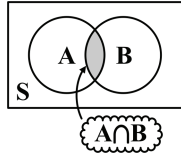


اشتراک دو پیشامد

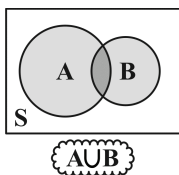
اگر A و B دو پیشامد باشند، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند. به عبارت دیگر هرگاه از ما خواسته شد احتمال آن‌که A و B رخ دهند را به دست آوریم، باید $P(A \cap B)$ را محاسبه کنیم. داریم:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

اجتماع دو پیشامد

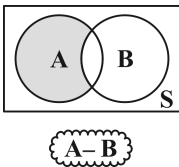
اگر A و B دو پیشامد باشند، $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که یکی از پیشامدهای A و B یا هر دو رخ دهند. به عبارت دیگر هرگاه از ما خواسته شد، احتمال آن‌که A یا B رخ دهند را به دست آوریم، باید $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم. دقت کنیم احتمال پیشامد A یا B لزوماً برابر با مجموع احتمال پیشامد A و احتمال پیشامد B نیست (به عبارتی به این معنی نیست که لزوماً احتمال هر دو پیشامد را با هم جمع کنیم)، بلکه باید:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\div n(S)} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نکته‌ی به یاد ماندنی: اگر بین دو پیشامد A و B ، حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد، یعنی A یا B (یعنی $A \cup B$) رخ داده است.

تفاضل دو پیشامد



اگر A و B دو پیشامد باشند، $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

نکته‌ی به یاد ماندنی: پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که فقط پیشامد A رخ دهد و $B - A$ زمانی رخ می‌دهد که فقط پیشامد B رخ دهد.

تست آموزشی ۶

در پرتاب یک جفت تاس، احتمال آن‌که دو تاس یکسان ظاهر شوند یا مجموع‌شان بزرگ‌تر از ۹ باشد، چه قدر است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴) \quad \frac{1}{3} \quad (۳) \quad \frac{7}{18} \quad (۲) \quad \frac{5}{18} \quad (۱)$$

$$n(S) = 6^2 = 36$$

پاسخ: گزینه‌ی (۱)

$$\begin{aligned} A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} &\Rightarrow n(A) = 6 \\ B = \{(4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)\} &\Rightarrow n(B) = 6 \\ \text{مجموع } 10 & \quad \text{مجموع } 11 & \quad \text{مجموع } 12 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۵۱- از بین اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این عدد، زوج یا مضرب ۳ باشد، کدام است؟

$$\frac{4}{5} \quad (۴) \quad \frac{3}{5} \quad (۳) \quad \frac{2}{4} \quad (۲) \quad \frac{2}{3} \quad (۱)$$

۵۲- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو تاس عددی اول بیابند یا مجموع‌شان برابر ۸ باشد، کدام است؟

$$\frac{11}{36} \quad (۴) \quad \frac{4}{9} \quad (۳) \quad \frac{1}{3} \quad (۲) \quad \frac{14}{36} \quad (۱)$$

۵۳- احتمال آن‌که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود، 55% و در درس شیمی قبول شود، 6% است. اگر احتمال آن‌که حداقل در یکی

(سراسری ریاضی ۸۱)

از دو درس قبول شود، 75% باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟

$$5/5 \quad (۴) \quad 4/5 \quad (۳) \quad 4/4 \quad (۲) \quad 3/5 \quad (۱)$$

۵۴- در تست قبلی، احتمال قبولی فقط در درس فیزیک، کدام است؟

$$4/4 \quad (۴) \quad 3/5 \quad (۳) \quad 2/2 \quad (۲) \quad 1/5 \quad (۱)$$

۵۵- سؤال‌های یک امتحان بر حسب دشواری و آسانی و یا تستی و تشریحی بودن، مطابق جدول مقابل است (یعنی ۲ سؤال دشوار و تشریحی داریم و ...) اگر سؤالی به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آن‌که آسان یا تستی باشد، کدام است؟

سطح سؤال / نوع سؤال	دشوار	آسان
تشریحی	۲	۳
تستی	۷	۱۳

$$\begin{array}{ll} \frac{23}{25} \text{ (۱)} & \frac{19}{25} \text{ (۲)} \\ \frac{14}{25} \text{ (۳)} & \frac{16}{25} \text{ (۴)} \end{array}$$

۵۶- آمار نشان می‌دهد که در یکی از شهرهای بزرگ، ۲۵٪ جرائم در طول روز و ۱۸٪ جرائم درون شهر صورت می‌گیرد. اگر تنها ۱۰٪ جرائم در حومه‌ی شهر و در طول روز اتفاق بیفتند، در این صورت چند درصد جرائم درون شهر و در طول شب رخ می‌دهد؟

$$\frac{65}{100} \text{ (۱)} \quad \frac{75}{100} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{100} \text{ (۳)} \quad \frac{72}{100} \text{ (۴)}$$

۵۷- اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و احتمال آن‌که دست کم یکی از دو پیشامد رخ دهد برابر $\frac{1}{4}$ باشد، احتمال آن‌که هر دو پیشامد رخ دهند، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{12} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{24} \text{ (۴)}$$

۵۸- احتمال وقوع پیشامد A برابر $\frac{1}{4}$ و احتمال وقوع پیشامد $A \cup B$ برابر $\frac{1}{3}$ و $A \subset B$ است. احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

$$\frac{1}{3} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{12} \text{ (۳)} \quad \frac{7}{12} \text{ (۴)} \quad (\text{آزمایشی سنجش تجربی ۸۳})$$

۵۹- اگر $P(A' \cap B') = \frac{1}{8}$ ، $P(A') = \frac{5}{8}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ باشد، $P(B)$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

۶۰- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، حاصل $1 - P(A') - P(A \cap B)$ کدام است؟

$$P(B) \text{ (۱)} \quad P(B') \text{ (۲)} \quad P(A \cap B') \text{ (۳)} \quad P(A' \cap B) \text{ (۴)}$$

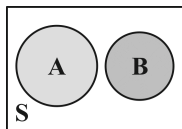
۶۱- اگر $P(A' \cup B') = \frac{4}{5}$ و $P(A) = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار عددی $P(A - B)$ کدام است؟

$$\frac{1}{5} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{5} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{10} \text{ (۳)} \quad \frac{3}{10} \text{ (۴)}$$

درسنامه‌ی ۷

دو پیشامد ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه با هم نتوانند رخ دهند. به عبارت دیگر وقوع یکی به معنی عدم وقوع دیگری باشد. در دو پیشامد ناسازگار $A \cap B = \emptyset$ است.



به عنوان مثال در پرتاب یک تاس، پیشامدهای «زوج آمدن» و «فرد آمدن» ناسازگارند، یا در پرتاب یک جفت تاس، پیشامدهای «مجموع برابر ۴» و «مجموع برابر ۶» ناسازگار می‌باشند. اگر دو پیشامد ناسازگار نباشند، سازگار نامیده می‌شوند. مانند پیشامد «زوج آمدن» و «عدد اول آمدن» که فقط در یک عدد اشتراک دارند، آن هم عدد «۲» است. در دو پیشامد ناسازگار A و B احتمال آن‌که پیشامد A یا پیشامد B رخ دهد، برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

دلیل این موضوع آن است که: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

تذکر مهم: اکثر دانش‌آموزان عزیز، دو پیشامد ناسازگار را بدون هیچ‌گونه بررسی، تشخیص می‌دهند. به عنوان مثال در تست «در یک خانواده‌ی ۴ فرزند، با کدام احتمال دو فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟»، دانش‌آموزان عزیز به راحتی تشخیص می‌دهند پیشامد ۲ فرزند پسر و پیشامد ۳ فرزند دختر، ناسازگار می‌باشند. پس احتمال اجتماع آن‌ها برابر با مجموع احتمال‌های این دو پیشامد ناسازگار است. بنابراین در بسیاری از تست‌های مطرح شده، برای محاسبه‌ی احتمال دو پیشامدی که بین آن‌ها «یا» گفته می‌شود، بدون هیچ‌گونه بررسی احتمال‌های آن دو پیشامد را با هم جمع می‌کنیم.

نکته‌ی به یاد ماندنی:

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، A و B' و نیز B و A' قطعاً سازگارند. اگر A و B متمم یک‌دیگر نباشند، A' و B' نیز سازگار خواهند بود.

۶۲- اگر $P(A) = \frac{2}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{6}$ و $A \cap B = \emptyset$ ، آنگاه احتمال وقوع پیشامد A یا B کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۴)

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{7}{9}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{13}{18}$

۶۳- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A) = P(B') = \frac{1}{3}$ ، آنگاه $P(A \cup B)$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۰)

(۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{11}{12}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۶۴- می‌دانیم دو پیشامد A و B ناسازگارند. اگر $P(A' \cap B') = \frac{3}{5}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه $P(A)$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{20}$ (۲) $\frac{3}{20}$ (۳) $\frac{2}{15}$ (۴) $\frac{4}{15}$

۶۵- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، کدام رابطه بین احتمال پیشامدها درست است؟

(۱) $P(A)P(B) = 1 - P(A' \cup B')$ (۲) $P(A)P(B) = 1 - P(A')P(B')$

(۳) $P(A) + P(B) + P(A' \cup B') = 1$ (۴) $P(A) + P(B) + P(A' \cap B') = 1$

۶۶- فرض کنید فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{3, 4\}$ و $C = \{6, 5, 4\}$ باشد، آنگاه:

(۱) A و B ناسازگارند. (۲) B و C ناسازگارند. (۳) A و C ناسازگارند. (۴) اگر B رخ دهد، C نیز رخ می‌دهد.

۶۷- در پرتاب یک جفت تاس، احتمال آن که مجموع اعداد رو شده برابر ۴ یا ۹ باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{5}{36}$ (۳) $\frac{7}{36}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۶۸- در پرتاب یک جفت تاس، احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده برابر ۳ یا هر دو مضرب ۳ باشند، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۶۹- از کیسه‌ای شامل ۱ مهره قرمز، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه متمایز، دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این که دو مهره

انتخابی سفید یا دو مهره انتخابی سیاه باشند، چه قدر است؟

(۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{9}{28}$ (۳) $\frac{7}{36}$ (۴) $\frac{1}{4}$

درسنامه ۸

دو پیشامد مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. در دو پیشامد مستقل، احتمال پیشامد A و پیشامد B را از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

در نتیجه احتمال آن که پیشامد A یا پیشامد B رخ دهند، برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A).P(B)}_{P(A \cap B)}$$

وقتی دو پیشامد مستقل هستند، با دانستن نتیجه‌ی یکی از آن‌ها نمی‌توان نتیجه‌ی دیگری را پیش‌بینی کرد. پس احتمال هر پیشامد برای خود مطرح بوده و به دیگری ربطی ندارد. مثلاً وقتی دو تاس را پرتاب می‌کنیم، اگر اعلام شده که تاس اول ۵ آمده است، چه قدر احتمال دارد تاس دوم ۳ آمده باشد، می‌گوییم $\frac{1}{6}$. چون تاس دوم ربطی به تاس اول نداشته و نسبت به هم مستقل‌اند. حال اگر بگویند چه قدر احتمال دارد که تاس اول ۵ و تاس دوم ۳ بیایند (یعنی اشتراک آن‌ها را بخواهند)، می‌گوییم:

$$P(\underbrace{\text{تاس اول ۵}}_A \text{ و } \underbrace{\text{تاس دوم ۳}}_B) = P(A \cap B) \stackrel{A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند}}{=} P(A).P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

نکته‌های به یاد ماندنی:

- ۱) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، پیشامدهای A و B'، A' و B، A' و B' نیز دو پیشامد مستقل خواهند بود.
- ۲) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، احتمال آن که فقط پیشامد A رخ دهد و یا احتمال آن که فقط پیشامد B رخ دهد را از فرمول‌های زیر به دست می‌آوریم. داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') \stackrel{A' \text{ و } B' \text{ مستقل‌اند}}{=} P(A).P(B')$$

$$P(B - A) = P(B \cap A') \stackrel{B \text{ و } A' \text{ مستقل‌اند}}{=} P(B).P(A')$$

تست آموزشی ۱

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A \cup B) = 0/8$ و $P(A) = 0/5$ ، آن گاه $P(B')$ برابر کدام است؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/5$ (۳) $0/6$ (۴) $0/7$

پاسخ: گزینه‌ی (۱)

$$P(A \cup B) = 0/8 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0/8 \xrightarrow{P(A)=0/5} 0/5 + P(B) - 0/5P(B) = 0/8$$

$$\Rightarrow 0/5P(B) = 0/3 \Rightarrow P(B) = \frac{0/3}{0/5} = \frac{3}{5} = 0/6 \Rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0/6 = 0/4$$

تست آموزشی ۲

۷۵٪ افراد جامعه‌ای دارای چشم میشی بوده و ۴۰٪ گروه خونی‌شان از نوع A می‌باشد. اگر یک فرد به طور تصادفی از بین آن‌ها انتخاب شود، احتمال این که این فرد دارای چشم میشی یا دارای گروه خونی A باشد، کدام است؟ (سراسری تیربی ۷۹)

- (۱) $0/78$ (۲) $0/82$ (۳) $0/85$ (۴) $0/95$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)، پیشامد چشم میشی را A و پیشامد گروه خونی از نوع A را B در نظر می‌گیریم. به راحتی نتیجه می‌گیریم این دو پیشامد مستقل از هم هستند. بنابراین احتمال چشم میشی یا گروه خونی از نوع A (احتمال اجتماع دو پیشامد) برابر است با:

$$\begin{array}{c} \text{گروه خونی } A \\ \uparrow \\ P(A) = 0/75, P(B) = 0/4 \xrightarrow{\text{مستقل اند } B \text{ و } A} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0/75 + 0/4 - 0/75 \times 0/4 = 0/85 \\ \downarrow \\ \text{چشم میشی} \end{array}$$

۷۰- اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند و $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ ، حاصل $P(A \cup B')$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۷۱- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A \cap B) = [P(A)]^2$ باشد، $P(A')$ کدام است؟ ($P(A) \neq 0$)

- (۱) $P(A)$ (۲) $P(A)P(B)$ (۳) $1 - P(A)P(B)$ (۴) $1 - P(B)$

۷۲- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = \frac{2}{3}P(A')$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ ، آن گاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $0/2$ (۲) $0/4$ (۳) $0/6$ (۴) $0/8$

۷۳- هرگاه $P(A) = 0/2$ ، $P(B) = 0/3$ و A و B نسبت به هم مستقل باشند، $P(B - A)$ کدام است؟

- (۱) $0/24$ (۲) $0/5$ (۳) $0/3$ (۴) $0/1$

۷۴- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، حاصل $1 - P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $P(A') \cdot P(B')$ (۲) $P(A') \cdot P(B)$ (۳) $P(A) \cdot P(B')$ (۴) $1 - P(A) \cdot P(B)$

۷۵- اگر $P(A) = 0/4$ ، $P(B) = 0/7$ و $P(A \cup B) = 0/82$ ، آن گاه دو پیشامد A و B چگونه‌اند؟ (آزمایشی سنجش تیربی ۸۴)

- (۱) متمم (۲) یکی زیر مجموعه‌ی دیگری (۳) ناسازگار (۴) مستقل

۷۶- اگر برای پیشامد غیرتهی A و مستقل از پیشامد B ، داشته باشیم $P(A \cap B) = P(A)$ ، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $P(A) + P(B) = 1$ (۲) $P(A \cup B) = P(A)$ (۳) $P(A \cup B) = P(B)$ (۴) $P(A - B) = P(B)$

۷۷- در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آن‌ها تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آن‌ها مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ (سراسری تیربی ۹۰)

- (۱) $0/7$ (۲) $0/75$ (۳) $0/8$ (۴) $0/85$

۷۸- محمد به احتمال $0/3$ و علی به احتمال $0/4$ ، امسال در کنکور سراسری قبول می‌شوند. احتمال آن که هر دو نفر در کنکور قبول شوند، چه قدر است؟

- (۱) $0/7$ (۲) $0/58$ (۳) $0/12$ (۴) $0/42$

۷۹- در تست قبلی، احتمال آن که هر دو در کنکور سراسری مردود شوند، کدام است؟

- (۱) $0/88$ (۲) $0/58$ (۳) $0/42$ (۴) $0/46$

۸۰- در تست ۷۸، احتمال آن که فقط یک نفر در کنکور سراسری قبول شود، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{54}$ (۲) $\frac{1}{46}$ (۳) $\frac{1}{45}$ (۴) $\frac{1}{55}$

۸۱- در تست ۷۸، احتمال آن که حداقل یکی از آن‌ها در کنکور سراسری قبول شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{52}$ (۲) $\frac{1}{58}$ (۳) $\frac{1}{48}$ (۴) $\frac{1}{7}$

۸۲- احتمال آن که نفرات A، B و C در کنکور قبول شوند به ترتیب $\frac{1}{7}$ ، $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{9}$ است. احتمال آن که دست کم یکی از آن‌ها در کنکور قبول شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{51}$ (۲) $\frac{1}{54}$ (۳) $\frac{1}{991}$ (۴) $\frac{1}{994}$

۸۳- در کارخانه‌ای دو دستگاه مستقل از هم کار می‌کنند. احتمال این که هر یک از این دو دستگاه کار کند، $\frac{1}{4}$ است. احتمال این که هر دو دستگاه با هم کار کنند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{66}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۸۴- در جعبه‌ی A، ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی B، ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه قرار دارد. از هر یک از دو جعبه، یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که هم رنگ باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{35}$ (۲) $\frac{12}{35}$ (۳) $\frac{15}{35}$ (۴) $\frac{18}{35}$

۸۵- در پرتاب دو تاس همگن، احتمال آن که هر دو عدد رو شده اول باشند، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۸۶- دو تاس متمایز را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هیچ یک از اعداد رو شده، مضرب ۳ نیستند؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{18}$

۸۷- در پرتاب دو تاس، احتمال هر دو زوج آمدن را $P(A)$ و احتمال هر دو فرد آمدن را $P(B)$ می‌نامیم. حاصل $P^2(A) + P^2(B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۸۸- احتمال آن که در پرتاب سه سکه، فقط سکه‌ی اول «رو» بیاید، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۸۹- در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این که حداقل یک سکه «رو» و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱ فارغ از کشور)

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۹۰- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی ۹۱)

- (۱) $\frac{27}{64}$ (۲) $\frac{37}{64}$ (۳) $\frac{19}{32}$ (۴) $\frac{39}{64}$

۹۱- اگر در یک خانواده احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر $\frac{1}{6}$ و پسر $\frac{1}{4}$ باشد، احتمال آن که هر سه فرزند این خانواده پسر باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{564}$ (۲) $\frac{1}{64}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{808}$ (آزاد تجربی ۸۲)

۹۲- احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده $\frac{1}{4}$ است. چه قدر احتمال دارد فرزند اول و دوم این خانواده هم جنس باشند؟ (آزاد پزشکی ۸۶)

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{5}{16}$ (۴) $\frac{9}{16}$

۹۳- احتمال آن که در یک خانواده‌ی چهار فرزندی، ۲ فرزند بزرگ‌تر، هم جنس باشند و دو فرزند کوچک‌تر، جنسیت مخالف داشته باشند، چه قدر است؟ (آزاد پزشکی ۸۴)

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۹۴- احتمال آن که افراد A، B، C و D همگی در یک روز از روزهای هفته به دنیا آمده باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{7^3}$ (۲) $\frac{1}{7^4}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$

۹۵- چهار دانش آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر از آن‌ها یکسان است؟

- (۱) $\frac{19}{48}$ (۲) $\frac{41}{96}$ (۳) $\frac{23}{48}$ (۴) $\frac{55}{96}$
- (سراسری تجربی ۹۲ فاجه از کشور)

درسنامه ۹

احتمال شرطی

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، وقتی $P(B) \neq 0$ باشد، احتمال وقوع پیشامد A به شرط این که پیشامد B رخ داده باشد، برابر است با: $(P(B) \neq 0)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

\swarrow رخ داده است \searrow به شرط

بدیهی است وقتی که $P(B) = 0$ باشد، احتمال شرطی قابل تعریف نیست.

در تست‌های احتمال شرطی، می‌توانیم از فرمول بالا استفاده نکرده و از روش تستی بهره بگیریم. در این حالت پیشامدی که رخ داده است، یعنی پیشامد B را به عنوان فضای نمونه‌ای جدید در نظر می‌گیریم و عضوهای پیشامد موردنظر تست، یعنی A را از داخل این فضای نمونه‌ای جدید (پیشامدی که رخ داده است)، انتخاب می‌کنیم. سپس احتمال شرطی A به شرط وقوع B را از رابطه‌ی $P(A|B) = \frac{n(A)}{n(B)}$ به دست می‌آوریم.

تست آموزشی ۴

تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد بر زمین نشسته بزرگ‌تر از ۳ آمده است، احتمال آن که عدد رو شده فرد باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی (۱)، طبق توضیحات بالا، کافی است پیشامدی که رخ داده است (عدد بر زمین نشسته بزرگ‌تر از ۳ آمده است)، یعنی $B = S = \{4, 5, 6\}$ جدید را به عنوان فضای نمونه‌ای جدید در نظر گرفته و پیشامدی که احتمالش را می‌خواهیم، (یعنی $\{ \text{عدد فرد} \} = A$)، از داخل این فضای نمونه‌ای جدید انتخاب کنیم:

$$A = \{ \text{عدد فرد} \} \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{n(A)}{n(S_{\text{جدید}})} = \frac{1}{3}$$

تست آموزشی ۵

اگر در پرتاب دو تاس مجموع اعداد رو شده برابر ۶ باشد، احتمال آن که هر دو عدد فرد باشد، چه قدر است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)، در این تست پیشامدی را که رخ داده است، یعنی مجموع اعداد رو شده برابر ۶ را نوشته و آن را به عنوان فضای نمونه‌ای جدید در نظر می‌گیریم:

$$B = \{ \text{مجموع ۶} \} = S_{\text{جدید}} = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\} \Rightarrow n(B) = 5$$

حال پیشامد مورد نظر تست، یعنی هر دو عدد فرد را از درون فضای نمونه‌ای جدید انتخاب می‌کنیم:

$$A = \{ \text{هر دو عدد فرد} \} = \{(1,5), (3,3), (5,1)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

در نتیجه احتمال شرطی A به شرط وقوع B ، برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{3}{5}$$

نکته‌های به یاد ماندنی:

۱) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه $P(B|A) = P(A|B) = 0$ است. به عبارتی در دو پیشامد ناسازگار احتمال شرطی برابر صفر می‌باشد. دقت کنیم! چون A و A' همواره ناسازگارند، پس $P(A'|A) = P(A|A') = 0$ است.

۲) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه داریم:

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B)$$

پس اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، در محاسبه‌ی احتمال شرطی پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B ، چون شرط رخ دادن B ، هیچ تأثیری در احتمال وقوع پیشامد A ندارد، شرط (پیشامدی را که رخ داده است) را کنار گذاشته و آن را نادیده می‌گیریم.

سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم بار اول «رو» ظاهر شده است، با کدام احتمال دوبار دیگر «پشت» ظاهر می‌شود؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، می‌دانیم بار اول سکه «رو» ظاهر شده است. چون پیشامدی که رخ داده است (شرط)، مستقل از «رو» و «پشت» ظاهر شدن دوبار دیگر این سکه است، بنابراین برای تعیین احتمال آن که دوبار دیگر سکه «پشت» ظاهر شود، شرط را کنار گذاشته و گویی می‌خواهیم دوبار سکه را پرتاب کرده و احتمال آن را به دست آوریم که هر دوبار «پشت» ظاهر شود. داریم:

بار سوم «پشت» و بار دوم «پشت»

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۹۶- در پرتاب دو تاس، هر دو تاس کوچک‌تر از ۵ ظاهر شده است. احتمال آن که عدد دو تاس برابر باشند، کدام است؟

(۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۹۷- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود، احتمال این که دو تاس دو عدد متوالی را نشان دهند، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴) $\frac{4}{11}$

۹۸- در پرتاب دو تاس با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کم‌تر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده، فرد هستند؟

(۱) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (سراسری ریاضی ۸۳)

۹۹- در پرتاب ۴ تاس، چهار عدد متوالی ظاهر شده است. احتمال آن که یکی از تاس‌ها عدد ۲ باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۱

۱۰۰- در ظرفی ۵ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سفید متمایز وجود دارد. دو مهره به تصادف از این ظرف بیرون می‌آوریم. اگر

هیچ‌کدام از مهره‌ها آبی نباشد، احتمال آن که مهره‌ها هم‌رنگ باشند، چه قدر است؟

(۱) $\frac{15}{28}$ (۲) $\frac{17}{28}$ (۳) $\frac{13}{28}$ (۴) $\frac{11}{28}$

۱۰۱- کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن که کارمند مردی،

تحصیلات دانشگاهی داشته باشد، چه قدر است؟ (تمرین کتاب درسی ریاضی عمومی)

		جنسیت	
		زن	مرد
تحصیلات	دانشگاهی	۱۰	۱۵
	کم‌تر از دانشگاهی	۸۰	۹۰

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۰۲- یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است؟

(۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$ (سراسری تجربی ۸۷ فارغ از کشور)

۱۰۳- در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

(۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{5}{8}$ (سراسری تجربی ۸۹ فارغ از کشور)

۱۰۴- در امتحانات یک کلاس، ۲۰٪ دانش‌آموزان در ریاضی، ۱۵٪ در فیزیک و ۱۰٪ در هر دو درس تجدید شده‌اند. احتمال این که

دانش‌آموزی از این کلاس در درس فیزیک تجدید شده باشد، مشروط بر آن که در درس ریاضی تجدید شده باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۱۰۵- خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند،

کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

(۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{5}{16}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۱۰۶- در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۰۷- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره پشت سرهم و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که اولی سفید، دومی قرمز و سومی آبی باشد، کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{24} \quad (۲) \frac{5}{24} \quad (۳) \frac{1}{6} \quad (۴) \frac{1}{12}$$

۱۰۸- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

$$(۱) \frac{2}{7} \quad (۲) \frac{5}{14} \quad (۳) \frac{3}{7} \quad (۴) \frac{4}{7}$$

۱۰۹- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به‌طور تصادفی پی‌درپی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟

$$(۱) \frac{1}{10} \quad (۲) \frac{1}{5} \quad (۳) \frac{3}{25} \quad (۴) \frac{2}{5}$$

۱۱۰- یک کیسه حاوی ۲ مهره قرمز، ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سفید است. به تصادف سه مهره یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که ۲ مهره سیاه و ۱ مهره سفید باشد، کدام است؟

$$(۱) \frac{5}{11} \quad (۲) \frac{6}{55} \quad (۳) \frac{2}{11} \quad (۴) \frac{7}{55}$$

۱۱۱- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

$$(۱) \frac{11}{56} \quad (۲) \frac{17}{56} \quad (۳) \frac{13}{56} \quad (۴) \frac{15}{56}$$

۱۱۲- در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره‌ی خارج‌شده سفید است؟

$$(۱) \frac{5}{14} \quad (۲) \frac{3}{7} \quad (۳) \frac{3}{5} \quad (۴) \frac{2}{5}$$

۱۱۳- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{6}$ و $P(A|B) = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{12} \quad (۲) \frac{13}{36} \quad (۳) \frac{1}{3} \quad (۴) \frac{5}{12}$$

۱۱۴- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$ ، آنگاه $P(A|B)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{5} \quad (۲) \frac{1}{4} \quad (۳) \frac{1}{3} \quad (۴) \frac{1}{2}$$

۱۱۵- اگر $P(A|B) = \frac{1}{6}$ ، $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{5}$ ، آنگاه $P(B|A)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{3}{10} \quad (۲) \frac{1}{45} \quad (۳) \frac{1}{6} \quad (۴) \frac{1}{75}$$

۱۱۶- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B') = \frac{2}{3}$ و $P(A|B) = \frac{2}{5}$ باشد، حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{2}{15} \quad (۲) \frac{3}{10} \quad (۳) \frac{7}{10} \quad (۴) \frac{1}{3}$$

۱۱۷- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند که $P(A - B) = \frac{3}{10}$ و $P(A|B') = \frac{7}{10}$ ، مقدار $P(B - A)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{4}{7} \quad (۲) \frac{3}{7} \quad (۳) \frac{7}{10} \quad (۴) \frac{3}{4}$$

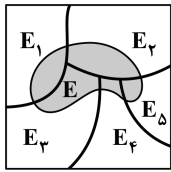
۱۱۸- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A|B) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ ، آنگاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{2}{3} \quad (۲) \frac{5}{6} \quad (۳) \frac{7}{12} \quad (۴) \frac{5}{12}$$

۱۱۹- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری‌که $P(A - B) = \frac{1}{4}$ و $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ، آنگاه $P(A)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{5} \quad (۲) \frac{1}{6} \quad (۳) \frac{1}{7} \quad (۴) \frac{1}{4}$$

قانون جمع احتمال‌ها



گاهی در تست‌ها، فضای نمونه‌ای به مجموعه‌های E_1, E_2, \dots, E_n افزای می‌شود که هیچ‌کدام از آن‌ها با هم اشتراکی ندارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ می‌دهد (به بیان دیگر فضای نمونه‌ای، به پیشامدهای دو به دو ناسازگار تقسیم می‌شود). حال برای به دست آوردن احتمال وقوع پیشامد E که در درون پیشامدهای فوق واقع است، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E | E_1) + P(E_2) \cdot P(E | E_2) + \dots + P(E_n) \cdot P(E | E_n)$$

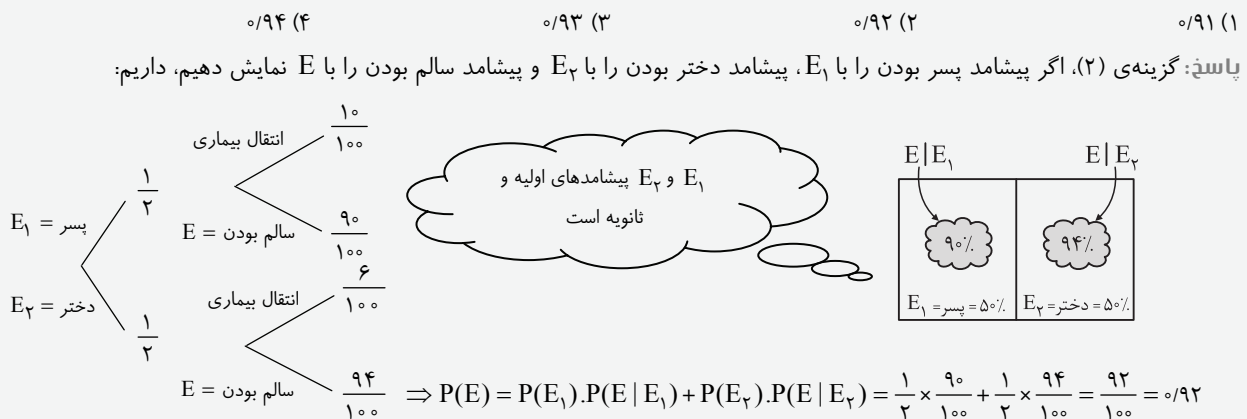
در این نوع مسائل، معمولاً دو یا چند احتمال **تو در تو** دخالت دارند. با این‌که فرمول فوق برای حل آن‌ها وجود دارد ولی استفاده از فرمول فوق گیج‌کننده و عذاب‌آور است. برای حل این نوع مسائل بهترین روش این است که ابتدا احتمال اولیه و احتمال ثانویه را مشخص کرده و آن‌ها را به صورت درختی در نظر بگیریم. سپس شاخه‌هایی که به وضعیت مطلوب ختم می‌شوند را مشخص کرده و احتمال‌های روی آن شاخه‌ها را در هم ضرب و با نتیجه‌ی حاصل از شاخه‌های دیگر جمع می‌کنیم.

تذکر مهم: اگر در صورت تست اشاره‌ای به احتمال پیشامدهای E_1 و E_2 (پیشامدهای اولیه) نشود، فرض می‌کنیم احتمال‌های آن‌ها با هم برابر است، یعنی $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{n}$. اگر تعداد پیشامدهای اولیه را n فرض کنیم، در این حالت احتمال هر کدام از پیشامدهای اولیه برابر $\frac{1}{n}$ است، یعنی $P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_n) = \frac{1}{n}$.

تست آموزشی ۱۲

احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟

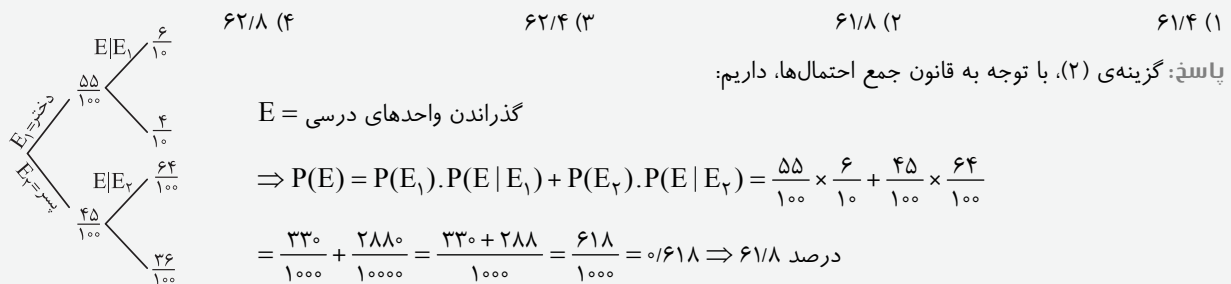
(سراسری تجربی ۸۳)



تست آموزشی ۱۳

۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟

(سراسری تجربی ۸۸ فاج از کشور)



۱۲۰- احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند، ۲۵٪ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۲۰٪ است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه

واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به‌طور تصادفی با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

(سراسری تجربی ۸۹)

۱۶٪ (۴)

۱۵٪ (۳)

۱۴٪ (۲)

۱۳٪ (۱)

۱۲۱- در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان، دفترچه‌ی سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچه‌ی سلامت دارد؟ (سراسری تجربی ۹۰ فارغ از کشور)

- (۱) ۰/۶۵۸ (۲) ۰/۶۶۹ (۳) ۰/۶۸۵ (۴) ۰/۶۹۶

۱۲۲- در یک کارخانه ۶۰٪ محصولات را ماشین A، ۳۰٪ را ماشین B و بقیه را ماشین C تولید می‌کند. اگر ماشین‌های A، B و C به ترتیب ۳۰٪، ۴۰٪ و ۲۰٪ محصول معیوب تولید کنند، احتمال آن‌که محصولی که از این کارخانه به تصادف انتخاب می‌شود معیوب باشد، کدام است؟

- (۱) ۳۴٪ (۲) ۳۸٪ (۳) ۲۸٪ (۴) ۳۲٪

۱۲۳- در یک روستا جمعیت مردان دو برابر جمعیت زنان است. اگر ۴۰ درصد مردان دفترچه‌ی سلامت داشته باشند و ۷۵ درصد زنان این دفترچه را نداشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچه‌ی سلامت ندارد؟

- (۱) $\frac{7}{20}$ (۲) $\frac{13}{20}$ (۳) $\frac{29}{60}$ (۴) $\frac{31}{60}$

۱۲۴- دو ظرف همانند، اولی دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و دومی دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۸ مهره‌ی سیاه است. با چشم بسته یکی از این دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که مهره سفید باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

- (۱) $\frac{17}{35}$ (۲) $\frac{18}{35}$ (۳) $\frac{37}{70}$ (۴) $\frac{39}{70}$

۱۲۵- ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه می‌باشند. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

- (۱) $\frac{25}{63}$ (۲) $\frac{26}{63}$ (۳) $\frac{10}{21}$ (۴) $\frac{11}{21}$ (سراسری تجربی ۹۳)

۱۲۶- دو ظرف داریم. در اولی ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و در دومی ۷ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم، آن‌گاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

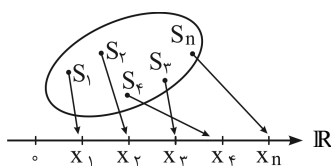
- (۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{11}{27}$ (۳) $\frac{34}{81}$ (۴) $\frac{41}{81}$ (سراسری ریاضی ۸۴)

۱۲۷- یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر عدد مضرب ۳ ظاهر شود، از ظرفی که ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی آبی دارد، مهره‌ای برمی‌داریم. در غیر این صورت از ظرفی که ۷ مهره‌ی آبی دارد، مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟

- (۱) $\frac{5}{27}$ (۲) $\frac{7}{27}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{23}{27}$

درسنامه‌ی II

متغیر تصادفی



اگر در آزمایشی، عددی منحصر به فرد به هر نتیجه‌ی آزمایش نسبت دهیم، این عدد را متغیر تصادفی می‌نامیم و آن را معمولاً با حروف بزرگ X ، Y و ... نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر متغیر تصادفی تابعی است از فضای نمونه‌ای در مجموعه‌ی اعداد حقیقی و یا تابعی است که دامنه‌ی تعریف آن اعضای فضای نمونه‌ای و برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. به عبارتی با قراردادی که در ابتدای سؤال وضع می‌شود، تمام پیشامدها را می‌توانیم به ارقام و اعداد و مدل ریاضی تبدیل کنیم و از آوردن اسم تک‌تک پیشامدها خودداری نماییم.

$$X: S \rightarrow \mathbb{R}$$

مثلاً وقتی سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای $S = \{پ، ر\}$ است. اگر متغیر تصادفی X تعداد «رو» آمدن باشد، داریم:

$$X = 0, 1 \Rightarrow \text{تعداد «رو» آمدن } X$$

صفر بار «رو» آمده، یعنی سکه «پشت» ظاهر شده است

یا مثلاً وقتی در پرتاب یک جفت تاس، متغیر تصادفی X را اختلاف دو عدد رو شده در نظر بگیریم، X به خود مقادیر زیر را اختصاص می‌دهد. داریم:

$$X = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow \text{اختلاف دو عدد رو شده}$$

اختلاف دو تاس برابر ۵ باشد ۲ تاس یکسان بیایند

$$\{(1,6), (6,1)\} \quad \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$$

$$P(X=5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

در نتیجه به طور مثال برای محاسبه‌ی $P(X=5)$ ، داریم:

جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی

جدول توزیع احتمال یک متغیر تصادفی، جدولی است که در آن تمام مقادیر متغیر تصادفی و احتمال وقوع هریک آورده شده است. به عبارت دیگر اگر احتمال حالت‌های مختلف یک متغیر تصادفی را محاسبه کنیم، گویی **توزیع احتمال** متغیر تصادفی را به دست آورده‌ایم. منظور از توزیع احتمال آن است که تعیین کنیم احتمال چگونه روی مقادیر متغیر تصادفی توزیع شده است. به عنوان مثال یک سکه را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی «تعداد رو آمدن» به صورت زیر است: $X = 0, 1, 2, 3$

X	۰	۱	۲	۳
$P(X = x_i)$	$\frac{\binom{3}{0}}{2^3}$	$\frac{\binom{3}{1}}{2^3}$	$\frac{\binom{3}{2}}{2^3}$	$\frac{\binom{3}{3}}{2^3}$

 \Rightarrow

X	۰	۱	۲	۳
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

نکته مهم: در یک جدول توزیع احتمال، مجموع مقادیر احتمال (مجموع اعداد سطر دوم) همواره برابر یک است.

تست آموزشی ۱۴

X	۱	۳	۵
P	a	$5a^2$	$3a$

اگر جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت روبه‌رو باشد، a کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)	$\frac{1}{4}$ (۳)	$\frac{2}{5}$ (۲)	$\frac{1}{5}$ (۱)
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

پاسخ: گزینه‌ی (۱). برای تعیین a کافی است مجموع مقادیر سطر دوم جدول توزیع احتمال را برابر یک قرار دهیم. داریم:

$$a + 5a^2 + 3a = 1 \Rightarrow 5a^2 + 4a - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{1}{5} \end{cases} \xrightarrow{\text{عدد احتمال‌ها بین صفر و یک نمی‌باشند}} \text{غلق}$$

۱۲۸- سکه‌ای را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X را برابر با تعداد «رو»ها تعریف کنیم، حاصل $P(X=2)$ کدام است؟

$\frac{7}{18}$ (۴)	$\frac{7}{36}$ (۳)	$\frac{5}{16}$ (۲)	$\frac{5}{36}$ (۱)
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

۱۲۹- در مدرسه‌ای ۴ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی و ۳ دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی تحصیل می‌کنند. اگر ۳ نفر از میان دانش‌آموزان انتخاب

کنیم و متغیر تصادفی X، تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی باشد، حاصل $P(X=1)$ کدام است؟

$\frac{2}{5}$ (۴)	$\frac{12}{35}$ (۳)	$\frac{10}{35}$ (۲)	$\frac{3}{7}$ (۱)
-------------------	---------------------	---------------------	-------------------

۱۳۰- در پرتاب یک جفت تاس، اگر متغیر تصادفی X حاصل ضرب دو عدد رو شده باشد، $P(X=6)$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)	$\frac{1}{18}$ (۳)	$\frac{1}{9}$ (۲)	$\frac{1}{5}$ (۱)
-------------------	--------------------	-------------------	-------------------

۱۳۱- یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X برابر با قدرمطلق تفاضل اعداد رو شده باشد، حاصل $P(X=2)$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)	$\frac{5}{18}$ (۳)	$\frac{2}{9}$ (۲)	$\frac{1}{9}$ (۱)
-------------------	--------------------	-------------------	-------------------

۱۳۲- در خانواده‌ای با ۵ فرزند، متغیر تصادفی X را برابر با تعداد پسرها تعریف می‌کنیم. حاصل $P(X \geq 4)$ کدام است؟

$\frac{5}{16}$ (۴)	$\frac{3}{32}$ (۳)	$\frac{3}{16}$ (۲)	$\frac{5}{32}$ (۱)
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

۱۳۳- در خانواده‌ای با ۵ فرزند، متغیر تصادفی X را برابر قدرمطلق تفاضل تعداد پسرها و دخترها تعریف می‌کنیم. حاصل $P(X=5)$ کدام است؟

$\frac{5}{32}$ (۴)	$\frac{1}{32}$ (۳)	$\frac{1}{8}$ (۲)	$\frac{1}{16}$ (۱)
--------------------	--------------------	-------------------	--------------------

۱۳۴- در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد

مهره‌های سفید باشد، $P(X \leq 2)$ کدام است؟

$\frac{7}{10}$ (۴)	$\frac{9}{10}$ (۳)	$\frac{6}{10}$ (۲)	$\frac{3}{10}$ (۱)
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

۱۳۵- در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های

سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)	$\frac{8}{15}$ (۳)	$\frac{7}{15}$ (۲)	$\frac{2}{5}$ (۱)
-------------------	--------------------	--------------------	-------------------