فصل ۲

تست های مرور (بخش‌های ۱ تا ۳)

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۴)

راه حل اول: با استفاده از قضیه‌ی (۶) در دو مرحله n را حذف می‌کنیم تا به یک عدد برسیم:

$$\begin{cases} n-1|3n^2+5n+8 \\ n-1|3(n^2-1) \end{cases} \Rightarrow n-1|3n^2+5n+8-3(n^2-1) \Rightarrow n-1|5n+11$$

همان طور که دیدید در مرحله‌ی اول ضریب n^2 صفر شد، حال ضریب n را صفر می‌کنیم:

$$\begin{cases} n-1|5n+11 \\ n-1|5(n-1) \end{cases} \Rightarrow n-1|5n+11-5(n-1) \Rightarrow n-1|16 \Rightarrow n-1=\mp1, \mp2, \mp4, \mp8, \mp16$$

لذا برای $n-1$، ۱۰ عدد صحیح متمایز (و به تبع آن ۱۰ عدد متمایز برای n) به‌دست می‌آید.

راه حل دوم: با استفاده از نکته‌ی (۱) داریم:

$$n-1|3(1)^2+5(1)+8 \Rightarrow n-1|16$$

ادامه‌ی راه حل مشابه راه حل اول است.

۲- گزینه‌ی (۱)

با استفاده از قضیه‌ی (۶) داریم:

$$\begin{cases} n^2+n+3|n^3+2n^2+5n+14 \\ n^2+n+3|(n+1)(n^2+n+3) \end{cases} \Rightarrow n^2+n+3|n^3+2n^2+5n+14-(n+1)(n^2+n+3)$$

$$\Rightarrow n^2+n+3|n+11 \xrightarrow{(8)\ \text{Á¾Ìñ¤}} |n^2+n+3| \le |n+11|$$

چون $n \in \mathbb{N}$ لذا $n^2+n+3 \le n+11$، پس $n^2 \le 8$، از این نامساوی $n=1$ یا $n=2$ به‌دست می‌آید، که هیچ کدام در رابطه‌ی اصلی صدق نمی‌کنند.

۳- گزینه‌ی (۲)

با توجه به این که $5^{27}-3^{36}=(5^3)^9-(3^4)^9=125^9-81^9$، از قسمت دوم نکته‌ی (۲) داریم:

$$125-81|125^9-81^9 \Rightarrow 44|125^9-81^9 \xrightarrow{44=4\times11} 11|125^9-81^9$$

۴- گزینه‌ی (۴)

با توجه به این که $2^{27}+1=(2^9)^3+1$ ، از قسمت دوم نکته‌ی (۲) داریم:

$$2^9+1|2^{27}+1 \Rightarrow 512+1|2^{27}+1 \Rightarrow 513|2^{27}+1 \xrightarrow{513=27\times19} 19|2^{27}+1$$

۵- گزینه‌ی (۳)

اعدادی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۷، برابر ۳ است، به صورت $a=7q+3$ هستند. بنابراین باید تعداد اعداد صحیح q را بیابیم که در نابرابری $10 \le 7q+3 \le 99$ صدق می‌کنند.

$$10 \le 7q+3 \le 99 \Rightarrow 7 \le 7q \le 96 \Rightarrow 1 \le q \le \frac{96}{7} \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} 1 \le q \le 13$$

لذا ۱۳ مقدار صحیح متفاوت برای q وجود دارد.

۶- گزینه‌ی (۲)

اعدادی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۲۳، برابر ۱۱ است، به صورت $a=23q+11$ هستند. بنابراین باید تعداد اعداد صحیح q را بیابیم که در نابرابری $45 \le 23q+11 \le 450$ صدق می‌کنند.

$$45 \le 23q+11 \le 450 \Rightarrow 34 \le 23q \le 439 \Rightarrow \frac{34}{23} \le q \le \frac{439}{23} \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} 2 \le q \le 19$$

لذا $19-2+1=18$ مقدار صحیح برای q وجود دارد.

۷- گزینه‌ی (۱)

اعداد صحیحی که خارج قسمت تقسیم آن‌ها بر ۱۷ برابر ۳۳- است، به صورت $a=(17)(-33)+r$ می‌باشند. اما با توجه به این که $0\leq r\leq 16$، نتیجه می‌گیریم ۱۷ مقدار برای r و در نتیجه برای a وجود دارد.

۸- گزینه‌ی (۳)

با توجه به فرض سوال داریم:

$$a=43q+18\Rightarrow -a=-43q-18\Rightarrow -a=43(-q)-18\Rightarrow -a=43q'-18\xrightarrow{0\leq r<43}-a=43q''+43-18\Rightarrow -a=43q''+25$$

به طور کلی اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b برابر r باشد $(r\neq 0)$ باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر b برابر است با $b-r$.

۹- گزینه‌ی (۲)

ابتدا باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۳ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۶۵ برابر ۴۳ است، داریم:

$$a=65q+43=(13\times 5)q+43=13(5q)+3\times 13+4=13(\underbrace{5q+3}_{q'})+4=13q'+4$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۳، ۴ است. با توجه به نکته‌ی (۴) باقی‌مانده‌ی تقسیم a^2+a+1 بر ۱۳، برابر باقی‌مانده‌ی تقسیم $(4)^2+4+1$ بر ۱۳ یعنی برابر ۸ است.

۱۰- گزینه‌ی (۳)

اگر باقی‌مانده را r، خارج قسمت را q و مقسوم را a در نظر بگیریم، داریم:

$$a=12q+r\xrightarrow{q=2r}a=12(2r)+r\Rightarrow a=25r$$

اما برای رابطه‌ی تقسیم $a=12q+r$ داریم $r_{\max}=11$، لذا حداکثر مقدار a برابر است با $25\times 11=275$.

۱۱- گزینه‌ی (۱)

اگر $a=bq+r$ رابطه‌ی تقسیم مورد نظر باشد، با توجه به فرض سوال داریم:

$$a+31=(b+3)(q+1)+r-4\xrightarrow{a=bq+r}(bq+r)+31=(b+3)(q+1)+r-4\Rightarrow b+3q=32\Rightarrow b=3(\underbrace{-q+10}_{q'})+2$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم b بر ۳ برابر ۲ است و در بین گزینه‌ها، تنها باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰ بر ۳ برابر ۲ است.

۱۲- گزینه‌ی (۳)

با توجه به فرض سوال داریم:

$$5a=23q+14\Rightarrow 5a=23q'+2\times 23+14\Rightarrow 5a=23q'+60\Rightarrow 5a-60=23q'\Rightarrow 5(a-12)=23q'\Rightarrow 5|q'\Rightarrow q'=5k$$

اکنون با جای‌گذاری $q'=5k$ در $5a=23q'+60$ داریم:

$$5a=23(5k)+60\xrightarrow{\text{5 ÷ll ¸ÅÎoö ´ÅvEU}}a=23k+12$$

۱۳- گزینه‌ی (۴)

طبق فرض داریم: $a=9q_1+4$ و $a=12q_2+7$. برای به‌دست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۳۶، طرفین تساوی $a=9q_1+4$ را در ۴ و طرفین تساوی $a=12q_2+7$ را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}4a=4(9q_1+4)\Rightarrow 4a=36q_1+16\\ 3a=3(12q_2+7)\Rightarrow 3a=36q_2+21\end{cases}\xrightarrow{\text{Á»lvU »j ¸ÅÎoö ®òlÿU}}a=36(\underbrace{q_1-q_2}_{q'})-5\Rightarrow a=36q'-36+36-5=36(\underbrace{q'-1}_{q''})+31$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۳۶ برابر است با ۳۱.

۱۴- گزینه‌ی (۲)

اگر رابطه‌ی تقسیم مورد نظر را $a=bq+r$ در نظر بگیریم، طبق فرض $a=5r$. بنابراین داریم:

$$5r=bq+r\Rightarrow 4r=bq\xrightarrow{0\leq r<b}0\leq bq<4b\xrightarrow{b\in\mathbb{N}}q<4$$

لذا حداکثر مقدار خارج قسمت برابر ۳ است.

۱۵- گزینه‌ی (۳)

رابطه‌ی تقسیم مورد نظر را به صورت $a=117q+r$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض $r=2q^2$ ، بنابراین داریم:

$$a=117q+2q^2 \xrightarrow[0\le r\le 116]{r=2q^2} 0\le 2q^2\le 116 \Rightarrow 0\le q^2\le 58 \Rightarrow q=0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 5, \mp 6, \mp 7$$

که با فرض $a\neq 0$، ۱۴ عدد صحیح برای a به‌دست می‌آید.

۱۶- گزینه‌ی (۴)

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} a=bq_1+17 \\ 2a=bq_2+9 \end{cases} \xrightarrow{\text{ÂÎoö ®òlÿÙ}} 2a-a=bq_2-bq_1+9-17 \Rightarrow a=bq_3-8$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی اخیر و $a=bq_1+17$ نتیجه می‌گیریم $b|25$ (چرا؟). از طرفی $b>17$، لذا $b=25$.

۱۷- گزینه‌ی (۳)

طبق قضیه‌ی تقسیم، اعداد صحیح q_1 و q_2 وجود دارند به طوری که $a=7q_1+3$ و $a=11q_2+4$. برای به‌دست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷۷، طرفین تساوی $a=7q_1+3$ را در ۱۱ و طرفین تساوی $a=11q_2+4$ را در ۷ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases} 11a=11(7q_1+3) \Rightarrow 11a=77q_1+33 \\ 7a=7(11q_2+4) \Rightarrow 7a=77q_2+28 \end{cases} \xrightarrow{\text{ÂÎoö ®òlÿÙ}} 4a=77(\underbrace{q_1-q_2}_{q'})+5 \Rightarrow 8a=77(2q')+10$$

$$\begin{cases} 7a=77q_2+28 \\ 8a=77q''+10 \end{cases} \xrightarrow{\text{ÂÎoö ®òlÿÙ}} a=77(\underbrace{q''-q_2}_{q'''})-18 \Rightarrow a=77(q'''-1)+59$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷۷ برابر ۵۹ است.

۱۸- گزینه‌ی (۴)

می‌دانیم اگر a به صورت $6k+r$ باشد، آن‌گاه a^2 به صورت $6k+r^2$ است. اما طبق فرض باقی‌مانده‌های تقسیم a و a^2 بر ۶ با هم برابرند. بنابراین داریم:

$$r^2-r=6q \qquad (0\le r<6) \Rightarrow r=0\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 4$$

اگر $r=0$، آن‌گاه $a=6k$. لذا داریم:

$$0\le 6k\le 100 \Rightarrow 0\le k\le \frac{100}{6} \Rightarrow 0\le k\le 16$$

پس ۱۷ عدد به صورت $6k$، در مجموعه‌ی مورد نظر وجود دارد. به همین ترتیب ۱۷ عدد به صورت $6k+1$، ۱۷ به صورت $6k+3$ و ۱۷ عدد به صورت $6k+4$ در این مجموعه وجود دارد. پس در کل $4\times 17=68$ عدد در شرایط مسأله صدق می‌کند. (در واقع تنها عددهای به فرم $6k+2$ و $6k+5$ در شرایط سؤال صدق نمی‌کنند.)

۱۹- گزینه‌ی (۳)

اگر $a=5k\mp 2$، آن‌گاه $a^2=5k'+4$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 0\le 5k+2\le 100 \Rightarrow -\frac{2}{5}\le k\le \frac{98}{5} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 0\le k\le 19 \\ 0\le 5k-2\le 100 \Rightarrow \frac{2}{5}\le k\le \frac{102}{5} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 1\le k\le 20 \end{cases}$$

لذا در مجموعه‌ی مورد نظر ۲۰ عدد به صورت $5k+2$ و ۲۰ عدد به صورت $5k-2$ وجود دارد. پس در مجموع ۴۰ عدد در شرایط مسأله صدق می‌کنند.

۲۰- گزینه‌ی (۴)

معادله‌ی گزینه‌ی (۴) را می‌توان به صورت $a^2=8(b+2)+1$ نوشت. با توجه به این‌که مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است، لذا معادله‌ی مورد نظر در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب دارد. (دقت کنید که در هر چهار گزینه a عددی فرد است (چرا؟))

۲۱- گزینه‌ی (۴)

هر عدد صحیح به یکی از هفت صورت $7k$، $7k\pm1$، $7k\pm2$ و $7k\pm3$ است. برای a^3 داریم:

$$a=7k\Rightarrow a^3=7k'$$
$$a=7k\pm1\Rightarrow a^3=7k'\pm1$$
$$a=7k\pm2\Rightarrow a^3=7k'\pm1$$
$$a=7k\pm3\Rightarrow a^3=7k'\pm1$$

بنابراین مکعب هر عدد صحیح به یکی از سه صورت $7k$ و $7k\pm1$ است. لذا فقط گزینه‌ی (۴) قابل قبول است.

۲۲- گزینه‌ی (۳)

اعضای مجموعه‌ی مورد نظر به فرم $a=-17k+63$ هستند. برای این‌که آن‌ها را راحت‌تر مشخص کنیم، داریم:

$$a=-17k+63\Rightarrow a=-17k+3\times17+12\Rightarrow a=-17(k-3)+12$$

که با فرض $k-3=k'$، فرم اعداد مورد نظر به صورت $a=-17k'+12$ به‌دست می‌آیند. لذا کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه برابر ۱۲ خواهد بود.

۲۳- گزینه‌ی (۳)

طبق فرض سؤال داریم:

$$(555)_b=365\Rightarrow 5b^2+5b+5=365\Rightarrow 5b^2+5b-360=0\Rightarrow(b+9)(b-8)=0\Rightarrow b=8$$

۲۴- گزینه‌ی (۴)

$$(2021)_3=(3a1)_4\Rightarrow 2\times3^3+0\times3^2+2\times3^1+1=3\times4^2+a\times4+1\Rightarrow a=3$$

۲۵- گزینه‌ی (۴)

طبق فرض داریم:

$$(34a3)_5=(1b11)_7\Rightarrow 3\times5^3+4\times5^2+a\times5+3=1\times7^3+b\times7^2+1\times7+1\Rightarrow 127+5a=49b$$
$$\Rightarrow 127=50b-5a-b\xrightarrow{10b-a=k}127=5k-b\Rightarrow b=5k'+3$$

اما چون $0\le b<7$، لذا $b=3$. همچنین از رابطه‌ی $127+5a=49b$ نتیجه می‌گیریم $a=4$، بنابراین $a+b=7$.

۲۶- گزینه‌ی (۳)

طبق فرض داریم:

$$(abc)_5=(cab)_6\Rightarrow 5^2\times a+5b+c=6^2c+6a+b\Rightarrow 19a+4b=35c$$

معادله‌ی فوق را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$20a-a+5b-b=5(7c)\Rightarrow a+b=5(\underbrace{4a+b-7c}_{k})$$

بنابراین $a+b$، ضریبی از ۵ است. با توجه به این که $0\le a,b,c\le4$، پس داریم: $a+b=0$ یا $a+b=5$.

۲۷- گزینه‌ی (۲)

با توجه به این‌که $3^6<700<3^5$، لذا ۷۰۰ در مبنای ۳ عددی ۶ رقمی است.

۲۸- گزینه‌ی (۴)

$$(6214)_8=6\times8^3+2\times8^2+1\times8+4=2(3\times8^3+1\times8^2+0\times8^1+6)$$

بنابراین نمایش نصف عدد $(6214)_8$ در مبنای ۸ برابر است با $(3106)_8$.

۲۹- گزینه‌ی (۴)

$$(8421)_9=8\times9^3+4\times9^2+2\times9+1=2^3\times9^3+2^2\times9^2+18+1=1\times18^3+1\times18^2+1\times18+1$$

بنابراین نمایش عدد $(8421)_9$ در مبنای ۱۸ به صورت $(1111)_{18}$ می‌باشد.

۳۰- گزینه‌ی (۲)

$$6372=6\times10^3+3\times10^2+7\times10+2=5(\underbrace{12\times10^2+6\times10+14}_{k})+2$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۶۳۷۲ بر ۵ برابر ۲ است.

۳۱- گزینه‌ی (۴)

$$(99837)_{12}=9\times12^4+9\times12^3+8\times12^2+3\times12+7=4(\underbrace{27\times12^3+27\times12^2+2\times12^2+9}_{k})+7=4(k+1)+3$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مورد نظر بر ۴ برابر ۳ است.

۳۲- گزینه‌ی (۱)

عدد ۲۱ در مبنای ۵ به صورت ۴۱ نمایش داده می‌شود. لذا دو عدد را در مبنای ۵ با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 12342 \\ +\quad 41 \\ \hline 12433 \end{array} \Rightarrow a+21=(12433)_5$$

۳۳- گزینه‌ی (۴)

دو عدد مورد نظر را در مبنای ۹ با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 70072 \\ 8083 \\ \hline 78165 \end{array}$$

۳۴- گزینه‌ی (۲)

با توجه به نکته‌ی (۸) بخش ۲-۳ برای تبدیل هر عدد از مبنای 2^3 به مبنای ۲، برای هر رقم سه جای خالی در نظر می‌گیریم و با تقسیم‌های متوالی آن رقم بر ۲، جاهای خالی را پر می‌کنیم. بنابراین:

$$(\overline{173})_8=(\overline{001111011})_2$$

پس نمایش عدد مورد نظر در مبنای ۲ به صورت $(1111011)_2$ می‌باشد.

۳۵- گزینه‌ی (۲)

هر دو عدد را در مبنای ۲ می‌بریم و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} (\overline{20ab03})_4=(\overline{1000a_1a_2b_1b_2 0011})_2 \\ (\overline{d16c})_8=(\overline{d_1d_2d_3 001110 c_1c_2c_3})_2 \end{cases}$$

چون نمایش هر دو عدد در مبنای ۲ باید یکسان باشد، با مقایسه‌ی رقم‌ها داریم:

$$d=(100)_2\ ,\ a=(01)_2\ ,\ b=(11)_2\ ,\ c=(011)_2$$

پس $a=1$، $b=3$، $c=3$ و $d=4$. بنابراین:

$$a+b+c+d=11$$

(اصلاح صورت سوال: گزینه‌ی (۲) برابر ۱۱ می‌باشد.)

۳۶- گزینه‌ی (۳)

طبق فرض داریم:

$$(\overline{xy})_{10}=5(x+y)\Rightarrow 10x+y=5x+5y\Rightarrow 5x=4y\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{4}{5}$$

با توجه به این‌که $0\le x,y\le 9$ و نسبت x به y، ۴ به ۵ است، نتیجه می‌گیریم $x=4$ و $y=5$. بنابراین:

$$(\overline{1yx})_{10}=(\overline{154})_{10}=1\times10^2+5\times10+4=10(10+5)+4$$

لذا باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۵۴ بر مجموع ارقامش (۱۰) برابر ۴ است.

۳۷- گزینه‌ی (۲)

طبق فرض داریم:

$$(121)_x=(26)_{3x}\Rightarrow 1\times x^2+2\times x+1=2\times 3x+6\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow (x-5)(x+1)=0\Rightarrow x=5\Rightarrow x-1=4$$

هر عدد ۴ رقمی در مبنای ۴ به صورت $(x_1x_2x_3x_4)_4$ می‌باشد. با توجه به این‌که برای هر $x_i\ (2\leq i\leq 4)$، ۴ انتخاب ۰، ۱، ۲ و ۳ و برای x_1، ۳ انتخاب ۱، ۲ و ۳ وجود دارد، بنابراین تعداد اعداد چهار رقمی در مبنای ۴ برابر است با:

$$\Big(\underset{S^2le\ 3}{\underset{\downarrow}{\_}}\quad \underset{S^2le\ 4}{\underset{\downarrow}{\_}}\quad \underset{S^2le\ 4}{\underset{\downarrow}{\_}}\quad \underset{S^2le\ 4}{\underset{\downarrow}{\_}}\Big)\qquad\qquad 3\times 4\times 4\times 4=192$$

۳۸- گزینه‌ی (۲)

طبق فرض داریم:

$$(xy4)_5=(1z5)_8\Rightarrow 5^2\times x+5^1\times y+4=8^2\times 1+8^1\times z+5\Rightarrow 5^2\times x+5y=5z+3z+65\Rightarrow 3z=5(\underbrace{5x+y-z-13}_{k})\Rightarrow 3z=5k\Rightarrow 5|z$$

بنابراین z مضربی از ۵ است. با توجه به این‌که عدد مورد نظر در مبنای ۸ به صورت $1z5$ است، پس $0\leq z\leq 7$. پس بزرگ‌ترین مقدار z برابر ۵ است.

فصل ۲ تست های مرور (بخش‌های ۴ تا ۶)

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۱)

با توجه به رابطه‌ی $n^2+2n-15=(n+5)(n-3)$، عبارت $n^2+2n-15$ به ازای $n\geq 5$، عددی مرکب است، زیرا بـه حاصـل ضـرب دو عـدد بزرگ‌تر از یک تجزیه شده است. به ازای $n=4$، عبارت مورد نظر برابر ۹ است که عددی مرکب است.

۲- گزینه‌ی (۲)

$$n^4+n^2+1=(n^2+1)^2-n^2=(n^2+1-n)(n^2+1+n)$$

برای این که n^4+n^2+1، عددی اول باشد، باید یکی از عوامل تجزیه‌ی آن (عامل کوچک‌تر) برابر ۱ باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$n^2+1-n=1\Rightarrow n(n-1)=0\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}n=1$$

و البته n^4+n^2+1 به ازای $n=1$ برابر ۳ می‌شود که عددی اول است.

۳- گزینه‌ی (۲)

با اضافه و کم کردن جمله‌ی $4n^2$ به عبارت n^4+4 داریم:

$$n^4+4+4n^2-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$$

برای این که n^4+4 عددی اول باشد، باید عامل کوچک‌تر در تجزیه‌ی آن، برابر ۱ باشد. بنابراین داریم:

$$n^2+2-2n=1\Rightarrow(n-1)^2=0\Rightarrow n=1$$

و البته عبارت n^4+4 به ازای $n=1$ برابر ۵ می‌شود که عددی اول است.

۴- گزینه‌ی (۱)

اگر p فرد باشد، $p+7$ عددی زوج و بزرگتر از ۲ است که اول نیست. همچنین اگر $p=2$، آن‌گاه $p+7=9$ که عددی مرکـب اسـت. بنـابراین برای هر عدد اول p، $p+7$، عددی مرکب است.

۵- گزینه‌ی (۳)

می‌دانیم اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $x+y|x^n+y^n$. بنابراین اگر $n>1$ عددی فرد باشـد، $2+3|2^n+3^n$. پـس در ایـن حالـت 2^n+3^n مرکب است. پس شرط لازم برای این که 2^n+3^n اول باشد، این است که n توانی از ۲ باشد.

۶- گزینه‌ی (۱)

اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $3n+1$ عددی زوج است. پس در این حالت $3n+1$ اول نیست، لذا n زوج است، یعنی $n=2k$ و داریم:

$$3n+1=3(2k)+1=6k+1$$

از طرفی اعداد اول بزرگ تر از ۳ به صورت $6k'\mp1$ هستند، پس:

$$2n+1=6k'\mp1$$

حال داریم:

$$n=(3n+1)-(2n+1)=(6k+1)-(6k'\mp1)=\begin{cases}6(\underbrace{k-k'}_{k''})\\6(\underbrace{k-k'}_{k''})+2\end{cases}$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۶، یا ۰ است یا ۲.

۷- گزینه‌ی (۱)

با توجه به این که p عددی اول و $p>3$، بنابراین p را می‌توان به صورت $6k\mp1$ نمایش داد. (چرا؟) پس داریم:

$$\begin{cases}p=6k+1\Rightarrow p+2=6k+3\Rightarrow p+2=3(2k+1)\xrightarrow{p>3}p+2\ \text{مرکب است}\\p=6k-1\Rightarrow p+2=6k+1\end{cases}$$

پس p به فرم $6k-1$ می‌باشد و داریم:

$$p+1=(6k-1)+1=6k\Rightarrow 6|p+1$$

۸- گزینه‌ی (۲)

فرض کنید p_1، p_2، ... و p_n همه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ باشند و $a=p_1p_2...p_n+1$. برای هر $1\le i\le n$ داریم:

$$a=p_i\underbrace{(p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_n)}_{k}+1$$

لذا باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر هر یک از p_i ها برابر یک است. پس a بر هیچ عدد اولی از مجموعه‌ی $\{2,3,\dots,100\}$ بخش‌پذیر نیست، بنابراین a بر هیچ عدد مرکب از این مجموعه نیز نمی‌تواند بخش‌پذیر باشد.

۹- گزینه‌ی (۲)

عدد مورد نظر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$9^{10}\times10^{11}\times11^{12}\times12^{13}=3^{20}\times2^{11}\times5^{11}\times11^{12}\times3^{13}\times2^{26}=2^{37}\times3^{33}\times5^{11}\times11^{12}$$

عدد $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}$ در صورتی مکعب کامل است که هر یک از α_i ها مضربی از ۳ باشند. بنابراین برای این که عدد مورد نظر مکعب کامل شود باید حداقل در $2^2\times5$ ضرب شود که این عدد شامل ۲ عامل اول متمایز است.

۱۰- گزینه‌ی (۲)

$$3p+4=k^2\Rightarrow3p=k^2-4\Rightarrow3p=(k-2)(k+2)$$

چون p اول است و $3p$ به صورت حاصل ضرب دو عدد تجزیه شده است، داریم:

$$\begin{cases}k-2=3\Rightarrow k=5\\ k+2=p\xrightarrow{k=5}p=7\end{cases}\quad \text{یا}\quad \begin{cases}k+2=3\Rightarrow k=1\\ k-2=p\xrightarrow{k=1}p=-1\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس فقط به ازای $p=7$، $3p+4$ مربع کامل است.

۱۱- گزینه‌ی (۱)

اگر $6p+1$ مربع کامل باشد داریم:

$$6p+1=x^2\Rightarrow6p=x^2-1$$

از طرفی چون $x^2=6p+1$، پس x عددی فرد است لذا $x^2=8k+1$. در نتیجه داریم:

$$6p=x^2-1\xrightarrow{x^2=8k+1}6p=8k\Rightarrow3p=4k$$

از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که p بر ۴ بخش‌پذیر است (چرا؟) بنابراین هیچ عدد اول مانند p وجود ندارد که $6p+1$ مربع کامل باشد.

۱۲- گزینه‌ی (۴)

$$24p+1=k^2\Rightarrow24p=k^2-1\Rightarrow24p=(k-1)(k+1)\xrightarrow{24=2^3\times3}2^3\times3p=(k-1)(k+1)$$

چون $24p+1$ عددی فرد است، پس k^2 و نیز k اعدادی فرد هستند، لذا $k+1$ و $k-1$ اعدادی زوج هستند. بنابراین با توجه به تساوی قبل حالت‌های زیر برای $k-1$ و $k+1$ امکان‌پذیر است:

$$\begin{cases}k-1=2\times3\Rightarrow k=7\\ k+1=2^2\times p\xrightarrow{k=7}p=2\end{cases}\qquad \begin{cases}k-1=2^2\times3\Rightarrow k=13\\ k+1=2\times p\xrightarrow{k=13}p=7\end{cases}$$

$$\begin{cases}k+1=2\times3\Rightarrow k=5\\ k-1=2^2\times p\xrightarrow{k=5}p=1\ \text{غ ق ق}\end{cases}\qquad \begin{cases}k+1=2^2\times3\Rightarrow k=11\\ k-1=2\times p\xrightarrow{k=11}p=5\end{cases}$$

۱۳- گزینه‌ی (۴)

از تقسیم‌های متوالی ۱۷ بر ۲ استفاده می‌کنیم:

۱۷ | ۲ → ۸
۸ | ۲ → ۴
۴ | ۲ → ۲
۲ | ۲ → ۱

بنابراین توان عامل ۲ در تجزیه‌ی استاندارد $17!$ برابر است با:

$$8+4+2+1=15$$

۱۴- گزینه‌ی (۳)

ابتدا توان عوامل ۲ و ۳ را در $90!$ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 90 \,|\, 3 \\ \quad 30 \,|\, 3 \\ \qquad 10 \,|\, 3 \\ \qquad\quad 3 \,|\, 3 \\ \qquad\qquad 1 \end{array} \Rightarrow 3^{44} \,||\, 90!$$

$$\begin{array}{l} 90 \,|\, 2 \\ \quad 45 \,|\, 2 \\ \qquad 22 \,|\, 2 \\ \qquad\quad 11 \,|\, 2 \\ \qquad\qquad 5 \,|\, 2 \\ \qquad\qquad\quad 2 \,|\, 2 \\ \qquad\qquad\qquad 1 \end{array} \Rightarrow 2^{86} \,||\, 90! \Rightarrow 4^{43} \,|\, 90!$$

چون توان ۴ کم‌تر است، پس بزرگ‌ترین مقدار برای k عدد ۴۳ است.

۱۵- گزینه‌ی (۲)

باید بزرگ‌ترین عدد طبیعی k را بیابیم که $10^k \,|\, 15^{15}\times 20^{20}\times 25^{25}\times 30^{30}$. اما چون $2\times 5=10$، پس باید تعداد عوامل ۲ و ۵ را در عدد مورد نظر پیدا کنیم. هر کدام کم‌تر بود تعیین کننده‌ی بزرگ‌ترین توان ۱۰ (تعداد صفرها) است:

$$15^{15}\times 20^{20}\times 25^{25}\times 30^{30}=3^{15}\times 5^{15}\times 2^{40}\times 5^{20}\times 5^{50}\times 5^{30}\times 2^{30}\times 3^{30}=2^{70}\times 3^{45}\times 5^{115}$$

لذا بیش‌ترین مقدار k برابر ۷۰ است.

۱۶- گزینه‌ی (۴)

با توجه به این که تعداد عوامل ۵ در $75!$ از تعداد عوامل ۵ در $80!$ کم‌تر است، پس توان عامل ۵ در $75!$ را به‌دست می‌آوریم. برای این کار از تقسیم‌های متوالی ۷۵ بر ۵ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 75 \,|\, 5 \\ \quad 15 \,|\, 5 \\ \qquad 3 \end{array}$$

بنابراین ۱۸ عامل ۵ در $75!$ وجود دارد، لذا عدد $75!+80!$ به ۱۸ رقم صفر ختم می‌شود. دقت کنید که در این عبارت عددی که به تعداد صفرهای کم‌تری ختم می‌شود تعیین کننده است.

۱۷- گزینه‌ی (۲)

توان عامل ۳ را در هر یک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم:

۱) $60!\,:[\frac{60}{3}]+[\frac{60}{9}]+[\frac{60}{27}]=20+6+2=28$

۲) $63!\,:[\frac{63}{3}]+[\frac{63}{9}]+[\frac{63}{27}]=21+7+2=30$

۳) $66!\,:[\frac{66}{3}]+[\frac{66}{9}]+[\frac{66}{27}]=22+7+2=31$

۴) $69!\,:[\frac{69}{3}]+[\frac{69}{9}]+[\frac{69}{27}]=23+7+2=32$

(در این گونه سوالات بهتر است از کوچک‌ترین عدد در گزینه‌ها شروع کرده تا به جواب مورد نظر برسیم.)

۱۸- گزینه‌ی (۳)

از کوچک‌ترین عدد در گزینه‌ها شروع کرده و توان عامل‌های ۵ و ۷ را به‌دست می‌آوریم:

$$120!\,:[\frac{120}{5}]+[\frac{120}{25}]=24+4=28$$

$$125!\,:\begin{cases}[\frac{125}{5}]+[\frac{125}{25}]+[\frac{125}{125}]=25+5+1=31\\ [\frac{125}{7}]+[\frac{125}{49}]=17+2=19\end{cases}$$

$$126!\,:\begin{cases}[\frac{126}{5}]+[\frac{126}{25}]+[\frac{126}{125}]=25+5+1=31\\ [\frac{126}{7}]+[\frac{126}{49}]=18+2=20\end{cases}$$

۱۹- گزینه‌ی (۴)

چون $8400=2^4\times 3\times 5^2\times 7$، با توجه به نکته‌ی ۲، بخش $2-4$، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت این عدد برابر است با:

$$\tau(8400)=(4+1)(1+1)(2+1)(1+1)=60$$

۲۰- گزینه‌ی (۲)

چون n مقسوم‌علیه مشترک ۸۴۰۰۰ و ۹۹۰۰۰ است، پس باید تعداد مقسوم‌علیه‌های بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۸۴۰۰۰ و ۹۹۰۰۰ را به‌دست آوریم. داریم:

$$\begin{cases} 84000=2^5\times3\times5^3\times7 \\ 99000=2^3\times3^2\times5^3\times11 \end{cases} \Rightarrow (84000,99000)=2^3\times3\times5^3$$

$$\tau(2^3\times3^1\times5^3)=(3+1)(1+1)(3+1)=32$$

دقت کنید هر عددی که شمارنده‌ی مشترک دو عدد a و b باشد، شمارنده‌ی ب.م.م a و b نیز خواهد بود.

۲۱- گزینه‌ی (۳)

ابتدا تعداد مقسوم علیه‌های مثبت ۹۹۰۰۰ را پیدا می‌کنیم:

$$99000=2^3\times3^2\times5^3\times11 \Rightarrow \tau(99000)=(3+1)(2+1)(3+1)(1+1)=96$$

حال باید از این تعداد آن‌هایی که مضرب ۳۰۰ هستند کسر شود. با توجه به این که $\frac{99000}{300}=330$ و $\tau(330)=(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)=16$

پس جواب برابر است با $96-16=80$.

توجه: فرض کنید با شرط $b|a$ بخواهیم اعداد صحیح مانند m را پیدا کنیم که $m|a$ و $b|m$ (یعنی مقسوم‌علیه‌های a که بر b بخش پذیرانـد) داریم:

$$b|m \Rightarrow m=bq \xrightarrow{m|a} bq|a \Rightarrow q|\frac{a}{b}$$

لذا جواب برابر است با تعداد اعداد صحیح مانند q که $q|\frac{a}{b}$.

۲۲- گزینه‌ی (۲)

طبق فرض $5\nmid n$، بنابراین n به صورت $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ که $p_i\neq5$ $(1\le i\le n)$ قابل تجزیه است. داریم:

$$5n=5^1p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n} \xrightarrow{p_i\neq5} \tau(5n)=(1+1)\tau(n)=2k$$

۲۳- گزینه‌ی (۴)

چون $12=3\times4=2\times2\times3=2\times6$ لذا n به یکی از صورت‌های p^{11} ، p^2q^3 ، pqr^2 ، و pq^5 است (p ، q و r اعداد اول هستند). پس n^2 به یکی از صورت‌های p^{22} ، p^4q^6 ، $p^2q^2r^4$ و p^2q^{10} است. بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n^2 برابر ۲۳، ۳۵، ۴۵ یا ۳۳ است.

۲۴- گزینه‌ی (۲)

چون حاصل ضرب مقسوم‌علیه‌های n، توانی از ۳ است، لذا n به صورت 3^k $(k\in\mathbb{N})$ می‌باشد. طبق فرض داریم:

$$1\times3^1\times3^2\times\dots\times3^{k-1}\times3^k=3^{105} \Rightarrow \frac{k(k+1)}{2}=105 \Rightarrow k^2+k-210=0 \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} k=14$$

۲۵- گزینه‌ی (۳)

$$(3a+2b,a+b)=(3a+2b-2(a+b),a+b)=(a,a+b)=(a,a+b-a)=(a,b)=3$$

دقت کنید که برای هر عدد صحیح k داریم: $(a,b)=(a\mp bk,b)$

توجه: می‌توانید با فرض $a=3$ و $b=3$ گزینه‌ها را بررسی کنید.

۲۶- گزینه‌ی (۲)

با استفاده از قضیه‌ی (۷) و (۸) بخش ۲-۵، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) : $(2a-1,2a+3)=(2a-1,(2a+3)-(2a-1))=(2a-1,4) \xrightarrow{\text{فرد } 2a-1} (2a-1,4)=1$

۳) : $(3a+1,4a+1)=(3a+1,4a+1-(3a+1))=(3a+1,a) \xrightarrow{\text{قضیه‌ی}(8)} (3a+1,a)=(a,1)=1$

۴) : $(3a+2,6a+7)=(3a+2,3) \xrightarrow{\text{قضیه‌ی}(8)} (3a+2,3)=(2,3)=1$

برای گزینه‌ی (۲) داریم:

$$(2a-1,3a+1)=(2a-1,3a+1-(2a-1))=(2a-1,a+2)=(2a-1-2(a+2),a+2)=(a+2,-5)$$

به ازای $a=-12$ داریم $(a+2,-5)=(-10,-5)=5$، لذا گزینه‌ی (۲) الزاماً درست نیست.

۲۷- گزینه‌ی (۴)

چون $(3a, 2b)=1$، بنابراین هر مقسوم علیه $3a$ نسبت به هر مقسوم‌علیه $2b$ اول است. لذا داریم:

$$(3,b)=1, (a, 2)=1, (a, b)=1$$

از طرفی اگر $(a,b)=1$ ، آن‌گاه $(a^m, b^n)=1$. بنابراین داریم:

$$(a, 2)=1 \Rightarrow (a, 2^3)=1$$

$$(b, 3)=1 \Rightarrow (b, 3^2)=1$$

برای رد گزینه‌ی (۴) از مثال نقض $a=1$ و $b=2$ استفاده کنید.

۲۸- گزینه‌ی (۲)

چون $(b, 6)=(a, 6)=3$ نتیجه می‌کنیم a و b اعداد صحیح مضرب ۳ هستند که مضرب ۲ نیستند، لذا به فرم $6k+3$ می‌باشند (چرا؟)

$$\begin{matrix}(a, 6)=3 \Rightarrow a=6k+3 \\ (b, 6)=3 \Rightarrow b=6k'+3\end{matrix} \Rightarrow a+b=6(k+k')+6=6q$$

اکنون باید اعداد ۲ رقمی را پیدا کنیم که به فرم $6q$ هستند:

$$10 \le 6q \le 99 \Rightarrow \frac{10}{6} \le q \le \frac{99}{6} \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} 2 \le q \le 16$$

لذا $16-2+1=15$ عدد دو رقمی به صورت $a+b$ با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۲۹- گزینه‌ی (۴)

با توجه به فرض داریم:

$$d=(2a^2+a+1, a+2)=(2a^2+a+1-(a+2)(2a-3), a+2)=(7, a+2)$$

چون $d=(7, a+2)$، با توجه به تعریف ب.م.م $d\,|\,7$.

۳۰- گزینه‌ی (۴)

طبق تعریف ب.م.م داریم:

$$\begin{cases} d\,|\,3a+2b \Rightarrow d\,|\,5(3a+2b) \\ d\,|\,4a-5b \Rightarrow d\,|\,2(4a-5b)\end{cases} \Rightarrow d\,|\,5(3a+2b)+2(4a-5b) \Rightarrow d\,|\,23a \xrightarrow{(d,a)=1} d\,|\,23$$

۳۱- گزینه‌ی (۴)

فرض کنید $d=(5a-1, 7a+1)$، بنابراین:

$$\begin{cases} d\,|\,5a-1 \Rightarrow d\,|\,-7(5a-1) \\ d\,|\,7a+1 \Rightarrow d\,|\,5(7a+1)\end{cases} \Rightarrow d\,|\,5(7a+1)-7(5a-1) \Rightarrow d\,|\,12$$

با توجه به این که $12=2^2\times 3$، لذا تعداد مقسوم‌علیه‌های ۱۲ برابر است با:

$$\tau(12)=(2+1)(1+1)=6$$

۳۲- گزینه‌ی (۳)

با توجه به این که $(ka, kb)=k(a, b)$ داریم:

$$(24a, 42b)=60 \Rightarrow (6\times 4a, 6\times 7b)=60 \Rightarrow 6(4a, 7b)=60 \Rightarrow (4a, 7b)=10 \Rightarrow \begin{cases} 10|4a \Rightarrow 5|2a \xrightarrow{(5,2)=1} 5|a \\ 10|7b \xrightarrow{(10,7)=1} 10|b\end{cases}$$

اگر $2 \nmid a$ ، طبق نتایج فوق $(a, b)=5$. اگر $2|a$، با توجه به این که $(4a, 7b)=10$ لذا $2||b$، بنابراین در این حالت $(a, b)=10$.

۳۳- گزینه‌ی (۳)

با توجه به این که $(a^n, b^n)=(a, b)^n$ داریم:

$$(a^3, b^3)=(2a^2, 2b^2)+(3a, 3b) \Rightarrow (a, b)^3=2(a, b)^2+3(a, b) \Rightarrow$$
$$(a, b)^2-2(a, b)-3=0 \xrightarrow{(a,b)=d} d^2-2d-3=0 \Rightarrow (d-3)(d+1)=0 \xrightarrow{d\ge 1} d=3$$

۳۴- گزینه‌ی (۴)

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases}(a^2,p^7)=p^4\Rightarrow p^4\|a^2\Rightarrow p^2\|a\Rightarrow p^6\|a^3\\(b^3,p^5)=p^3\Rightarrow p^3\|b^3\Rightarrow p\|b\Rightarrow p^2\|b^2\end{cases}\Rightarrow p^6p^2\|a^3b^2\Rightarrow p^8\|a^3b^2\Rightarrow(a^3b^2,p^{10})=p^8$$

۳۵- گزینه‌ی (۳)

طبق فرض داریم: $(a,6)=3\Rightarrow 3|a\,,\,2\nmid a$

پس a باید مضرب ۳ باشد ولی مضرب ۲ نباشد. لذا $a=6k+3$، بنابراین برای پیدا کردن جواب داریم:

$$1\le 6k+3\le 100\Rightarrow -\frac{2}{6}\le k\le\frac{97}{6}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}0\le k\le 16$$

پس $16-0+1$ عدد صحیح برای a وجود دارد.

۳۶- گزینه‌ی (۲)

با توجه به این که $n^2+n|n^3-n$ داریم:

$$(n^2+n,n^3-n)=n^2+n\xrightarrow{\text{فرض سوال}}n^2+n=30\Rightarrow(n+6)(n-5)=0\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}n=5\Rightarrow n^2+6=31$$

۳۷- گزینه‌ی (۴)

ب.م.م y و z، کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی $\{rz+sy|r,s\in\mathbb{Z}\}$ است. با توجه به این که $2x+3z=1$، لذا $(x,z)=1$ و در نتیجه $(x^2,z)=1$. از طرفی داریم:

$$z|x^2y\Rightarrow\xrightarrow{(z,x^2)=1}z|y\Rightarrow(z,y)=y$$

۳۸- گزینه‌ی (۳)

با فرض $(a,b)=d$ و استفاده از قضیه بزو داریم:

$$\{ax+by+19|x,y\in\mathbb{Z}\}=\{kd+19|k\in\mathbb{Z}\}$$

با توجه به فرض سوال می‌توان نتیجه گرفت:

$$kd+19=5\Rightarrow kd=-14\Rightarrow d|14\Rightarrow d\in\{1,2,7,14\}$$

اما اگر $d=1$ یا $d=2$ کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه برابر یک خواهد شد. پس $d=7$ یا $d=14$.

۳۹- گزینه‌ی (۴)

با توجه به این که $[ka,kb]=k[a,b]$ داریم:

$$[6a^3,9a^3]=3a^3[2,3]$$

می‌دانیم اگر $(a,b)=1$، آن‌گاه $[a,b]=ab$. لذا با توجه به این‌که $(2,3)=1$، پس داریم:

$$[6a^3,9a^3]=3a^3\times2\times3=18a^3$$

۴۰- گزینه‌ی (۳)

فرض کنید $(a,b)=d$. بنابراین $a=a'd$ و $b=b'd$ که $(a',b')=1$. داریم:

$$3a=5b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{a'}{b'}=\frac{5}{3}\xrightarrow{(a',b')=1}a'=5\quad,\quad b'=3$$

$$[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}\Rightarrow 120=\frac{a'b'd^2}{d}\Rightarrow 120=15d\Rightarrow d=8$$

۴۱- گزینه‌ی (۴)

$$[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}\Rightarrow ab=[a,b](a,b)\xrightarrow{\text{فرض سوال}}ab=50(a,b)^2\Rightarrow ab=80000=2^3\times10^4=2^7\times5^4\Rightarrow 2^7\|ab$$

۴۲- گزینه‌ی (۲)

راه‌حل اول: با توجه به این که $[a,b]=2^3\times5^2$ و a عددی فرد است، می‌توان a و b را به صورت زیر نمایش داد.

$$a=5^x \ , \ b=2^35^y \ , \ 0\le x,y\le 2$$

بنابراین داریم:

$$(a,b)=5^z \qquad z=\min\{x,y\}$$

$$[8a\,,2b]=\frac{8a\times 2b}{(8a\,,2b)}=\frac{2^35^x\times2^45^y}{2^35^z}=2\times\frac{5^x\times2^35^y}{5^z}=2[a\,,b]=2\times200=400$$

راه‌حل دوم: با فرض $a=a'd$ و $b=b'd$ داریم:

$$[a,b]=200\xrightarrow{[a\,,b]=\frac{ab}{d}}a'b'd=200$$

از طرفی چون a فرد است پس a' و d اعداد فرد هستند، داریم:

$$a'b'd=200\Rightarrow a'b'd=8\times25\xrightarrow[\text{لم اقلیدس}]{(a',2)=(d,2)=1}8|b'\Rightarrow b'=8k$$

$$[8a\,,2b]=[8a'd\,,16kd]=8d[a',2k]=8d\times a'\times2k=2a'b'd\Rightarrow[8a\,,2b]=400$$

۴۳- گزینه‌ی (۳)

با استفاده از قضایای مربوط به ک.م.م داریم:

$$[a^2,b^2]=[a,b]^2\ ,\ [50a\,,50b]=50[a\,,b]$$

اکنون با فرض $[a\,,b]=L$ داریم:

$$[a\,,b]^2=50[a,b]+600\Rightarrow L^2=50L+600\Rightarrow(L-60)(L+10)=0\xrightarrow{L>0}L=60$$

۴۴- گزینه‌ی (۲)

چون $(a\,,b)=6$ ، لذا $a=6a'$ و $b=6b'$ که $(a',b')=1$. از طرفی داریم:

$$[a\,,b]=\frac{a\,b}{(a\,,b)}\Rightarrow462=\frac{(6a')(6b')}{6}\Rightarrow a'b'=77\xrightarrow{(a',b')=1}\begin{cases}a'=77\,,b'=1\\ \text{یا}\\ a'=7\,,b'=11\end{cases}$$

بنابراین:

$$a+b=6a'+6b'=6(a'+b')=\begin{cases}6(77+1)=468\\ \text{یا}\\ 6(7+11)=108\end{cases}$$

۴۵- گزینه‌ی (۳)

ک.م.م این سه عدد، کوچک‌ترین عددی است که بر هر سه عدد بخش‌پذیر است. برای به‌دست آوردن ک.م.م، هر سه عدد را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$90=2\times3^2\times5\,,120=2^3\times3\times5\,,160=2^5\times5$$

$$[90,120,160]=[[90,120],160]=[2^3\times3^2\times5\,,160]=2^5\times3^2\times5$$

۴۶- گزینه‌ی (۲)

فرض کنید $(a\,,b)=d$، بنابراین $a=a'd$ و $b=b'd$ که $(a',b')=1$. طبق فرض داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{a'}{b'}=\frac{3}{4}\xrightarrow{(a',b')=1}a'=3\,,b'=4$$

$$ab-[a\,,b]=144\Rightarrow ab-\frac{ab}{d}=144\Rightarrow abd-ab-144d=0\xrightarrow[b=4d]{a=3d}(3d)(4d)d-(3d)(4d)-144d=0$$

$$\Rightarrow12d(d^2-d-12)=0\Rightarrow12d(d+3)(d-4)=0\xrightarrow{d\ge1}d=4\xrightarrow{a=3d}a=3\times4=12$$

۴۷- گزینه‌ی (۳)

فرض کنید $d=(a,b)$ و $a=a'd$ و $b=b'd$ که در آن $(a',b')=1$، همچنین $[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$. با جای گذاری این روابط در معادله‌ی فـرض سوال داریم:

$$80\frac{a'b'd^2}{d}=21(a'^2-b'^2)d^2\Rightarrow 80a'b'=21(a'^2-b'^2)d\Rightarrow\frac{a'b'}{(a'^2-b'^2)d}=\frac{21}{80}$$

چون $(a',b')=1$، لذا داریم:

$$\begin{cases}(a'-b',a')=1\\(a'-b',b')=1\end{cases}\Rightarrow(a'-b',a'b')=1\qquad,\qquad\begin{cases}(a'+b',a')=1\\(a'+b',b')=1\end{cases}\Rightarrow(a'+b',a'b')=1$$

از روابط فوق نتیجه مـی‌گیـریم: $(a'^2-b'^2,a'b')=1$، همچنـین $((a'^2-b'^2)d,a'b')=1$ و چـون $\dfrac{a'b'}{(a'^2-b'^2)d}=\dfrac{21}{80}$ و $(21,80)=1$ لـذا $a'b'=21$ پس $a'=7$ و $b'=3$ (حالت‌های دیگر برای b' و a' به سادگی رد می‌شوند).

$$(a'^2-b'^2)d=80\xrightarrow{a'=7,b'=3}(7^2-3^2)d=80\Rightarrow d=2$$

لذا: $a+b=(a'+b')d=20$

۴۸- گزینه‌ی (۴)

فرض کنید $(a,b)=1$ و $a=a'd$ و $b=b'd$ که در آن $(a',b')=1$، همچنین داریم:

$$[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}=a'b'd$$

$$(a+b,[a,b])=((a'+b')d,a'b'd)=d(a'+b',a'b')$$

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، جمع و ضرب آن ها نیز نسبت به هم اول است. پس چون $(a',b')=1$ ، نتیجه می‌گیریم: $(a'+b',a'b')=1$.
لذا $d(a'+b',a'b')=d$، پس داریم:

$$(a+b,[a,b])=d\Rightarrow(285,1050)=d\Rightarrow d=15$$

فصل ۲ تست های مرور (بخش‌های ۷ تا ۱۰)

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۲)

با استفاده از ویژگی‌های همنهشتی داریم:

$$\left.\begin{array}{l}5^2 \overset{12}{\equiv} 1 \Rightarrow (5^2)^{15} \overset{12}{\equiv} (1)^{15} \Rightarrow 5^{30} \overset{12}{\equiv} 1 \\ 7^2 \overset{12}{\equiv} 1 \Rightarrow (7^2)^{20} \overset{12}{\equiv} (1)^{20} \Rightarrow 7^{40} \overset{12}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } 7} 7^{41} \overset{12}{\equiv} 7\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین دو رابطه}} 5^{30}+7^{41} \overset{12}{\equiv} 8$$

۲- گزینه‌ی (۲)

راه‌حل اول: چون ۱۹ عددی اول است و $13 \nmid 19$، با استفاده از قضیه‌ی فرما داریم:

$$13^{19-1} \overset{19}{\equiv} 1 \Rightarrow 13^{18} \overset{19}{\equiv} 1 \xrightarrow{161=8\times18+17} (13^{18})^8 \overset{19}{\equiv} 1 \Rightarrow 13^{144} \overset{19}{\equiv} 1 \Rightarrow 13^{144}\times13^{17} \overset{19}{\equiv} 13^{17} \Rightarrow 13^{161} \overset{19}{\equiv} 13^{17}$$

اکنون باید باقی‌مانده‌ی تقسیم 13^{17} را بر ۱۹ پیدا کنیم:

$$13^2 \overset{19}{\equiv} -2 \Rightarrow (13^2)^8 \overset{19}{\equiv} (-2)^8 \Rightarrow 13^{16} \overset{19}{\equiv} 256 \overset{19}{\equiv} 9 \Rightarrow 13^{17} \overset{19}{\equiv} 9\times13 \overset{19}{\equiv} 3$$

بنابراین: $13^{161} \overset{19}{\equiv} 3$

راه‌حل دوم: این‌بار از قضیه‌ی فرما برای حل این سوال به روش بهتری استفاده می‌کنیم. همان‌طور که در روش اول دیدیم چون ۱۹ عددی اول است و $(13,19)=1$ با توجه به قضیه فرما داریم:

$$13^{18} \overset{19}{\equiv} 1 \Rightarrow (13^{18})^9 \overset{19}{\equiv} (1)^9 \Rightarrow 13^{162} \overset{19}{\equiv} 1$$

با توجه به این‌که می‌توان به هر کدام از طرفین همنهشتی، ضرایب پیمانه را اضافه و کم کرد، داریم:

$$13^{162} \overset{19}{\equiv} 1 \Rightarrow 13^{162} \overset{19}{\equiv} 19\times2+1 \Rightarrow 13^{162} \overset{19}{\equiv} 39$$

حال چون $(13,19)=1$، می‌توانیم دو طرف تساوی را بر ۱۳ تقسیم کنیم:

$$13^{162} \overset{19}{\equiv} 39 \xrightarrow{(113,19)=1} 13^{161} \overset{19}{\equiv} 3$$

۳- گزینه‌ی (۳)

با استفاده از ویژگی‌های همنهشتی داریم:

$$5^3 \overset{42}{\equiv} -1 \Rightarrow (5^3)^8 \overset{42}{\equiv} (-1)^8 \Rightarrow 5^{24} \overset{42}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین رابطه در } 5} 5^{25} \overset{42}{\equiv} 5 \xrightarrow{\text{جمع طرفین رابطه با } 3} 5^{25}+3 \overset{42}{\equiv} 8$$

۴- گزینه‌ی (۱)

می‌دانیم عدد $n!$ برای $n \geq 6$ بر ۷۲ بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$1!+2!+\cdots+100! \overset{72}{\equiv} 1!+2!+3!+4!+5!+0+0+\cdots+0=33+5! \xrightarrow{5! \overset{72}{\equiv} 48} 1!+2!+\cdots+100! \overset{72}{\equiv} 33+48=81$$

$$\xrightarrow{81 \overset{72}{\equiv} 9} 1!+2!+\cdots+100! \overset{72}{\equiv} 9$$

۵- گزینه‌ی (۴)

$$1+2+\cdots+15=\frac{15\times16}{2}=15\times8=3\times40 \Rightarrow (1+2+\cdots+15)^{200}=(3\times40)^{200}=3^2\times3^{198}\times40^{200}$$

$$\Rightarrow 9|(1+2+\cdots+15)^{200} \Rightarrow (1+2+\cdots+15)^{200} \overset{9}{\equiv} 0$$

۶- گزینه‌ی (۳)

با توجه به فرض سوال $3^{124}+a \overset{11}{\equiv} 0$. با توجه به این‌که ۱۱ عددی اول است و $(3,11)=1$، با استفاده از قضیه‌ی فرما داریم:

$$3^{10} \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{120} \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{120}\times 3^4 \overset{11}{\equiv} 3^4 \Rightarrow 3^{124} \overset{11}{\equiv} 81$$

اکنون برای پیدا کردن a با استفاده از رابطه‌ی اخیر و فرض سوال داریم:

$$3^{124}+a \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 81+a \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} -81 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} -81+8\times 11 \overset{11}{\equiv} 7$$

۷- گزینه‌ی (۴)

ابتدا با توجه به فرض سوال داریم:

$$7^n+15 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 7^n \overset{11}{\equiv} -15 \Rightarrow 7^n \overset{11}{\equiv} -15+2\times 11 \Rightarrow 7^n \overset{11}{\equiv} 7$$

چون $(7,11)=1$، می‌توانیم دو طرف رابطه‌ی اخیر را بر ۷ تقسیم کنیم:

$$7^n \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow 7^{n-1} \overset{11}{\equiv} 1$$

از طرف دیگر داریم:

$$7^2 \overset{11}{\equiv} 5 \Rightarrow 7^3 \overset{11}{\equiv} 35 \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 7^4 \overset{11}{\equiv} 14 \overset{11}{\equiv} 3 \Rightarrow 7^5 \overset{11}{\equiv} 21 \overset{11}{\equiv} -1 \Rightarrow 7^{10} \overset{11}{\equiv} 1$$

اکنون از روابط $7^{n-1} \overset{11}{\equiv} 1$ و $7^{10} \overset{11}{\equiv} 1$ می‌توان نتیجه گرفت که $n-1=10k$ یا $n=10k+1$. لذا برای پیدا کردن nهای دو رقمی داریم:

$$10 \le 10k+1 \le 99 \Rightarrow 9 \le 10k \le 98 \Rightarrow \frac{9}{10} \le k \le \frac{98}{10} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 1 \le k \le 9$$

در نتیجه ۹ عدد دو رقمی برای n وجود دارد.

۸- گزینه‌ی (۲)

کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی $\{15x+6y \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ برابر است با $(15,6)=3$، لذا $m=3$. در نتیجه باید باقی‌مانده‌ی تقسیم 4^6 بر ۷ را پیدا کنیم:

$$4^2 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow (4^2)^3 \overset{7}{\equiv} 2^3 \Rightarrow 4^6 \overset{7}{\equiv} 1$$

البته برای محاسبه‌ی باقی‌مانده 4^6 بر ۷ از قضیه‌ی فرما هم می‌توانستید استفاده کنید.

۹- گزینه‌ی (۴)

با توجه به فرض سوال $17^{19}+a \overset{25}{\equiv} 0$. برای محاسبه‌ی a، ابتدا باید باقی‌مانده‌ی تقسیم 17^{19} بر ۲۵ را پیدا کنیم. چون $(17,25)=1$، با استفاده از قضیه‌ی اویلر داریم:

$$17^{\varphi(25)} \overset{25}{\equiv} 1 \xrightarrow{\varphi(25)=20} 17^{20} \overset{25}{\equiv} 1$$

حال باید به گونه‌ای مضارب ۲۵ را به طرف راست رابطه‌ی اخیر اضافه کنیم که بتوان دو طرف را بر ۱۷ تقسیم کرد.

$$17^{20} \overset{25}{\equiv} 1 \Rightarrow 17^{20} \overset{25}{\equiv} 1+25\times 2 \Rightarrow 17^{20} \overset{25}{\equiv} 51$$

چون $(17,25)=1$، می‌توان ۲ طرف را بر ۱۷ تقسیم کرد.

$$17^{20} \overset{25}{\equiv} 51 \Rightarrow 17^{19} \overset{25}{\equiv} 3$$

برای محاسبه‌ی a با توجه به رابطه‌ی اخیر و رابطه‌ی فرض سوال داریم:

$$17^{19}+a \overset{25}{\equiv} 0 \xrightarrow{17^{19} \overset{25}{\equiv} 3} 3+a \overset{25}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{25}{\equiv} -3 \overset{25}{\equiv} 22$$

توجه: دقت کنید که محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم 17^{19} بر ۲۵ با روش‌های معمول دشوار است، بنابراین از قضیه‌ی اویلر استفاده کردیم.

۱۰- گزینه‌ی (۴)

برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم 3^{100} بر ۱۲ داریم: $3\overset{12}{\equiv}3\Rightarrow 3^2\overset{12}{\equiv}9\Rightarrow 3^3\overset{12}{\equiv}3\Rightarrow 3^4\overset{12}{\equiv}9\Rightarrow\cdots$

مشاهده می‌شود که اعداد ۳ و ۹ به تناوب در بین باقی‌مانده‌های تقسیم توان‌های ۳ بر ۱۲ تکرار می‌شوند. لذا: $3^{100}\overset{12}{\equiv}9$

۱۱- گزینه‌ی (۴)

با استفاده از خواص همنهشتی داریم: $3^2\overset{45}{\equiv}9\ ,\ 3^3\overset{45}{\equiv}-18\ ,\ 3^4\overset{45}{\equiv}-9\ ,\ 3^5\overset{45}{\equiv}-27\overset{45}{\equiv}18\ ,\ 3^6\overset{45}{\equiv}54\overset{45}{\equiv}9\ ,\ \cdots$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در روند اخیر اعداد ۹ ، ۱۸- ، ۹- و ۱۸ به تناوب تکرار می‌شوند. با توجه به این روند $3^{4k}\overset{45}{\equiv}-9$، لذا داریم:

$$3^{1000}\overset{45}{\equiv}-9\overset{45}{\equiv}36$$

۱۲- گزینه‌ی (۴)

اگر r باقی‌مانده‌ی تقسیم 7^n بر ۴۳ باشد، $0\le r\le 42$. برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد مجموعه‌ی مورد نظر بر ۴۳ داریم:

$$7\overset{43}{\equiv}7\Rightarrow 7^2\overset{43}{\equiv}49\overset{43}{\equiv}6\Rightarrow 7^3\overset{43}{\equiv}42$$

محاسبات تا همین‌جا کافی است! (چرا؟) لذا جواب برابر ۴۲ است.

۱۳- گزینه‌ی (۴)

می‌دانیم اگر n فرد باشد $n^2=8k+1$. لذا $n^4=16k+1$ و در نتیجه:

$$n^{16}=32k+1\Rightarrow 35n^{16}+120=35(32k+1)+120=35\times 32k+155=(5\times 32)\times\underbrace{(7\times k)}_{k'}+155=160k'+155$$

۱۴- گزینه‌ی (۲)

از ۳۱ شهریور سال موردنظر تا ۳۱ شهریور سال بعدش ۳۶۵ روز گذشته است. با توجه به این‌که $365=7\times 52+1$، لذا در این یک سال ۵۲ هفته و یک روز گذشته است. بنابراین تاریخ مورد نظر یک روز بعد از دوشنبه یعنی روز سه شنبه است.

۱۵- گزینه‌ی (۳)

با توجه به ویژگی‌های همنهشتی داریم: $10\overset{12}{\equiv}-2\Rightarrow 10^3\overset{12}{\equiv}-8\xrightarrow{-8\overset{12}{\equiv}4}1000\overset{12}{\equiv}4$

در بین گزینه‌ها $4\overset{12}{\equiv}16$، بنابراین ۱۰۰۰ به دسته‌ی همنهشتی $[16]$ به پیمانه‌ی ۱۲ تعلق دارند.

۱۶- گزینه‌ی (۳)

می‌دانیم اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ ،$a\overset{n}{\equiv}b$، آن‌گاه $a\overset{[m,n]}{\equiv}b$. لذا داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} a\overset{8}{\equiv}3\xrightarrow{3\overset{8}{\equiv}11}a\overset{8}{\equiv}11 \\ a\overset{5}{\equiv}1\xrightarrow{1\overset{5}{\equiv}11}a\overset{5}{\equiv}11 \end{array}\right.\xrightarrow{[8,5]=40}a\overset{40}{\equiv}11$$

۱۷- گزینه‌ی (۱)

می‌دانیم اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ ،$a\overset{n}{\equiv}b$ و $a\overset{p}{\equiv}b$، آن‌گاه $a\overset{[m,n,p]}{\equiv}b$. لذا خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{10}{\equiv}3\xrightarrow{3\overset{10}{\equiv}-7}a\overset{10}{\equiv}-7 \\ a\overset{11}{\equiv}4\xrightarrow{4\overset{11}{\equiv}-7}a\overset{11}{\equiv}-7 \\ a\overset{13}{\equiv}6\xrightarrow{6\overset{13}{\equiv}-7}a\overset{13}{\equiv}-7 \end{array}\right\}\xrightarrow{[10,11,13]=1430}a\overset{1430}{\equiv}-7\Rightarrow a=1430k-7$$

لذا کوچک‌ترین عدد طبیعی برای a به ازای $k=1$ حاصل می‌شود که برابر است با $1430-7=1423$ و مجموع ارقام آن نیز برابر ۱۰ است.

۱۸- گزینه‌ی (۴)

همنهشتی $ax \overset{90}{\equiv} 50$ در صورتی که $(a\,,90)\nmid 50$ جواب ندارد. با توجه به این‌که $(60,90)=30$ و $30\nmid 50$، می‌توان دریافت که این معادله به ازای $a=60$ جواب ندارد.

۱۹- گزینه‌ی (۳)

شرط لازم و کافی برای این که معادله‌ی همنهشتی $ax \overset{60}{\equiv} 20$ جواب داشته باشد، آن است که $(a,60)|20$. با توجه به این‌که $60=2^2\times3\times5$ و $20=2^2\times5$، اگر $3|a$، آن‌گاه $3|(a\,,60)$ در حالی که $3\nmid 20$. لذا باید $(3,a)=1$.

۲۰- گزینه‌ی (۲)

با توجه به خواص همنهشتی داریم:

$$7x \overset{13}{\equiv} 300 \xrightarrow{300\overset{13}{\equiv}1} 7x \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 7x \overset{13}{\equiv} 14 \xrightarrow{(7,13)=1} x \overset{13}{\equiv} 2$$

۲۱- گزینه‌ی (۲)

با استفاده از قضیه‌ی ۷ بخش ۲-۸ داریم:

$$20x \overset{50}{\equiv} 4530 \xrightarrow{(20,50)=10} 2x \overset{5}{\equiv} 453 \xrightarrow{453\overset{5}{\equiv}3} 2x \overset{5}{\equiv} 3 \overset{5}{\equiv} 8 \xrightarrow{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 4$$

۲۲- گزینه‌ی (۲)

اگر $x \overset{23}{\equiv} 0$، آن‌گاه معادله جواب ندارد (زیرا در این‌صورت $3 \overset{23}{\equiv} 0$) پس $(x,23)=1$. با استفاده از نتیجه‌ی قضیه‌ی فرما داریم:

$$5x^{23}+7x \overset{23}{\equiv} 3 \xrightarrow{x^{23}\overset{23}{\equiv}x} 5x+7x \overset{23}{\equiv} 3 \Rightarrow 12x \overset{23}{\equiv} 3 \xrightarrow{(23,3)=1} 4x \overset{23}{\equiv} 1 \Rightarrow 4x \overset{23}{\equiv} 1+23 \overset{23}{\equiv} 24$$

$$\xrightarrow{(23,4)=1} x \overset{23}{\equiv} 6 \Rightarrow x=23k+6 \quad (k\in\mathbb{Z})$$

چون جواب‌ها از مجموعه‌ی $\{1,2,\cdots,100\}$ انتخاب می‌شوند، بنابراین:

$$1\le 23k+6\le 100 \Rightarrow \frac{-5}{23}\le k\le\frac{94}{23} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 0\le k\le 4$$

لذا $4-0+1=5$ عدد از این مجموعه، جواب معادله‌ی مورد نظر هستند.

۲۳- گزینه‌ی (۲)

طبق فرض داریم:

$$7a+4 \overset{23}{\equiv} 19 \Rightarrow 7a \overset{23}{\equiv} 15 \Rightarrow 7a \overset{23}{\equiv} 15+3(23) \overset{23}{\equiv} 84 \xrightarrow{(7,23)=1} a \overset{23}{\equiv} 12$$

۲۴- گزینه‌ی (۳)

با تقسیم چندجمله‌ای $3x^2-5x-2$ بر $3x+1$ داریم:

$$3x^2-5x-2=(3x+1)(x-2)$$

حال طبق فرض خواهیم داشت:

$$(3x+1)(x-2) \overset{m}{\equiv} 3x+1 \xrightarrow{(m,3x+1)=1} (x-2) \overset{m}{\equiv} 1 \Rightarrow x \overset{m}{\equiv} 3 \Rightarrow m\,|\,x-3$$

۲۵- گزینه‌ی (۳)

با توجه به فرض سوال داریم:

$$105 \overset{p}{\equiv} 56 \Rightarrow p|105-56 \Rightarrow p|49 \xrightarrow{p\ \text{اول است}} p=7$$

$$7a+2 \overset{7}{\equiv} 4a+5 \Rightarrow 3a \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{(7,3)=1} a \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow a=7k+1$$

چون کم‌ترین عدد سه رقمی، مورد نظر سوال است، پس داریم:

$$7k+1\ge 100 \Rightarrow k\ge\frac{99}{7} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\ge 15$$

پس کم‌ترین عدد سه رقمی به ازای $k=15$ به‌دست می‌آید که برابر است با: $7\times15+1=106$

۲۶- گزینه‌ی (۳)

ابتدا باقی‌مانده‌ی ۱۵۳ را بر ۴ پیدا می‌کنیم. با توجه به نکته‌ی (۲) بخش ۲-۹ داریم: $153\overset{4}{\equiv}1\Rightarrow 7^{153}\overset{10}{\equiv}7$

۲۷- گزینه‌ی(۱)

با توجه به فرض $8x\overset{12}{\equiv}1-5a$، بنابراین برای این‌که معادله‌ی مورد نظر همواره در $\mathbb{Z}$ دارای جواب باشد باید $(8,12)|1-5a$. چون $(8,12)=4$ از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم:

$$1-5a\overset{4}{\equiv}0\Rightarrow 5a\overset{4}{\equiv}1\Rightarrow 5a\overset{4}{\equiv}5\xrightarrow{(4,5)=1}a\overset{4}{\equiv}1\Rightarrow a=4k+1\Rightarrow 17^{a}=17^{4k+1}$$

می‌دانیم اگر a، n و k اعدادی طبیعی باشند، در این‌صورت داریم: $a^{4k+n}\overset{10}{\equiv}a^{n}$

لذا خواهیم داشت: $17^{4k+1}\overset{10}{\equiv}17^{1}\overset{10}{\equiv}7$

۲۸- گزینه‌ی(۲)

چون رقم یکان هر دو عدد یکسان است، لذا هر دو به پیمانه‌ی ۱۰ همنهشت‌اند: $2x+5\overset{10}{\equiv}x+1\Rightarrow x\overset{10}{\equiv}-4\overset{10}{\equiv}6$

از طرفی اگر $x\overset{10}{\equiv}6$، آن‌گاه $x^{n}\overset{10}{\equiv}6$، $(n\in\mathbb{N})$. لذا نتیجه می‌گیریم: $x^{35}\overset{10}{\equiv}6\Rightarrow 3x^{35}+1\overset{10}{\equiv}3(6)+1\overset{10}{\equiv}9$

(توجه کنید که اگر رقم یکان هر عددی ۶ باشد، رقم یکان هر توانی از آن نیز ۶ خواهد بود.)

۲۹- گزینه‌ی (۴)

می‌دانیم اگر $n=4k+r$ و $r=0$، داریم:

$$7^{n}+9^{n}\overset{10}{\equiv}7^{4}+9^{4}\overset{10}{\equiv}1+1\overset{10}{\equiv}2$$

و اگر $r\neq 0$ خواهیم داشت:

$$n=4k+1\Rightarrow 7^{n}+9^{n}\overset{10}{\equiv}7^{4k+1}+9^{4k+1}\overset{10}{\equiv}7+9\overset{10}{\equiv}6$$

$$n=4k+2\Rightarrow 7^{n}+9^{n}\overset{10}{\equiv}7^{4k+2}+9^{4k+2}\overset{10}{\equiv}7^{2}+9^{2}\overset{10}{\equiv}0$$

$$n=4k+3\Rightarrow 7^{n}+9^{n}\overset{10}{\equiv}7^{4k+3}+9^{4k+3}\overset{10}{\equiv}7^{3}+9^{3}\overset{10}{\equiv}2$$

لذا رقم یکان $7^{n}+9^{n}$ یکی از اعداد $\{0,2,6\}$ است.

توجه: برای درک بهتر قضیه‌ی (۹) و نکته‌ی (۲) از بخش ۲-۹ را مطالعه کنید.

۳۰- گزینه‌ی(۴)

مانند سوال قبل عمل می‌کنیم:

$$n=4k\Rightarrow 8^{n}+9^{n}\overset{10}{\equiv}8^{4}+9^{4}\overset{10}{\equiv}6+1\overset{10}{\equiv}7$$

$$n=4k+1\Rightarrow 8^{n}+9^{n}\overset{10}{\equiv}8^{1}+9^{1}\overset{10}{\equiv}7$$

$$n=4k+2\Rightarrow 8^{n}+9^{n}\overset{10}{\equiv}8^{2}+9^{2}\overset{10}{\equiv}5$$

$$n=4k+3\Rightarrow 8^{n}+9^{n}\overset{10}{\equiv}8^{3}+9^{3}\overset{10}{\equiv}1$$

لذا رقم یکان $8^{n}+9^{n}$ در صورتی برابر ۷ است که $n=4k$ یا $n=4k+1$. برای پیدا کردن تعداد nهای متعلق به مجموعه‌ی $\{1,2,\cdots,50\}$، داریم:

$$1\leq 4k\leq 50\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}1\leq k\leq 12$$

$$1\leq 4k+1\leq 50\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}0\leq k\leq 12$$

لذا جواب برابر است با $12+13=25$

۳۱- گزینه‌ی (۳)

با توجه به این‌که $3 \overset{4}{\equiv} 27$ و $2 \overset{4}{\equiv} 26$، خواهیم داشت:

$$26^{27}+24^{26} \overset{10}{\equiv} 26^3+24^2 \overset{10}{\equiv} 6+6 \overset{10}{\equiv} 2$$

۳۲- گزینه‌ی(۴)

مانند سوال قبل عمل می‌کنیم:

$$n=4k \Rightarrow 5^n+6^n+7^n+8^n \overset{10}{\equiv} 5^4+6^4+7^4+8^4 \overset{10}{\equiv} 5+6+1+6 \overset{10}{\equiv} 8$$

$$n=4k+1 \Rightarrow 5^n+6^n+7^n+8^n \overset{10}{\equiv} 5^1+6^1+7^1+8^1 \overset{10}{\equiv} 6$$

$$n=4k+2 \Rightarrow 5^n+6^n+7^n+8^n \overset{10}{\equiv} 5^2+6^2+7^2+8^2 \overset{10}{\equiv} 5+6+9+4 \overset{10}{\equiv} 4$$

$$n=4k+3 \Rightarrow 5^n+6^n+7^n+8^n \overset{10}{\equiv} 5^3+6^3+7^3+8^3 \overset{10}{\equiv} 5+6+3+2 \overset{10}{\equiv} 6$$

لذا بزرگ‌ترین رقم یکان ۸ است.

۳۳- گزینه‌ی(۲)

برای محاسبه‌ی ۲ رقم سمت راست از همنهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ استفاده می‌کنیم:

$$24 \overset{100}{\equiv} 24 \Rightarrow (24)^2 \overset{100}{\equiv} 76 \Rightarrow 24^3 \overset{100}{\equiv} 24 \Rightarrow 24^4 \overset{100}{\equiv} 76, \cdots$$

با توجه به روند تناوبی فوق دو رقم سمت راست توان‌های فرد ۲۴ برابر ۲۴ است، لذا:

$$(24)^{25} \overset{100}{\equiv} 24$$

۳۴- گزینه‌ی(۱)

با توجه به قانون بخش‌پذیری بر ۱۱ داریم:

$$\overline{6a05} \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 5-0+a-6 \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 3 \xrightarrow{0\le a\le 9} a=3$$

بنابراین باید نمایش ۶۳۰۵ را در مبنای ۳۰ پیدا کنیم که با تقسیم‌های متوالی ۶۳۰۵ بر ۳۰ عدد مورد نظر برابر است با: $(705)_{30}$

۳۵- گزینه‌ی(۳)

با توجه به این‌که $4\times3=12$، عدد مورد نظر باید بر ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد. بنابراین داریم:

$$\overline{235a6} \overset{3}{\equiv} 2+3+5+a+6 \overset{3}{\equiv} 16+a \overset{3}{\equiv} a+1 \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow a=3k+2 \xrightarrow{0\le a\le 9} a=2,5,8$$

$$\overline{235a6} \overset{4}{\equiv} \overline{a6} \overset{4}{\equiv} 6+10a \overset{4}{\equiv} 2+2a \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 2a \overset{4}{\equiv} 2 \xrightarrow{(4,2)=2} a \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow a=2k+1 \xrightarrow{0\le a\le 9} a=1,3,5,7,9$$

با توجه به این‌که دو شرط فوق همزمان برقرار است، تنها $a=5$ قابل قبول است.

۳۶- گزینه‌ی (۱)

برای به‌دست آوردن باقی‌مانده‌ی هر عدد بر ۱۳ ارقام آن عدد را از سمت راست، سه رقم، سه رقم جدا کرده و یکی در میان اضافه و کم می‌کنیم.

$$\overline{7b3ab} \overset{13}{\equiv} \overline{3ab}-\overline{7b} \overset{13}{\equiv} (3\times10^2+10a+b)-(7\times10+b) \overset{13}{\equiv} (1+10a+b)-(5+b) \overset{13}{\equiv} 10a-4 \xrightarrow{\overline{7b3ab} \overset{13}{\equiv} 0} 10a-4 \overset{13}{\equiv} 0 \Rightarrow 10a \overset{13}{\equiv} 4$$

$$10a \overset{13}{\equiv} 4+26 \overset{13}{\equiv} 30 \xrightarrow{(13,10)=1} a \overset{13}{\equiv} 3 \xrightarrow{0\le a\le 9} a=3$$

۳۷- گزینه‌ی(۳)

طبق قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۱۱، داریم:

$$\overline{32a65} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5-6+a-2+3 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 0 \xrightarrow{0\le a\le 9} a=0$$

پس عدد مورد نظر ۳۲۰۶۵ می‌باشد. اکنون باقی‌مانده‌ی این عدد بر ۹ را به‌دست می‌آوریم:

$$32065 \overset{9}{\equiv} 3+2+0+6+5 \Rightarrow 32065 \overset{9}{\equiv} 16 \overset{9}{\equiv} 7$$

۳۸- گزینه‌ی (۴)

برای به‌دست آوردن باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۷، ارقام آن را از سمت راست سه رقم، سه رقم اضافه و کسر می‌کنیم:

$$\overline{1a9370} \overset{7}{\equiv} 370 - \overline{1a9} \overset{7}{\equiv} 6 - 100 - 10a - 9 \overset{7}{\equiv} -103 - 10a \overset{7}{\equiv} 2 - 10a$$

چون عدد مورد نظر بر ۷ بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$2 - 10a \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 10a \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 3a \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 3a \overset{7}{\equiv} 2+7 \xrightarrow{(3,7)=1} a \overset{7}{\equiv} 3$$

پس باید به باقی‌مانده‌ی ۱۳۹۳۷۰ را بر ۳۷ به‌دست آوریم:

$$139370 \overset{37}{\equiv} 139000 + \overset{0}{\cancel{370}} \overset{37}{\equiv} 139 \times 1000 \overset{37}{\equiv} 28 \times 1 \overset{37}{\equiv} 28$$

دقت کنید که در روش حل این سوال از روابط $370 \overset{37}{\equiv} 0$، $139 \overset{37}{\equiv} 28$ و $1000 \overset{37}{\equiv} 1$ استفاده کردیم.

توجه: همچنین برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۳۷ می‌توان اعداد را از سمت راست ۳ رقم، ۳ رقم جدا کرد و با هم جمع کرد.

۳۹- گزینه‌ی (۲)

طبق فرض و با استفاده از رابطه‌ی بخش‌پذیری بر ۹ داریم:

$$435a2 \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 4+3+5+a+2 \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 5+a \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} 4 \xrightarrow{0 \le a \le 9} a = 4$$

پس عدد مورد نظر ۴۳۵۴۲ است. اکنون باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۱۱ را به‌دست می‌آوریم:

$$43542 \overset{11}{\equiv} 2-4+5-3+4 \Rightarrow 43542 \overset{11}{\equiv} 4$$

۴۰- گزینه‌ی (۳)

چون $11 \times 4 = 44$، لذا عدد مورد نظر باید بر ۴ و ۱۱ نیز بخش‌پذیر باشد. بنابراین داریم:

$$\overline{a5b4c} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{4c} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow c + 4 \times 10 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow c \overset{4}{\equiv} 0 \xrightarrow{0 \le c \le 9} c = 0, 4, 8$$

$$\overline{a5b4c} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow c - 4 + b - 5 + a \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a + b \overset{11}{\equiv} 9 - c$$

حالت‌های زیر برای باقی‌مانده‌ی $a+b$ بر ۱۱ وجود دارد:

$$c = 0 : a + b \overset{11}{\equiv} 9 \xrightarrow{0 \le a+b \le 18} a + b = 9$$

$$c = 4 : a + b \overset{11}{\equiv} 5 \xrightarrow{0 \le a+b \le 18} a + b = 5, 16$$

$$c = 8 : a + b \overset{11}{\equiv} 1 \xrightarrow{0 \le a+b \le 18} a + b = 1, 12$$

پس بیش‌ترین مقدار $a+b$ برابر ۱۶ است.

۴۱- گزینه‌ی (۱)

با توجه به این‌که $8 \overset{9}{\equiv} -1$، داریم:

$$(573102)_8 = 2 + 0 \times 8 + 1 + 8^2 + 3 \times 8^3 + 7 \times 8^4 + 5 \times 8^5 \overset{9}{\equiv} 2 + 0 + (-1)^2 + 3(-1)^3 + 7(-1)^4 + 5(-1)^5 \overset{9}{\equiv} 2$$

۴۲- گزینه‌ی (۲)

با توجه به این‌که $9 \overset{4}{\equiv} 1$ داریم:

$$(801243)_9 = 3 + 4 \times 9 + 2 \times 9^2 + 1 \times 9^3 + 0 \times 9^4 + 8 \times 9^5 \overset{4}{\equiv} 3 + 4(1) + 2(1)^2 + 1(1) + 8(1)^5 \overset{4}{\equiv} 2$$

۴۳- گزینه‌ی (۲)

با توجه به فرض سوال، همنهشتی به پیمانه‌ی ۱۱ مد نظر است. چون عدد $\overline{1a2b3}$ به پیمانه‌ی ۱۱ در دسته‌ی همنهشتی $[4]$ قرار دارد، لذا:

$$\overline{1a2b3} \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow 3 - b + 2 - a + 1 \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow a + b \overset{11}{\equiv} 2 \xrightarrow{0 \le a+b \le 18} a + b = 2, 13$$

لذا بیش‌ترین مقدار $a+b$ برابر ۱۳ است.

۴۴- گزینه‌ی (۴)

معادله‌ی مورد نظر در صورتی جواب دارد که $(75,165)|2a+1$، بنابراین داریم:

$$(75,165)|2a+1 \xrightarrow{(75,165)=15} 15|2a+1 \Rightarrow 2a+1 \overset{15}{\equiv} 0 \Rightarrow 2a \overset{15}{\equiv} -1 \Rightarrow 2a \overset{15}{\equiv} -1+15 \overset{15}{\equiv} 14 \xrightarrow{(15,2)=1} a \overset{15}{\equiv} 7 \Rightarrow a=15k+7$$

به ازای $k=1$، $a=22$ یکی از جواب‌های مسأله است که در بین گزینه‌ها وجود دارد.

۴۵- گزینه‌ی (۲)

معادله‌ی مورد نظر در صورتی جواب دارد که $(3a+1,a^2+1)|b$. لذا می‌بایست تمامی مقادیر ممکن برای $(3a+1,a^2+1)$ را بیابیم. با فرض $(3a+1,a^2+1)=d$ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} d|3a+1 \Rightarrow d|a(3a+1)=3a^2+a \\ d|a^2+1 \Rightarrow d|3(a^2+1)=3a^2+3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \left.\begin{array}{l} d|a-3 \Rightarrow d|3a-9 \\ \text{از طرفی}: d|3a+1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d|10$$

یعنی d یکی از مقسوم‌علیه‌های ۱۰ است و برای این‌که معادله همواره جواب داشته باشد، کافی است $b=10$ باشد.

۴۶- گزینه‌ی (۲)

معادله‌ی مورد نظر در صورتی جواب دارد که $(14,21)|2a+1$. بنابراین داریم:

$$(14,21)|2a+1 \xrightarrow{(14,21)=7} 7|2a+1 \Rightarrow 2a+1 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 2a \overset{7}{\equiv} -1$$

$$2a \overset{7}{\equiv} -1+7 \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{(7,2)=1} a \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow a \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow a=7k+3 \quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین:

$$1\le 7k+3 \le 100 \Rightarrow \frac{-2}{7} \le k\ \frac{97}{7} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 0\le k \le 13$$

لذا تعداد اعداد مورد نظر برابر $13-0+1=14$ است.

۴۷- گزینه‌ی (۱)

شرط لازم و کافی برای این‌که معادله‌ی مورد نظر جواب داشته باشد این است که $(a,30)|50$ یعنی $(a,30)$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های ۵۰ باشد. با توجه به این‌که $50=2\times5^2$ و $30=2\times3\times5$، باید $3\nmid a$ زیرا در غیر این‌صورت $3|(a,30)$ در حالی‌که $3\nmid 50$.

۴۸- گزینه‌ی (۴)

هر دو رابطه‌ی $(a,b)|20$ و $(a,b)\nmid 30$ باید همزمان برقرار باشند. یعنی (a,b) باید مقسوم علیه ۲۰ باشد ولی مقسوم‌علیه ۳۰ نباشد. در بین مقسوم‌علیه‌های ۲۰ تنها اعداد ۴ و ۲۰ چنین خاصیتی دارند. لذا تنها گزینه‌ی (۴) می‌تواند درست باشد.

۴۹- گزینه‌ی (۲)

راه‌حل اول: طبق فرض داریم:

$$12a+33b=42 \Rightarrow 4a+11b=14 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین معادله در 5}} 20a+55b=70$$

لذا معادله‌ی $ax+by=70$ دارای جواب است.

راه‌حل دوم: با توجه به فرض سوال:

$$12a+32b=42 \Rightarrow 4a+11b=14$$

برای این‌که این رابطه برقرار باشد باید $(a,b)|14$، بنابراین $(a,b)\in\{1,2,7,14\}$. لذا فقط گزینه‌ی (۲) قابل قبول است. (چرا؟)

۵۰- گزینه‌ی (۱)

معادله‌ی سیاله‌ی مورد نظر در صورتی جواب دارد که $(a,12)|18$. با توجه به آن‌که $12=3\times2^2$، نتیجه می‌گیریم:

$$(a,12)=3^m\times2^n \qquad 0\le m\le1 \quad , \quad 0\le n\le 2$$

برای آن‌که $(a,12)|3^2\times2$، باید $0\le n\le1$. پس تنها وقتی این شرط برقرار نیست که $n=2$ و در این صورت $4|a$. تعداد مضارب ۴ در مجموعه‌ی $\{1,2,\cdots,100\}$ برابر است با ۲۵، پس به ازای $100-25=75$ مقدار a، معادله جواب دارد.

۵۱- گزینه‌ی (۴)

چون $20|(7,11)$ لذا معادله دارای جواب است. یک جواب معادله برابر است با $(x_0,y_0)=(-5,5)$. لـذا کلیـه‌ی جـواب‌هـای معادلـه از روابـط زیـر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} x=-5+11k \\ y=5-7k \end{cases} \Rightarrow x+y=4k$$

۵۲- گزینه‌ی (۳)

چون $17|(2,3)$، لذا معادله دارای جواب است. یک جواب معادله برابر است با $(x_0,y_0)=(1,5)$. بنابراین کلیه‌ی جواب‌های معادله از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x=1+3k \\ y=5-2k \end{cases} \xrightarrow{x,y\in\mathbb{N}} \begin{cases} x=1\ ,\ y=5 \\ x=4\ ,\ y=3 \\ x=7\ ,\ y=1 \end{cases}$$

پس معادله‌ی مورد نظر در مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۳ جواب دارد.

۵۳- گزینه‌ی (۱)

طبق فرض داریم:

$$13x+21y=199 \Rightarrow 13x+21y \overset{13}{\equiv} 199 \Rightarrow 8y \overset{13}{\equiv} 4 \xrightarrow{(4,13)=1} 2y \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 2y \overset{13}{\equiv} 1+13 \overset{13}{\equiv} 14 \Rightarrow y \overset{13}{\equiv} 7 \Rightarrow y=13k+7 \qquad (1)$$

با جای‌گذاری $y=13k+7$ در معادله‌ی مورد نظر خواهیم داشت:

$$13x+21(13k+7)=199 \Rightarrow 13x+13\times 21k=13\times 4 \Rightarrow x=-21k+4 \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $x+y=-8k+11$

چون x و y اعدادی طبیعی هستند، لذا تنها مقداری که k می‌تواند اختیار کند صفر است. بنابراین: $x+y=11$

۵۴- گزینه‌ی (۲)

چون $9|(12,27)$ معادله دارای جواب است. طبق فرض داریم:

$$12x+27y=9 \Rightarrow 4x+9y=3 \Rightarrow 4x+9y \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow y \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow y=4k+3 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}} 4x+9(4k+3)=3 \Rightarrow x=-9k-6$$

$$\xrightarrow{\text{شرط مسأله}} \begin{cases} -50\le 4k+3\le 50 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} -3\le k\le 11 \\ -50\le -9k-6\le 50 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} -6\le k\le 4 \end{cases} \Rightarrow -6\le k\le 4$$

پس تعداد جواب‌ها برابر است با $4-(-6)+1=11$. که متأسفانه جواب درگزینه‌ها نیست.

۵۵- گزینه‌ی (۱)

چون $7|(2,3)$، لذا معادله دارای جواب است. یک جواب معادله برابر است با $(x_0,y_0)=(2,1)$. بنابراین کلیـه‌ی جـواب‌هـای معادلـه از روابـط زیـر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} x=2+3k \\ y=1-2k \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط سوال}} \begin{cases} 0\le 2+3k\le 100 \Rightarrow 0\le k\le 32 \\ -70\le 1-2k\le 0 \Rightarrow 1\le k\le 35 \end{cases} \Rightarrow 1\le k\le 32$$

لذا تعداد جواب‌ها برابر است با $32-1+1=32$.