فصل ۳

تست‌های مرور (بخش‌های ۱ و ۲)

پاسخ‌های تشریحی

1- گزینه‌ی (3)

برای این‌که رابطه‌ی R ترایایی شود، باید زوج‌های مرتب (a,c)، (a,d) و (b,d) به آن اضافه شود، پس با اضافه کردن حداقل 3 عضو به R، رابطه ترایایی می‌شود.

2- گزینه‌ی (2)

فرض کنید $A=\{a,b,c,d,e\}$. رابطه‌ی R روی A پاد تقارنی نیست، لذا حداقل 2 عضو مانند (a,b) و (b,a) عضو R هستند. همچنین R تقارنی نیست لذا باید عضوی مانند (c,d) عضو R باشد. که $(d,c)\notin R$. اکنون با این 3 عضو به رابطه‌ای رسیدیم که بازتابی و ترایایی نیز نیست:
$R=\{(a,b),(b,a),(c,d)\}$

3- گزینه‌ی (1)

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی 4 عضوی A بازتابی است، لذا $I_A\subseteq R$. چون I_A، 4 عضوی است. پس 4 عضو از 7 عضو R، اعضای I_A هستند. پس 3 عضو دیگر برای R باقی می‌ماند که قطعاً R تقارنی نیست. (برای این‌که R تقارنی باشد، نباید تعداد اعضای باقی‌مانده فرد باشد). همچنین R می‌تواند تعدی نیز باشد مانند رابطه‌ی زیر که روی $A=\{a,b,c,d\}$ تعریف شده است:

$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(c,d)\}$

4- گزینه‌ی (3)

اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی ناتهی A تعریف شده باشد:

1- R بازتابی است اگر و تنها اگر $I_A\subseteq R$

2- R تقارنی است اگر و تنها اگر $R=R^{-1}$

3- R پادتقارنی است اگر و تنها اگر $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

4- R تعدی است اگر و تنها اگر $RoR\subseteq R$

5- گزینه‌ی (3)

R بازتابی نیست زیرا $I_A\not\subseteq R$، R تقارنی نیست زیرا به‌طور مثال $(a,b)\in R$ ولی $(b,a)\notin R$. R تراگذاری نیست زیرا $(a,b)\in R$ و $(b,c)\in R$ ولی $(a,c)\notin R$.

6- گزینه‌ی (3)

R بازتابی نیست زیرا $I_A\not\subseteq R$. این رابطه تقارنی نیست زیرا $(a,c)\in R$ ولی $(c,a)\notin R$.

7- گزینه‌ی (3)

رابطه‌ی R، بازتابی است زیرا برای هر x در مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$، داریم $x\leq x$. بنابراین $(x,x)\in R$. این رابطه پادتقارنی است، زیرا اگر $x\leq y$ و $y\leq x$، آن‌گاه $x=y$. R ترایایی نیز هست زیرا اگر $x\leq y$ و $y\leq z$، آن‌گاه $x\leq z$. اما R تقارنی نیست زیرا به عنوان مثال $(1,2)\in R$ ولی $(2,1)\notin R$.

8- گزینه‌ی (2)

R بازتابی نیست زیرا به عنوان مثال $(1,1)\notin R$. R تقارنی است زیرا اگر $3|x+y$، آن‌گاه $3|y+x$. R پادتقارنی نیست، زیرا برای مثال $(1,2)\in R$ و $(2,1)\in R$ ولی $2\neq 1$. این رابطه ترایایی هم نیست، زیرا به عنوان مثال $(1,2)\in R$ و $(2,4)\in R$ ولی $(1,4)\notin R$.

9- گزینه‌ی (2)

R بازتابی نیست زیرا اگر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ آن‌گاه در صورتی $(x,y)R(x,y)$ که $x=y$. R تقارنی است زیرا اگر $(x,y),(z,t)\in\mathbb{R}^2$ و $(x,y)R(z,t)$ آن‌گاه $(z,t)R(x,y)$. R پادتقارنی نیست زیرا به‌طور مثال $(1,2)R(4,3)$ و همچنین $(4,3)R(1,2)$ در حالی‌که $(1,2)\neq(4,3)$.
همچنین R تعدی نیست زیرا به طور مثال $(1,2)R(4,3)$ و $(4,3)R(1,2)$ در حالی‌که $(1,2)\not R(1,2)$

10- گزینه‌ی (4)

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ حداکثر می‌تواند $4^2=16$ عضو داشته باشد که اگر یک عضو (مانند (a,a)) را حذف کنیم R بازتابی نخواهد بود. پس رابطه‌ی مورد نظر حداکثر می‌تواند $16-1=15$ عضو داشته باشد.

11- گزینه‌ی (2)

R پاد متقارن نیست، لذا حداقل دو عضو مانند (a,b) و (b,a) اعضایی از R هستند. پس R حداقل 2 عضو دارد.

12- گزینه‌ی (2)

رابطه‌ی R پاد تقارنی نیست، لذا R حداقل دو عضو مانند (a,b) و (b,a) دارد. اگر $R=\{(a,b),(b,a)\}$، آن‌گاه R ترایایی نیست زیرا aRb و bRa ولی $a\not{R}a$، پس R حداقل 2 عضو دارد.

13- گزینه‌ی (2)

می‌دانیم هر رابطه‌ی تهی و یا تک عضوی روی مجموعه‌ی A ترایایی است. پس برای این‌که R ترایایی نباشد، باید حداقل 2 عضو داشته باشد. همچنین برای این‌که R متقارن هم باشد باید 2 عضو مانند (a,b) و (b,a) داشته باشد.

توجه: دقت کنید که برای این‌که $R=\{(a,b),(b,a)\}$ ترایایی می‌باشد باید aRa و bRb باشد.

14- گزینه‌ی (2)

رابطه‌ی R پاد تقارنی نیست، لذا R حداقل دو عضو مانند (a,b) و (b,a) دارد. از طرفی R تقارنی هم نیست، پس با اضافه کردن حداقل یک عضو دیگر مانند (c,d) به رابطه‌ی مورد نظر می‌رسیم.

15- گزینه‌ی (3)

با توجه به مسأله‌ی قبل برای این‌که R هیچ‌یک از ویژگی‌های تقارنی و پاد تقارنی را نداشته باشد، لازم است حداقل 3 عضو داشته باشد. ($R=\{(a,b),(b,a),(c,d)\}$). اکنون با اضافه کردن 2 عضو (a,a) و (b,b) به رابطه‌ی R، ویژگی ترایایی به این رابطه اضافه می‌شود. لذا R حداقل 5 عضو دارد.

16- گزینه‌ی (2)

رابطه‌ی R بازتابی نیست، زیرا $(c,c)\notin R$. این رابطه تقارنی هم نیست زیرا $(c,a)\in R$ ولی $(a,c)\notin R$. رابطه‌ی R پاد تقارنی نیست زیرا $(a,b)\in R$ و $(b,a)\in R$. رابطه‌ی R ترایایی است. (چرا؟)

توجه: برای درک بهتر سؤال رابطه‌ی R را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

17- گزینه‌ی (1)

رابطه‌ی R بازتابی نیست زیرا $(3,3)\notin R$. این رابطه تقارنی هم نیست، زیرا $(-1,4)\in R$ ولی $(4,-1)\notin R$. رابطه‌ی R پاد تقارنی نیست زیرا $(0,1)\in R$ و $(1,0)\in R$. این رابطه ترایایی هم نیست زیرا $(-1,3)\in R$ و $(3,-1)\in R$ ولی $(-1,-1)\notin R$. پس R هیچ یک از ویژگی‌های بازتابی، تقارنی، پاد تقارنی و ترایایی را ندارد.

18- گزینه‌ی (3)

رابطه‌ی R بازتابی نیست زیرا $(x,x)\notin R$. R تقارنی هم نیست زیرا اگر $(x,y)\in R$، آن‌گاه $x-y<-1$، پس $y-x>1$، در نتیجه $(y,x)\notin R$. این رابطه پاد تقارنی است زیرا (x,y) و (y,x) نمی‌توانند هم‌زمان عضوی از R باشند. رابطه‌ی R ترایایی است زیرا اگر $x-y<-1$ و $y-z<-1$، آن‌گاه با جمع دو رابطه خواهیم داشت $x-z<-2$، پس اگر xRy و yRz، آن‌گاه xRz.

19- گزینه‌ی (2)

فرض می‌کنیم $(a,b)\in R_1\cap R_2$, $(b,c)\in R_1\cap R_2$ باید ثابت کنیم $(a,c)\in R_1\cap R_2$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}(a,b)\in R_1\cap R_2\\(b,c)\in R_1\cap R_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a,b)\in R_1,(b,c)\in R_1\xrightarrow{\text{ÂÄIÄHoU } R_1}(a,c)\in R_1\\(a,b)\in R_2,(b,c)\in R_2\xrightarrow{\text{ÂÄIÄHoU } R_2}(a,c)\in R_2\end{cases}\Rightarrow(a,c)\in R_1\cap R_2$$

به این ترتیب ثابت می‌شود همواره $R_1\cap R_2$ ترایایی است. برای گزینه‌های دیگر نیز مثال نقض ارائه می‌کنیم:

گزینه‌ی (1): $R_1\{(1,2)\}$ و $R_2=\{(2,1)\}$ هر دو رابطه ترایایی هستند، ولی $R_1\cup R_2$ ترایایی نیستند.

گزینه‌ی (3): $R_1=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$ و $R_2\{(1,1)\}$. در این حالت R_1-R_2 ترایایی نیست.

گزینه‌ی (4): همان مثال نقض گزینه‌ی (3) برای این گزینه نیز کاربرد دارد.

20- گزینه‌ی (2)

گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (1): برای مثال نقض $R_1=\{(1,2)\}$ و $R_2=\{(1,2),(2,1)\}$ را در نظر بگیرید. R_1 پادمتقارن است، ولی R_2 پادمتقارن نیست.

گزینه‌ی (2): با فرض پادمتقارن بودن R_2، ثابت می‌کنیم R_1 نیز پادمتقارن است. فرض می‌کنیم $(a,b)\in R_1$ و $(b,a)\in R_1$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}(a,b)\in R_1\\(b,a)\in R_1\end{cases}\xrightarrow{R_1\subset R_2}\begin{cases}(a,b)\in R_2\\(b,a)\in R_2\end{cases}\xrightarrow{\text{·nl£T¶jlQ}\ R_2}a=b$$

پس قطعاً $a=b$ و لذا R_1 پادمتقارن است.

گزینه‌ی (3): برای مثال نقض $R_1=\{(1,1)\}$ و $R_2=\{(1,1),(1,2)\}$ را در نظر بگیرید. R_1 متقارن است ولی R_2 متقارن نیست.

گزینه‌ی (4): برای مثال نقض $R_1=\{(1,2)\}$ و $R_2=\{(1,2),(2,1)\}$ را در نظر بگیرید. R_1 متقارن نیست ولی R_2 متقارن است.

21- گزینه‌ی (1)

گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (1): اگر R_1 بازتابی باشد به ازای هر $a\in A$ داریم $(a,a)\in R_1$. با توجه به $R_1\subset R_2$ نتیجه می‌گیریم $(a,a)\in R_2$ و چون این رابطه برای هر $a\in A$ برقرار است، لذا R_2 نیز بازتابی است.

گزینه‌ی (2): برای مثال نقض در مجموعه‌ی $A=\{1,2\}$ روابط $R_1=\{(1,2)\}$ و $R_2=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$ را در نظر بگیرید. R_2 بازتابی است، ولی R_1 بازتابی نیست.

گزینه‌ی (3): برای مثال نقض رابطه‌ی $R_1=\{(1,1)\}$ و $R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ را در نظر بگیرد. R_1 ترایای است ولی R_2 ترایایی نیست.

گزینه‌ی (4): برای مثال نقض رابطه‌های $R_1=\{(1,2),(2,1)\}$ و $R_2=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$ را در نظر بگیرید. R_1 ترایایی نیست ولی R_2 ترایایی است.

22- گزینه‌ی (4)

واضح است که این رابطه فقط می‌تواند پاد تقارنی باشد.

23- گزینه‌ی(1)

رابطه‌ی R را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$xRy\Leftrightarrow x^3-y^3=3y-3x\Leftrightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2)=3(y-x)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+xy+y^2=-3 & (x\neq y)\\x=y\end{cases}$$

$$[1]=\{x\,|\,xR1\}=\{x\,|\begin{cases}x^2+x+1=-3 & x\neq 1\\x=1\end{cases}=\{x\,|\begin{cases}x^2+x+4=0 & x\neq 1\\x=1\end{cases}\xrightarrow[\text{jnHkº ¾zÄn}]{x^2+x+4=0\ \text{Áï¾²jl÷¶}}[1]=\{1\}$$

24- گزینه‌ی(1)

$$[\frac{\pi}{2}]=\{x\,|\,xR\frac{\pi}{2}\}=\{x\,|\sin x=\sin\frac{\pi}{2}\}=\{x\,|\sin x=1\}=\{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad 0\leq k\leq 4\}=\{\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{13\pi}{2},\frac{17\pi}{2}\}$$

25- گزینه‌ی (4)

راه‌حل اول: برای این‌که R بازتابی شود، باید $I_A\subseteq R$، یعنی 5 زوج مرتب به صورت (x,x) که $x\in A$، به R اضافه شود. همچنین برای این‌که R تقارنی شود، باید 2 زوج مرتب (b,a) و (c,d) به R اضافه شود. در این صورت به رابطه‌ی بازتابی و تقارنی زیر می‌رسیم:

$S=I_A\cup\{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(d,c),(c,d)\}$

حال برای این‌که R تعدی نیز باشد، باید زوج‌های مرتب (d,a) ، (a,d) ، (c,b) ، (b,c) ، (d,b) و (b,d) نیز به R اضافه شود. پس در مجموع 13 عضو دیگر باید به R اضافه شود.

راه‌حل دوم: از خاصیت افرازها استفاده می‌کنیم. از زوج‌های مرتب اولیه‌ی R نتیجه می‌گیریم که a، b، c و d در یک دسته قرار دارند. لذا برای این‌که R با کم‌ترین تعداد عضو هم‌ارزی باشد، باید افراز $\tau=\{\{a,b,c,d\},\{e\}\}$ را در نظر بگیریم که تعداد اعضای رابطه‌ی متناظر آن برابر $4^2+1=17$ خواهد بود. چون R اولیه، 4 عضوی است، لذا باید حداقل $17-4=13$ عضو به آن اضافه کنیم.

26- گزینه‌ی (4)

کافی است کلاس هم‌ارزی یکی از نقاط $\mathbb{R}^2$ مانند $(1,1)$ را به‌دست آوریم:

$$[(1,1)]=\{(x,y)\mid (x,y)R(1,1)\}=\{(x,y)\mid x-2=1-2y\}=\{(x,y)\mid y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\}$$

27- گزینه‌ی(1)

مانند سؤال قبل کلاس هم‌ارزی نقطه‌ی $(1,1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$[(1,1)]=\{(x,y)\mid(x,y)R(1,1)\}=\{(x,y)\mid x^2+y^2=2\}$$

پس نمودار کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه، دایره‌های هم‌مرکز هستند.

28- گزینه‌ی(3)

کلاس هم‌ارزی نقطه‌ی $(1,1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$[(1,1)]=\{(x,y)\mid(x,y)R(1,1)\}=\{(x,y)\mid x=y\}$$

چون این رابطه‌ی هم‌ارزی روی $(\mathbb{R}-\{0\})\times\mathbb{R}$ تعریف شده است، لذا کلاس هم‌ارزی $[(1,1)]$ شامل نقطه‌ی $(0,0)$ نمی‌شود. پس کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه اجتماع دو نیم خط می‌باشد.

29- گزینه‌ی (4)

$$[\{a,e\}]=\{A\in P(x)\mid AR\{a,e\}\}=\{A\in P(x)\mid A\cup Y=\{\{a,e\}\cup Y\}=\{A\in P(x)\mid A\cup Y=\{a,b,c,e\}\}$$

بنابراین A به صورت $C\cup\{e\}$ می‌باشد که C هر زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی Y می‌تواند باشد. پس تعداد اعضای $[\{a,e\}]$ برابر تعداد زیر مجموعه‌های Y یعنی 2^3 است.

30- گزینه‌ی(4)

با توجه به نکته‌ی 8، بخش 3-2، تعداد اعضای رابطه‌ی R برابر است با:

$$1^2+2^2+4^2=21$$

31- گزینه‌ی (1)

تعداد روابط هم‌ارزی روی یک مجموعه، با تعداد افرازهای آن مجموعه برابر است. چون در این روابط a و b در یک دسته قرار دارند آن‌ها را یک عضو مانند x فرض می‌کنیم. پس تعداد افرازهای مجموعه‌ی 3 عضوی $\{x,c,d\}$ مورد نظر است که برابر با 5 است.

32- گزینه‌ی(3)

برای حل این سؤال بهتر است تعداد روابط هم‌ارزی روی $\{a,b,c,d\}$ را که در آن a و b در یک کلاس هم‌ارزی قرار می‌گیرند را از کل روابط هم‌ارزی کم کنیم. مجموعه‌ی مورد نظر 4 عضو دارد، لذا کل روابط هم‌ارزی برابر 15 تاست. همچنین تعداد روابط هم‌ارزی که a و b در یک کلاس قرار دارند نیز با توجه به سؤال قبل برابر 5 است، لذا جواب برابر است با: $15-5=10$.

33- گزینه‌ی(3)

$$[n]=\{x\in\mathbb{Z}\mid xRn\}=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2=n^2\}=\{+n,-n\}$$

لذا $[n]$، 2 عضو دارد.

34- گزینه‌ی(3)

با توجه به نکته‌ی 8 بخش 3-2، حداکثر تعداد اعضای R زمانی حاصل می‌شود که رابطه‌ی R مجموعه‌ی A را به صورت $\tau=\{\{1,2,4,5\},\{3\}\}$ افراز کرده باشد. (دقت کنید که در این رابطه $1R2$ (ولی $2\not R3$). پس حداکثر اعضای R برابر است با:

$$4^2+1^2=17$$

35- گزینه‌ی (2)

افرازها را با فرض $1R2$ و $2\not R4$ مشخص می‌کنیم:

$$\tau_1=\{\{1,2\},\{3,4\}\}\ ,\ \tau_2=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}\ ,\ \tau_2=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$$

فصل ۳

تست‌های مرور (بخش‌های ۳ و ۴)

پاسخ‌های تشریحی

1- گزینه‌ی (2)

رابطه‌ی R بازتابی نیست زیرا رأس‌ها فاقد طوقه‌اند. R پادتقارنی نیست چون بین دو راس a و b در هر دو جهت یال وجود دارد و ترایایی نیست زیرا به طور مثال در مورد دو راس a و b داریم aRb و bRa ولی $a \not R a$. R تقارنی است چون بین هیچ دو رأسی، یک یال وجود ندارد.

2- گزینه‌ی (2)

R بازتابی است چون همه‌ی راس‌ها طوقه دارند. R تقارنی نیست چون بین دو رأس a و b فقط یک یال وجود دارد. R پاد تقارنی است، چون بین هیچ دو رأس متمایزی دو یال وجود ندارد. R ترایایی نیست، زیرا به عنوان مثال aRb و bRc ولی $a \not R c$.

3- گزینه‌ی (2) و (4)

برای رد سایر گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

گزینه‌ی (1): $(a,b)\in R\ ,\ (b,c)\in R : (a,c)\notin R$

گزینه‌ی (3): $(a,b)\in R\ ,\ (b,a)\in R : (a,a)\notin R$

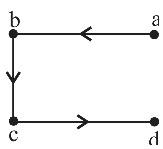
4- گزینه‌ی (4)

گراف متناظر رابطه‌ی R از 4 قسمت مجزا تشکیل شده است، پس شامل 4 دسته‌ی هم‌ارزی است:

$\tau=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d,e\}\}$

5- گزینه‌ی (1)

ابتدا رئوس گراف مورد نظر را نام‌گذاری می‌کنیم:



$$aRb\ ,\ bRc \Rightarrow aRc$$
$$aRc\ ,\ cRd \Rightarrow aRd$$
$$bRc\ ,\ cRd \Rightarrow bRd$$

لذا با اضافه کردن حداقل 3 یال به گراف، رابطه‌ی متناظر آن ترایایی می‌شود.

6- گزینه‌ی (3)

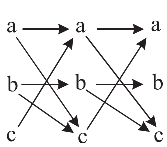
R بازتابی است چون در این گراف هر رأس، طوقه دارد. R پاد تقارنی است چون بین هیچ دو رأس متمایزی دو یال وجود ندارد. این رابطه ترایایی هم هست (می‌توانید به راحتی بررسی کنید) اما R تقارنی نیست، زیرا بین دو رأس a و b فقط یک یال وجود دارد.

7- گزینه‌ی (4)

از گراف مورد نظر مشخص است که R تنها پاد تقارنی است. و می‌دانیم اگر M ماتریس متناظر یک رابطه‌ی پادمتقارن باشد، آن‌گاه $M \wedge M^T << I$.

8- گزینه‌ی (3)

راه حل اول: با دقت در توضیحات مسأله‌ی 5، بخش 3-3، می‌توان رابطه‌ی RoR را به‌دست آورد.



$$RoR=\{(a,a),(b,b),(a,c),(b,c),(c,a),(b,a),(c,a),(c,c)\}$$

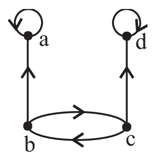
$$M(RoR)=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

راه حل دوم: راه‌حل کوتاه‌تر (و مطمئن‌تر) استفاده از قضیه‌ی (2) بخش 3-3 است:

$$M(R)=\begin{array}{c|ccc} & a & b & c\\ \hline a & 1 & 0 & 1\\ b & 0 & 1 & 1\\ c & 1 & 0 & 0\end{array} \Rightarrow (M(R))^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

9- گزینه‌ی (3)

با نام‌گذاری رئوس گراف مورد نظر، ماتریس متناظر آن را به‌دست می‌آوریم:



$$M=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

چون $N<<M$، اگر درایه‌ای از ماتریس M برابر صفر باشد، درایه‌ی نظیر آن در ماتریس N نیز قطعاً باید صفر باشد. اما اگر درایه‌ای از ماتریس M برابر یک باشد، درایه‌ی نظیر آن در ماتریس N می‌تواند صفر یا یک باشد. پس ماتریس N چنین وضعیتی دارد.

$$N=\begin{bmatrix} \square & 0 & 0 & 0\\ \square & 0 & \square & 0\\ 0 & \square & 0 & \square\\ 0 & 0 & 0 & \square \end{bmatrix}$$

مکان‌های خالی می‌توانند هر کدام صفر یا یک باشند. یعنی هر کدام دو حالت دارند، پس $2^6=64$ حالت مختلف برای ماتریس N (طبق اصل ضرب) وجود دارد. (برای درک بهتر مسأله 6 بخش 3-3 را ببینید)

10- گزینه‌ی (4)

می‌دانیم رابطه‌ی R تقارنی و پاد تقارنی است اگر و تنها اگر $R\subseteq I$. لذا اگر M ماتریس رابطه‌ی R باشد، باید $M<<I$. بنابراین باید تعداد ماتریس‌های M با شرط $M<<I$ را پیدا کنیم که برابر است با 2^4.

11- گزینه‌ی (4)

با توجه به قانون متمم داریم:

تعداد روابط بازتابی و پادمتقارن - تعداد روابط بازتابی = تعدا روابطی که بازتابی است ولی پاد تقارنی نیست

برای محاسبه‌ی تعداد روابط بازتابی شامل $(1,3)$ اگر M ماتریس رابطه باشد 4 درایه‌ی M قطعاً برابر یک است (3 درایه روی قطر اصلی و یک درایه خارج قطر اصلی) برای هر یک از $9-4=5$ درایه‌ی باقی‌مانده 2 انتخاب وجود دارد. بنابراین M را به 2^5 طریق می‌توان تشکیل داد. برای محاسبه‌ی تعداد روابط بازتابی و پادمتقارن شامل $(1,3)$ اگر M ماتریس رابطه باشد ، 3 درایه‌ی قطر اصلی M برابر یک است (چون R بازتابی است) همچنین درایه‌ی متناظر با $(1,3)$ عدد یک و درایه‌ی متناظر با $(3,1)$ عدد صفر است (R پاد تقارنی است) و برای هر دو درایه‌ی باقی‌مانده که نسبت به قطر اصلی قرینه‌اند، 3 انتخاب وجود دارد. پس M را به 3^2 طریق می‌توان تشکیل داد. بنابراین جواب برابر است با: $2^5-3^2=23$

12- گزینه‌ی (4)

در واقع تعداد روابط پادتقارنی و بازتابی روی یک مجموعه‌ی 6 عضوی مورد نظر سؤال است که این تعداد برابر است با: $3^{\frac{6^2-6}{2}}=3^{15}$

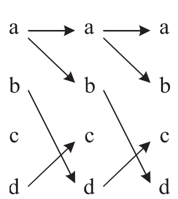
13- گزینه‌ی (3)

R بازتابی نیست چون تمام درایه‌های قطر اصلی برابر یک نیستند. R تقارنی نیست چون درایه‌ها نسبت به قطر اصلی متقارن نیستند. اما R پادمتقارن است چون هیچ دو درایه‌ی یک، نسبت به قطر اصلی متقارن نیست.

توجه: برای بررسی راحت‌تر خاصیت ترایایی بهتر است از گراف متناظر رابطه استفاده کنیم.

14- گزینه‌ی (3)

با دقت در توضیحات مسأله‌ی 5، بخش 3-3 داریم:



$$\Rightarrow RoR=\{(a,a),(a,b),(a,d),(b,c)\}$$

توجه: برای به‌دست آوردن RoR می‌توانستید از قضیه‌ی (2) بخش 3-3 نیز استفاده کنید.

15- گزینه‌ی (4)

چون $E << F$، اگر درایه‌ای از ماتریس E برابر صفر باشد، درایه‌ی نظیر آن در ماتریس F نیز باید صفر باشد. ولی اگر درایه‌ای از ماتریس E برابر یک باشد، درایه‌ی نظیر آن در ماتریس F می‌تواند صفر یا یک باشد. پس ماتریس F چنین وضعیتی خواهد داشت:

$$F=\begin{bmatrix} \square & 0 & \square & \square \\ 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

مکان‌های خالی می‌توانند هر کدام صفر یا یک باشند، یعنی هر کدام دو حالت دارند، پس $2^8=256$ حالت مختلف برای ماتریس F (طبق اصل ضرب) وجود دارد.

16- گزینه‌ی (2)

داریم:

$$E_1 \wedge E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون $E_1 \wedge E_2 << F$، لذا ماتریس F چنین وضعیتی خواهد داشت:

$$F=\begin{bmatrix} 1 & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & 1 \\ \square & 1 & \square & \square \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس F دارای 10 درایه‌ی یک است، پس از بین 9 جای خالی در ماتریس F باید $10-3=7$ تا برای قرار دادن عدد یک انتخاب کنیم (دقت کنید ماتریس فوق 3 درایه‌ی یک دارد.) در دو جالی خالی باقی‌مانده نیز باید صفر قرار دهیم لذا تعداد حالات انتخاب برای قرار دادن عدد یک (که تعیین کننده‌ی تعداد ماتریس‌های ممکن برای F است)، برابر است با $36=\frac{9!}{7!2!}=\binom{9}{7}$.

17- گزینه‌ی (3)

رابطه‌ی R بازتابی است لذا $I_n << M$ و در نتیجه $I_n << M^{(2)}$. همچنین رابطه‌ی R تقارنی است لذا $M^T=M$ و در نتیجه:

$M^T \wedge M=M \wedge M=M$

همچنین رابطه‌ی $M \wedge I_n=I_n$ به راحتی از بازتابی بودن رابطه‌ی R نتیجه می‌شود. زیرا در ماتریس I_n تمام درایه‌های روی قطر اصلی یک و سایر درایه‌ها صفر است. در ماتریس M نیز تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر یک است (R بازتابی است). همچنین از قبل می‌دانیم رابطه‌ی $M^{(2)} << M$ تنها زمانی برقرار است که رابطه‌ی R ترایایی باشد. در حالی‌که یک رابطه‌ی بازتابی و متقارن ممکن است ترایایی نباشد.

18- گزینه‌ی (4)

با توجه به این‌که R پادمتقارن است $M \wedge M^T << I_n$. همچنین چون R بازتابی است $I_n << M$، لذا از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم $M \wedge M^T << M$.

برای اثبات رابطه‌ی گزینه‌ی (2) دقت کنید چون R بازتابی است $I_n << M$، $I_n << M^T$ و $I_n \leq M \wedge M^T$ (چرا؟) از طرفی R پادمتقارن است، پس $M \wedge M^T << I_n$ که از این دو رابطه نتیجه می‌شود $M \wedge M^T=I_n$.

درستی گزینه‌ی (3) نیز در سؤال قبلی بررسی شده است. همچنین رابطه‌ی گزینه‌ی (4) را نیز می‌توانیم با یک مثال ساده نقض کنیم:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M \wedge M^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \not<< I_n$$

19- گزینه‌ی (2)

با توجه به نکته‌ی (6) بخش 3-4، تعداد روابط تقارنی و بازتابی روی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با:

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} \xrightarrow{n=4} 2^{\frac{4^2-4}{2}}=2^6$$

20- گزینه‌ی (1)

با توجه به نکته‌ی 7، بخش 3-4، تعداد روابط پاد تقارنی و بازتابی روی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با:

$$3^{\frac{n^2-n}{2}} \xrightarrow{n=4} 3^{\frac{4^2-4}{2}}=3^6$$

21- گزینه‌ی (1)

چون رابطه پادمتقارن و متقارن است، پس خانه‌های قطر اصلی آزادند (می‌توانند صفر یا یک باشند). لذا برای خانه‌های روی قطر اصلی $2^4=16$ حالت داریم. زوج خانه‌های خارج قطر اصلی و متقارن نسبت به آن، یا هر دو یک هستند یا هر دو صفر. (به دلیل متقارن بودن رابطه) به علاوه چون R پادمتقارن است، پس هر دو نمی‌تواند یک باشند. لذا برای زوج خانه‌های خارج قطر اصلی و متقارن نسبت به آن، تنها یک انتخاب (هر دو صفر) داریم. پس در کل تعداد روابط متقارن و پادمتقارن روی یک مجموعه‌ی 4 عضوی برابر 2^4 است.

نکته: تعداد روابط متقارن و پادمتقارن روی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با 2^n است.

نکته: اگر رابطه‌ی R متقارن و پادمتقارن باشد خواهیم داشت: $R\subseteq I$.

22- گزینه‌ی (1)

با توجه به توضیحات مسأله‌ی قبل، تعداد روابط تقارنی و پادتقارنی روی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر 2^n است. حال اگر بازتابی بودن رابطه را نیز در نظر بگیریم، برای عناصر روی قطر اصلی، تنها یک انتخاب (یعنی عدد یک) خواهیم داشت. پس تعداد روابط بازتابی، تقارنی و پادتقارنی روی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر یک است.

توجه: تنها رابطه‌ی همانی است که هم بازتابی، هم تقارنی و هم پادتقارنی است. (و البته ترایایی).

23- گزینه‌ی (1)

ماتریس متناظر این رابطه به صورت مقابل خواهد بود:

$$M=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \square & \square & \square & 1 \\ \square & \square & 1 & 1 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

جاهای خالی می‌توانند صفر یا یک باشند (برای هر جای خالی دو انتخاب داریم) پس در کل تعداد روابط مورد نظر برابر است با: 2^{12}.

24- گزینه‌ی (1)

اگر M ماتریس رابطه باشد، درایه‌های روی قطر اصلی M برابر یک هستند. (R بازتابی است) همچنین R متقارن است. برای 3 تا از درایه‌های بالای قطر اصلی یک انتخاب (به دلیل وجود 3 زوج مرتب فرض سؤال) و برای هر کدام از $6-3=3$ درایه‌ی باقی‌مانده‌ی بالای قطر اصلی 2 انتخاب وجود دارد، لذا جواب $2^3=8$ است.

25- گزینه‌ی (2)

اگر M ماتریس رابطه‌ی R باشد، درایه‌های روی قطر اصلی M برابر یک هستند. همچنین چون R پادمتقارن و درایه‌ی متناظر (b,a) برابر یک است، پس درایه‌ی متناظر (a,b) برابر صفر است. لذا برای هر یک از $6-1=5$ زوج درایه‌های باقی‌مانده که نسبت به قطر اصلی قرینه‌اند، 3 انتخاب وجود دارد. پس M را به 3^5 طریق می‌توان تشکیل داد.

26- گزینه‌ی (1)

اگر رابطه‌ی R هم‌زمان متقارن و پادمتقارن باشد، باید زیرمجموعه‌ی رابطه‌ی همانی باشد، لذا نمی‌تواند شامل زوج مرتب (c,d) باشد.

27- گزینه‌ی(2)

اگر M ماتریس رابطه‌ی R باشد، درایه‌های قطر اصلی M برابر یک هستند. همچنین درایه‌های متناظر زوج‌های مرتب (a,c) و (b,d) برابر صفراند. لذا 10 درایه باقی می‌ماند که هر کدام 2 انتخاب دارند، در نتیجه جواب برابر 2^{10} است.

28- گزینه‌ی(4)

اگر M ماتریس رابطه‌ی R باشد، درایه‌های قطر اصلی M برابر یک هستند. چون R پاد متقارن است، درایه‌های متناظر زوج‌های مرتب (a,c)، (b,a) و (d,b) می‌توانند صفر یا یک باشند. همچنین برای هر یک از $6-3=3$ زوج درایه‌های باقی‌مانده که نسبت به قطر اصلی قرینه‌اند، 3 انتخاب وجود دارد. لذا جواب برابر است با: $2^3\times3^3$.

29- گزینه‌ی (3)

می‌دانیم اگر رابطه‌ی R هم‌زمان متقارن و پادمتقارن باشد، باید زیرمجموعه‌ی رابطه همانی باشد. لذا اگر M ماتریس رابطه‌ی R باشد درایه‌های خارج قطر اصلی صفر خواهند بود. همچنین با توجه به فرض سؤال درایه‌ی متناظر (a,a) نیز صفر است. در نتیجه $4-1=3$ درایه روی قطر اصلی باقی می‌ماند که هر کدام 2 انتخاب دارند لذا جواب برابر است با 2^3.

30- گزینه‌ی(4)

ماتریس مجاورت این رابطه $16=4^2$ درایه دارد که وضعیت 4 درایه‌ی آن مشخص است. برای $16-4=12$ درایه‌ی باقی‌مانده، هر کدام 2 انتخاب (صفر یا یک) وجود دارد. در نتیجه جواب برابر است با 2^{12}.

31- گزینه‌ی (2)

اگر M ماتریس رابطه‌ی مورد نظر باشند. درایه‌های روی قطر اصلی آن یک‌اند. همچنین وضعیت 4 درایه‌ی دیگر آن نیز مشخص است. (2 تا از آن‌ها یک و 2 تای دیگر صفراند). در نتیجه 8 درایه باقی می‌ماند که هر کدام می‌توانند 2 انتخاب داشته باشند. لذا جواب برابر است با 2^8.

32- گزینه‌ی(2)

اگر M ماتریس رابطه‌ی مورد نظر باشد، درایه‌های قطر اصلی آن هر کدام می‌توانند 2 انتخاب داشته باشند. همچنین چون رابطه پادمتقارن است، درایه‌ی متناظر (c,a) برابر صفر (یک انتخاب) و درایه‌های متناظر (b,a) و (c,d) می‌توانند صفر یا یک باشند (2 انتخاب). اکنون 3 زوج درایه‌ی متقارن نسبت به قطر اصلی باقی می‌ماند که هر کدام 3 انتخاب دارند، لذا جواب برابر است با $2^4\times2^2\times3^3$.

33- گزینه‌ی(4)

اگر M ماتریس رابطه‌ی مورد نظر باشد، درایه‌های روی قطر اصلی M برابر یک هستند. (رابطه بازتابی است) همچنین وضعیت 2 درایه‌ی بالای قطر اصلی نیز مشخص است (هر کدام یک انتخاب دارند)، در نتیجه 4 درایه بالای قطر اصلی باقی می‌ماند که هر کدام 2 انتخاب دارند لذا جواب برابر است با 2^4.

34- گزینه‌ی(4)

اگر M ماتریس رابطه‌ی مورد نظر باشد، درایه‌های روی قطر اصلی M یک انتخاب دارند (رابطه بازتابی است) . همچنین چون رابطه پادمتقارن است با توجه به فرض، درایه‌های متناظر زوج‌های مرتب (b,a) و (a,c) باید صفر باشند. اما درایه‌های متناظر زوج‌های مرتب (a,d) و (d,c) می‌توانند هر کدام 2 انتخاب (صفر یا یک) داشته باشند. همچنین برای هر یک از 2 زوج درایه‌های باقی‌مانده که نسبت به قطر اصلی قرینه‌اند 3 انتخاب وجود دارد. لذا جواب برابر است با $2^2\times3^2$.

35- گزینه‌ی(3)

اگر M ماتریس رابطه باشد، 4 درایه‌ی قطر اصلی M برابر است (رابطه بازتابی است). همچنین طبق فرض باید 6 درایه از $16-4=12$ درایه‌ی باقی‌مانده را برابر یک قرار دهیم (رابطه 10 عضوی است). چون R متقارن است، 6 درایه‌ی باقی‌مانده باید به صورت متقارن نسبت به قطر اصلی در 2 طرف آن قرار گیرند. این انتخاب به $\binom{6}{3}$ طریق امکان‌پذیر است. پس تعداد روابط موجود برابر است با $\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=20$.

36- گزینه‌ی (4)

اگر M ماتریس رابطه باشد، 4 درایه‌ی روی قطر اصلی M برابر است (رابطه بازتابی است). چون این رابطه 7 عضوی است، پس باید 3 درایه‌ی دیگر از M را برابر یک قرار دهیم. می‌توانیم 3 زوج از 6 زوج درایه‌ی خارج از قطر اصلی و متقارن نسبت به آن را انتخاب کنیم. برای هر کدام از این 3 زوج خانه 2 انتخاب وجود دارد $((1,0),(0,1))$، پس در کل تعداد روابط موجود برابر است با $\binom{6}{3}\times 2^3=160$.

37- گزینه‌ی (2)

ماتریس مجاورت این رابطه $4^2=16$ خانه دارد که وضعیت 3 خانه‌ی آن مشخص است. $(M_{cd}=0, M_{cc}=1, M_{ab}=1)$. از طرفی چون این رابطه 7 عضو دارد، باید از بین $16-3=13$ خانه‌ی باقی‌مانده، 5 خانه‌ی دیگر را برابر یک قرار دهیم که تعداد روش انتخاب آن‌ها برابر است با $\binom{13}{5}$.

38- گزینه‌ی (4)

ماتریس مجاورت این رابطه $4^2=16$ خانه دارد. 4 درایه‌ی روی قطر اصلی این ماتریس برابر یک است (رابطه بازتابی است). همچنین طبق فرض سؤال $M_{ab}=1$، $M_{bc}=1$ و $M_{ac}=0$. چون این رابطه 9 عضوی است، پس باید از بین $16-4-3=9$ خانه‌ی باقی‌مانده ، 3 خانه را برای قرار دادن درایه‌ی یک انتخاب کنیم. لذا تعداد روابط ممکن برابر است با $\binom{9}{3}$.

39- گزینه‌ی (1)

اگر M ماتریس متناظر این رابطه باشد، چون رابطه متقارن است علاوه بر درایه‌های متناظر زوج‌های مرتب (a,b) ، (a,c) و (d,d)، درایه‌های متناظر زوج‌های مرتب (b,a) و (c,a) نیز برابر یک‌اند. بنابراین موقعیت 5 درایه‌ی «1» مشخص است. اکنون برای تعیین وضعیت دو درایه‌ی «1» باقی‌مانده دو حالت وجود دارد.

حالت اول: دو درایه‌ی «1» روی قطر اصلی قرار گیرند. در این صورت با توجه به این که درایه‌ی متناظر (d,d) برابر یک و درایه‌ی متناظر (a,a) برابر صفر است به $\binom{2}{2}=1$ روش می‌توان این کار را انجام داد.

حالت دوم: دو درایه‌ی یک به صورت متقارن نسبت به قطر اصلی قرار گیرند (رابطه متقارن است). در این صورت با توجه به این‌که درایه‌ی متناظر (b,c) برابر صفر است و درایه‌های متناظر زوج‌های مرتب (a,b) و (a,c) برابر یک است، به $\binom{3}{1}=3$ طریق می‌توان این انتخاب را انجام داد.

بنابراین تعداد رابطه‌های مورد نظر برابر است با $3+1=4$.

توجه: در روش حل حالت دوم دقت کنید که چون رابطه متقارن است، خانه‌های بالای قطر اصلی ماتریس M را در نظر گرفتیم.

40- گزینه‌ی (3)

چون رابطه‌ی R غیر ترایایی است و دو عضو دارد، باید دو زوج مرتب یا به صورت (x,y) و (y,z) (که x و y و z سه عضو متمایز هستند) و یا به صورت (y,x) و (x,y) در رابطه‌ی R موجود باشد. در حالت اول برای x و y و z به ترتیب 3، 2 و 1 انتخاب وجود دارد (یعنی $3\times2\times1=6$ انتخاب). در حالت دوم به 3 روش می‌توان $(x,y),(y,x)$ را انتخاب کرد $\{(a,c),(c,a)\}, \{(a,b)(b,a)\}$ و $\{(c,b),(b,c)\}$ پس در کل تعداد روابط موجود برابر است با $6+3=9$.

41- گزینه‌ی (2)

رابطه‌ی 2 عضوی مورد نظر، ترایایی است و شامل (a,b) می‌باشد. عضو دیگر رابطه می‌تواند یا به صورت (x,x) باشد (که در این حالت 4 انتخاب برای x وجود دارد) یا به صورت (x,y) که در آن $x\neq b$ و $y\neq a$ (به دلیل ترایایی بودن رابطه). در این حالت $3\times2=6$ انتخاب برای (x,y) وجود دارد. پس در کل تعداد روابط موجود برابر است با $6+4=10$.

42- گزینه‌ی (2)

اگر M ماتریس رابطه باشد، درایه‌های قطر اصلی M (که تعدادشان 4 تاست) برابر یک است (به دلیل بازتابی بودن رابطه). چون رابطه، 5 عضوی است باید یک درایه از $16-4=12$ درایه‌ی باقی‌مانده را برابر «1» قرار دهیم. پس تعداد روابط ممکن برابر است با $\binom{12}{1}=12$.

توجه: در این مسأله ترایایی بودن R تاثیری در انتخاب این درایه ندارد زیرا به دلیل بازتابی بودن رابطه، 4 عضو رابطه به صورت (x,x) هستند، پس عضو پنجم هم می‌تواند به صورت (x,y) باشد و هم به صورت (y,z). (البته با شرط $x\neq y$)

43- گزینه‌ی (4)

چون رابطه، غیر ترایایی است باید دو زوج به صورت (x,y) و (y,z) باشند که در آن x، y و z، سه عضو متمایز از مجموعه‌ی A هستند. برای x، y و z به ترتیب 4 ، 3 و 2 انتخاب وجود دارد. پس تعداد روابط ممکن برابر است با: $2\times3\times4=24$

(توجه کنید به دلیل پادتقارنی بودن رابطه، دو زوج مرتب نمی‌توانند به صورت (x,y) و (y,x) باشند).

44- گزینه‌ی (2)

چون رابطه، متقارن و ترایایی است، در صورت وجود زوج مرتبی مانند (x,y) که در آن $x\neq y$، زوج‌های مرتب (y,x)، (x,x) و (y,y) نیز باید در رابطه موجود باشند. چون این رابطه 5 عضو دارد عضو دیگر را می‌توان به صورت (z,z) (که در آن $z\neq x$ و $z\neq y$) در نظر گرفت. پس در کل تعداد روابط موجود برابر است با $\binom{4}{2}\binom{2}{1}=12$.

نکته‌ی مهم: تستهای 40 تا 44 بسیار دشوار طراحی شده‌اند. لذا فقط جنبه‌ی آموزشی دارند. بنابراین اگر در حل آن‌ها دچار مشکل شدید، جای نگرانی نیست!

فصل ۳

تست‌های مرور (بخش‌های ۵ و ۶)

پاسخ‌های تشریحی

1- گزینه‌ی (4)

فرض کنید S، مجموعه‌ی اعضای همایش، A_1 مجموعه‌ی معلمانی که ریاضی اول و A_2 مجموعه‌ی معلمانی باشند که ریاضی دوم تدریس می‌کنند. با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$|S|=120\ ,\ |A_1|=70\ ,\ |A_2|=45\ ,\ |A_1\cap A_2|=20$

مجموعه‌ی معلمانی که هیچ از این دو درس را تدریس نمی‌کنند، برابر مکمل مجموعه‌ی $A_1\cup A_2$ است. لذا تعداد این اعضا برابر است با:

$|S|-|A_1\cup A_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=120-70-45+20=25$

2- گزینه‌ی (4)

فرض کنید S، مجموعه‌ی اعضای موسسه‌ی تحقیقاتی باشد. A_1، A_2 و A_3 را به ترتیب مجموعه‌ی اعضایی که آلمانی، اسپانیایی و انگلیسی می‌دانند، در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسأله داریم:

$|S|=40\ ,\ |A_1|=15\ ,\ |A_2|=17\ ,\ |A_3|=11\ ,\ |A_1\cap A_2|=7\ ,\ |A_1\cap A_3|=4\ ,\ |A_2\cap A_3|=4\ ,\ |A_1\cap A_2\cap A_3|=2$

$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|=|S|-|A_1|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|=40-15-17-11+7+4+4-2=10$

3- گزینه‌ی (3)

A_1 و A_2 را مجموعه‌ی اعدادی در نظر می‌گیریم که به ترتیب بر 3 و 5 بخش‌پذیرند، لذا جواب سؤال برابر است با:

$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=100-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=100-[\frac{100}{3}]-[\frac{100}{5}]+[\frac{100}{15}]=53$

4- گزینه‌ی (1)

فرض کنید A_1 و A_2 به ترتیب مجموعه مضارب 2 و 3 باشند. تعداد اعدادی که فقط به یکی از این دو مجموعه تعلق داشته باشند، برابر است با:

$|A_1\triangle A_2|=|A_1|+|A_2|-2|A_1\cap A_2|=[\frac{100}{2}]+[\frac{100}{3}]-2\times[\frac{100}{6}]=51$

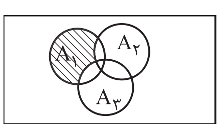
5- گزینه‌ی (2)

فرض کنید A_1 و A_2 به ترتیب مجموعه‌ی اعدادی باشند که بر 4 و 6 بخش‌پذیرند. تعداد اعدادی که بر حداقل یکی از این دو عدد بخش‌پذیرند، برابر است با:

$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|=[\frac{100}{4}]+[\frac{100}{6}]-[\frac{100}{12}]=25+16-8=33$

6- گزینه‌ی (2)

فرض کنید A_1، A_2 و A_3 مجموعه‌ی اعدادی باشند که به ترتیب بر 2، 3 و 7 بخش‌پذیرند. با توجه به شکل تعداد اعدادی که بر 2 بخش‌پذیرند ولی بر هیچ‌یک از 3 و 7 بخش‌پذیر نیستند، برابر است با:



$|A_1|-|A_1\cap(A_2\cup A_3)|=|A_1|-|A_1\cap A_2\cup A_1\cap A_3|$

$=|A_1|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|=[\frac{100}{2}]-[\frac{100}{6}]-[\frac{100}{14}]+[\frac{100}{42}]=50-16-7+2=29$

7- گزینه‌ی (1)

فرض کنید A_1، A_2 و A_3، مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین 71 و 280 باشند که به ترتیب بر 2، 3 و 7 بخش‌پذیرند. تعداد اعدادی که بر هیچ‌یک از 2، 3 و 7 بخش‌پذیر نیستند، برابر است با:

$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$

$=210-[\frac{210}{2}]-[\frac{210}{3}]-[\frac{210}{7}]+[\frac{210}{6}]+[\frac{210}{14}]+[\frac{210}{21}]-[\frac{210}{42}]=210-105-70-30+35+15+10-5=60$

8- گزینه‌ی (3)

فرض کنید S مجموعه‌ی اعداد پنج رقمی با ارقام 1، 2 و 3 باشد و A_1، A_2 و A_3 مجموعه‌ی اعدادی از S باشند که به ترتیب ارقام 1، 2 و 3 را ندارند. لذا تعداد اعداد 5 رقمی با ارقام 1، 2 و 3 که هر 3 رقم را دارند برابر است با:

$$|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$
$$=3^5-2^5-2^5-2^5+1+1+1-0=3(3^4-2^5+1)=150$$

(در واقع این مجموعه، معادل متمم مجموعه‌ی اعداد 5 رقمی با ارقام 1، 2 و 3 می‌باشد که حداقل یکی از ارقام 1، 2 یا 3 را ندارد)

9- گزینه‌ی (2)

فرض کنید S مجموعه‌ی کلمات چهار حرفی با حروف a، b، c، d، e و f باشد و A زیرمجموعه‌ای از S باشد که حرف اول کلمات آن با هیچ‌یک از حروف دیگر کلمه برابر نیست. لذا تعداد کلمات مورد نظر سؤال برابر است با:

$$|S|-|A|=6^4-6\times5^3=6(6^3-5^3)=546$$

10- گزینه‌ی (2)

برای این‌که دقیقاً دو حرف از کلمه‌ی $dream$ در جای اصلی خود باشند، باید هیچ‌کدام از 3 حرف دیگر این کلمه در جای اصلی خود قرار نگیرد. تعداد حالاتی که دو حرف می‌توانند در جای اصلی خود قرار گیرند برابر است با $\binom{5}{2}$. حال فرض کنید S کل جایگشت‌های 3 حرف دیگر این کلمه باشد و A_1، A_2 و A_3 مجموعه‌ی جایگشت‌هایی باشند که به ترتیب یکی از حروف سر جای اصلی خود باشند. لذا حالاتی که هیچ‌کدام از این 3 حرف سر جای اصلی خود قرار نمی‌گیرند، برابر است با:

$$|S|-3|A_1|+3|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_2\cap A_3|=3!-3\times2!+3\times1-1=2$$

پس تعداد جایگشت‌هایی از حروف کلمه‌ی $dream$ که دقیقاً دو حرف آن سر جای اصلی خود هستند برابر است با:

$$\binom{5}{2}\times2=20$$

11- گزینه‌ی (1)

فرض کنید A_1 و A_2 به ترتیب مجموعه روابط بازتابی و تقارنی روی مجموعه‌ی A باشد. لذا تعداد روابط بازتابی و غیرتقارنی روی مجموعه‌ی A برابر است با:

$$|A_1\cap\bar{A}_2|=|A_1|-|A_1\cap A_2|=2^6-2^3=2^3(2^3-1)=56$$

12- گزینه‌ی (4)

فرض کنید S مجموعه‌ی روابط روی A باشد که شامل (a,b) هستند. A_1 و A_2 را زیرمجموعه‌هایی از S در نظر می‌گیریم که به ترتیب شامل روابط بازتابی و تقارنی روی A باشند. لذا تعداد روابط روی A، شامل (a,b) که نه بازتابی‌اند و نه تقارنی، برابر است با:

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=|\overline{A_1\cup A_2}|=|S|-|A_1\cup A_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=2^8-2^5-2^3\times2^2+2^2=196$$

13- گزینه‌ی (4)

فرض کنید S مجموعه‌ی کل روابط روی A، A_1 مجموعه‌ی روابط متقارن و A_2 مجموعه‌ی روابط پادمتقارن روی A باشد. پس تعداد روابط غیرمتقارن و غیر پادمتقارن روی A، برابر است با:

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=|\overline{A_1\cup A_2}|=|S|-|A_1\cup A_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=2^9-2^3\times2^3-3^3\times2^3+2^3=240$$

14- گزینه‌ی (4)

فرض کنید A_1 و A_2 به ترتیب مجموعه‌ی روابط بازتابی و پادتقارنی روی مجموعه‌ی A باشند. تعداد روابطی که حداقل یکی از دو ویژگی بازتابی و تقارنی را دارند برابر است با:

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|=2^6+3^3\times2^3-3^3=253$$

15- گزینه‌ی (3)

فرض کنید A_1، A_2 و A_3 به ترتیب مجموعه‌ی روابط بازتابی، پادتقارنی و تقارنی روی مجموعه‌ی A باشند. تعداد روابطی که حداقل 2 تا از ویژگی‌های بازتابی، تقارنی و پادتقارنی را داشته باشد برابر است با:

$$|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-2|A_1\cap A_2\cap A_3|=3^3+2^3+2^3-2=41$$

16- گزینه‌ی (2)

تعداد جواب‌های معادله‌ی $x+y+z=12$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است با:

$$\binom{12-1}{3-1}=\binom{11}{2}=\frac{11!}{2!9!}=55$$

17- گزینه‌ی (3)

تعداد جواب‌های معادله‌ی $x+y+z=8$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x\geq -1$، $y\geq -1$ و $z\geq -1$، مورد نظر سؤال است که طبق قضیه‌ی 2 بخش 3-5 ، برابر است با:

$$\binom{8+3-1-(-3)}{3-1}=\binom{13}{2}=\frac{13!}{2!11!}=78$$

18- گزینه‌ی (4)

x_3 می‌تواند مقادیر 0، 1، 2 و 3 را اختیار کند. پس تعداد جواب‌ها را در 4 حالت پیدا می‌کنیم:

1) $x_3=0\Rightarrow x_1+x_2=15\Rightarrow \text{lÀJ¼] jk÷U}=\binom{15+2-1}{2-1}=\binom{16}{1}=16$

2) $x_3=1\Rightarrow x_1+x_2=10\Rightarrow \text{lÀJ¼] jk÷U}=\binom{10+2-1}{2-1}=\binom{11}{1}=11$

3) $x_3=2\Rightarrow x_1+x_2=5\Rightarrow \text{lÀJ¼] jk÷U}=\binom{5+2-1}{2-1}=\binom{6}{1}=6$

4) $x_3=3\Rightarrow x_1+x_2=0\Rightarrow \text{lÀJ¼] jk÷U}=1$

پس روی هم $16+11+6+1=34$ جواب صحیح نامنفی برای معادله وجود دارد.

19- گزینه‌ی (2)

فرض کنید در 4 لانه به ترتیب x_1، x_2، x_3 و x_4 کبوتر قرار گیرند. در این صورت $x_1+x_2+x_3+x_4=15$. چون در هر لانه حداقل 2 کبوتر قرار می‌گیرد، پس برای هر $1\leq i\leq 4$، $x_i\geq 2$. بنابراین تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ با شرط $x_i\geq 2\ (1\leq i\leq 4)$ برابر است با:

$$\binom{15+4-1-(8)}{4-1}=\binom{10}{3}$$

20- گزینه‌ی (4)

از نامعادله‌ی داده شده نتیجه می‌گیریم $x_1+x_2+x_3=12$ یا $x_1+x_2+x_3=11$ یا ... $x_1+x_2+x_3=0$. تعداد جواب‌های هر کدام از این معادلات در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی به ترتیب برابر است با $\binom{14}{2}$، $\binom{13}{2}$ و $\cdots$ $\binom{2}{2}$. پس تعداد جواب‌های نامعادله‌ی داده شده در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی برابر است با:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{14}{2}=\binom{15}{3}=\binom{15}{12}$$

(توجه کنید که $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ و $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$)

21- گزینه‌ی (1)

فرض کنید S مجموعه‌ی تمام جواب‌های معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرط $x_i\geq 1$ باشد و A_i مجموعه جواب‌هایی از S با شرط $x_i\geq 6\ (1\leq i\leq 3)$ باشد. پس تعداد جواب‌هایی از S که در هیچ‌یک از A_iها $(1\leq i\leq 3)$ قرار ندارند، مورد نظر سوال است. این تعداد برابر است با:

$$|S|-3|A_1|+3|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_2\cap A_3|=\binom{12-(3)}{2}-3\binom{12-(1+1+6)}{2}+3\times 0-0=\binom{9}{2}-3\binom{4}{2}+3\times 0=18$$

22- گزینه‌ی (2)

از نامعادله‌ی داده شده نتیجه می‌گیریم $x+y+z=10$ یا $x+y+z=9$ یا ... $x+y+z=1$. تعداد جواب‌های هر کدام از این معادلات در مجموعه‌ی اعداد طبیعی به ترتیب برابر است با: $\binom{9}{2}$، $\binom{8}{2}$، ⋯، $\binom{2}{2}$، 0 و 0. پس تعداد جواب‌های نامعادله‌ی داده شده در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است با:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{8}{2}+\binom{9}{2}=\binom{10}{3}$$

23- گزینه‌ی(1)

در واقع مجموعه جواب‌های معادلات $x+y+z=15$ یا $x+y+z=14$ یا ... یا $x+y+z=10$، با شرایط $x\geq 2$، $y\geq 3$ و $z\geq 5$ مورد نظر سؤال است، لذا تعداد این جواب‌ها برابر است با:

$$\binom{17-10}{2}+\binom{16-10}{2}+\binom{15-10}{2}+\binom{14-10}{2}+\binom{13-10}{2}+\binom{12-10}{2}=\sum_{n=2}^{7}\binom{n}{2}=\binom{8}{3}$$

24- گزینه‌ی(1)

فرض کنید به هر نفر به ترتیب x_1، x_2، x_3 و x_4 آبنبات تعلق گیرد. در این صورت $x_1+x_2+x_3+x_4=30$. چون تعداد آبنبات‌هایی که به هر نفر می‌رسد مضربی از 3 است، پس $x_i=3x'_i$ که در آن x'_i یک عدد صحیح نامنفی است و $1\leq i\leq 4$. (توجه کنید در مسأله ذکر نشده که به هر نفر حداقل یک آبنبات برسد پس مجموعه‌ی جواب‌ها را در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی در نظر می‌گیریم). لذا تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $3(x'_1+x'_2+\cdots+x'_4)=30$ مورد نظر سؤال است که برابر است با: $\binom{10+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}$

25- گزینه‌ی (2)

فرض کنید S مجموعه جواب‌های معادله‌ی $x+y+z=10$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و A مجموعه جواب‌های این معادله در مجموعه‌ی اعداد طبیعی با شرط $x\geq 5$ باشد. (توجه کنید که چون جواب‌ها در مجموعه‌ی اعداد طبیعی در نظر گرفته می‌شوند، داریم $y\geq 1$ و $z\geq 1$) تعداد جواب‌های معادله با شرط $x\leq 4$ برابر است با:

$$|S|-|A|=\binom{12-(3)}{2}-\binom{12-(7)}{2}=\binom{9}{2}-\binom{5}{2}=36-10=26$$

26- گزینه‌ی (1)

S را مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x+y+z=10$ و A_1 و A_2 را مجموعه جواب‌هایی از S به ترتیب با شرط $x\geq 7$ و $y\geq 8$ در نظر می‌گیریم. پس تعداد جواب‌های مورد نظر سؤال برابر است با:

$$|S|-|A_1\cup A_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=\binom{12}{2}-\binom{12-7}{2}-\binom{12-8}{2}+0=66-10-6=50$$

27- گزینه‌ی(1)

فرض کنید تعداد سکه‌هایی که به هر نفر می‌رسد به ترتیب برابر x_1، x_2 و x_3 باشد. بنابراین $x_1+x_2+x_3=12$. لذا تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=12$ با شرط $x_i\leq 8$، $(1\leq i\leq 3)$ مورد نظر سؤال است. فرض کنید S مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=12$ و A_1، A_2 و A_3 به ترتیب مجموعه جواب‌هایی از S با شرط $x_1\geq 9$، $x_2\geq 9$ و $x_3\geq 9$ باشند. لذا مطلوب سؤال برابر است با:

$$|S|-3|A_1|+3|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_2\cap A_3|=\binom{14}{2}-3\binom{14-9}{2}+3\times 0-0=91-30=61$$

28- گزینه‌ی(3)

از هر 20 عدد صحیح متوالی، $\varphi(20)=8$ عدد نسبت به 20 اول‌اند. چون مجموعه‌ی $\{21,22,\cdots,800\}$ شامل 780 عدد متوالی است و با توجه به این‌که $780=39\times 20$، جواب برابر است با: $39\varphi(20)=312$

توجه: دقت کنید که $\varphi(20)=20(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=8$

29- گزینه‌ی (1)

فرض کنید S مجموعه‌ی کل توابع تعریف شده از A به B باشد. همچنین A_1 و A_2 را مجموعه‌ی توابعی در نظر بگیرید که برد آن‌ها به ترتیب شامل عدد 5 و 7 نیست. داریم:

$$|S|=2^3=8\ ,\ |A_1|=1\ ,\ |A_2|=1\ ,\ |A_1\cap A_2|=0$$

پس تعداد توابعی که اعداد 5 و 7 در بردشان قرار دارد (توابع پوشا) برابر است با:

$$|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=8-1-1+0=6$$

30- گزینه‌ی (4)

A_1، A_2 و A_3 را مجموعه‌ی توابعی در نظر می‌گیریم که برد آن‌ها به ترتیب شامل a، b و c نیست. بنابراین تعداد توابع پوشا برابر است با:

$$(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=3^5-3\times2^5+3-0=150$$

31- گزینه‌ی (4)

S را مجموعه‌ی کل توابع تعریف شده از A به B در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید A_1 و A_2 مجموعه‌ی توابعی از S باشند که برد آن‌ها شامل یکی از اعضای B نیست. لذا تعداد توابع پوشا از A به B برابر است با:

$$(\overline{A_1\cup A_2}|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=2^5-2\times1+0=30$$

32- گزینه‌ی (1)

از هر 60 عدد صحیح متوالی، $\varphi(60)=16$ عدد نسبت به 60 اول‌اند. مجموعه‌ی $\{35,36,\cdots,94\}$ شامل 60 عدد صحیح متوالی است. لذا پاسخ برابر است با: $\varphi(60)=16$

33- گزینه‌ی (3)

مجموعه‌ی مورد نظر همان $\{1,2,3,\cdots,45\}$ است که اعضای آن در عدد 10 ضرب شده‌اند. چون $(10,21)=1$ لذا ضرب 10 تأثیری در حل این سؤال ندارد و ما همان مجموعه $\{1,2,3,\cdots,45\}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم از هر 21 عدد متوالی دقیقاً $\varphi(21)=12$ عدد نسبت به 21 اول‌اند. چون مجموعه‌ی مورد نظر شامل 45 عدد متوالی است و $45=2\times21+3$، پس در مجموعه‌ی $\{1,2,\cdots,42\}$ دقیقاً $2\varphi(21)=24$ عدد نسبت به 21 اول‌اند. ضمناً از بین اعداد 43، 44 و 45 اعداد 43 و 44 نیز نسبت به 21 اول‌اند. لذا جواب برابر است با $24+2=26$.

34- گزینه‌ی (3)

معادله در صورتی جواب دارد که $(a,105)=1$. چون از هر 105 عدد صحیح متوالی $\varphi(105)=48$ عدد نسبت به 105 اول‌اند، پس معادله به ازای 48 عدد متعلق به مجموعه‌ی $\{1,2,\cdots,105\}$، جواب دارد.

35- گزینه‌ی (3)

معادله در صورتی جواب دارد که $(a,40)|21$. چون $21=3\times7$ و $40=2^3\times5$، لذا معادله در صورتی جواب دارد که $(a,40)=1$ باشد. پس a نباید بر هیچ‌یک از اعداد 2 و 5 بخش‌پذیر باشد. یعنی $(a,10)=1$. از هر 10 عدد متوالی $\varphi(10)=4$ عدد نسبت به 10 اول‌اند. پس در مجموعه‌ی $\{1,2,\cdots,300\}$ دقیقاً $30\varphi(10)=120$ عدد نسبت به 10 اول‌اند. (توجه کنید $300=3\times10$) پس معادله‌ی سیاله، به ازای 120 عدد متعلق به مجموعه‌ی مورد نظر جواب دارد.