

مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس
(صفحه‌ی ۳۷ تا ۶۷ کتاب درسی)

مساحت مستطیل و مثلث قائم‌الزاویه

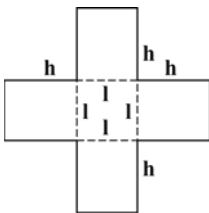
۱- الف) مستطیل ABCD با طول a و عرض b را در نظر بگیرید. مساحت مستطیل برابر است با
ب) با استفاده از تعریف مساحت مستطیل، مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه که طول اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی آن به اندازه‌ی a و b است را به دست آورید و توضیح دهید.

۲- مساحت مستطیلی ۷۲۰ سانتی‌متر مربع و طول آن ۵ برابر عرض آن است. محیط مستطیل را حساب کنید. (پاسخ: ۱۴۴ سانتی‌متر)

۳- می‌خواهیم کف یک استخر شنا به شکل مستطیل و با طول ۹ متر و عرض ۶ متر را با کاشی‌های مربع شکل به ضلع ۵/۵ متر بپوشانیم. اگر قیمت هر کاشی ۳۵۰ تومان باشد، هزینه‌ی این کار چه قدر است؟ (پاسخ: ۷۵۶۰۰ تومان)

۴- اگر مقوای نشان داده شده در شکل روبه‌رو را از محل‌های نقطه‌چین تا کنیم، یک جعبه‌ی درباز درست می‌شود.

الف) اگر $h = 5 \text{ cm}$ و $l = 4 \text{ cm}$ ، برای ساخت جعبه چه مقدار مقوا (بر حسب سانتی‌متر مربع) لازم است؟ (پاسخ: ۹۶)

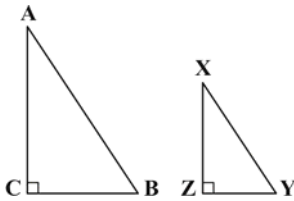


ب) مساحت مقوا را در حالت کلی بر حسب l و h پیدا کنید.

۵- اندازه‌ی مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی ۴۰ است. اندازه‌ی هر کدام از ساق‌ها را پیدا کنید. (پاسخ: $4\sqrt{5}$)



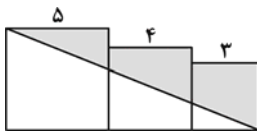
۶- الف) در شکل زیر، اندازه‌ی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث ABC دو برابر اندازه‌ی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث XYZ است.



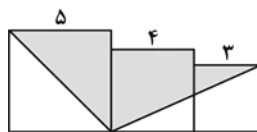
نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث XYZ چه قدر است؟

(راهنمایی: اگر $XZ=a$ و $YZ=b$ ، آن‌گاه اندازه‌های AC و BC ، به ترتیب $2a$ و $2b$ خواهد بود.)

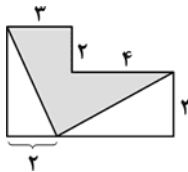
ب) اگر اندازه‌ی ضلع‌های مثلث ABC ، n برابر طول اضلاع مثلث XYZ باشد، نسبت مساحت ABC به مساحت XYZ چه قدر است؟ (n عدد طبیعی است.)



۷- در شکل مقابل، سه مربع به ضلع‌های ۵، ۴ و ۳ سانتی‌متر در کنار یک‌دیگر قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده شده چه قدر است؟ (پاسخ: ۲۰ سانتی‌متر)



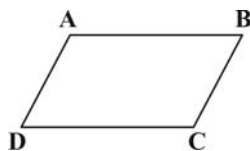
۸- در شکل مقابل، سه مربع با اضلاع ۳، ۴ و ۵ سانتی‌متر در کنار هم قرار دارند. مساحت قسمت سایه‌زده را حساب کنید. (پاسخ: ۲۷ سانتی‌متر مربع)



۹- در شکل مقابل، مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده را حساب کنید. (پاسخ: $14/5$)

مساحت متوازی‌الاضلاع

۱۰- متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در نظر بگیرید.



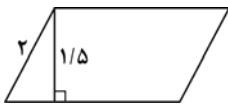
الف) از رأس A ارتفاع AH وارد بر CD را رسم کنید. اگر $AH = h$ و $DH = b$ مساحت $\triangle ADH$ را بنویسید.

ب) اگر از رأس B ارتفاع BH' را بر امتداد CD رسم کنیم، ثابت کنید $BH' = AH$ و $\triangle ADH \cong \triangle BH'C$.

ج) با استفاده از اطلاعات قسمت «ب»، ثابت کنید مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر است با مساحت مستطیل $AHH'B$.

د) اگر $AB = a$ ، آن‌گاه مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را بر حسب ارتفاع h و قاعده‌ی a به دست آورید.

۱۱- محیط متوازی‌الاضلاعی ۱۶ سانتی‌متر است. اگر یک ضلع آن ۲ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر آن $\frac{1}{5}$ سانتی‌متر باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع را به دست آورید.



مساحت مثلث

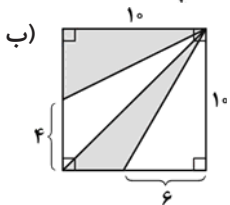
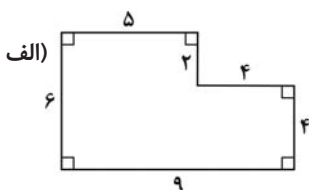
۱۲- الف) اگر در مثلث ABC ، h اندازه‌ی ارتفاع رسم شده از یکی از رأس‌ها و l اندازه‌ی قاعده‌ی متناظر با آن باشد، با استفاده از قضیه‌ی مساحت متوازی‌الاضلاع، مساحت ABC را به دست آورید.

ب) در قسمت «الف» به جای استفاده از قضیه‌ی مساحت متوازی‌الاضلاع، از قضیه‌ی مساحت مثلث قائم‌الزاویه استفاده کنید.

۱۳- ارتفاع مثلثی h و قاعده‌ی آن $2h$ است. مساحت مثلث را برحسب h به دست آورید.

۱۴- ارتفاع مثلثی یک چهارم قاعده‌ی آن است. اگر مساحت مثلث ۷۲ مترمربع باشد، طول قاعده‌ی آن را پیدا کنید.

۱۵- در هر یک از شکل‌های زیر، مساحت نواحی سفید را به دست آورید. (پاسخ: الف) ۴۶؛ ب) ۵۰)

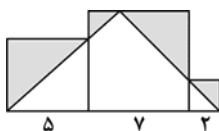


۱۶- الف) اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نشان دهید نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌هاست.

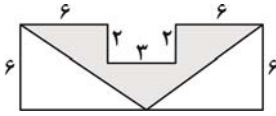
ب) اگر قاعده‌ی دو مثلث برابر باشند، ثابت کنید نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت ارتفاع‌های نظیر آن قاعده‌هاست.

۱۷- در شکل مقابل، سه مربع با اضلاع ۲، ۵ و ۷ سانتی‌متر داریم. مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید.

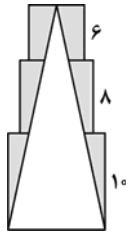
(پاسخ: ۲۹ سانتی‌متر مربع)



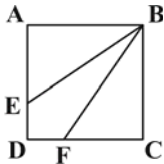
۱۸- در شکل مقابل، مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده را حساب کنید. (پاسخ: ۳۹)



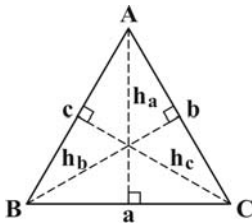
۱۹- سه مربع به طول‌های ۶، ۸ و ۱۰ سانتی‌متر روی هم قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده را محاسبه کنید. (پاسخ: ۸۰ سانتی‌متر مربع)



۲۰- ABCD مربعی به ضلع a است. پاره‌های BE و BF طوری رسم شده‌اند که $\triangle ABE$ ، $\triangle BEDF$ و $\triangle BCF$ دارای مساحت‌های مساوی هستند. مقدار AE را برحسب a به دست آورید. (پاسخ: $\frac{2}{3}a$)



۲۱- مثلث ABC را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر h_a ، h_b و h_c ارتفاع‌های رسم شده از رأس‌های A، B و C و همچنین a، b و c اندازه‌ی قاعده‌های متناظر h_a ، h_b و h_c باشند: الف) مساحت مثلث را برحسب هر کدام از ارتفاع‌ها و قاعده‌های نظیر آن‌ها محاسبه کنید.



ب) از آن‌جا که مساحت مثلث ثابت است، طرفین دیگر تساوی‌های بخش الف) نیز با هم مساوی می‌شوند. با توجه به آن اثبات کنید که:

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}, \quad \frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}, \quad \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$$

ج) اگر $a = 4$ ، $b = 5$ و $c = 6$ باشد، حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} =$$

۲۲- از مثلثی دو ضلع $a = 6$ و $b = 4$ معلوم‌اند و بین ارتفاع‌های نظیر اضلاع، رابطه‌ی $h_a + h_b = h_c$ برقرار است. مقدار c را حساب کنید. (پاسخ: ۲/۴)

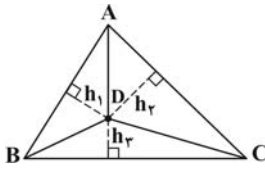
☆ ۲۳- h_a ، h_b و h_c ارتفاع‌های رسم شده از رأس‌های A، B و C در مثلث ABC هستند و a، b و c اندازه‌ی قاعده‌های نظیر ارتفاع‌های h_a ، h_b و h_c می‌باشند. اگر $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{21}{S}$ و S همان مساحت مثلث باشد، مقدار $h_a + h_b + h_c$ را به دست آورید. (پاسخ: ۴۲)

☆ ۲۴- درون مثلث ABC نقطه‌ی D را به دلخواه مشخص می‌کنیم. از نقطه‌ی D بر سه ضلع مثلث عمودهایی

را به نام‌های h_1, h_2, h_3 رسم می‌کنیم. اگر نقطه‌ی D را به رأس‌های مثلث وصل کنیم، سه مثلث ABC, ADC و BDC تشکیل می‌شود که h_1, h_2, h_3 به ترتیب ارتفاع‌های نظیر رأس D در این

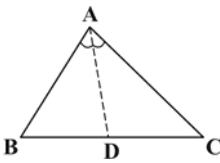
مثلث‌ها می‌باشند. با توجه به این نکته ثابت کنید اگر h_a, h_b, h_c ارتفاع‌های نظیر رأس‌های A, B, C و

$$\frac{h_1}{h_b} + \frac{h_2}{h_c} + \frac{h_3}{h_a} = 1$$



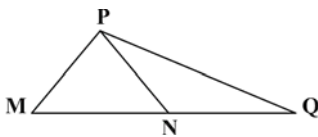
☆ ۲۵- در مثلث شکل مقابل، AD نیمساز زاویه‌ی درونی A است. ثابت کنید:

(الف) $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB}{AC}$ (راهنمایی: از نقطه‌ی D بر AB و AC عمود کنید).

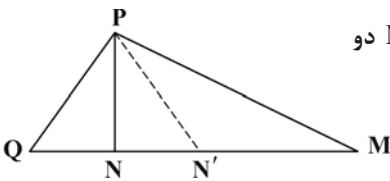


(ب) $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ (راهنمایی: ارتفاع نظیر رأس A را رسم کنید).

☆ ۲۶- در مثلث PQM ، نقطه‌ی N وسط ضلع QM است. نشان دهید مساحت‌های دو مثلث PNQ و PMN برابرند.



☆ ۲۷- در شکل مقابل، نقطه‌ی N روی پاره‌خط QM چنان انتخاب شده است که فاصله‌ی آن از M دو برابر فاصله‌ی آن از Q است.



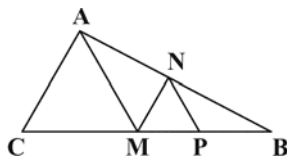
(الف) ثابت کنید مساحت $\triangle PNM$ دو برابر مساحت $\triangle PQN$ است.

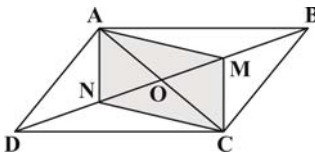
(ب) اگر N' وسط NM باشد، مساحت‌های $\triangle PN'M$ و $\triangle PQN$ چه رابطه‌ای با هم دارند؟

(ج) چه رابطه‌ای بین مساحت $\triangle PNN'$ و مساحت $\triangle PQM$ وجود دارد؟

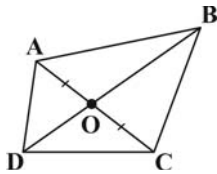
☆ ۲۸- در شکل زیر، AM, MN و NP به ترتیب میانه‌های مثلث‌های ABC, AMB و MNB هستند. مساحت مثلث BNP چه کسری از

مساحت مثلث ABC است؟ (پاسخ: $\frac{1}{8}$)

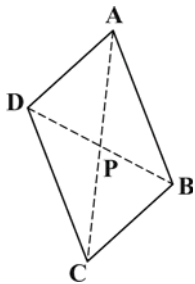




☆ ۲۹- در متوازی‌الاضلاع ABCD نقاط M و N وسط پاره‌خط‌های OB و OD هستند. نسبت مساحت AMCN به مساحت ABCD چیست؟ (راهنمایی: از A و C بر BD عمود کنید).



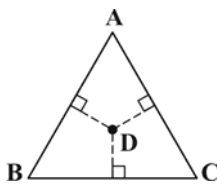
☆ ۳۰- در چهارضلعی غیرمستطیل ABCD قطر BD، قطر AC را نصف کرده است. ثابت کنید مساحت چهارضلعی ABCD توسط قطر BD به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود. (راهنمایی: از B و D بر AD عمود کنید. سپس مساحت هر یک از مثلث‌ها را به دست آورید).



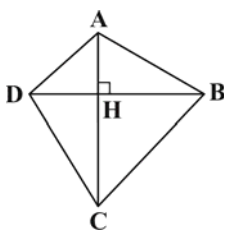
۳۱- چهارضلعی محدب ABCD را در نظر می‌گیریم که قطرهای آن هم‌دیگر را در نقطه‌ی P قطع و چهارضلعی را به چهار مثلث تقسیم کرده‌اند. اگر $S_{\triangle ABC}$ نماد مساحت مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle DPC}} = \frac{AP}{PC}$$

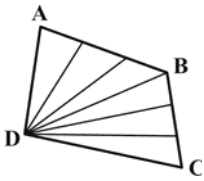
(راهنمایی: از B و D بر AC عبور کنید).



۳۲- اگر نقطه‌ی D یک نقطه‌ی دلخواه در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، ثابت کنید مجموع فاصله‌ی D از سه ضلع مثلث، برابر ارتفاع مثلث است. (راهنمایی: مساحت مثلث‌های ADB، ADC و BDC را به دست آورید).



۳۳- ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی که دو قطر عمود بر هم دارد، برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر آن. (راهنمایی: مساحت چهارضلعی برابر است با مجموع مساحت $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$)



۳۴- در چهارضلعی ABCD که در شکل روبه‌رو نمایش داده شده است، فاصله‌ی رأس‌های A و C از قطر BD، برابر است. اگر هریک از ضلع‌های AB و BC به سه قسمت مساوی تقسیم شوند، پس از وصل کردن این نقطه‌ها به نقطه‌ی D، شش مثلث پدید می‌آیند. ثابت کنید این شش مثلث، مساحت‌های برابر دارند.

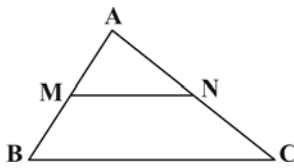
.....

.....

.....

.....

.....



۳۵- در شکل مقابل، M و N وسط‌های اضلاع AB و AC هستند. با توجه به مفاهیم مساحت، ثابت کنید:

(راهنمایی: $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$ (الف) میان‌های ABN و ACM و BN و CM میان‌های $\triangle ABC$ هستند.)

$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} \text{ (الف)}$$

.....

.....

ب) $MN \parallel BC$

.....

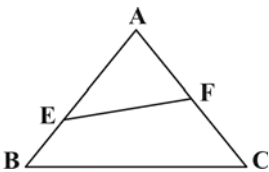
.....

ج) $MN = \frac{1}{2} BC$

.....

.....

۳۶- در شکل زیر، F وسط ضلع AC و $AE = 2EB$ است. نسبت مساحت $\triangle AFE$ به مساحت $\triangle ABC$ را پیدا کنید. (پاسخ: $\frac{2}{3}$)



.....

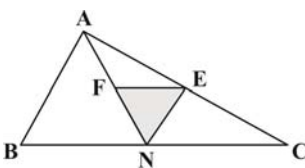
.....

.....

.....

۳۷- در مثلث ABC مطابق شکل زیر، E و F وسط‌های AC و AN هستند. اگر $CN = 2BN$ باشد،

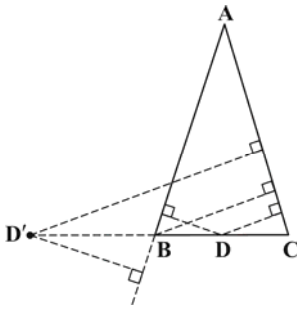
مساحت $\triangle FEN$ چه کسری از مساحت $\triangle ABC$ است؟ (پاسخ: $\frac{3}{16}$)



.....

.....

.....



۳۸- الف) اگر مثلث ABC یک مثلث متساوی الساقین با رأس A ($AB = AC$) و نقطه‌ای دلخواه روی قاعده‌ی مثلث باشد، ثابت کنید مجموع فاصله‌ی نقطه‌ی D از دو ساق مثلث، برابر با اندازه‌ی ارتفاع وارد شده بر یکی از ساق‌های مثلث است. (راهنمایی: مساحت مثلث ABC برابر مجموع مساحت‌های دو مثلث ADB و ADC است.)

.....

.....

.....

.....

ب) در مثلث قسمت الف) اگر نقطه‌ی D' نه روی قاعده‌ی مثلث که در امتداد آن باشد، ثابت کنید قدرمطلق تفاضل فاصله‌ی نقطه‌ی D' از دو ساق مثلث برابر ارتفاع وارد بر یکی از ساق‌های مثلث است. (راهنمایی: مساحت مثلث ABC برابر است با قدر مطلق تفاضل مساحت‌های مثلث $AD'B$ و $AD'C$)

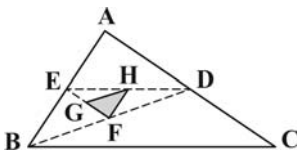
.....

.....

.....

.....

۳۹- در مثلث ABC ، D وسط AC ، E وسط AB ، F وسط BD ، H وسط DE و G وسط EF است. اگر مساحت ABC را S فرض کنیم، مساحت FGH چه کسری از S است؟ (پاسخ: $\frac{1}{33}$)



.....

.....

.....

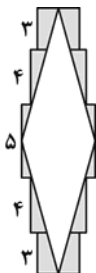
مساحت لوزی

۴۰- الف) لوزی را تعریف کنید. ب) با استفاده از قضیه‌ی مساحت مثلث ثابت کنید اگر اندازه‌ی قطرهای لوزی برابر a و b باشد، مساحت لوزی برابر $\frac{ab}{2}$ است.

.....

.....

۴۱- پنج مربع مطابق شکل، بر روی یک‌دیگر قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده را به دست آورید. (پاسخ: $27/5$)



.....

.....

.....

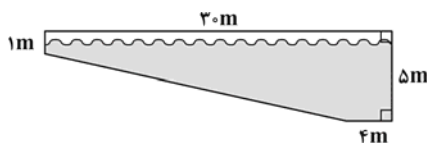
.....

مساحت دوزنقه

۴۲- الف) دوزنقه را تعریف کنید.
 ب) اگر اندازه‌ی دو ضلع موازی دوزنقه a و b و فاصله‌ی این دو ضلع h باشد، مساحت دوزنقه را محاسبه کنید. (راهنمایی: از قضیه‌ی مساحت متوازی‌الاضلاع استفاده کنید).

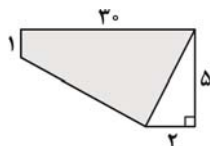
.....

۴۳- طول یک استخر شنا ۳۰ متر و گودی آن در قسمت کم عمق یک متر است. عمق استخر تا ۵ متر زیاد می‌شود. مساحت دیوار کناری این استخر را به دست آورید. (پاسخ: ۹۸ مترمربع)



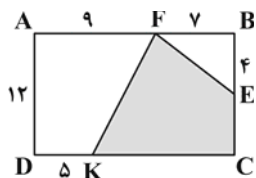
.....

۴۴- مساحت قسمت سایه‌زده از شکل مقابل را به دست آورید. (پاسخ: ۸۹)



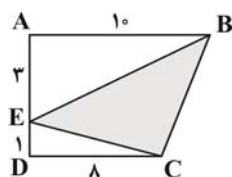
.....

۴۵- مساحت قسمت سایه‌دار از مستطیل ABCD را به دست آورید. (پاسخ: ۹۴)



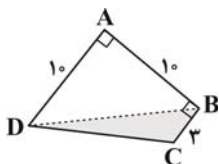
.....

۴۶- در شکل مقابل، ABCD دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است. مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار را بیابید. (پاسخ: ۱۷)



.....

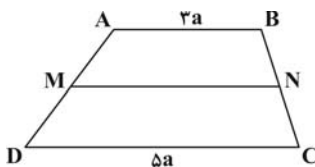
۴۷- مساحت قسمت سایه‌دار را به دست آورید. (پاسخ: ۱۵)



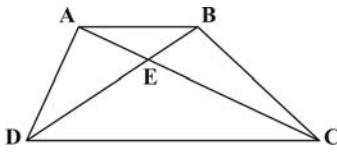
.....

۴۸- در دوزنقه‌ی مقابل، طول قاعده‌های AB ، DC و MN به ترتیب برابر $3a$ ، $5a$ و $4a$ است. اگر $MD = AM$ و $BN = NC$ ، آن‌گاه نسبت مساحت $ABNM$ به مساحت $MNCD$ را به دست

آورید. (پاسخ: $\frac{7}{9}$)



.....



۴۹- در چهارضلعی ABCD مطابق شکل قطرها در نقطه‌ی E یک‌دیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید:
الف) اگر ABCD دوزنقه باشد، مساحت مثلث‌های کناری ADE و BCE با هم برابرند.

.....

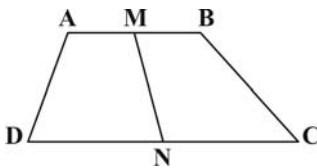
.....

.....

ب) اگر مساحت‌های $\triangle ADE$ و $\triangle BCE$ با هم برابر باشند، ABCD دوزنقه است.

.....

.....



۵۰- چهارضلعی ABCD را در شکل مقابل، در نظر بگیرید. اگر نقطه‌ی M وسط AB و نقطه‌ی N وسط CD باشد، ثابت کنید:

الف) اگر ABCD دوزنقه باشد، خط MN مساحت دوزنقه را نصف می‌کند.

.....

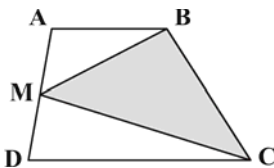
.....

ب) اگر خط MN مساحت چهارضلعی را نصف کند، چهارضلعی ABCD دوزنقه است. (راهنمایی: از برابری مساحت مثلث‌های BCN و AND، موازی بودن قاعده‌های AB و DC را نتیجه بگیرید.)

.....

.....

☆ ۵۱- در دوزنقه‌ی ABCD، نقطه‌ی M وسط ساق AD می‌باشد. ثابت کنید مساحت مثلث MBC نصف مساحت دوزنقه است. (راهنمایی: از M خطی موازی AB و DC رسم کنید.)



.....

.....

.....

.....

قضیه‌ی فیثاغورس و عکس آن

۵۲- صورت قضیه‌ی فیثاغورس را بنویسید و با ذکر دلایل موردنیاز نشان دهید که آیا عکس آن نیز درست است یا خیر.

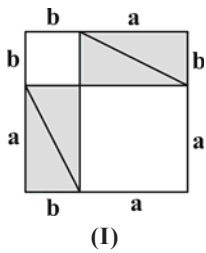
.....

.....

.....

.....

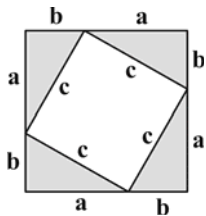
.....



(I)

۵۳- در شکل‌های (I) و (II) دو مربع رسم شده است.

الف) مساحت قسمت‌های سفید هر کدام از شکل‌ها را محاسبه کنید.



(II)

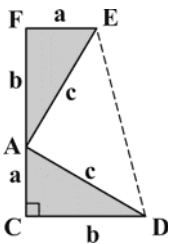
ب) مساحت قسمت‌های سایه‌زده‌ی هر کدام از شکل‌ها را به‌دست آورید.

ج) از آن‌جا که مساحت شکل (I) و شکل (II) برابرند، با مساوی قرار دادن مجموع مساحت‌های قسمت‌های سفید و سایه‌زده‌ی

شکل (I) و شکل (II) به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

۵۴- ذوزنقه FEDC را در نظر بگیرید.

الف) مساحت ذوزنقه را برحسب a و b به‌دست آورید.



ب) نشان دهید $\triangle ADE$ قائم‌الزاویه است.

ج) مساحت‌های $\triangle AEF$ و $\triangle ACD$ را پیدا کنید.

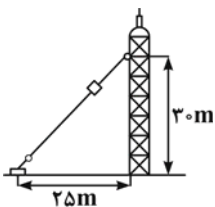
د) مساحت ذوزنقه را برحسب مجموع مساحت‌های مثلث‌های AEF ، ACD و ADE به‌دست آورید.

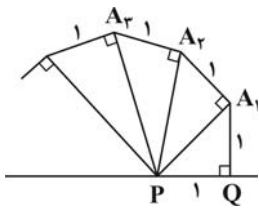
ه) با استفاده از قسمت‌های «الف» و «د»، قضیه فیثاغورس را ثابت کنید.

کاربرد قضیه فیثاغورس و عکس آن

۵۵- یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع ۳۰ متری توسط یک سیم به طور قائم‌نگه داشته شده است. این سیم به

فاصله‌ی ۲۵ متر از پایه‌ی آنتن به زمین وصل شده است. طول این سیم چند متر است؟





۵۶- در شکل روبه‌رو، طول هر یک از اضلاع زاویه‌ی قائمه در مثلث PQA_1 ، برابر ۱ سانتی‌متر است.

الف) طول وتر PA_1 چه قدر است؟

پاره خط A_1A_2 نیز به طول ۱ سانتی‌متر و بر PA_1 عمود است. طول پاره خط A_2A_3 نیز ۱ سانتی‌متر

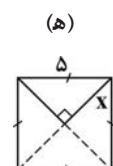
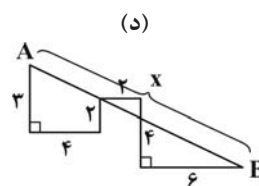
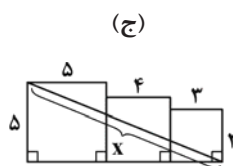
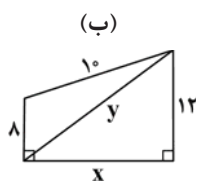
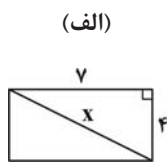
است و بر PA_2 عمود است.

ب) طول پاره خط PA_2 چه قدر است؟

ج) طول پاره خط PA_3 چه قدر است؟

د) طول n -امین پاره خط یعنی PA_n چه قدر است؟

۵۷- اندازه‌ی x و y را بیابید.



(۳ مربع کنار هم با اضلاع

۳، ۴ و ۵ سانتی‌متر)

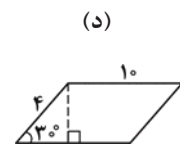
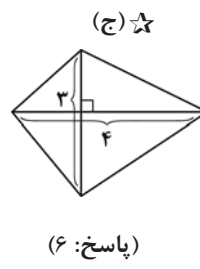
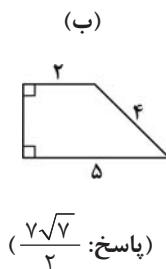
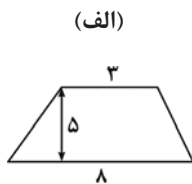
(پاسخ: $2\sqrt{21}$ و $2\sqrt{57}$)

(پاسخ: ۱۳)

(پاسخ: ۱۳)

(پاسخ: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$)

۵۸- مساحت شکل‌های زیر را محاسبه کنید.

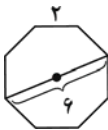


(ه)



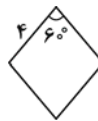
(پاسخ: $\sqrt{15}$)

(و) ☆



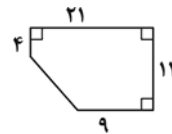
(پاسخ: $16\sqrt{2}$)

(ز)



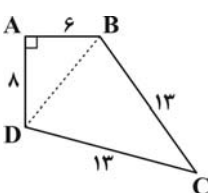
(پاسخ: $8\sqrt{3}$)

(ح)

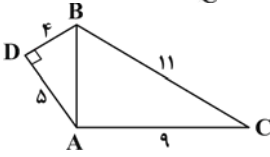


(پاسخ: ۲۰۴)

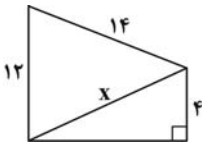
۵۹- اگر محیط یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین برابر $10 + 5\sqrt{2}$ سانتی متر باشد، مساحت آن را حساب کنید. (پاسخ: $12/5$ سانتی متر مربع)



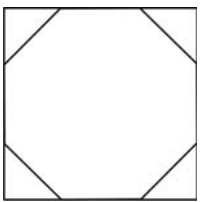
۶۰- مساحت چهارضلعی ABCD چه قدر است؟ (پاسخ: ۸۴)



۶۱- در شکل مقابل، بررسی کنید که آیا مثلث ABC قائم الزاویه است.



۶۲- در شکل مقابل، مقدار X را بیابید. (پاسخ: $2\sqrt{37}$)



۶۳- در شکل مقابل، یک هشت ضلعی منتظم در داخل یک مربع محاط شده است.

الف) اگر طول ضلع هشت ضلعی ۲ سانتی متر باشد، طول ضلع مربع را بیابید. (پاسخ: $2 + 2\sqrt{2}$)

ب) اگر طول ضلع مربع ۱۰ سانتی متر باشد، محیط هشت ضلعی را به دست آورید. (پاسخ: $\frac{80}{\sqrt{2} + 1} = 80(\sqrt{2} - 1)$)



۶۴- در یک مثلث قائم الزاویه، طول یک ضلع زاویه قائمه، دو برابر طول ضلع دیگر است. اگر مساحت مثلث ۷۲ سانتی متر مربع باشد، طول وتر مثلث چه قدر است؟ (پاسخ: $6\sqrt{10}$ سانتی متر)

.....

.....

۶۵- نسبت طول ضلع های زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۷ باشد، طول وتر آن چه قدر است؟ (پاسخ: $3\sqrt{13}$)

.....

.....

۶۶- طول یکی از ضلع های زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه ای $\frac{4}{5}$ دیگری است. اگر مساحت مثلث 320 سانتی متر مربع باشد، طول اضلاع زاویه قائمه را پیدا کنید. (پاسخ: $20\sqrt{2}$ و $16\sqrt{2}$ سانتی متر)

.....

.....

۶۷- مساحت مربعی ۱۴۴ سانتی متر مربع است. طول قطر این مربع چه قدر است؟

.....

.....

۶۸- مساحت مربعی که قطر آن $\sqrt{128}$ سانتی متر باشد را حساب کنید.

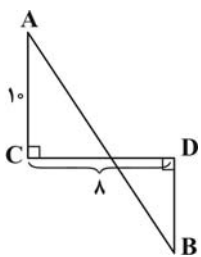
.....

.....

۶۹- اگر مجموع اندازه ی طول قطر با یک ضلع مربعی $4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ سانتی متر باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید. (پاسخ: ۲۴ سانتی متر مربع)

.....

.....



۷۰- در شکل مقابل اگر طول پاره خط AB برابر ۱۷ باشد، اندازه ی BD را بیابید. (پاسخ: ۵)

.....

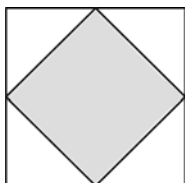
.....

.....

۷۱- در یک لوزی به ضلع 10 سانتی متر، قطر بزرگ دو برابر قطر کوچک است. مساحت لوزی را به دست آورید. (پاسخ: 80 سانتی متر مربع)

.....

.....

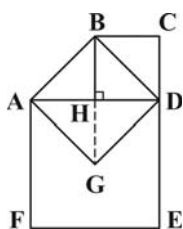


۷۲- از به هم وصل کردن وسط های ضلع های مربعی، یک مربع دیگر ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع

کوچک تر به مساحت مربع بزرگ تر چه قدر است؟

.....

.....



۷۳- سه مربع مانند شکل، یکدیگر را قطع کرده‌اند و نقطه‌ی G محل تقاطع قطرهای مربع ADEF است. مساحت مثلث ADG را در هر یک از حالت‌های زیر به‌دست آورید.

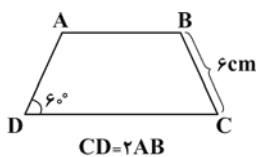
الف) $AF = 10$ (پاسخ: ۲۵)

ب) $CE = 18$ (پاسخ: ۳۶)

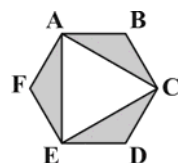
ج) $BD = 3\sqrt{2}$ (پاسخ: ۹)

د) مساحت مربع BCDH = ۴۹ (پاسخ: ۴۹)

ه) مساحت شکل AGDEF = ۲۷ (پاسخ: ۹)



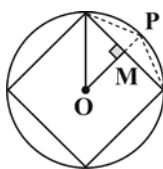
۷۴- در شکل مقابل، یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین داریم ($AD = BC$). مساحت آن را با توجه به اطلاعات داده شده در شکل، محاسبه کنید. (راهنمایی: در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی 30° درجه، نصف وتر است.) (پاسخ: $27\sqrt{3}$)



۷۵- در شکل مقابل اگر طول هر ضلع شش ضلعی منتظم ABCDEF برابر ۴ واحد باشد:

الف) اندازه‌ی هر ضلع مثلث ACE را به‌دست آورید. (پاسخ: $4\sqrt{3}$)

ب) مساحت قسمت سایه‌زده را حساب کنید. (پاسخ: $12\sqrt{3}$)



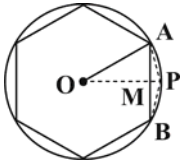
۷۶- مربعی در یک دایره به شعاع واحد، محاط شده است.

الف) فاصله‌ی مرکز دایره تا نقطه‌ی M وسط ضلع مربع را بیابید. (پاسخ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

ب) طول MP را به‌دست آورید. (پاسخ: $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$)

ج) طول ضلع هشت ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود را محاسبه کنید. (پاسخ: $\sqrt{2}-\sqrt{2}$)

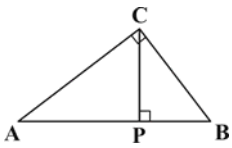
☆ ۷۷- یک شش ضلعی منتظم در یک دایره به شعاع واحد محاط شده است.



الف) فاصله‌ی مرکز دایره تا نقطه‌ی M وسط ضلع شش ضلعی را به دست آورید. (پاسخ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

ب) طول MP را حساب کنید. (پاسخ: $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$)

ج) طول ضلع دوازده ضلعی محاط شده در دایره را محاسبه کنید. (پاسخ: $\sqrt{2}-\sqrt{3}$)

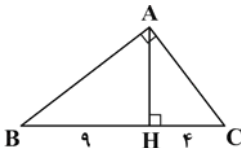


☆ ۷۸- مثلث ABC در رأس C قائمه است. از C، پاره خط CP را بر AB عمود می‌کنیم. ثابت کنید:

الف) $PC^2 = AP \cdot PB$

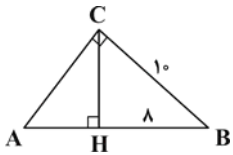
ب) $AC^2 = AP \cdot AB$

☆ ۷۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $BH = 9$ و $CH = 4$ می‌باشد. اندازه‌های AC و AH را حساب کنید. (راهنمایی: تمام معادلات ممکن فیثاغورس را نوشته و سپس دستگاه ۳ معادله و ۳ مجهول را حل کنید.) (پاسخ: ۶ و $2\sqrt{13}$)

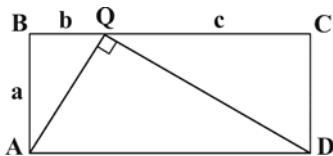


۸۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل مقابل:

الف) طول CH و AH را حساب کنید.



ب) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

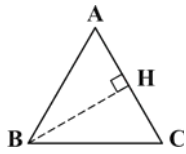


۸۱- در شکل مقابل، ABCD یک مستطیل و AQD یک مثلث قائم‌الزاویه است. اگر

$AB = a$ ، $BQ = b$ و $QC = c$ ، ثابت کنید:

الف) $AD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$

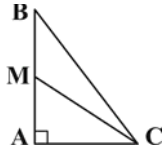
ب) $a^2 = bc$



۸۲- در مثلث ABC ، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، ثابت کنید:

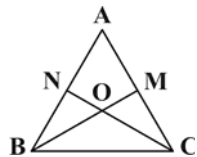
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$$

.....



۸۳- مثلث ABC در رأس A قائمه و CM میانه‌ی آن است. ثابت کنید $2AC^2 + BC^2 = 4CM^2$.

.....

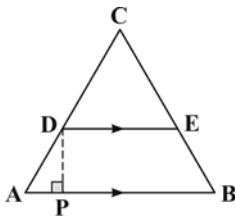


۸۴- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، نیمسازهای \hat{B} و \hat{C} یک‌دیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده‌اند. ثابت کنید $\frac{OB}{OM} = \frac{OC}{ON} = 2$.

$$\frac{OB}{OM} = \frac{OC}{ON} = 2$$

.....

۸۵- مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع 10 واحد را در نظر بگیرید و پاره‌خط DE را طوری رسم کنید تا AD برابر 4 واحد گردد.



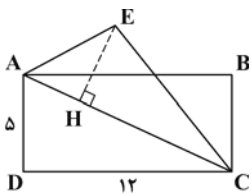
الف) طول DP را به دست آورید. (پاسخ: $2\sqrt{3}$)

.....

ب) طول PE را محاسبه کنید. (پاسخ: $4\sqrt{3}$)

.....

ج) چگونه با سه بُرش روی دوزنقه‌ی $ABED$ می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی با طول 8 واحد ساخت؟ آیا با دو بُرش نیز می‌توان این کار را انجام داد؟

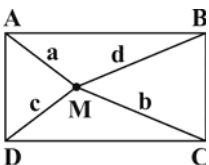


۸۶- در شکل مقابل، چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است و $S_{ABCD} = S_{\triangle AEC}$. طول ارتفاع EH را به دست آورید.

.....

۸۷- در شکل زیر، $ABCD$ مستطیل و M نقطه‌ی دلخواهی درون آن است. ثابت کنید $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

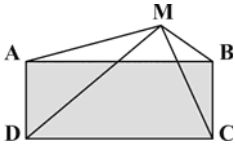
(راهنمایی: از نقطه‌ی M بر اضلاع مستطیل عمود رسم کنید.)



.....



- ۸۸- اگر M نقطه‌ی دلخواهی در صفحه‌ی مستطیل $ABCD$ باشد، ثابت کنید $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
(راهنمایی: از M بر AB و DC عمود رسم کنید.)

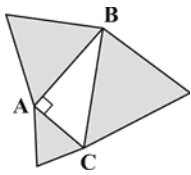


مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع

- ۸۹- الف) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس نشان دهید مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع a ، برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

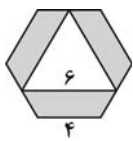
ب) با استفاده از قسمت «الف» مساحت یک شش‌ضلعی منتظم با طول ضلع a را به‌دست آورید.

- ۹۰- روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، سه مثلث متساوی‌الاضلاع به صورت شکل زیر رسم شده است. چه رابطه‌ای بین مساحت این سه مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارد؟ ثابت کنید.



مساحت شش‌ضلعی منتظم

- ۹۱- شش‌ضلعی و سه‌ضلعی در شکل مقابل، منتظم هستند. مساحت قسمت سایه‌دار را به‌دست آورید. (پاسخ: $15\sqrt{3}$)



- ۹۲- اگر محیط یک شش‌ضلعی منتظم و یک مثلث متساوی‌الاضلاع با هم برابر باشند، مساحت‌های آن‌ها چه نسبتی با هم دارند؟

- ۹۳- مساحت یک شش‌ضلعی منتظم $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ می‌باشد. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را بیابید که طول ضلع آن ۳ برابر طول ضلع شش‌ضلعی منتظم ذکر شده باشد.

- ۹۴- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی $2\sqrt{3}$ است. مساحت شش‌ضلعی منتظمی را به‌دست آورید که طول ضلع آن با طول ضلع مثلث ذکر شده برابر باشد.



پاسخ‌نامه‌ی کلیدی آزمون‌های چهارگزینه‌ای

فصل چهارم	فصل سوم	فصل دوم	فصل دوم	فصل اول
۳ -۱	۱ -۱	۳ -۳۵	۲ -۱	۲ -۱
۴ -۲	۳ -۲	۲ -۳۶	۳ -۲	۳ -۲
۲ -۳	۴ -۳	۴ -۳۷	۳ -۳	۱ -۳
۲ -۴	۱ -۴	۳ -۳۸	۳ -۴	۲ -۴
۴ -۵	۱ -۵	۴ -۳۹	۳ -۵	۳ -۵
۱ -۶	۴ -۶	۲ -۴۰	۴ -۶	۱ -۶
۲ -۷	۲ -۷	۴ -۴۱	۴ -۷	۲ -۷
۴ -۸	۳ -۸	۳ -۴۲	۱ -۸	۲ -۸
۴ -۹	۲ -۹	۴ -۴۳	۴ -۹	۲ -۹
۳ -۱۰	۱ -۱۰	۴ -۴۴	۱ -۱۰	۴ -۱۰
۴ -۱۱	۲ -۱۱	۲ -۴۵	۴ -۱۱	۱ -۱۱
۳ -۱۲	۳ -۱۲	۴ -۴۶	۳ -۱۲	۲ -۱۲
۲ -۱۳	۲ -۱۳	۴ -۴۷	۴ -۱۳	۳ -۱۳
۳ -۱۴	۲ -۱۴	۳ -۴۸	۲ -۱۴	۴ -۱۴
۴ -۱۵	۱ -۱۵	۲ -۴۹	۲ -۱۵	۴ -۱۵
۱ -۱۶	۲ -۱۶	۳ -۵۰	۳ -۱۶	۲ -۱۶
۴ -۱۷	۱ -۱۷	۱ -۵۱	۲ -۱۷	۴ -۱۷
۴ -۱۸	۱ -۱۸	۲ -۵۲	۳ -۱۸	۴ -۱۸
۳ -۱۹	۳ -۱۹		۳ -۱۹	۳ -۱۹
۴ -۲۰	۳ -۲۰		۴ -۲۰	۱ -۲۰
۱ -۲۱	۴ -۲۱		۳ -۲۱	
۳ -۲۲	۳ -۲۲		۳ -۲۲	
۲ -۲۳			۱ -۲۳	
۴ -۲۴			۴ -۲۴	
۱ -۲۵			۲ -۲۵	
۳ -۲۶			۲ -۲۶	
۱ -۲۷			۴ -۲۷	
۱ -۲۸			۴ -۲۸	
۴ -۲۹			۱ -۲۹	
۴ -۳۰			۳ -۳۰	
۱ -۳۱			۴ -۳۱	
۴ -۳۲			۴ -۳۲	
۴ -۳۳			۳ -۳۳	
۴ -۳۴			۲ -۳۴	