

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات گسسته

و علوم مرتبط با آن

(ویژه‌ی دانش‌آموزان ممتاز رشته‌ی ریاضی)



انتشارات خوشخوان

مؤلف: رسول حاجی زاده

فهرست

صفحه	عنوان
۱	فصل اول. مقدماتی از گراف ساده
۴۵	فصل دوم. درخت و ماتریس مجاورت یک گراف
۶۹	فصل سوم. استدلال‌های ریاضی
۸۳	فصل چهارم. بخش‌پذیری و تقسیم
۱۰۳	فصل پنجم. اعداد اول
۱۴۵	فصل ششم. همنهشتی
۱۸۹	فصل هفتم. نظریه‌ی مجموعه‌ها
۲۰۳	فصل هشتم. ترکیبیات
۲۴۷	فصل نهم. اصل شمول و عدم شمول
۲۶۵	فصل دهم. رابطه
۳۰۹	فصل یازدهم. احتمال مقدماتی
۳۸۹	فصل دوازدهم. سؤالات کنکور

فصل اول

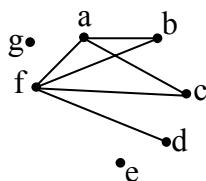
مقدماتی از گراف ساده

جلسه اول

گراف ساده.

مجموعه‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\} \neq \emptyset$ و

$A = \{v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_1v_p, v_2v_3, \dots, v_{p-1}v_p\}$ را در نظر می‌گیریم، $G(V, E)$ را یک گراف ساده گویند که در آن E زیرمجموعه‌ی دلخواهی از مجموعه‌ی A می‌باشد، به عبارت ساده‌تر اگر p نقطه در فضا داشته باشیم و بعضی از آن‌ها را به دلخواه به هم وصل کنیم شکل به دست آمده را یک گراف ساده گویند. به عنوان مثال، شکل زیر یک گراف ساده می‌باشد:



V را مجموعه‌ی رئوس گراف و مجموعه‌ی E را مجموعه‌ی یال‌های گراف ساده‌ی G گویند. به عنوان مثال در گراف قبلی مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌ها به شکل زیر می‌باشند:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\} = \text{مجموعه‌ی رئوس}$$

$$E = \{ab, ac, af, bf, cf, df\} = \text{مجموعه‌ی یال‌ها}$$

تعداد رئوس گراف ساده‌ی G را مرتبه و تعداد یال‌های آن را اندازه گویند و معمولاً آن دو را به ترتیب با p و q نمایش می‌دهند. به عنوان مثال در گراف قبلی مقادیر p و q به ترتیب برابر ۷ و ۶ می‌باشد.

درجه‌ی هر رأس از گراف ساده.

تعداد یال‌های متصل به یک رأس از گراف ساده‌ی G را درجه‌ی آن رأس گویند. در گراف قبلی درجه‌ی رئوس a, b, c, d, e, f, g به ترتیب برابر ۳، ۲، ۲، ۱، ۰، ۴، ۰ می‌باشد.

رأس منفرد (رأس منزوی).

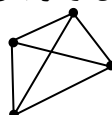
رأسی که درجه‌ی آن صفر باشد (یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد) را رأس منفرد گویند. در گراف قبلی رئوس e و g هر دو منفرد می‌باشند.

🔪 دو رأس مجاور.

دو رأس x و y از گراف ساده‌ی G را مجاور گویند هرگاه آن دو رأس توسط یک یال به هم متصل شده باشند. به عنوان مثال در گراف قبلی دو رأس b و f مجاور می‌باشند ولی دورأس b و c مجاور نیستند.

🔪 گراف کامل.

گراف G را کامل گویند هرگاه هر دو رأس دلخواه آن مجاور باشند، به عبارت دیگر همه‌ی یال‌های ممکن در آن رسم شده باشند. به عنوان مثال گراف کامل از مرتبه‌ی ۴ به شکل زیر می‌باشد.



گراف کامل از مرتبه‌ی p را به صورت K_p نمایش می‌دهند.

🔪 گراف تهی.

گراف G را تهی گویند هرگاه هیچ یالی در آن یافت نشود، به عبارت دیگر درجه‌ی هریک از رئوس آن صفر باشد. گراف تهی از مرتبه‌ی p را به صورت $\bar{K}_p$ نمایش می‌دهند. گراف تهی از مرتبه‌ی ۳ که آن را به صورت $\bar{K}_3$ نمایش می‌دهند به صورت زیر می‌باشد:

🔪 تست ۱. درجه‌ی هر رأس از گراف K_{17} کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۷ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۲

درجه‌ی هر رأس از گراف K_p برابر با $p-1$ می‌باشد زیرا در آن گراف هر رأس به تمامی رئوس دیگر وصل است، پس در گراف K_{17} درجه‌ی هر رأس برابر ۱۶ می‌باشد.

🔪 تست ۲. تعداد یال‌های گراف K_{17} کدام است؟

۱۳۶ (۴)

۱۲۰ (۳)

۸ (۲)

۲۱۷ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۴

راه حل اول. از هر رأس گراف K_{17} به تعداد ۱۶ یال می‌گذرد بنابراین از تمام ۱۷ رأس مجموعاً 17×16 یال می‌گذرد ولی چون هر یال متعلق به دو رأس می‌باشد معلوم می‌شود که در این شمارش هر یال دوبار شمارش شده

است، به این معنا که تعداد یال‌های مطلوب برابر $\frac{17 \times 16}{2}$ یعنی ۱۳۶ می‌باشد.

راه حل دوم. به ازای انتخاب هر دو رأس متمایز از گراف K_p یک و فقط یک یال معرفی می‌شود. تعداد انتخاب‌های

دورأس از p رأس گراف K_p برابر $\binom{p}{2}$ می‌باشد، پس تعداد یال‌های گراف K_p برابر $\binom{p}{2}$ یا $\frac{p(p-1)}{2}$

می‌باشد. بنابراین تعداد یال‌های گراف K_{17} برابر $\frac{17 \times 16}{2}$ یعنی ۱۳۶ می‌باشد.

◀ نکته‌ی ۱. تعداد یال‌های گراف کامل K_p برابر $\binom{p}{2}$ یا $\frac{p(p-1)}{2}$ می‌باشد.

◀ نکته‌ی ۲. اگر p مرتبه و q اندازه‌ی گراف ساده‌ی G باشد آن‌گاه نابرابری $q \leq \binom{p}{2}$ برقرار است (چون

تعداد یال‌های هر گراف ساده از تعداد یال‌های گراف کامل هم مرتبه‌اش کم‌تر یا مساوی است).

تست ۳. با چهار رأس a, b, c, d چند گراف ساده می‌توان ساخت؟

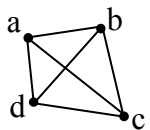
(۴) ۱۵

(۳) ۱۶

(۲) ۸

(۱) ۶۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱

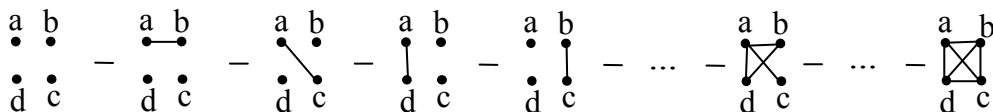


گراف کامل از مرتبه‌ی ۴ مطابق شکل مقابل دارای $\binom{4}{2}$ یعنی ۶ یال می‌باشد. برای

کشیدن گراف مطلوب هریک از ۶ یال فوق مستقل از یال‌های دیگر، دو حالت می‌توانند داشته باشند (بودن یا نبودن). بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل گراف‌های

به دست آمده برابر 2^6 یعنی ۶۴ خواهد بود که به شکل زیر می‌باشند (در حقیقت مجموعه یال‌های هر گراف

زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های گراف K_4 می‌باشد و یک مجموعه‌ی ۶ عضوی 2^6 زیرمجموعه دارد):



◀ نکته‌ی ۳. با n رأس $v_1, v_2, \dots, v_n$ به تعداد $2^{\binom{n}{2}}$ گراف ساده می‌توان تشکیل داد.

تست ۴. با پنج رأس a, b, c, d, e چند گراف ساده می‌توان ساخت به شرطی که هریک از آن گراف‌ها

شامل فقط سه یال باشند؟

(۴) ۱۲۸

(۳) ۱۲۰

(۲) ۱۰

(۱) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳

گراف کامل از مرتبه‌ی ۵ دارای $\binom{5}{2}$ یعنی ۱۰ یال می‌باشد که هریک از گراف‌های مطلوب باید فقط ۳ یال از

آن ۱۰ یال را داشته باشد. انتخاب ۳ یال از ۱۰ یال به $\binom{10}{3}$ یعنی ۱۲۰ طریق ممکن است.

تست ۵. با ۷ رأس a, b, c, d, e, f, g چند گراف ساده می‌توان ساخت به شرطی که هریک از آن

گراف‌ها هر دو یال ac و ef را شامل بوده و هیچ یک از آن گراف‌ها یال ag را نداشته باشند؟

(۴) ۹۴

(۳) ۲۵۳

(۲) ۲۱۸

(۱) ۲۲۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲

گراف کامل از مرتبه‌ی ۷ دارای $\binom{7}{2}$ یعنی ۲۱ یال می‌باشد. در هریک از گراف‌های مطلوب هریک از ۱۸ یال

گراف کامل (همه‌ی یال‌ها به غیر از سه یال مورد اشاره) دو حالت می‌توانند داشته باشند (بودن یا نبودن)،

پس طبق اصل ضرب تعداد کل گراف‌های مطلوب برابر 2^{18} خواهد شد.

🔪 تست ۶. با پنج رأس a, b, c, d, e چند گراف ساده شامل ۳ یال می توان ساخت به طوری که هریک از آن گراف ها از بین ۳ یال ab, ac, bc حداقل یکی را داشته باشند؟

۸۵ (۴)

۹۹ (۳)

۶۳ (۲)

۱۰۸ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴

راه حل اول. سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

(۱) دقیقاً یک یال از آن سه یال موجود باشد.

(۲) دقیقاً دو یال از آن سه یال موجود باشد.

(۳) دقیقاً سه یال از آن سه یال موجود باشد.

معلوم است که تعداد طرق انتخاب یال ها از بین ۱۰ یال گراف K_5 ، در هریک از سه حالت فوق به ترتیب برابر

$$\binom{3}{1}\binom{7}{0}, \binom{3}{2}\binom{7}{1}, \binom{3}{3}\binom{7}{2}$$

می باشد که مجموع آن ها برابر ۸۵ می شود.

راه حل دوم.

تعداد کل حالات برابر $\binom{10}{3}$ یعنی ۱۲۰ می باشد که به تعداد $\binom{3}{0}\binom{7}{3}$ یعنی ۳۵ حالت از آن ها نامطلوب

می باشد، بنابراین جواب مورد نظر $120 - 35 = 85$ می باشد.

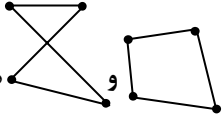
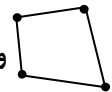
🔪 گراف های هم نوع (یکریخت).

به زبانی ساده و غیر علمی دو گراف ساده را هم نوع گویند هرگاه بتوانند بر روی هم منطبق شوند که در این تطبیق اعمال زیر مجاز است:

- می توان هر یال را به اندازه ی دلخواه کوتاه یا بلند کرده و یا حتی به صورت دلخواه به آن انحنا داد.

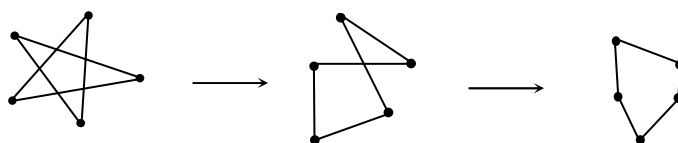
- می توان جای هر رأس را عوض کرد به شرطی که هیچ یال متصل به آن از آن رأس جدا نشود.

- می توان در فضا هریک از یال ها و یا قسمتی از گراف را به اندازه ی زاویه ی دلخواه چرخاند.

به عنوان مثال دو گراف  و  هم نوع می باشند زیرا اگر یال پایینی از گراف دوم را در

فضا به اندازه ی 180° دوران دهیم به گراف اول خواهیم رسید. به عنوان مثال دیگر دو

گراف  و  هم نوع می باشند زیرا گراف دوم را با اعمال مجاز به ترتیب زیر می توان به گراف اول تبدیل کرد:



تست ۷. چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۴ وجود دارد که هریک از آن‌ها فقط شامل ۳ یال باشند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۳

تمام گراف‌های مطلوب به شکل زیر می‌باشند:



تست ۸. چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۶ می‌توان ساخت به طوری که هریک از آن گراف‌ها فقط دارای سه

یال باشند؟

۷ (۴)

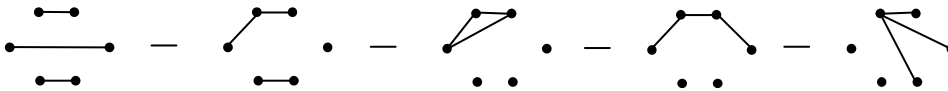
۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۲

تمام گراف‌های موردنظر به شکل زیر می‌باشند:



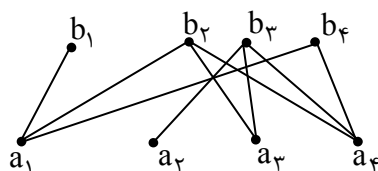
همان‌طور که مشاهده می‌شود الگوریتم رسم گراف‌ها از سمت چپ به راست به این شکل است که ابتدا هر

سه یال جدا از هم کشیده شده‌اند سپس فقط دو تا از یال‌ها به متصل شده‌اند و در نهایت نیز هر سه یال به

نوعی به هم وصل شده‌اند.

تمرین ۱-۱

- b ۱. چهار نفر به نام‌های a_1, a_2, a_3, a_4 به صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است متقاضی تصدی پست‌های b_1, b_2, b_3, b_4 می‌باشند. به چند طریق این چهار نفر می‌توانند این پست‌ها را به عهده بگیرند (هر نفر دقیقاً یک پست)؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

- a ۲. یک گراف ساده ۸ رأس دارد. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

(۴) ۲۸

(۳) ۵۶

(۲) ۲۱

(۱) ۴۲

- b ۳. با چهار رأس a, b, c, d چند گراف ساده می‌توان ساخت؟

(۴) ۶۴

(۳) ۴۸

(۲) ۳۲

(۱) ۱۶

- c ۴. باشش رأس a, b, c, d, e, f چند گراف ساده می‌توان ساخت که هریک از آن‌ها فقط شامل دو یال باشند؟

(۴) ۱۹۵

(۳) ۱۵۰

(۲) ۱۰۵

(۱) ۱۵

- b ۵. چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۲ موجود است؟

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) ۴

(۱) ۱۵

- c ۶. تعداد گراف‌های ساده با رئوس a, b, c, d, e که دارای دو یال بوده و یال ad یکی از آن دو یال باشد کدام است؟

(۴) ۱۱

(۳) ۹

(۲) ۷

(۱) ۴

- a ۷. گراف کامل G دارای ۷۸ یال می‌باشد. مرتبه‌ی آن گراف کدام است؟

(۴) ۱۴

(۳) ۱۳

(۲) ۱۲

(۱) ۱۱

- a ۸. در کدام گراف کامل تعداد یال‌ها پنج برابر تعداد رأس‌هاست؟

(۴) k_{11} (۳) k_9 (۲) k_{10} (۱) k_5

- b ۹. چند گراف ساده مانند $G(V, E)$ وجود دارد که V شامل ۳ عضو باشد؟

(۴) ۸

(۳) ۱۲

(۲) ۱۶

(۱) ۴

- a ۱۰. گراف مقابل با چه تعداد یال دیگر کامل خواهد شد؟



(۲) ۵

(۱) ۳

(۴) ۱۶

(۳) ۱۰

- a ۱۱. در گراف k_{11} درجه‌ی هر رأس از گراف کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۹

(۲) ۱۰

(۱) ۱۱

- a ۱۲. مرتبه‌ی یک گراف کامل ثلث اندازه‌ی آن است. مرتبه‌ی آن گراف کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۵

(۲) ۶

(۱) ۷

- a ۱۳. گراف ساده‌ی G دارای ۷ رأس و ۲۰ یال می‌باشد. G چند رأس از درجه‌ی ۶ دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۲

- b ۱۴. گراف ساده‌ی G دارای ۸ رأس و ۲۶ یال می‌باشد. G حداقل چند رأس از درجه‌ی ۶ دارد؟

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۴

- b ۱۵. تعداد گراف‌های ساده با چهار رأس a, b, c, d که شامل یال ac بوده ولی هیچ یک از دویال bc, ad را نداشته باشند کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۱۶

(۲) ۲

(۱) ۸

۱۶ a. کدام تعریف، تعریف گراف تهی است؟

(۱) گرافی که فقط یک رأس دارد.

(۲) گرافی که مجموع درجه‌های رئوس آن صفر است.

(۳) گرافی که فقط یک یال دارد.

(۴) گرافی که درجه‌ی حداقل یکی از رئوس آن صفر باشد.

۱۷ a. گراف ساده‌ی G از اندازه‌ی ۴۸ می‌باشد. حداقل مرتبه‌ی آن گراف کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۱

(۲) ۱۰

(۱) ۹

۱۸ b. اگر G گرافی ساده و ناتهی باشد به طوری که تعداد یال‌های آن دو برابر تعداد رأس‌هایش باشد حداقل

مرتبه‌ی ممکن برای G کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳



۱۹ a. در گراف مقابل اگر p مرتبه و q اندازه‌ی گراف باشد آن‌گاه حاصل $p + 3q$ کدام است؟

(۴) ۹

(۳) ۲۰

(۲) ۱۴

(۱) ۱۰

۲۰ a. با پنج رأس متمایز a, b, c, d, e چند گراف متمایز می‌توان ساخت؟

(۴) ۲۲۰

(۳) ۲۱۵

(۲) ۲۱۰

(۱) ۲۵

۲۱ b. با هفت رأس متمایز چند گراف ساده می‌توان ساخت که هریک فقط دو یال داشته باشند؟

(۴) ۲۸۰

(۳) ۲۸

(۲) ۲۱۰

(۱) ۲۱

۲۲ b. اگر گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ و اندازه‌ی ۷ باشد آن‌گاه آن گراف حداقل چند رأس منفرد دارا خواهد بود؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) ۳

۲۳ b. اگر گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ و اندازه‌ی ۱۲ باشد آن‌گاه آن گراف حداکثر چند رأس منفرد دارا خواهد بود؟

(۴) ۹

(۳) ۱۰

(۲) ۱۱

(۱) ۱۲

۲۴ d. چند نوع گراف از مرتبه‌ی ۴ وجود دارد؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۱

(۲) ۱۰

(۱) ۹

۲۵ d. در داخل گراف K_5 چند تا گراف کامل از مرتبه‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ موجود است؟

(۴) ۳۳

(۳) ۳۲

(۲) ۳۱

(۱) ۳۰

۲۶ c. چند نوع گراف متمایز وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن برابر ۶ باشد؟

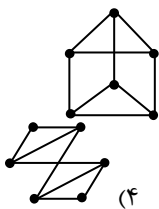
(۴) ۷

(۳) ۶

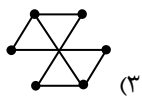
(۲) ۵

(۱) ۴

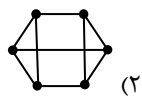
۲۷ c. کدام یک از گراف‌های زیر با گراف مقابل هم‌نوع است؟



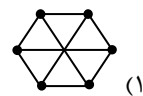
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۲۸ d. چند نوع گراف با ۸ رأس و ۳ یال می‌توان ساخت؟

(۴) ۶

(۳) ۹

(۲) ۵

(۱) ۷

۲۹ c. با پنج رأس a, b, c, d, e چند گراف ساده می‌توان ساخت به طوری که در هریک از آن گراف‌ها رأس a

منفرد باشد؟

(۴) ۱۲۸

(۳) ۶۴

(۲) ۳۲

(۱) ۱۶

۳۰ c. با چهار رأس a, b, c, d چند گراف ساده می‌توان ساخت به طوری که در هیچ یک از آن گراف‌ها رأس a

منفرد نباشد؟

(۴) ۱۶

(۳) ۴۸

(۲) ۳۲

(۱) ۵۶

جلسه دوم

🔪 گراف Γ - منتظم.

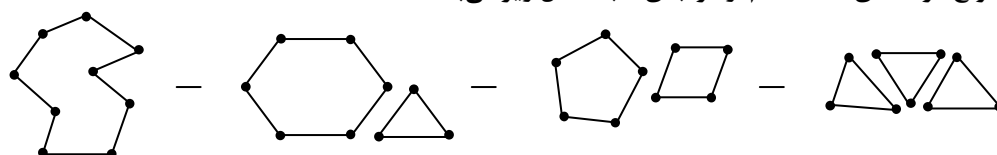
گراف ساده‌ی G را Γ - منتظم گویند هر گاه درجه‌ی هر یک از رئوس آن گراف برابر با Γ باشد. به عنوان مثال گراف k_p یک گراف $(p-1)$ - منتظم و گراف $\bar{k}_p$ یک گراف 0 - منتظم می‌باشد.

🔪 تست ۹. چند نوع گراف 2 - منتظم از مرتبه‌ی ۹ موجود است:

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴

انواع گراف‌های 2 - منتظم از مرتبه‌ی ۹ به شکل زیر می‌باشند:



🔪 نکته‌ی ۴. مجموع درجه‌های رئوس یک گراف ساده، دو برابر تعداد یال‌های آن می‌باشد، یعنی:

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$$

🔪 نکته‌ی ۵. تعداد رئوس از درجه‌ی فرد در هر گراف ساده‌ای همیشه زوج است.

🔪 نکته‌ی ۶. در یک گراف Γ - منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q رابطه‌ی $q = \frac{\Gamma p}{2}$ برقرار است.

🔪 تست ۱۰. چند نوع گراف 3 - منتظم از مرتبه‌ی ۲۱ وجود دارد؟

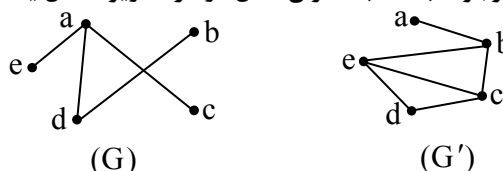
(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۲۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱

اگر چنین گرافی موجود باشد مجموع درجه‌های آن برابر $3 \times 21 = 63$ یعنی ۶۳ می‌شود که امکان ندارد زیرا مجموع درجه‌های رئوس هر گرافی زوج است. در حقیقت می‌توان گفت گرافی فرد منتظم از مرتبه‌ی فرد وجود ندارد.

🔪 مکمل یک گراف.

گراف G' را مکمل گراف G گویند هر گاه مجموعه رئوس آن، همان مجموعه رئوس G بوده و مجموعه یال‌های آن متمم مجموعه یال‌های G باشد، به عبارت دیگر یک یال در گراف G' موجود باشد اگر و تنها اگر آن یال در گراف G موجود نباشد. به عنوان مثال دو گراف زیر مکمل یکدیگرند:



◀ نکته‌ی ۷.۱ اگر دو گراف هم‌نوع باشند مکمل‌های آن دو نیز هم‌نوعند.

◀ نکته‌ی ۸. اگر دو گراف G و G' از مرتبه‌ی p را بر روی هم چنان قرار دهیم که رئوس هم‌نام بر روی هم منطبق شوند آن‌گاه یک گراف کامل از مرتبه‌ی p به دست خواهد آمد. پس می‌توان گفت تعداد یال‌های یک گراف با تعداد یال‌های مکملش بر روی هم تعداد یال‌های گراف کامل را ایجاد می‌کنند. یعنی:

$$q(G) + q(G') = q(k_p) = \frac{p(p-1)}{2}$$

◀ نکته‌ی ۹. اگر a رأس دلخواهی از گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p باشد آن‌گاه:

$$\deg(a_G) + \deg(a_{G'}) = p - 1$$

✍ تست ۱۱. اگر تعداد یال‌های یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۸ برابر ۱۱ باشد آن‌گاه تعداد یال‌های مکمل آن کدام است؟

۲۵ (۴)

۱۷ (۳)

۱۰ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$q(G) + q(G') = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 11 + q(G') = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \Rightarrow q(G') = 17$$

📌 ماکزیمم و می‌نیمم درجه‌ی رئوس یک گراف.

در یک گراف ساده درجه‌ی رأسی را که درجه‌اش از هر یک از درجه‌های سایر رئوس بزرگ‌تر یا مساوی باشد را ماکزیمم درجه‌ی رئوس و درجه‌ی رأسی را که درجه‌اش از هر یک از درجه‌های سایر رئوس کوچک‌تر یا مساوی باشد را می‌نیمم درجه‌ی رئوس آن گراف می‌گویند و آن دو را به ترتیب معمولاً با Δ و δ نمایش می‌دهند. معلوم است که در گراف r - منتظم رابطه‌ی $\Delta = \delta = r$ برقرار است.

✍ تست ۱۲. در گراف ساده‌ی G مقدار Δ برابر با ۸ می‌باشد. اگر آن گراف از مرتبه‌ی ۲۱ باشد آن‌گاه مقدار δ در گراف G' کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۳

رأس Δ از گراف G متناظر به رأس δ از گراف G' می‌باشد، بنابراین طبق نکته‌ی ۹، مجموع آن دو درجه با $p-1$ برابر می‌باشد:

$$\Delta_G + \delta_{G'} = p - 1 \Rightarrow 8 + \delta_{G'} = 20 \Rightarrow \delta_{G'} = 12$$

✍ تست ۱۳. گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\Delta = 7$. حداکثر تعداد یال‌های آن کدام است؟

۵۹ (۴)

۶۰ (۳)

۱۱۱ (۲)

۱۱۹ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$\deg(v_1) \leq \Delta$$

$$\deg(v_2) \leq \Delta$$

⋮

$$\deg(v_{17}) \leq \Delta$$

$$\sum \deg(v_i) \leq 17\Delta \Rightarrow 2q \leq 17 \times 7 \Rightarrow q \leq 59.5 \Rightarrow q_{\max} = 59$$

◀ نکته‌ی ۱۰. در حالت کلی در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q نابرابری $2q \leq p \cdot \Delta$ یا $\frac{2q}{p} \leq \Delta$

برقرار است.

تست ۱۴. گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\Delta = ۷$. حداقل تعداد یال‌های آن گراف کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۷ (۳) ۵۹ (۴) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲

گراف مطلوب گرافی است که به یکی از رأس‌های آن ۷ یال متصل بوده و هیچ یال دیگری ندارد.

تست ۱۵. گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\delta = ۷$. حداقل تعداد یال‌های آن گراف کدام است؟

- (۱) ۵۹ (۲) ۶۰ (۳) ۱۱۱ (۴) ۱۱۹

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$\deg(v_1) \geq \delta$$

$$\deg(v_2) \geq \delta$$

$\vdots$

$$\deg(v_{17}) \geq \delta$$

$$\sum \deg(v_i) \geq 17\delta \Rightarrow 2q \geq 17 \times 7 \Rightarrow q \geq 59.5 \Rightarrow q_{\min} = 60$$

نکته‌ی ۱۱. در حالت کلی در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q نابرابری $2q \geq p \cdot \delta$ یا $\frac{2q}{p} \geq \delta$

برقرار است. بنابراین در هر گراف ساده‌ای نابرابری زیر برقرار است:

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

تست ۱۶. گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\delta = ۷$. حداکثر تعداد یال‌های آن گراف کدام است؟

- (۱) ۱۳۶ (۲) ۱۲۷ (۳) ۱۲۸ (۴) ۱۱۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲

راه حل اول: گراف مطلوب گرافی است که از یکی از رؤوس گراف k_{17} (که درجه‌ی هر یک از رؤوس آن ۱۶ می‌باشد) به تعداد ۹ یال برداشته شود. در این صورت درجه‌ی آن رأس که نقش δ را بازی می‌کند برابر ۷، درجه‌ی ۹ رأس از آن برابر ۱۵ و درجه‌ی ۷ رأس باقی مانده هر یک برابر ۱۶ خواهد شد که تعداد یال‌های این گراف به شکل زیر به دست می‌آید:

$$q = \frac{\sum \deg(v_i)}{2} = \frac{(1 \times 7) + (9 \times 15) + (7 \times 16)}{2} = 127$$

راه حل دوم: با ۱۶ رأس از ۱۷ رأس داده شده یک گراف k_{16} می‌سازیم که دارای $\frac{16 \times 15}{2}$ یعنی ۱۲۰ یال

می‌باشد. تنها رأس باقی مانده را با ۷ یال به ۷ رأس دلخواه از گراف k_{16} وصل می‌کنیم که گراف به دست آمده گراف مطلوب خواهد بود. گراف به دست آمده دارای $120 + 7 = 127$ یال خواهد بود.

تست ۱۷. گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که $\Delta = ۷$ و $\delta = ۳$. حداکثر تعداد یال‌های آن گراف

کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۵۹ (۳) ۵۸ (۴) ۵۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴

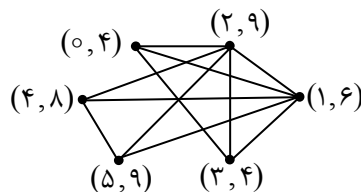
بزرگ‌ترین درجه برابر ۷ و کوچک‌ترین درجه برابر ۳ می‌باشد. برای آن که تعداد یال‌ها ماکزیمم باشد باید مجموع درجه رئوس ماکزیمم شود بنابراین درجه‌ی مابقی رئوس را تا حد ممکن بزرگ در نظر می‌گیریم و چون درجه‌ی هیچ رأسی نمی‌تواند از ۷ بزرگ‌تر باشد بنابراین درجه‌ی هر یک از ۱۵ رأس باقی‌مانده را ۷ در نظر می‌گیریم ولی در این صورت مجموع درجه رئوس فرد می‌شود که امکان ندارد. برای رفع مشکل ایجاد شده درجه‌ی یکی از ۱۵ رأس باقی‌مانده را به جای ۷ عدد زوج ۶ را در نظر می‌گیریم که در این صورت درجه‌های رئوس به شکل زیر خواهد بود:

$$\underbrace{7, 7, 7, \dots, 7}_{15 \text{ تا}}, 6, 3$$

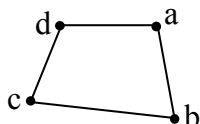
معلوم است که مجموع درجه رئوس برابر $3 + 6 + 7 \times 15 = 114$ یعنی ۱۱۴ شده و در نتیجه تعداد یال‌های چنین گرافی برابر ۵۷ خواهد شد.

🔍 گراف بازه‌ها.

گراف ساده‌ی G را گراف بازه‌ها گویند هر گاه بتوان به هر یک از رئوس آن بازه‌ای باز متمایز از بازه‌های دیگر چنان اختصاص داد که بازه‌های متناظر به دو رأس مجاور دارای اشتراک بوده ولی بازه‌های متناظر به دو رأس غیر مجاور دارای اشتراک نباشند. به عنوان مثال گراف متناظر به بازه‌های $(0, 4)$ ، $(1, 6)$ ، $(2, 9)$ ، $(3, 4)$ ، $(4, 8)$ ، $(5, 9)$ به شکل زیر می‌باشد:



🔍 مثال ۱. ثابت کنید گراف زیر نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد.



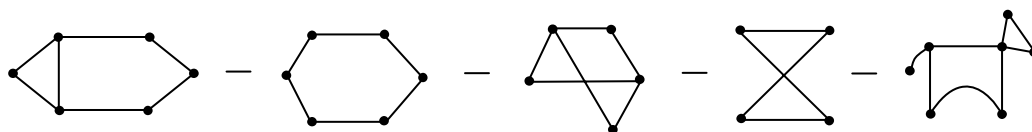
حل:

فرض می‌کنیم به هر یک از رئوس a و c بازه‌های A و C را اختصاص داده باشیم معلوم است که این دو بازه اشتراکی نداشته و بر روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر در امتداد هم باشند:



حال اگر توجه کنید هر یک از دو بازه‌ی متناظر به رئوس b و d باید فاصله‌ی بین دو بازه‌ی A و C را در بر داشته باشند (زیرا هر یک از آن دو رأس با هر دو رأس a و c مجاورند) و از طرف دیگر نباید با هم اشتراک داشته باشند که تناقض است.

🔍 نکته‌ی ۱۲. گرافی که در آن n ضلعی بدون قطر ($n \geq 4$) یافت شود نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد، به عنوان مثال هیچ یک از گراف‌های زیر نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد:



🔍 نکته‌ی ۱۳. گراف K_p به ازای تمام مقادیر طبیعی p گرافی بازه‌ها می‌باشد.