲\vec{v}_۲| = \sqrt{۰+۲۵+۱} = \sqrt{۲۶}$ (I)

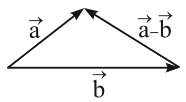
$\vec{v}_۱ + ۲\vec{v}_۲ = (۲,۳,۱) + (۲,-۲,۲) = (۴,۱,۳)$

$\Rightarrow |\vec{v}_۱ + ۲\vec{v}_۲| = \sqrt{۱۶+۱+۹} = \sqrt{۲۶}$ (II)

$$(I),(II) \Rightarrow \frac{|\vec{v}_۱ - ۲\vec{v}_۲|}{|\vec{v}_۱ + ۲\vec{v}_۲|} = \frac{\sqrt{۲۶}}{\sqrt{۲۶}} = ۱$$

۱۶- (۲)

یادآوری: اگر بردارهای a و b دو ضلع یک مثلث باشند، آنگاه ضلع سوم مثلث، بردار $\vec{a} - \vec{b}$ می‌باشد.



ضلع سوم مثلث $= \vec{a} - \vec{b} = (-۳,۲,-۲)$

$\Rightarrow$ طول ضلع سوم مثلث $= |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{۹+۴+۴} = \sqrt{۱۷}$

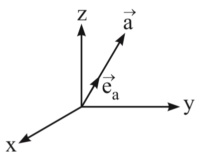
۱۷- (۱)

نکته(۱): هر بردار به طول یک را بردار یکه (واحد) گوییم.

نکته(۲): الف) بردار a مفروض است. بردار یکه‌ای که هم‌راستا و هم‌جهت با $\vec{a}$ باشد را بردار یکه‌ی نظیر $\vec{a}$ گوییم و با نماد $\vec{e}_a$ نشان می‌دهیم.

ب) برای هر بردار دلخواه a داریم:

$$\vec{e}_a = \frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$$



تذکر: $\vec{e}_a$ را «جهت بردار a» نیز گوییم.

بردار $a = (۲m,-m,۲m)$ یکه است. پس طول آن برابر ۱ می‌باشد و داریم:

$|\vec{a}| = ۱ \Rightarrow \sqrt{۴m^۲ + m^۲ + ۴m^۲} = ۱$

$\Rightarrow \sqrt{۹m^۲} = ۱ \Rightarrow ۹m^۲ = ۱$

$\Rightarrow m^۲ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow m = \pm\frac{۱}{۳}$

۱۸- (۳)

$\vec{a} - ۲\vec{b} = (-۱,۲,۰) - (۲,۲,-۴) = (-۳,۰,۴)$

$\Rightarrow |\vec{a} - ۲\vec{b}| = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$

$$\vec{e}_{(\vec{a}-۲\vec{b})} = \frac{\vec{a} - ۲\vec{b}}{|\vec{a} - ۲\vec{b}|} = \frac{(-۳,۰,۴)}{۵} = \left(-\frac{۳}{۵},۰,\frac{۴}{۵}\right)$$

سطح (۲)

۱۹- (۲)

فاصله‌ی A از محور xها $= \sqrt{y^۲+z^۲} = \sqrt{۱۳} \Rightarrow y^۲+z^۲ = ۱۳$

فاصله‌ی A از محور yها $= \sqrt{x^۲+z^۲} = \sqrt{۱۴} \Rightarrow x^۲+z^۲ = ۱۴$

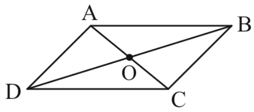
فاصله‌ی A از صفحه‌ی xy $= |z| = ۳ \Rightarrow z^۲ = ۹$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^۲+z^۲=۱۳ \\ x^۲+z^۲=۱۴ \\ z^۲=۹ \end{cases} \xrightarrow[\text{معادله‌ی اول و دوم}]{\text{جای‌گذاری } z^۲ \text{ در}} \begin{cases} x^۲=۵ \\ y^۲=۴ \\ z^۲=۹ \end{cases}$$

$|OA| = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} = \sqrt{۵+۴+۹} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$

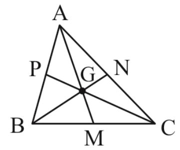
۲۰- (۲)

نکته(۱): اگر چهار نقطه‌ی A، B، C و D رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع باشند، آن‌گاه: $A+C = B+D = ۲O$



نکته(۲): اگر نقطه‌ی G مرکزثقل مثلث ABC باشد، آن‌گاه:

$$G = \frac{A+B+C}{۳}$$



ABCD متوازی‌الاضلاع است. $\Rightarrow A+C = B+D$

$\Rightarrow D = A+C-B = (۲,۳,۰)$

حال مختصات نقطه‌ی $G(a,b,c)$ مرکز ثقل مثلث ACD را می‌یابیم:

$$G = \frac{A+C+D}{۳} = \left(\frac{۱+۳+۲}{۳},\frac{۲+۰+۳}{۳},\frac{-۱+۲+۰}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow G = \left(۲,\frac{۵}{۳},\frac{۱}{۳}\right) \Rightarrow a+b+c = ۲+\frac{۵}{۳}+\frac{۱}{۳} = ۴$$

۲۱- (۲) فرض کنیم نقطه‌ی $M(x,y,۰)$ روی صفحه‌ی xy و عضوی از مکان‌هندسی موردنظر باشد. بنابراین:

$|MA| = ۵ \Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲+(y-۲)^۲+۹} = ۵$

$\Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۲)^۲ = ۱۶$

پس مکان‌هندسی موردنظر، دایره‌ای به مرکز $(۱,۲,۰)$ و شعاع ۴ روی صفحه‌ی xy می‌باشد.

۲۲- (۱)

$\vec{a} = (a_۱,a_۲,a_۳) \Rightarrow$ تصویر $\vec{a}$ روی صفحه‌ی xy $= (a_۱,a_۲,۰)$

$\Rightarrow$ طول تصویر $\vec{a}$ روی صفحه‌ی xy $= \sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲} = ۳ \Rightarrow a_۱^۲+a_۲^۲ = ۹$ (I)

به روش مشابه $\Rightarrow \begin{cases} a_۲^۲+a_۳^۲=۴ & (II) \\ a_۱^۲+a_۳^۲=۱۱ & (III) \end{cases}$

با جمع زدن روابط (I)، (II) و (III) داریم:

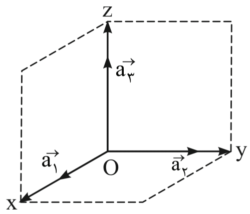
$$۲a_۱^۲+۲a_۲^۲+۲a_۳^۲ = ۲۴ \Rightarrow a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲ = ۱۲ \Rightarrow (a_۱^۲+a_۳^۲)+a_۲^۲ = ۱۲$$

$$\xrightarrow{(III)} ۱۱+a_۲^۲ = ۱۲ \Rightarrow a_۲^۲ = ۱ \Rightarrow a_۲ = \pm۱$$

۲۳- (۳)

نکته(۱): اگر یک بردار با یک محور مختصات موازی باشد، بر آن محور منطبق است و در نتیجه:

الف) اگر بردار a با محور xها موازی باشد (بر صفحه‌ی yz عمود باشد.)، مختصات آن به‌صورت $\vec{a}_۱ = (x,۰,۰)$ می‌باشد.



ب) اگر بردار a با محور yها موازی باشد (بر صفحه‌ی xz عمود باشد.)، مختصات آن به‌صورت $\vec{a}_۲ = (۰,y,۰)$ می‌باشد.

ج) اگر بردار a با محور zها موازی باشد (بر صفحه‌ی xy عمود باشد.)، مختصات آن به‌صورت $\vec{a}_۳ = (۰,۰,z)$ می‌باشد.