درسنامه ۱

انواع استدلال

درک شهودی

درک شهودی انسان از جهان پیرامون و مسائل اطرافش راهگشای او در کشف بسیاری از پدیده‌ها و حل بسیاری از مسائل است. **در واقع شهود یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال است.** وقتی از شهود خود استفاده می‌کنیم هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان صددرصد بگوییم که نتیجه‌گیری ما درست است اما درک شهودی کمک می‌کند تا مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم، حدسیه‌سازی کنیم و سپس حدس خود را ثابت نماییم.

استدلال تمثیلی یا قیاسی

تمثیل در واقع یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است. استفاده از تمثیل به درک بهتر بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی کمک می‌کند اما هرگز نمی‌تواند روشی قطعی برای اثبات یک مسأله باشد.

استدلال استقرایی

در برخی پدیده‌های تجربی می‌توان با جمع‌آوری اطلاعات و دقیق شدن در پدیده‌ها، نظم و الگویی در مشاهدات یافت و با دیدن این نظم حدسیه‌سازی کرده و نتایج مشاهدات بعدی را پیش‌بینی نمود. این نوع استدلال، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود. در واقع **استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.** این نوع استدلال هم محدودیت‌هایی دارد و نتایج حاصل از آن خیلی هم قابل اطمینان نیستند.

استقرای ریاضی

اصل استقرای ریاضی: فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد، اگر مجموعه‌ی S دارای دو خاصیت زیر باشد:

۱) $1 \in S$

۲) به ازای هر k که $k \in S$ باشد، بتوان نتیجه گرفت که: $(k+1) \in S$

در این صورت $S = \mathbb{N}$

اصل استقرای ریاضی یکی از اصول موضوع سازنده‌ی دستگاه اعداد طبیعی است و برای گزاره‌نماهایی که در اعداد طبیعی بیان می‌شوند، مبنای یکی از روش‌های نیرومند اثبات را تشکیل می‌دهد.

می‌توان اصل استقرای ریاضی را به صورت زیر هم بیان کرد:

اصل استقرای ریاضی: فرض کنید $P(n)$ حکمی در اعداد طبیعی باشد. اگر $P(1)$ درست باشد و به ازای هر k، از درستی $P(k)$، بتوان درستی $P(k+1)$ را نتیجه گرفت، آن‌گاه $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

بنابراین برای اثبات یک حکم (گزاره) در اعداد طبیعی، مانند $P(n)$، با استفاده از اصل استقرای ریاضی، گام‌های زیر را برمی‌داریم:

۱) نشان می‌دهیم که حکم مسأله به‌ازای $n=1$ درست است؛ یعنی $P(1) \equiv T$

۲) فرض می‌کنیم که حکم داده شده به‌ازای $n=k$ درست باشد؛ یعنی $P(k) \equiv T$ (فرض استقرا)

۳) نشان می‌دهیم که از درستی $P(k)$ می‌توان درستی $P(k+1)$ را نتیجه گرفت؛ یعنی $P(k+1) \equiv T$ (حکم استقرا)

به مثال‌های بعد توجه کنید:

درسنامه

مثال ۱

با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n، داریم: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

☑ پاسخ:

$P(n):1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$P(1):1^2=\frac{1}{6}(1)(1+1)(2\times 1+1)\Rightarrow 1=1\Rightarrow P(1)\equiv T$

$P(k)\equiv T\Rightarrow 1^2+2^2+\ldots k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ (فرض استقرا)

$P(k+1):1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$ (حکم استقرا)

می‌خواهیم از درستی $P(k)$ درستی $P(k+1)$ را نتیجه بگیریم، برای این منظور به طرفین برابری فرض، عبارت $(k+1)^2$ را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

بنابراین حکم داده شده برای تمام اعداد طبیعی درست است: $\forall n\in\mathbb{N}:P(n)\equiv T$

مثال ۲

با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\le\frac{2n}{n+1}\quad,\quad(n\in\mathbb{N})$

☑ پاسخ:

$P(n):1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\le\frac{2n}{n+1}$

$P(1):1\le\frac{2(1)}{1+1}\Rightarrow 1\le 1\Rightarrow P(1)\equiv T$

$P(k)\equiv T\Rightarrow 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}\le\frac{2k}{k+1}$ (فرض استقرا)

$P(k+1):1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{2k+2}{k+2}$ (حکم استقرا)

به طرفین نابرابری فرض، عبارت $\frac{1}{(k+1)^2}$ را می‌افزاییم، خواهیم داشت:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

توجه چنان‌چه بدانیم که $A<B$، برای آن که ثابت کنیم $A<C$، کافی است نشان دهیم که $B\le C$ است و این از اصل تعدی در نامساوی‌ها به سادگی نتیجه می‌شود.

از مقایسه‌ی نابرابری اخیر با حکم استقرا، نتیجه می‌شود که برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم:

$$\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{2k+2}{k+2}$$

$$\Rightarrow\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{2k+2}{k+2}\le 0\Rightarrow\frac{2k(k+1)(k+2)+(k+2)-2(k+1)(k+1)^2}{(k+1)^2(k+2)}\le 0$$

$$\Rightarrow\frac{2k^3+4k^2+2k^2+4k+k+2-2k^3-6k^2-6k-2}{(k+1)^2(k+2)}\le 0\Rightarrow\frac{-k}{(k+2)(k+1)^2}\le 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی (چون $k\in\mathbb{N}$) و روابط هم برگشت‌پذیر است، پس $P(k+1)\equiv T$؛ در نتیجه: $\forall n\in\mathbb{N}:P(n)\equiv T$

تذکر برای درک بهتر مفهوم برگشت‌پذیر بودن روابط، درس‌نامه‌ی ۷ را مطالعه کنید.

درسنامه

اصل تقویت یک نامساوی

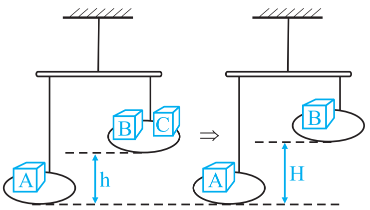
چنان‌چه از طرف کوچک‌تر یک نامساوی، یک مقدار مثبت را کم کنیم، جهت نامساوی عوض نمی‌شود. (بلکه نامساوی تقویت هم می‌شـود.)

یعنی: $A > B + C\ ,\ C > ۰ \Rightarrow A > B$

برای درک بهتر می‌توانید به شکل مقابل توجه کنید:

(در مورد شکل توجه کنید که میله‌ی افقی ثابت است و نخ‌ها کشسان هستند!)

$(H > h)$



مثال ۳

اگر $a_۱, a_۲, ..., a_n$ عددهای حقیقی مثبت باشند، با استقرا روی عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)...(۱+a_n) \geq ۱+a_۱+a_۲+...+a_n$$

پاسخ:

$n=۱ \Rightarrow (۱+a_۱) \geq ۱+a_۱ \Rightarrow P(۱) \equiv T$

(فرض استقرا) $P(k) \equiv T \Rightarrow (۱+a_۱)(۱+a_۲)...(۱+a_k) \geq ۱+a_۱+a_۲+...+a_k$

(حکم استقرا) $P(k+۱): (۱+a_۱)(۱+a_۲)...(۱+a_k)(۱+a_{k+۱}) \geq ۱+a_۱+a_۲+...+a_k+a_{k+۱}$

طرفین نابرابری فرض استقرا را در $(۱+a_{k+۱}) > ۰$ ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(۱+a_۱)(۱+a_۲)...(۱+a_k)(۱+a_{k+۱}) &\geq (۱+a_۱+a_۲+...+a_k)(۱+a_{k+۱})\\ &= ۱+a_۱+a_۲+...+a_k+a_{k+۱}(۱+a_۱+a_۲+...+a_k)\\ &= ۱+a_۱+a_۲+\cdots+a_k+a_{k+۱}+a_{k+۱}(a_۱+a_۲+\cdots+a_k)\\ &\underset{\text{اصل تقویت نامساوی}}{>} ۱+a_۱+a_۲+\cdots+a_k+a_{k+۱} \Rightarrow P(k+۱) \equiv T\end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: P(n) \equiv T$

ـ در سؤالات ۱ تا ۱۹، اگر n عدد طبیعی باشد، با استفاده از اصل استقرای ریاضی تساوی‌های داده شده را ثابت کنید.

۱. $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱) = n^۲$ (نهایی- دی ۹۲)

۲. $۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ (نهایی- شهریور ۹۲)

۳. $۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ (نهایی- خرداد ۹۲)

۴. $۱\times۲+۲\times۵+...+n(۳n-۱) = n^۲(n+۱)$ (نهایی- شهریور ۹۱)

۵. $۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳ = (\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$ (نهایی- شهریور ۹۰ و خارج از کشور- خرداد ۸۵)

۶. $۱\times۲^۱+۲\times۲^۲+۳\times۲^۳+\cdots+n\times۲^n = (n-۱)۲^{n+۱}+۲$

۷. $(۱\times۳)+(۲\times۵)+(۳\times۷)+...+n(۲n+۱) = \frac{۴n^۳+۹n^۲+۵n}{۶}$ (نهایی- خرداد ۸۹)

۸. $\frac{۲}{۳^۱}+\frac{۲}{۳^۲}+\frac{۲}{۳^۳}+...+\frac{۲}{۳^n} = ۱-\frac{۱}{۳^n}$ (نهایی- دی ۸۹ و خرداد ۸۵- خارج از کشور- خرداد ۸۴)

۹. $\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)} = \frac{n}{n+۱}$ (نهایی- شهریور ۹۳)

۱۰. $\frac{۱}{۹\times۱۱}+\frac{۱}{۱۱\times۱۳}+\frac{۱}{۱۳\times۱۵}+...+\frac{۱}{(۲n+۷)(۲n+۹)} = \frac{n}{۹(۲n+۹)}$ (نهایی- دی ۹۰)

۱۱. $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲^۲}+\frac{۳}{۲^۳}+\dots+\frac{n}{۲^n}=۲-\frac{n+۲}{۲^n}$ (نهایی- خرداد ۹۰)

۱۲. $۱\times۱!+۲\times۲!+\dots+n\times n!=(n+۱)!-۱$ (نهایی- خرداد ۸۳ و خارج از کشور- شهریور ۸۶)

۱۳. $\frac{۰}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\dots+\frac{n-۱}{n!}=۱-\frac{۱}{n!}$

۱۴. $(۲n)!=۲^n\times n!\times[۱\times۳\times۵\times\dots\times(۲n-۱)]$ (نهایی- خرداد ۸۸)

۱۵. $\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\dots+\binom{n+۱}{۲}=\binom{n+۲}{۳}$

۱۶. $(n+۱)(n+۲)\dots(n+n)=۲^n\times۱\times۳\times۵\times\dots\times(۲n-۱)$

۱۷. $(۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۹})\dots(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲})=\frac{n+۲}{۲(n+۱)}$ (نهایی- دی ۸۷)

۱۸. $۲^{\frac{۱}{۲}}\times۴^{\frac{۱}{۴}}\times۸^{\frac{۱}{۸}}\times\dots\times(۲^n)^{\frac{۱}{۲^n}}=۲^{(۲-\frac{n+۲}{۲^n})}$

۱۹. $\log x^n=n\log x$ ، $(x>۰)$

۲۰. با استفاده از اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه: $A^n=\begin{bmatrix}n+۱&-n\\n&-n+۱\end{bmatrix}$

ـ در سؤالات ۲۱ تا ۲۸، اگر $n\in\mathbb{N}$ باشد، نامساوی‌های داده شده را به کمک اصل استقرا ثابت کنید.

۲۱. $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\dots+\frac{۱}{n^۲}\le۲-\frac{۱}{n}$

۲۲. $۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}}\ge\sqrt{n}$

۲۳. $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\dots+\frac{۱}{۲^n}<۱$

۲۴. $\frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۲\times۴}+\dots+\frac{۱}{n(n+۲)}<\frac{n}{n+۱}$

۲۵. $(۱+\sqrt{۷})^n\ge۱+\sqrt{۷}n$ (نهایی- شهریور ۸۷ و ۸۵)

۲۶. $۲^n\ge n+۱$

۲۷. $(۱+\sqrt{۳})^n\ge۱+n\sqrt{۳}$ (نهایی- خرداد ۹۱)

۲۸. $(\frac{x+y}{۲})^n\le\frac{x^n+y^n}{۲},(x,y\ge۰)$

۲۹. نامساوی مثلثی برای هر دو عدد حقیقی a و b به صورت $|a+b|\le|a|+|b|$ برقرار است. با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر n عدد حقیقی $x_۱,x_۲,\dots,x_n$ داریم: $|x_۱+x_۲+\dots+x_n|\le|x_۱|+|x_۲|+\dots+|x_n|$ (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۲- شماره‌ی ۸)

درسنامه ۲

بخش‌پذیری

اعداد صحیح a و b، $(b\neq۰)$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم عدد صحیح a بر b بخش‌پذیر است و می‌نویسیم $b|a$، هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد، به طوری که: $a=bq$

مثال ۴

با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n، $۴^{۲n}-۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

☑ پاسخ: باید نشان دهیم که $۵|۴^{۲n}-۱$ یا به عبارت دیگر: $P(n):۴^{۲n}-۱=۵r,(r\in\mathbb{Z})$

داریم: $P(۱):۴^{۲(۱)}-۱=۵r\Rightarrow۱۵=۵r\Rightarrow r=۳\in\mathbb{Z}\Rightarrow P(۱)\equiv T$

(حکم استقرا) $P(k+۱):۴^{۲k+۲}-۱=۵r',(r'\in\mathbb{Z})$ (فرض استقرا) $P(k)\equiv T\Rightarrow۴^{۲k}-۱=۵r,(r\in\mathbb{Z})$

طرفین تساوی فرض را در $۴^۲$ ضرب می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$۴^{۲k+۲}-۴^۲=(۵r)(۴^۲)\Rightarrow۴^{۲k+۲}-۱۶=(۱۶\times۵)r\Rightarrow۴^{۲k+۲}-۱-۱۵=(۱۶\times۵)r\Rightarrow۴^{۲k+۲}-۱=(۱۶\times۵)r+۱۵$$

$$\Rightarrow۴^{۲k+۲}-۱=۵(۱۶r+۳)\Rightarrow۴^{۲k+۲}-۱=۵r',(r'\in\mathbb{Z})\Rightarrow P(k+۱)\equiv T\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:P(n)\equiv T$$

پاسخ پرسش‌های فصل ۱

۱

$P(n):۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$

$P(۱):۲(۱)-۱=۱^۲ \Rightarrow ۱=۱ \quad \checkmark$

$P(k):۱+۳+۵+\cdots+(۲k-۱)=k^۲$ (فرض استقرا) , $P(k+۱):۱+۳+۵+\cdots+(۲k-۱)+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$ (حکم استقرا)

به دو طرف فرض استقرا $(۲k+۱)$ را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲k-۱)+(۲k+۱)=k^۲+(۲k+۱)=k^۲+۲k+۱=(k+۱)^۲$$

بنابراین حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

۲

$P(n):۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

$P(۱):۱=\frac{۱(۱+۱)}{۲} \Rightarrow ۱=۱ \quad \checkmark$

$P(k):۱+۲+۳+\cdots+k=\frac{k(k+۱)}{۲}$ (فرض استقرا) , $P(k+۱):۱+۲+۳+\cdots+k+(k+۱)=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$ (حکم استقرا)

به دو طرف فرض استقرا $(k+۱)$ را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$۱+۲+۳+\cdots+k+(k+۱)=\frac{k(k+۱)}{۲}+(k+۱)=\frac{k(k+۱)+۲(k+۱)}{۲}=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

بنابراین حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

۳

$P(n):۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

$P(۱):۱^۲=\frac{۱(۱+۱)(۲+۱)}{۶} \Rightarrow ۱=۱ \quad \checkmark$

$P(k):۱^۲+۲^۲+\cdots+k^۲=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}$ (فرض استقرا)

$P(k+۱):۱^۲+۲^۲+\cdots+k^۲+(k+۱)^۲=\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶}$ (حکم استقرا)

به دو طرف فرض استقرا $(k+۱)^۲$ را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$۱^۲+۲^۲+\cdots+k^۲+(k+۱)^۲=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}+(k+۱)^۲=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)+۶(k+۱)^۲}{۶}$$

$$=\frac{(k+۱)(k(۲k+۱)+۶(k+۱))}{۶}=\frac{(k+۱)(۲k^۲+۷k+۶)}{۶}=\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶}$$

بنابراین حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

۴

$P(۱):۱\times۲=۱^۲(۱+۱) \Rightarrow P(۱)\equiv T$

$P(k)\equiv T \Rightarrow ۱\times۲+۲\times۵+\ldots+k(۳k-۱)=k^۲(k+۱)$ (فرض استقرا)

$P(k+۱):۱\times۲+۲\times۵+\ldots+k(۳k-۱)+(k+۱)(۳k+۲)=(k+۱)^۲(k+۲)$ (حکم استقرا)

به طرفین تساوی فرض، عبارت $(k+۱)(۳k+۲)$ را اضافه می‌کنیم:

$$۱\times۲+۲\times۵+\ldots+k(۳k-۱)+(k+۱)(۳k+۲)=k^۲(k+۱)+(k+۱)(۳k+۲)$$

$$=(k+۱)(k^۲+۳k+۲)=(k+۱)(k+۱)(k+۲)=(k+۱)^۲(k+۲) \Rightarrow P(k+۱)\equiv T$$

بنابراین حکم مسأله برای تمام اعداد طبیعی درست است.

۵

$P(۱):۱^۳=\left(\frac{۱(۱+۱)}{۲}\right)^۲ \Rightarrow ۱=۱ \Rightarrow P(۱)\equiv T$

$P(k)\equiv T \Rightarrow ۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+k^۳=\left(\frac{k(k+۱)}{۲}\right)^۲$ (فرض استقرا)

$P(k+۱):۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+k^۳+(k+۱)^۳=\left(\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}\right)^۲$ (حکم استقرا)

به طرفین فرض استقرا، عبارت $(k+1)^3$ را اضافه می‌کنیم:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

بنابراین حکم مسأله برای تمام اعداد طبیعی صحیح است.

۶

$$P(n):1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots+n\times 2^n=(n-1)2^{n+1}+2$$

$$P(1):1\times 2^1=(1-1)2^{1+1}+2\Rightarrow 2=2\Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T\Rightarrow 1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots+k\times 2^k=(k-1)2^{k+1}+2$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1):1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots+k\times 2^k+(k+1)2^{k+1}=k\times 2^{k+2}+2$$ (حکم استقرا)

به طرفین تساوی فرض، عبارت $(k+1)2^{k+1}$ را اضافه می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots+k\times 2^k+(k+1)2^{k+1}=(k-1)2^{k+1}+2+(k+1)2^{k+1}$$

$$=((k-1)+(k+1))2^{k+1}+2=(2k)2^{k+1}+2=k\times 2^{k+2}+2\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

پس حکم به ازای تمام عددهای طبیعی درست است.

۷

$$P(1):3=\frac{4+9+5}{6}\Rightarrow 3=3\Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T\Rightarrow(1\times 3)+(2\times 5)+\ldots+k(2k+1)=\frac{4k^3+9k^2+5k}{6}$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1):(1\times 3)+(2\times 5)+\ldots+k(2k+1)+(k+1)(2k+3)=\frac{4(k+1)^3+9(k+1)^2+5(k+1)}{6}=\frac{4k^3+21k^2+35k+18}{6}$$ (حکم استقرا)

برای اثبات حکم استقرا، به طرفین فرض، عبارت $(k+1)(2k+3)$ را اضافه می‌کنیم:

$$(1\times 3)+(2\times 5)+\ldots+k(2k+1)+(k+1)(2k+3)=\frac{4k^3+9k^2+5k}{6}+(k+1)(2k+3)$$

$$=\frac{4k^3+9k^2+5k+6(2k^2+5k+3)}{6}=\frac{4k^3+21k^2+35k+18}{6}\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

پس حکم به ازای تمام اعداد طبیعی درست است.

۸

$$P(1):\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T\Rightarrow\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^k}=1-\frac{1}{3^k}$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1):\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots+\frac{2}{3^k}+\frac{2}{3^{k+1}}=1-\frac{1}{3^{k+1}}$$ (حکم استقرا)

به طرفین فرض، عبارت $\frac{2}{3^{k+1}}$ را می‌افزاییم:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^k}+\frac{2}{3^{k+1}}=1-\frac{1}{3^k}+\frac{2}{3^{k+1}}=1-\frac{1}{3^{k+1}}\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

پس حکم به ازای تمام اعداد طبیعی درست است.

۹

$$P(n):\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$P(1):\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1+1}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad\checkmark$$

$$P(k):\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1):\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$ (حکم استقرا)

به دو طرف فرض استقرا عبارت $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

بنابراین برای هر عدد طبیعی n، حکم برقرار است.

۱۰

$$P(1): \frac{1}{9\times 11} = \frac{1}{9\times(2+9)} \Rightarrow P(1)\equiv T$$

(فرض استقرا)
$$P(k)\equiv T \Rightarrow \frac{1}{9\times 11}+\frac{1}{11\times 13}+\frac{1}{13\times 15}+\dots+\frac{1}{(2k+7)(2k+9)}=\frac{k}{9(2k+9)}$$

(حکم استقرا)
$$P(k+1): \frac{1}{9\times 11}+\dots+\frac{1}{(2k+7)(2k+9)}+\frac{1}{(2k+9)(2k+11)}=\frac{k+1}{9(2k+11)}$$

به طرفین تساوی فرض استقرا، عبارت $\frac{1}{(2k+9)(2k+11)}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{9\times 11}+\frac{1}{11\times 13}+\dots+\frac{1}{(2k+7)(2k+9)}+\frac{1}{(2k+9)(2k+11)}=\frac{k}{9(2k+9)}+\frac{1}{(2k+9)(2k+11)}$$

$$=\frac{k(2k+11)+9}{9(2k+9)(2k+11)}=\frac{2k^2+11k+9}{9(2k+9)(2k+11)}=\frac{(k+1)(2k+9)}{9(2k+9)(2k+11)}=\frac{k+1}{9(2k+11)}\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

پس حکم مسأله برای تمام اعداد طبیعی درست است.

۱۱

$$P(n): \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

$$P(1): \frac{1}{2^1}=2-\frac{1+2}{2^1}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow P(1)\equiv T$$

(فرض استقرا)
$$P(k)\equiv T\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$$

(حکم استقرا)
$$P(k+1): \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}$$

به طرفین برابری فرض، عبارت $\frac{k+1}{2^{k+1}}$ را اضافه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2+\frac{-2(k+2)+k+1}{2^{k+1}}=2+\frac{-k-3}{2^{k+1}}=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: P(n)\equiv T$$

۱۲

$$P(n): 1\times 1!+2\times 2!+\dots+n\times n!=(n+1)!-1$$

$$P(1): 1\times 1!=(1+1)!-1\Rightarrow 1=1\Rightarrow P(1)\equiv T$$

(فرض استقرا)
$$P(k)\equiv T\Rightarrow 1\times 1!+2\times 2!+\dots+k\times k!=(k+1)!-1$$

(حکم استقرا)
$$P(k+1): 1\times 1!+2\times 2!+\dots+k\times k!+(k+1)(k+1)!=(k+2)!-1$$

به طرفین تساوی فرض، عبارت $(k+1)(k+1)!$ را اضافه می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$1\times 1!+2\times 2!+\dots+k\times k!+(k+1)(k+1)!=(k+1)!-1+(k+1)(k+1)!$$

$$=(k+1)!(1+(k+1))-1=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

بنابراین تساوی داده شده به ازای تمام اعداد طبیعی درست است.

۱۳

$$P(n): \frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$$

$$P(1): \frac{1-1}{1!}=1-\frac{1}{1!}\Rightarrow 0=0\Rightarrow P(1)\equiv T$$

(فرض استقرا)
$$P(k)\equiv T\Rightarrow \frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{k-1}{k!}=1-\frac{1}{k!}$$

(حکم استقرا)
$$P(k+1)=\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{k-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}$$

فرض کنیم حکم مسأله به ازای $n=k$ درست باشد؛ باید نشان دهیم به ازای $n=k+1$ هم درست است. به طرفین تساوی فرض، عبارت $\frac{k}{(k+1)!}$ را می‌افزاییم، خواهیم داشت:

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{k-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1+\frac{-(k+1)+k}{(k+1)!}=1+\frac{-k-1+k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

بنابراین حکم مسأله برای همه‌ی اعداد طبیعی صحیح است.

۱۴

$P(n):(2n)!=2^n\times n!\times[1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)]$

$P(1):(2\times1)!=2^1\times1!\times(2(1)-1)\Rightarrow2=2\Rightarrow P(1)\equiv T$

$P(k)\equiv T\Rightarrow(2k)!=2^k\times k!\times[1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)]$ (فرض استقرا)

$P(k+1):(2k+2)!=2^{k+1}\times(k+1)!\times[1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)\times(2k+1)]$ (حکم استقرا)

طرفین تساوی فرض را در عبارت $(2k+1)(2k+2)$ ضرب می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$(2k)!(2k+1)(2k+2)=2^k\times k![1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)]\times(2k+1)(2k+2)$$

$$\Rightarrow(2k+2)!=2^k\times k!\times[1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)](2k+1)(2)(k+1)$$

$$=(2\times2^k)\times[k!(k+1)]\times[1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)\times(2k+1)]=2^{k+1}\times(k+1)!\times[1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)\times(2k+1)]$$

$$\Rightarrow P(k+1)\equiv T\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:P(n)\equiv T$$

۱۵

$P(n):\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$

$P(1):\binom{1+1}{2}=\binom{1+2}{3}\Rightarrow\binom{2}{2}=\binom{3}{3}\Rightarrow1=1\Rightarrow P(1)\equiv T$

$P(k)\equiv T\Rightarrow\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{k+1}{2}=\binom{k+2}{3}$ (فرض استقرا)

$P(k+1):\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{k+1}{2}+\binom{k+2}{2}=\binom{k+3}{3}$ (حکم استقرا)

به طرفین برابری فرض، جمله‌ی $\binom{k+2}{2}$ را می‌افزاییم، خواهیم داشت:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{k+1}{2}+\binom{k+2}{2}=\binom{k+2}{3}+\binom{k+2}{2}=\frac{(k+2)!}{3!(k-1)!}+\frac{(k+2)!}{2!k!}$$

$$=\frac{k(k+2)!+3(k+2)!}{3!k!}=\frac{(k+2)!(k+3)}{3!k!}=\frac{(k+3)!}{3!k!}=\binom{k+3}{3}\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

$$\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:P(n)\equiv T$$

یادآوری $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

۱۶

$P(n):(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\times1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)$

$P(1):(1+1)=2^1(2(1)-1)\Rightarrow2=2\Rightarrow P(1)\equiv T$

$P(k)\equiv T\Rightarrow(k+1)(k+2)\ldots.(k+k)=2^k\times1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)$ (فرض استقرا)

$P(k+1):(k+2)(k+3)\ldots(k+k+2)=2^{k+1}\times1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)(2k+1)$ (حکم استقرا)

با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$(k+2)(k+3)\ldots(k+k)=\frac{2^k\times1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)}{(k+1)}$$

با جایگزین کردن حاصل بالا در سمت چپ عبارت حکم، خواهیم داشت:

$$(k+2)(k+3)\ldots(k+k+2)=\frac{2^k\times1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)}{(k+1)}(k+k+1)(k+k+2)$$

$$=\frac{2^k\times1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)}{(k+1)}(2k+1)\times2\times(k+1)=2^{k+1}\times1\times3\times5\times\ldots\times(2k-1)(2k+1)\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

$$\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:P(n)\equiv T$$

۱۷

$P(n):(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\ldots(1-\frac{1}{(n+1)^2})=\frac{n+2}{2(n+1)}$

$P(1):1-\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1+2}{2(1+1)}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow P(1)\equiv T$

فرض کنیم حکم به ازای $n = k$ درست باشد:

$$P(k) \equiv T \Rightarrow (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\dots(1-\frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

باید ثابت کنیم تساوی داده شده به ازای $n = k+1$ هم درست است، یعنی:

$$P(k+1):(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\dots(1-\frac{1}{(k+1)^2})(1-\frac{1}{(k+2)^2}) = \frac{k+3}{2(k+2)}$$

طرفین فرض را در $(1-\frac{1}{(k+2)^2})$ ضرب می‌کنیم؛ داریم:

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\dots(1-\frac{1}{(k+1)^2})(1-\frac{1}{(k+2)^2}) = \frac{k+2}{2(k+1)}(1-\frac{1}{(k+2)^2})$$

$$= \frac{k+2}{2(k+1)}\times\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}\times\frac{(k^2+4k+4)-1}{(k+2)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}\times\frac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}$$

$$= \frac{(k+2)}{2(k+1)}\times\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \frac{k+3}{2(k+2)} \Rightarrow P(k+1)\equiv T \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: P(n)\equiv T$$

۱۸

$$P(n): 2^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{1}{4}}\times 8^{\frac{1}{8}}\times\dots\times(2^n)^{\frac{1}{2^n}} = 2^{(2-\frac{n+2}{2^n})}$$

$$P(1):(2^1)^{\frac{1}{2^1}} = 2^{(2-\frac{1+2}{2^1})} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{1}{4}}\times 8^{\frac{1}{8}}\times\dots\times(2^k)^{\frac{1}{2^k}} = 2^{(2-\frac{k+2}{2^k})}$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1): 2^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{1}{4}}\times 8^{\frac{1}{8}}\times\dots\times(2^k)^{\frac{1}{2^k}}\times(2^{k+1})^{\frac{1}{2^{k+1}}} = 2^{(2-\frac{k+3}{2^{k+1}})}$$ (حکم استقرا)

طرفین برابری فرض را در عبارت $(2^{k+1})^{\frac{1}{2^{k+1}}}$ ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$2^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{1}{4}}\times 8^{\frac{1}{8}}\times\dots\times(2^k)^{\frac{1}{2^k}}\times(2^{k+1})^{\frac{1}{2^{k+1}}} = 2^{(2-\frac{k+2}{2^k})}\times(2^{k+1})^{\frac{1}{2^{k+1}}}$$

$$= 2^{(2-\frac{k+2}{2^k})}\times 2^{\frac{k+1}{2^{k+1}}} = 2^{(2-\frac{k+2}{2^k})+(\frac{k+1}{2^{k+1}})} = 2^{2-\frac{2(k+2)-(k+1)}{2^{k+1}}} = 2^{2-\frac{k+3}{2^{k+1}}} \Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: P(n)\equiv T$$

۱۹

به ازای $n = 1$ داریم:

$$\log x^1 = (1)\log x \Rightarrow \log x = \log x$$

پس تساوی به ازای $n = 1$ برقرار است.

فرض کنیم $n = k$ در تساوی صدق کند، یعنی:

$$\log x^k = k\log x$$ (فرض استقرا)

باید نشان دهیم تساوی به ازای $n = k+1$ هم درست است، یعنی:

$$\log x^{k+1} = (k+1)\log x$$ (حکم استقرا)

$$\log x^{k+1} = \log(x^k x) = \log x^k + \log x \xlongequal{\text{طبق فرض}} k\log x + \log x = (k+1)\log x$$

پس $n = k+1$ هم در این رابطه صدق می‌کند، لذا این اتحاد به ازای همه‌ی اعداد طبیعی درست است.

۲۰

$$n = 1 \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 1+1 & -1 \\ 1 & -1+1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس به ازای $n = 1$ حکم درست است.

فرض کنیم به ازای $n = k$، حکم صحیح باشد، یعنی:

$$A^k = \begin{bmatrix} k+1 & -k \\ k & -k+1 \end{bmatrix}$$ (فرض استقرا)

باید ثابت کنیم که:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} (k+1)+1 & -(k+1) \\ (k+1) & -(k+1)+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+2 & -k-1 \\ k+1 & -k \end{bmatrix}$$ (حکم استقرا)

داریم:

$$A^{k+1} = AA^k \xlongequal{\text{طبق فرض}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k+1 & -k \\ k & -k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(k+1)+(-1)k & 2(-k)+(-1)(-k+1) \\ (1)(k+1)+(0)(k) & (1)(-k)+(0)(-k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+2 & -k-1 \\ k+1 & -k \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ حکم مسأله به ازای $n = k+1$ هم درست است. در نتیجه تساوی داده شده برای همه‌ی اعداد طبیعی n درست است.

۲۱

$$P(n):\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$$

$$P(1):\frac{1}{1^2}\le 2-\frac{1}{1}\Rightarrow 1\le 1\Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T\Rightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{k^2}\le 2-\frac{1}{k}$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1):\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k+1}$$ (حکم استقرا)

به طرفین نامساوی فرض، عبارت $\frac{1}{(k+1)^2}$ را می‌افزاییم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

از مقایسه‌ی نابرابری اخیر (که معادل فرض استقرا است) با نابرابری حکم نتیجه می‌شود برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم:

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k+1}$$

در ادامه‌ی نامساوی حکم داریم:

$$\frac{-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}\le 0\Rightarrow\frac{-(k+1)^2+k+k(k+1)}{k(k+1)^2}\le 0\Rightarrow\frac{-k^2-2k-1+k+k^2+k}{k(k+1)^2}\le 0\Rightarrow\frac{-1}{k(k+1)}\le 0$$

نابرابری اخیر، بدیهی و روابط هم برگشت‌پذیر هستند، پس $P(k+1)\equiv T$ و لذا حکم مسأله به ازای همه‌ی اعداد طبیعی درست است.

۲۲

$$P(n):1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\ge\sqrt{n}$$

$$P(1):\frac{1}{\sqrt{1}}\ge\sqrt{1}\Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}\ge\sqrt{k}$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1):1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\ge\sqrt{k+1}$$ (حکم استقرا)

به طرفین نابرابری فرض، عبارت $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\ge\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

از مقایسه‌ی نابرابری اخیر با نابرابری حکم نتیجه می‌شود که برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم:

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\ge\sqrt{k+1}$$

(توجه کنید چنانچه بدانیم $A>B$ و بخواهیم ثابت کنیم $A>C$، کافی است نشان دهیم $B\ge C$)

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}\ge 0\Rightarrow\frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1-(k+1)}{\sqrt{k+1}}\ge 0\Rightarrow\frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}-k}{\sqrt{k+1}}\ge 0\Rightarrow\frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}}\ge 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی و روابط برگشت‌پذیر است، پس $P(k+1)\equiv T$ و در نتیجه: $\forall n\in\mathbb{N}:P(n)\equiv T$

۲۳

$$P(n):\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}<1$$

$$P(1):\frac{1}{2}<1\Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^k}<1$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1):\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}<1$$ (حکم استقرا)

طرفین نابرابری فرض را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}<\frac{1}{2}$$

حال به طرفین نابرابری اخیر $\frac{1}{2}$ اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\Rightarrow P(k+1)\equiv T$$

$$\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:P(n)\equiv T$$

۲۴

$$P(n): \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\dots+\frac{1}{n(n+2)}<\frac{n}{n+1}$$

$$P(1): \frac{1}{1\times(1+2)}<\frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{2} \Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T \Rightarrow \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\dots+\frac{1}{k(k+2)}<\frac{k}{k+1}$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1): \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\dots+\frac{1}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{k+1}{k+2}$$ (حکم استقرا)

به طرفین نامساوی فرض، عبارت $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$ را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\dots+\frac{1}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

از مقایسه‌ی این نامساوی با حکم نتیجه می‌شود که برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم:

$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{k+1}{k+2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}-\frac{k+1}{k+2}<0 \Rightarrow \frac{k(k+2)(k+3)+k+2-(k+1)(k+1)(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)}<0$$

$$\Rightarrow \frac{k^3+3k^2+2k^2+6k+k+2-k^3-2k^2-k-3k^2-6k-3}{(k+1)(k+2)(k+3)}<0 \Rightarrow \frac{-1}{(k+1)(k+2)(k+3)}<0$$

این رابطه بدیهی و روابط بالا هم برگشت‌پذیر است، پس $P(k+1)\equiv T$ و حکم برای تمام اعداد طبیعی درست است.

۲۵

$$P(1): (1+\sqrt{7})^1 \geq 1+\sqrt{7}(1) \Rightarrow 1+\sqrt{7} \geq 1+\sqrt{7} \Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T \Rightarrow (1+\sqrt{7})^k \geq 1+\sqrt{7}k$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1): (1+\sqrt{7})^{k+1} \geq 1+\sqrt{7}(k+1)$$ (حکم استقرا)

طرفین فرض را در $1+\sqrt{7}$ ضرب می‌کنیم:

$$(1+\sqrt{7})^{k+1} \geq (1+\sqrt{7}k)(1+\sqrt{7})$$

برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم: $(1+\sqrt{7}k)(1+\sqrt{7}) \geq 1+\sqrt{7}(k+1)$، داریم:

$$(1+\sqrt{7}k)(1+\sqrt{7}) \geq 1+\sqrt{7}(k+1) \Rightarrow 1+\sqrt{7}+\sqrt{7}k+7k \geq 1+\sqrt{7}k+\sqrt{7} \Rightarrow 7k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است و روابط برگشت‌پذیر هستند، بنابراین $P(k+1)\equiv T$ و حکم به ازای تمام اعداد طبیعی برقرار است.

۲۶

$$P(n): 2^n \geq n+1$$

$$P(1): 2^1 \geq 1+1 \Rightarrow 2 \geq 2 \Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T \Rightarrow 2^k \geq k+1$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1): 2^{k+1} \geq k+2$$ (حکم استقرا)

طرفین فرض را در ۲ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$2^{k+1} \geq 2(k+1)$$

برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم:

$$2(k+1) \geq k+2$$

$$\Rightarrow 2k+2 \geq k+2 \Rightarrow k \geq 0$$

این رابطه بدیهی و روابط هم برگشت‌پذیر هستند، پس $P(k+1)\equiv T$ و در نتیجه:

$$\forall n \in \mathbb{N}: P(n)\equiv T$$

۲۷

$$P(1): 1+\sqrt{3} \geq 1+\sqrt{3} \Rightarrow P(1)\equiv T$$

$$P(2): (1+\sqrt{3})^2 \geq 1+2\sqrt{3} \Rightarrow 1+2\sqrt{3}+3 \geq 1+2\sqrt{3} \Rightarrow P(2)\equiv T$$

$$P(k)\equiv T \Rightarrow (1+\sqrt{3})^k \geq 1+k\sqrt{3}$$ (فرض استقرا)

$$P(k+1): (1+\sqrt{3})^{k+1} \geq 1+(k+1)\sqrt{3}$$ (حکم استقرا)

دو طرف نامساوی فرض را در عبارت $1+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$(1+\sqrt{3})^{k+1} \geq (1+k\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$$

کافی است ثابت کنیم که:

$$(1+k\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \geq 1+(k+1)\sqrt{3} \quad (*)$$

داریم:

$$1+\sqrt{3}+k\sqrt{3}+3k \geq 1+k\sqrt{3}+\sqrt{3} \Rightarrow 3k \geq 0$$

به یک نامساوی بدیهی رسیدیم که با توجه به برگشت‌پذیر بودن روابط، نامساوی (*) و لذا نامساوی حکم استقرا ثابت می‌شود.

۲۸ به ازای $n=۱$ حکم درست است زیرا داریم:
$$(\frac{x+y}{۲})^۱ \le \frac{x^۱+y^۱}{۲} \Rightarrow \frac{x+y}{۲} \le \frac{x+y}{۲}$$
فرض کنیم نابرابری به ازای $n=k$ برقرار باشد؛ یعنی: (فرض استقرا)
$$(\frac{x+y}{۲})^k \le \frac{x^k+y^k}{۲}$$
باید ثابت کنیم برای $n=k+۱$ هم رابطه برقرار است؛ یعنی: (حکم استقرا)
$$(\frac{x+y}{۲})^{k+۱} \le \frac{x^{k+۱}+y^{k+۱}}{۲}$$
طرفین نابرابری فرض را در $\frac{x+y}{۲} \ge ۰$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:
$$(\frac{x+y}{۲})^{k+۱} \le (\frac{x+y}{۲})(\frac{x^k+y^k}{۲})$$
از مقایسه‌ی این نابرابری با حکم درمی‌یابیم که برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم:
$$(\frac{x+y}{۲})(\frac{x^k+y^k}{۲}) \le \frac{x^{k+۱}+y^{k+۱}}{۲}$$
$$\Rightarrow x^{k+۱}+xy^k+yx^k+y^{k+۱} \le ۲x^{k+۱}+۲y^{k+۱} \Rightarrow -x^{k+۱}+x^ky+y^kx-y^{k+۱} \le ۰$$
$$\Rightarrow x^k(y-x)+y^k(x-y) \le ۰ \Rightarrow (x^k-y^k)(y-x) \le ۰$$
که این رابطه بدیهی است؛ زیرا برای مقادیر x و y مثبت، (x^k-y^k) و $(y-x)$ مختلف‌العلامه هستند. تمامی روابط برگشت‌پذیرند، پس نابرابری به ازای $n=k+۱$ و در نتیجه برای تمام اعداد طبیعی درست است.

---

۲۹ با توجه به فرض مسأله، گام اول استقرا $(n=۲)$ پیموده شده است. حال فرض کنیم نامساوی به ازای k عدد حقیقی $x_۱, x_۲, ..., x_k$ برقرار باشد: (فرض استقرا)
$$|x_۱+x_۲+...+x_k| \le |x_۱|+|x_۲|+...+|x_k|$$
باید ثابت کنیم: (حکم استقرا)
$$|x_۱+x_۲+...+x_k+x_{k+۱}| \le |x_۱|+|x_۲|+...+|x_k|+|x_{k+۱}|$$
$$|x_۱+x_۲+...+x_k+x_{k+۱}| = |(x_۱+x_۲+...+x_k)+x_{k+۱}| \underset{|a+b|\le|a|+|b|}{\le} |x_۱+x_۲+...+x_k|+|x_{k+۱}| \underset{\text{با توجه به فرض استقرا}}{\le} |x_۱|+|x_۲|+...+|x_k|+|x_{k+۱}|$$

---

۳۰ باید نشان دهیم که $۱۰|P_n$ یا به عبارت دیگر $P_n = ۱۱^n-۱ = ۱۰t, t\in\mathbb{Z}$، پس:
$$P(۱): P_۱ = ۱۱-۱ = ۱۰ = ۱۰(۱) \Rightarrow P(۱) \equiv T$$
$$P(k) \equiv T \Rightarrow P_k = ۱۱^k-۱ = ۱۰t \quad \text{(فرض استقرا)}$$
$$P(k+۱): P_{k+۱} = ۱۱^{k+۱}-۱ = ۱۰t' \quad \text{(حکم استقرا)}$$
طرفین فرض را در عدد ۱۱ ضرب می‌کنیم:
$$۱۱^{k+۱}-۱۱ = ۱۰(۱۱t) \Rightarrow ۱۱^{k+۱}-۱-۱۰ = ۱۰(۱۱t) \Rightarrow ۱۱^{k+۱}-۱ = ۱۰\underbrace{(۱۱t+۱)}_{=t'\in\mathbb{Z}} = ۱۰t', t'\in\mathbb{Z} \Rightarrow$$ حکم ثابت شد.

---

۳۱ باید نشان دهیم که $۵^n-۴n-۱ = ۱۶t, t\in\mathbb{Z}$، پس:
$$P(۱): ۵^۱-۴(۱)-۱ = ۰ = ۰\times۱۶ \Rightarrow P(۱) \equiv T$$
$$P(k) \equiv T \Rightarrow ۵^k-۴k-۱ = ۱۶t \quad , \quad t\in\mathbb{Z} \quad \text{(فرض استقرا)}$$
$$P(k+۱): ۵^{k+۱}-۴k-۵ = ۱۶t' \quad , \quad t'\in\mathbb{Z} \quad \text{(حکم استقرا)}$$
طرفین فرض را در ۵ ضرب می‌کنیم:
$$۵^{k+۱}-۲۰k-۵ = ۱۶t\times۵ \Rightarrow ۵^{k+۱}-۴k-۵ = ۱۶t\times۵+۱۶k = ۱۶\underbrace{(۵t+k)}_{=t'\in\mathbb{Z}} = ۱۶t', t'\in\mathbb{Z} \Rightarrow P(k+۱) \equiv T$$

---

۳۲ باید نشان دهیم که $۹|۴^n+۱۵n-۱$، یا به عبارت دیگر:
$$P(n): ۴^n+۱۵n-۱ = ۹q, (q\in\mathbb{Z})$$
$$P(۱): ۴^۱+۱۵(۱)-۱ = ۱۸ = ۹\times۲ \Rightarrow P(۱) \equiv T$$
$$P(k) \equiv T \Rightarrow ۴^k+۱۵k-۱ = ۹q, (q\in\mathbb{Z}) \quad \text{(فرض استقرا)}$$
$$P(k+۱): ۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱ = ۹q', (q'\in\mathbb{Z}) \quad \text{(حکم استقرا)}$$
$$۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱ = ۴^{k+۱}+۱۵k+۱۴ = ۴(۴^k+۱۵k-۱)-۳\times۱۵k+۱۸$$
$$= ۴(۴^k+۱۵k-۱)-۹\times۵k+۹\times۲ = ۴(۹q)-۹(۵k-۲) = ۹(۴q-۵k+۲) = ۹q', (q'\in\mathbb{Z})$$
$$\Rightarrow P(k+۱) \equiv T \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: P(n) \equiv T$$