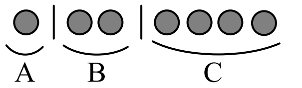
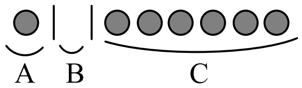
۳-۵: معادلات خطی با ضرایب واحد

مسأله‌ی ۱: **به چند طریق می‌توان ۷ گوی یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد؟ (ممکن است به بعضی‌ها گوی نرسد.)**

حل: برای تقسیم ۷ گوی یکسان می‌توانیم از $۲ = ۱ - ۳$ خط عمودی استفاده کنیم. به طور مثال، ۲ روش تقسیم به صورت زیر است:



یکی A، ۲ تا B و ۴ تا C



یکی A، هیچی B و ۶ تا C

همان‌طور که مشخص شد، نحوه‌ی قرارگیری گوی‌ها و خطوط در کنار هم، روش‌های توزیع ۷ گوی را بین ۳ نفر مشخص می‌کند. لذا برای شمارش روش‌های این توزیع، می‌توانیم از جایگشت با تکرار استفاده کنیم:

(۷شی از نوع ۱ و ۲ شی از نوع ۲) شی $۷ + ۲ = ۹$ نحوه‌ی قرارگیری $= \frac{۹!}{۷! \times ۲!} = ۳۶$

تذکر: فرض کنید تعداد گوی‌هایی که A، B و C دریافت می‌کنند، به ترتیب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ باشد، در این‌صورت $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$. هم‌چنین متغیرها متعلق به مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی (یعنی مجموعه‌ی $\{۰, ۱, ۲, ...\}$)، می‌باشند.

به هر معادله به‌صورت $x_۱ + x_۲ + ... + x_k = n$ یک معادله‌ی خطی با ضرایب واحد گفته می‌شود (n و k دو عدد مثبت و معلوم هستند و x_i ها مجهول‌های این معادله‌اند). علت این نام‌گذاری این است که در این معادله، همه‌ی مجهول‌ها (یعنی x_i ها) به‌صورت خطی (عبارت درجه‌ی ۱) آمده‌اند و ضریب همه‌ی آن‌ها برابر واحد است.

یادداشت: با توجه به مسأله‌ی قبل، هر جواب این معادله را می‌توان با یک نحوه‌ی قرارگیری n گوی یکسان و $k - ۱$ خط نشان داد، یا در واقع با یک جایگشت با تکرار از n شیء نوع ۱ و $k - ۱$ شیء نوع ۲، تعداد چنین جایگشت‌هایی برابر است با: $\frac{(n + k - ۱)!}{n!(k - ۱)!}$، که آن را می‌توانیم با $\binom{n + k - ۱}{k - ۱}$ یا $\binom{n + k - ۱}{n}$ نیز نشان دهیم.

قضیه‌ی ۱: **تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + ... + x_k = n$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی برابر $\binom{n + k - ۱}{k - ۱}$ است.**

تست ۱: **چند دسته‌ی ۷ شاخه‌ای از سه نوع گل موجود می‌توان تشکیل داد؟**

۱) ۱۵ **۲) ۲۱** **۳) ۲۸** **۴) ۳۶**

حل: فرض کنید از سه نوع گل موجود به ترتیب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ شاخه انتخاب کنیم. در این‌صورت $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$. با توجه به توضیحاتی که دادیم تعداد راه‌های انتخاب ۷ شاخه از سه نوع گل، برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی است. این تعداد بنا بر قضیه‌ی قبل برابر $\binom{۹}{۲} = ۳۶$ است. بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

مسأله‌ی ۲: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x+y+z=15$ را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید:

الف) $x \geq 3$

ب) $x > 3$، $y > 4$ و $z \geq 2$

حل: الف) از تغییر متغیر $x' = x - 3$ استفاده می‌کنیم. اگر $x \geq 3$، در این صورت $x' \geq 0$، داریم:

$$x+y+z=15 \xrightarrow{x=x'+3} x'+y+z=12 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{14}{2} = 91$$

ب) با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x > 3 \Rightarrow x \geq 4 \xrightarrow{x'=x-4} x' \geq 0$$
$$y > 4 \Rightarrow y \geq 5 \xrightarrow{y'=y-5} y' \geq 0$$
$$z \geq 2 \xrightarrow{z'=z-2} z' \geq 0$$
$$x+y+z=15 \Rightarrow x'+4+y'+5+z'+2=15 \Rightarrow x'+y'+z'=4 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{6}{2} = 15$$

قضیه‌ی ۲: **فرض کنید عددهای صحیح c_1، c_2،... و c_k داده شده باشند. در این‌صورت تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x_1 \geq c_1$، $x_2 \geq c_2$،... و $x_k \geq c_k$ برابر $\binom{n+k-1-(c_1+c_2+\ldots+c_k)}{k-1}$ است.**

مسأله‌ی ۳: معادله‌ی $x+y+z=20$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x \geq 0$، $y \geq -2$ و $z \geq 7$ چند جواب دارد؟

حل: با توجه به قضیه‌ی فوق پاسخ برابر $\binom{20+3-1-(0-2+7)}{2} = \binom{17}{2}$ است.

تست ۲: تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1+x_2+x_3=15$ به شرط $x_i \geq 2$ چند است؟ $(i=1,2,3)$

۱) ٤٥ ۲) ٥٥ ۳) ۹۱ ٤) ۱۳٦

حل: با توجه به قضیه‌ی فوق پاسخ برابر $\binom{15+3-1-(3\times 2)}{3-1} = \binom{11}{2}$ است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تذکر: در حالت خاص قضیه‌ی قبل که $x_i \geq 1$، در واقع با جواب‌های طبیعی معادله مواجه‌ایم. بنابراین قضیه‌ی زیر قابل بیان است:

قضیه‌ی ۳: **تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است.**

➢ **مثال:** تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر $\binom{9}{2}$ است.

تست ۳: ۸ کبوتر یکسان به چند طریق می‌توانند در ۵ لانه‌ی متمایز قرار گیرند به‌طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

۱) $\binom{12}{4}$ ۲) $\binom{7}{4}$ ۳) $\binom{8}{4}$ ٤) $\binom{8}{5}$

حل: فرض کنید در ۵ لانه به ترتیب x_1،... و x_5 کبوتر قرار گیرند، در این‌صورت $x_1+\ldots+x_5=8$. چون می‌خواهیم هیچ لانه‌ای خالی نماند، پس برای هر $1 \leq i \leq 5$، $x_i \geq 1$. نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+\ldots+x_5=8$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی یعنی برابر $\binom{7}{4}$ است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تست ۴: نامعادله‌ی $100 < (x_1+x_2+x_3)^3 < 300$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ (آزاد- ۸۶)

۱) ٤۹ ۲) ۲۱ ۳) ۱٦ ٤) ٦

حل: از نامعادله‌ی داده شده نتیجه می‌گیریم $5 \le x_1+x_2+x_3 \le 6$، پس $x_1+x_2+x_3=5$ یا $x_1+x_2+x_3=6$. تعداد جواب‌های این دو معادله در مجموعه‌ی اعداد طبیعی به ترتیب برابر $\binom{4}{2}$ و $\binom{5}{2}$ است، لذا تعداد جواب‌های نامعادله‌ی داده شده در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر $\binom{5}{2}+\binom{4}{2}=10+6=16$ است. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

مسأله‌ی ۴: در بسط $(x+y+z+w)^7$ چند جمله‌ی متمایز ظاهر می‌شود؟

حل: با توجه به تساوی $(x+y+z+w)^7 = \underbrace{(x+y+z+w)...(x+y+z+w)}_{\text{هفت بار}}$ نتیجه می‌گیریم هر جمله از این بسط به‌صورت $x^a y^b z^c w^d$ است که a، b، c و d اعداد صحیح نامنفی‌اند و $a+b+c+d=7$ (زیرا هر جمله از حاصل‌ضرب فوق از ضرب ۷ متغیر تشکیل شده است که یکی از پرانتز اول، یکی از پرانتز دوم،... و یکی از پرانتز هفتم انتخاب شده است در واقع مفهوم جمله‌ی عمومی $x^a y^b z^c w^d$ این است که از a پرانتز x ، از b پرانتز y ، از c پرانتز z و از d پرانتز w انتخاب شده است). در این‌جا مقادیر a، b، c و d تعیین کننده‌ی جملات بسط‌اند، لذا تعداد جملات متمایز بسط، برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $a+b+c+d=7$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی، یعنی برابر $\binom{10}{3}$ است.

مسأله‌ی ۵: معادله‌ی $x_1^4+x_2+x_3+x_4=12$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

حل: توجه کنید چنان‌چه $x_1 \ge 2$، در این‌صورت معادله‌ی فوق در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی هیچ جوابی ندارد. پس جواب‌های این معادله را می‌توانیم به دو دسته‌ی مجزا تقسیم کنیم.

دسته‌ی اول: جواب‌هایی که $x_1=0$. اگر $x_1=0$، آن‌گاه معادله‌ی اصلی به $x_2+x_3+x_4=12$ تبدیل می‌شود. تعداد جواب‌های این معادله در مجموعه‌ی اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{14}{2}$ است.

دسته‌ی دوم: جواب‌هایی که $x_1=1$. اگر $x_1=1$، آن‌گاه معادله‌ی اصلی به $x_2+x_3+x_4=11$ تبدیل می‌شود. تعداد جواب‌های این معادله در مجموعه‌ی اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{13}{2}$ است.

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم، پاسخ مسأله برابر $\binom{13}{2}+\binom{14}{2}$ است.

فصل ۳

معادلات خطی با ضرایب واحد

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- معادله‌ی $x + y + z = ۵$ ، در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۲- چند دسته گل ۳ تایی از ٦ نوع گل مختلف می‌توان ساخت؟ (تکرار مجاز است)

۱) ۳۵ ۲) ۴۲ ۳) ۵۶ ۴) ۸۴

۳- به چند طریق می‌توان ۹ سیب مشابه را بین ٤ نفر توزیع کرد، به طوری‌که مجموع سیب‌های داده شده به نفر اول و دوم روی هم ۵ باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

٤- معادله‌ی $x + y + z = ۱۲$ ،در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۹۱ ۲) ۴۸ ۳) ۵۵ ۴) ۶۶

۵- معادله‌ی $x + y + z = ۱۳$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی چند جواب با شرط $x \geq ۳$ دارد؟

۱) ۶۶ ۲) ۵۵ ۳) ۷۸ ۴) ۹۱

٦- دستگاه $\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸ \\ x_۴ + x_۵ = ۵ \end{cases}$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۸۰ ۳) ۸۴ ۴) $\binom{۱۲}{۴}$

۷- معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۷$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی، چند جواب با شرط $x_۱ \geq ۴$ و $x_۲ > ۵$ دارد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

۸- به چند طریق می‌توان ۵ سیب یکسان را بین ٤ نفر توزیع کرد، به طوری‌که به یکی از آن‌ها، دقیقاً ۳ سیب برسد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۲۴ ۴) ۴۰

۹- معادله‌ی $۲x + y + z + w = ۹$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۰- معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۸$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی، چند جواب با شرط $x_i \geq ۴$ $i \in \{۱,۲,۳,۴\}$ دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۳۵ ۴) ۲۵۵

۱۱- ۱۱ کبوتر یکسان به چند طریق می‌توانند در ٤ لانه‌ی متمایز قرار بگیرند، به طوری‌که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۲۸۵ ۴) ۳۶۴

۱۲- به چند طریق می‌توان ۵ خودکار یکسان و ٤ مداد یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۱۵

* ۱۳- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی systems با حذف هر ۳ حرف s کلمه‌ی temy به‌دست می‌آید؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۵ ۴) ۵۶

۱٤- فرض کنید $A = (۱۰,۰,۰)$ ، $B = (۰,۱۰,۰)$ و $C = (۰,۰,۱۰)$ سه نقطه در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشند. درون و روی محیط مثلث ABC چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۵۵ ۴) ۶۶

۱۵- به چند طریق می‌توان ۷ سکه ۵۰ ریالی و یک سکه ۱۰۰ ریالی را بین ۳ نفر تقسیم کرد طوری‌که به هر نفر حداقل یک سکه برسد؟

۱) ۲۸ ۲) ۵۶ ۳) ۶۳ ۴) ۸۴

۱٦- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$ چند است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۸۰ ۳) ۵۴ ۴) ۳۶

۱۷- نامعادله‌ی $127 > (x_1 + x_2)^3 > 16$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۸- تعداد جملات حاصل از بسط $(x+y+z)^9$ چند تاست؟

۱) ۵۵ ۲) ۶۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۱۹- در بسط $(a+b+c+d)^7$ چند جمله وجود دارد که فاقد حرف b باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۱۲۰

۲۰- چند دسته‌ی ۳ تایی گل از ۵ نوع گل مختلف می‌توان ساخت؟ (تکرار مجاز است) (سراسری ـ ۸۰)

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۵ ۴) ۴۲

۲۱- معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ با شرط $x_i \in Z$ و $x_i \geq 0$ چند جواب دارد؟ (آزاد ـ ۸۰)

۱) $\binom{9}{6}$ ۲) $\binom{7}{5}+\binom{8}{6}$ ۳) $\binom{8}{5}+\binom{9}{6}$ ۴) $\binom{9}{5}+\binom{10}{6}$

۲۲- معادله‌ی $x_1 + x_2 + 10x_3 = 20$، چند جواب صحیح غیر منفی دارد؟ (آزاد ـ ۸۱)

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۳ ۴) ۴۱

۲۳- معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{x_3}$، چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟ (آزاد ـ ۸۲)

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۹

۲٤- معادله‌ی $(x_1 + x_2)^3 + x_3 + x_4 = 20$ چند جواب طبیعی دارد؟ (آزاد ـ ۸۵)

۱) ۲۱ ۲) ۱۱ ۳) ۲۲ ۴) $\binom{23}{20}$

فصل ۳
معادلات خطی با ضرایب واحد

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۳) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+...+x_k=n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$. لذا برای معادله‌ی $x+y+z=5$، داریم: **A**

$$k=3\,,\ n=5 \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌ها}} \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$$

۲- گزینه‌ی (۳) فرض کنید از ۶ نوع گل موجود، به ترتیب x_1، x_2، ... و x_6 شاخه انتخاب کنیم. لذا روش‌های ساختن دسته گل ۳ تایی برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=3$، که برابر است با: **B**

$$\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{6}=56$$

۳- گزینه‌ی (۴) ابتدا ۵ سیب را بین نفرهای اول دوم توزیع می‌کنیم: **B**

$$x_1+x_2=5 \xrightarrow{\text{روش‌های توزیع}} \binom{6}{1}=6$$

اکنون $9-5=4$ سیب باقی‌مانده را بین نفرهای سوم و چهارم توزیع می‌کنیم:

$$x_3+x_4=4 \xrightarrow{\text{روش‌های توزیع}} \binom{5}{1}=5$$

لذا طبق اصل ضرب جواب سؤال برابر است با $6\times5=30$.

۴- گزینه‌ی (۳) تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x_1+x_2+...+x_k=n$، برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$. لذا تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x+y+z=12$ برابر است با $55=\binom{12-1}{3-1}$. **A**

۵- گزینه‌ی (۱) با توجه به قضیه‌ی (۲)، تعداد جواب‌ها برابر است با: **A**

$$k=3\,,\ n=13\,,\ x\geq 3 \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌ها}} \binom{13+3-1-3}{3-1}=\binom{12}{2}=66$$

۶- گزینه‌ی (۳) معادله‌های $x_1+x_2+x_3=8$ و $x_4+x_5=5$ در مجموعه‌ی N، به ترتیب دارای $\binom{8-1}{3-1}$ و $\binom{5-1}{2-1}$ جواب می‌باشند. **B**

لذا طبق اصل ضرب تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه مورد نظر برابر است با $84=\binom{7}{2}\times\binom{4}{1}$.

۷- گزینه‌ی (۲) با توجه به قضیه‌ی(۲) تعداد جواب‌ها برابر است با $36=\binom{17+3-1-4-6}{3-1}$ **B**

توجه: دقت کنید که در مجموعه‌ی اعداد صحیح $x>5$ معادل $x\geq 6$ است.

۸- گزینه‌ی (۳) جواب سؤال برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=5$، با این شرط که یکی از x_i ها برابر ۳ باشد. لذا ابتدا به $\binom{4}{1}$ طریق می‌توان متغیری را که برابر ۳ است پیدا کرد. فرض کنید $x_1=3$، دراین صورت معادله به صورت $x_2+x_3+x_4=2$ تبدیل می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی آن برابر $\binom{4}{2}=6$ است. لذا طبق اصل ضرب تعداد روش‌های توزیع مطلوب سؤال برابر است با $4\times6=24$. **C**

تذکر: دقت کنید که وقتی یکی از متغیرها برابر ۳ است، دیگر بقیه‌ی متغیرها نمی‌توانند برابر ۳ باشند و این روش شمارش، به اشتباه حالتی را تکراری را نمی‌شمارد.

B **۹- گزینه‌ی(۴)** چون ضریب x غیر از یک است، باید برای x حالت‌بندی کنیم:

$$x=1 \Rightarrow y+z+w=7 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{6}{2}=15$$

$$x=2 \Rightarrow y+z+w=5 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{4}{2}=6$$

$$x=3 \Rightarrow y+z+w=3 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{2}{2}=1$$

واضح است که به ازای $x \geq 4$ برای معادله جواب طبیعی به دست نمی‌آید، لذا تعداد جواب‌ها برابر است با: $15+6+1=22$

B **۱۰- گزینه‌ی (۱)** با توجه به قضیه‌ی (۲) تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$\binom{18+4-1-4-4-4-4}{4-1}=\binom{5}{3}=\frac{5\times4\times3}{6}=10$$

A **۱۱- گزینه‌ی (۱)** روش‌های توزیع ۱۱ کبوتر در ۴ لانه‌ی متمایز، متناظر پیدا کردن تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=11$، که برابر است با:

$$\binom{11-1}{4-1}=\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{6}=120$$

B **۱۲- گزینه‌ی (۴)** روش‌های توزیع ۵ خودکار یکسان بین ۳ نفر، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=5$ که برابر است با $\binom{7}{2}=21$. هم‌چنین روش‌های توزیع ۴ مداد بین ۳ نفر نیز، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=4$، که برابر است با $\binom{6}{2}=15$. لذا طبق اصل ضرب تعداد روش‌های توزیع ۵ خودکار و ۴ مداد برابر است با $15\times21=315$.

۱۳- گزینه‌ی (۳) باید ۳ حرف s را در بین حروف کلمه temy قرار دهیم. فرض کنید x_1، x_2، ... و x_5 به‌ترتیب تعداد حروف s در ۵ فضای خالی ابتدا، انتها و بین حروف کلمه temy باشد. در این صورت $x_1+\ldots+x_5=3$ و لذا پاسخ برابر تعداد جوابهای این معادله در مجموعه اعداد صحیح نامنفی یعنی برابر $\binom{7}{4}=35$ است.

B **۱۴- گزینه‌ی (۴)** معادله صفحه مثلث ABC برابر $x+y+z=10$ است و درون و روی محیط این مثلث نقاطی از صفحه است که هر سه مختص x، y و z آنها نامنفی است. پس پاسخ مسأله برابر $\binom{12}{2}=66$ است.

B **۱۵- گزینه‌ی (۳)** برای سکه ۱۰۰ ریالی ۳ انتخاب وجود دارد و تعداد راههای توزیع سکه‌های ۵۰ ریالی برابر تعداد جوابهای معادله $x_1+x_2+x_3=7$ در مجموعه اعداد صحیح با شرایط $x_1\geq1$، $x_2\geq1$ و $x_3\geq0$ یعنی برابر $\binom{7}{2}=21$ است. پس پاسخ برابر $3\times21=63$ است.

B **۱۶- گزینه‌ی (۱)** با فرض $t\geq0$ داریم:

$$x_1+x_2+x_3\leq7 \Rightarrow x_1+x_2+x_3+t=7$$

در نتیجه تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+t=7$، با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3\leq7$ برابر است. لذا جواب سؤال برابر است با $\binom{10}{3}=120$.

B **۱۷- گزینه‌ی (۴)** با توجه به فرض سؤال داریم:

$$16<(x_1+x_2)^3<127 \Rightarrow 3\leq x_1+x_2\leq5$$

$$x_1+x_2=3 \Rightarrow \text{تعداد جواب طبیعی}=\binom{2}{1}=2$$

$$x_1+x_2=4 \Rightarrow \text{تعداد جواب طبیعی}=\binom{3}{1}=3$$

$$x_1+x_2=5 \Rightarrow \text{تعداد جواب طبیعی}=\binom{4}{1}=4$$

لذا نامعادله‌ی مورد نظر دارای $4+3+2=9$ جواب طبیعی است.

B **۱۸- گزینه‌ی (۱)** تذکر: تعداد جملات حاصل از بسط $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$، یعنی همان جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+\ldots+x_k=n$. لذا جواب سؤال برابر است $55=\binom{9+3-1}{3-1}$.

C **۱۹- گزینه‌ی (۳)** تعداد جملات بسط $(a+b+c+d)^7$ که فاقد حرف b باشند، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ به شرط این‌که $x_2=0$:

$$x_1+x_3+x_4=7 \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌ها}} \binom{9}{2}=36$$

B **۲۰- گزینه‌ی (۳)** تعداد گل‌های از هر نوع را با x_1، x_2، ... و x_5 نشان می‌دهیم. پس:

$$x_1+\ldots+x_5=3\ ,\ x_i\in Z\ ,\ x_i\geq 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{3+5-1}{5-1}=\binom{7}{4}=35$$

B **۲۱- گزینه‌ی (۱)** تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله برابر است با:

$$\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=\binom{9}{6}$$

B **۲۲- گزینه‌ی (۳)** واضح است که x_3 تنها می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ باشد. تعداد جواب‌ها را در ۳ حالت پیدا می‌کنیم:

$$1)\ x_3=0 \Rightarrow x_1+x_2=20 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{20+2-1}{2-1}=21$$

$$2)\ x_3=1 \Rightarrow x_1+x_2=10 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{11}{1}=11$$

$$3)\ x_3=2 \Rightarrow x_1+x_2=0 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=1$$

پس روی هم $1+11+21=33$ جواب داریم.

B **۲۳- گزینه‌ی(۳)** معادله را به صورت $x_3(x_1+x_2+x_3)=10$ می‌نویسیم و جواب‌ها را حالت‌بندی می‌کنیم:

$$1)\ x_3=1 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=10 \Rightarrow x_1+x_2=9 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{9+2-1}{2-1}=10$$

$$2)\ x_3=2 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=5 \Rightarrow x_1+x_2=3 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{4}{1}=4$$

حالت‌های دیگر به دلیل نامنفی بودن x_i ها امکان‌پذیر نیست. پس معادله‌ی اصلی $10+4=14$ جواب دارد.

C **۲۴- گزینه‌ی(۲)** چون $x_1+x_2\geq 2$، پس قطعاً $x_1+x_2=2$، زیرا $3^3>20$. بنابراین برای حل تست، باید تعداد جواب‌های طبیعی دو معادله‌ی $x_1+x_2=2$ و $x_3+x_4=12$ را بیابیم. معادله‌ی اول ۱ جواب و معادله‌ی دوم $\binom{12-1}{2-1}=11$ جواب دارد. درکل طبق اصل ضرب، $11\times1=11$ جواب داریم.

۳–۶: اصل شمول و عدم شمول

یکی از ابزارهای قوی شمارش اصل شمول و عدم شمول است. قبل از شروع بحث مساله‌ی زیر به درک بهتر این موضوع کمک می‌کند.

مسأله‌ی ۶: چند عضو از مجموعه‌ی $S=\{1,2,3,\dots,40\}$، بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر است؟

حل: مجموعه‌ی S شامل ۴۰ عضو است که باید اعدادی را که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیرند بشماریم. فرض کنید مجموعه‌ی A_1، اعدادی باشند که بر ۲ بخش‌پذیرند (مضارب ۲) و مجموعه‌ی A_2، شامل اعدادی باشد که بر ۳ بخش‌پذیرند (مضرب ۳). در این صورت داریم:

$$|A_1|=[\frac{40}{2}]=20 \quad , \quad |A_2|=[\frac{40}{3}]=13$$

اما برخی از اعداد که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیرند (اعضای مجموعه‌ی $A_1\cap A_2$) هم در A_1 و هم در A_2 شمرده شده‌اند. در واقع مضارب هر دو عدد (مضارب ۶) دوبار شمرده شده‌اند که باید یک‌بار آن‌ها را از $|A_1|+|A_2|$ کم کنیم. پس داریم:

اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیرند – اعدادی که بر ۲ بخش‌پذیرند + اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیرند = اعدادی که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیرند

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$

$$|A_1\cap A_2|=[\frac{40}{6}]=6 \Rightarrow |A_1\cup A_2|=20+13-6=27$$

مسأله‌ی ۷: در مساله‌ی قبل، چند عضو از مجموعه نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش‌پذیرند؟

حل: مجموعه‌ی $\bar{A}_1\cap\bar{A}_2$ مجموعه‌ای است که اعضای آن نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش‌پذیرند که همان متمم مجموعه $A_1\cup A_2$ است:

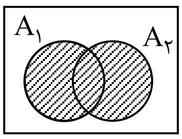
$$\bar{A}_1\cap\bar{A}_2=|\overline{A_1\cup A_2}|=|S|-|A_1\cup A_2|=40-27=13$$

اصل شمول و عدم شمول برای ۲ مجموعه

فرض کنید A_1، A_2،... و A_n مجموعه‌هایی متناهی باشند. اصل شمول و عدم شول فرمولی برای محاسبه‌ی تعداد اعضای $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$ بر حسب تعداد اعضای A_1، A_2،... و A_n و اشتراک‌های این مجموعه‌ها ارائه می‌دهد. در این بخش این فرمول را در حالتی که n برابر ۲ یا ۳ باشد به دست می‌آوریم و کاربردهای آن را در حل مسائل شمارشی بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۴: فرض کنید A_1 و A_2 مجموعه‌هایی متناهی باشند. در این‌صورت:

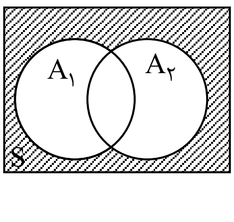
$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$



مسأله‌ی ۸: یک مؤسسه‌ی تحقیقاتی ۱۰۰ عضو دارد. ۶۰ نفر از آن‌ها زبان انگلیسی و ۴۵ نفر زبان آلمانی را می‌دانند و ۲۰ نفر به هر دو زبان مسلط‌اند. چند عضو این مؤسسه هیچ‌یک از دو زبان را <u>نمی‌دانند؟</u>

حل: فرض کنید S مجموعه‌ی اعضای مؤسسه باشد، A_1 مجموعه‌ی اعضایی که زبان انگلیسی را می‌دانند و A_2 مجموعه‌ی اعضایی که زبان آلمانی را می‌دانند. در این‌صورت با توجه به فرض مسأله:

$$|S|=100 \ , \ |A_1|=60 \ , \ |A_2|=45 \ , \ |A_1\cap A_2|=20$$



مجموعه‌ی اعضایی که هیچ‌یک از زبان‌های انگلیسی و آلمانی را نمی‌دانند، برابر مکمل مجموعه‌ی $A_1\cup A_2$ است. لذا تعداد این اعضا برابر است با:

$$|S|-|A_1\cup A_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=100-60-45+20=15$$

تست ۵: چند عدد از مجموعه‌ی $S=\{1,2,\dots,100\}$ حداقل بر یکی از ۲ و ۳ بخش‌پذیرند؟

۱) ۵۰ **۲) ۶۳** **۳) ۶۷** **۴) ۸۳**

حل: فرض کنید A_1 و A_2 مجموعه‌ی اعضایی از S باشند که به ترتیب بر ۲ و ۳ بخش‌پذیرند. در این‌صورت:

$|A_1|=[\frac{100}{2}]=50 \quad , \quad |A_2|=[\frac{100}{3}]=33$

هم‌چنین $A_1\cap A_2$ مجموعه‌ی اعضایی از S است که بر هر دوی ۲ و ۳ بخش‌پذیرند، لذا $A_1\cap A_2$ مجموعه‌ی اعضایی از S است که بر ۶ بخش‌پذیرند، پس $|A_1\cap A_2|=[\frac{100}{6}]=16$. مجموعه‌ی اعضایی از S که حداقل بر یکی از ۲ و ۳ بخش‌پذیرند برابر $A_1\cup A_2$ است، لذا پاسخ برابر است با:

$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|=50+33-16=67$

بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

مسأله‌ی ۹: چند تابع پوشا از مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه‌ی $B=\{1,2\}$ می‌توان نوشت؟

حل: اولاً دقت کنید که برای تشکیل یک تابع مانند f، از A به B، باید ۳ جای خالی زیر را پر کنیم:

$f(a)=\square \quad , \quad f(b)=\square \quad , \quad f(c)=\square$

مثلاً در حالت کلی بدون هیچ شرطی، هریک از جاهای خالی را می‌توان به ۲ حالت (با اعداد ۱ یا ۲) پر کرد، بنابراین در کل $2\times2\times2=8$ تابع از A به B می‌توان تشکیل داد. حال برای حل مسأله، ابتدا تعداد توابع غیر پوشا را حساب می‌کنیم. برای این منظور باید تعداد توابعی را حساب کنیم که حداقل یکی از اعداد ۱و۲ در برد آن‌ها نیست. داریم:

$|A_1|=$ تعداد توابع از A به B که ۱ در بردشان نیست $=1$

$|A_2|=$ تعداد توابع از A به B که ۲ در بردشان نیست $=1$

$|A_1\cap A_2|=$ تعداد توابع از A بر B که ۱ و ۲ در بردشان نیست $=0$

$|S|=$ کل توابع از A به B $=2^3=8$

$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=8-2=6$

راه دوم: اگر برای تابع مورد نظر فرض کنیم $f(c)=\square$ ، $f(b)=\square$ و $f(a)=\square$، برای پوشا بودن f باید هر دو عدد ۱ و ۲ در جاهای خالی قرار بگیرند، ولی چون جاهای خالی یکی بیشتر از اعضای B هستند، یکی از اعضای B دو بار تکرار می‌شوند:

تعداد جایگشت اعضای برد × تعداد روش‌های انتخاب عضو تکراری = تعداد روش‌های پر کردن جاهای خالی با ۱ و ۲

$=\binom{2}{1}\times\frac{3!}{2}=6$

دقت کنید که در جایگشت‌های اعضای برد، با یک جایگشت با تکرار که دو عضو یکسان دارد، مواجه‌ایم.

مسأله‌ی ۱۰: چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۷۰۰ وجود دارد که نسبت به ۴۸ اول باشد؟

حل: اعدادی نسبت به $48=2^4\times3$ اول هستند که بر هیچ یک از عوامل اول ۲ و ۳ بخش‌پذیر نباشند. A_i ها را مجموعه‌های متمم درنظر می‌گیریم:

تعداد اعدادی که بر ۲ بخش‌پذیرند $=|A_1|=[\frac{700}{2}]=350$

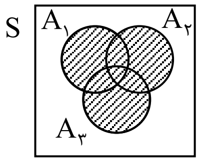
تعداد اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیرند $=|A_2|=[\frac{700}{3}]=233$

تعداد اعدادی که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیرند $=|A_1\cap A_2|=[\frac{700}{6}]=116$

$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=700-350-233+116=233$

اصل شمول و عدم شمول برای ۳ مجموعه

قضیه‌ی ۵: **فرض کنید $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ مجموعه‌هایی متناهی باشند. در این‌صورت، مطـابق نمـودار ون مقابل داریم:**



$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| =$$
$$|A_۱|+|A_۲|+|A_۳|-|A_۱ \cap A_۲|-|A_۱ \cap A_۳|-|A_۲ \cap A_۳|+|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$

مسأله‌ی ۱۱: **در چند عدد ۵ رقمی، هر سه رقم ۰، ۱و ۲ وجود دارند؟**

حل: فرض کنید S مجموعه‌ی اعداد ۵ رقمی باشد، در این‌صورت:

$$|S| = ۹\ ۱۰\ ۱۰\ ۱۰\ ۱۰ = ۹ \times ۱۰^۴$$

سه دسته از اعضای S برای ما مطلوب نیستند. یک دسته اعدادی که رقم ۰ را ندارند، دسته‌ی دیگر اعدادی کـه رقـم ۱ را ندارنـد و دسـته‌ی آخـر اعدادی که رقم ۲ را ندارند. این سه دسته را به ترتیب با $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ نشان می‌دهیم. اعداد مطلوب اعدادی هـستند کـه در هـیچ‌یـک از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار ندارند.

مجموعه‌ی $A_۱$ برابر مجموعه‌ی اعداد ۵ رقمی است که رقم ۰ را ندارند، لذا:

$$|A_۱| = ۹\ ۹\ ۹\ ۹\ ۹ = ۹^۵$$

به‌طور مشابه $|A_۲| = |A_۳| = ۸ \times ۹^۴$. مجموعه‌ی $A_۱ \cap A_۲$ برابر مجموعه‌ی اعداد ۵ رقمی است که هیچ‌یک از رقم‌های ۰ و ۱را ندارند، لذا:

$$|A_۱ \cap A_۲| = ۸\ ۸\ ۸\ ۸\ ۸ = ۸^۵$$

به‌طور مشابه $|A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۷ \times ۸^۴$. مجموعه‌ی $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳$ برابر مجموعه‌ی اعداد ۵ رقمی است که هیچ‌یک از رقـم‌هـای ۰، ۱و۲ را ندارند، لذا:

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۷\ ۷\ ۷\ ۷\ ۷ = ۷^۵$$

پس پاسخ مسأله برابر است با:

$$|S|-|A_۲ \cup A_۲ \cup A_۳| = |S|-|A_۱|-|A_۲|-|A_۳|+|A_۱ \cap A_۲|+|A_۱ \cap A_۳|+|A_۲ \cap A_۳|-|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$
$$= ۹ \times ۱۰^۴ - ۲ \times ۸ \times ۹^۴ - ۹^۵ + ۲ \times ۷ \times ۸^۴ + ۸^۵ - ۷^۵$$

مسأله‌ی ۱۲: **چند عدد ٤ رقمی وجود دارد که در آن‌ها هریک از رقم‌های ۱، ۲ و ۳ حداقل یک‌بار به‌کار رفته باشد؟**

حل: مطابق مثال قبل A_iها را مجموعه‌های متمم (فاقد ویژگی خواسته شده) در نظر می‌گیریم. یعنی $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را به ترتیـب مجموعـه‌ی اعدادی در نظر می‌گیریم که در آن‌ها ارقام ۱، ۲ و ۳ به کار نرفته باشد. اما تفاوت این مثال با مثال قبل در این است که مجموعـه‌هـای $A_۱ \cap A_۲$، $A_۲ \cap A_۳$ و $A_۱ \cap A_۳$ مشابهند، یعنی تعداد اعضای آن‌ها با هم برابر است. این حالت را حالت متقارن می‌گویند:

$$|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap \bar{A}_۳| = |S| - ۳ \times |A_۱| + ۳|A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$
$$|S| = ۹ \times ۱۰^۳$$
$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۸ \times ۹^۳$$
$$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۲ \cap A_۳| = |A_۱ \cap A_۳| = ۷ \times ۸^۳$$
$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۶ \times ۷^۳$$
$$|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap \bar{A}_۳| = ۹ \times ۱۰^۳ - ۳ \times (۸ \times ۹^۳) + ۳ \times (۷ \times ۸^۳) - ۶ \times ۷^۳$$

نکته‌ی ۱: **در حالت کلی برای سوال‌های با k ویژگی متقارن می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:**

$$|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap \ldots \cap \bar{A}_k| =$$
$$|S| - \binom{k}{۱}(|A_۱|) + \binom{k}{۲}(|A_۱ \cap A_۲|) - \binom{k}{۳}(|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|) + \circ\circ\circ + (-۱)^k \binom{k}{k}|A_۱ \cap \ldots \cap A_k|$$

البته به خاطر سپردن رابطه‌ی بالا خیلی هم الزامی نیست و استفاده از مفاهیم به کار گرفته شده در مثال‌های قبل کافی است. در ایـن کتـاب نیـز از این نکته به عنوان روش اول حل مسائل استفاده نشده است.

تست ۶: ۵ کتاب مختلف را به چند طریق می‌توان بین ۳ نفر تقسیم کرد به‌طوری که به هر یک حداقل یک کتاب برسد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

حل: فرض کنید S مجموعه‌ی کل روش‌های توزیع ۵ کتاب بین ۳ نفر باشد، در این‌صورت $|S|=3^5$، زیرا برای هر کتاب ۳ انتخاب وجود دارد. سه دسته از این توزیع‌ها مطلوب نیستند. دسته‌ی اول توزیع‌هایی که به نفر اول هیچ کتابی نرسیده است، دسته‌ی دوم توزیع‌هایی که به نفر دوم هیچ کتابی نرسیده است و دسته‌ی سوم توزیع‌هایی که به نفر سوم هیچ کتابی نرسیده است. این سه دسته را به ترتیب با A_1، A_2 و A_3 نشان می‌دهیم. توزیع‌های مطلوب آن‌هایی هستند که در هیچ‌یک از A_1، A_2 و A_3 قرار ندارند.

مجموعه‌ی A_1 مجموعه‌ی توزیع‌هایی است که در آن‌ها به نفر اول کتاب نرسیده است، لذا $|A_1|=2^5$، زیرا هر کتاب باید به نفر دوم یا سوم برسد، پس برای هر کتاب ۲ انتخاب وجود دارد. به‌طور مشابه $|A_2|=|A_3|=2^5$. مجموعه‌ی $A_1\cap A_2$ مجموعه‌ی توزیع‌هایی است که در آن‌ها به نفر اول و دوم هیچ کتابی نرسیده است، پس $|A_1\cap A_2|=1$ (فقط یک توزیع در $A_1\cap A_2$ قرار دارد، توزیعی که هر ۵ کتاب به نفر سوم رسیده است). به‌طور مشابه $|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1$. مجموعه‌ی $A_1\cap A_2\cap A_3$ مجموعه‌ی توزیع‌هایی است که در آن‌ها به نفر اول، دوم و سوم هیچ کتابی نرسیده است، لذا $|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$، زیرا چنین توزیعی وجود ندارد. نتیجه می‌گیریم پاسخ مسأله برابر است با:

$$|S|=|A_1\cup A_2\cup A_3|=3^5-3\times 2^5+3=150$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

در بخش قبل برای تعداد راه‌های انتخاب تعدادی شیء از چند نوع شیء، به شرطی که از هر نوع به تعداد کافی شیء موجود باشد، فرمولی ارائه دادیم. حال فرض کنید از هر نوع به تعداد کافی شیء وجود نداشته باشد. می‌خواهیم ببینیم به چند طریق می‌توان تعداد مشخصی از آن‌ها را انتخاب کرد. به مسأله‌ی بعد توجه کنید.

مسأله‌ی ۱۳: از بین ۸ سکه‌ی ۱۰ تومانی، ۵ سکه‌ی ۲۵ تومانی و ۱۱ سکه‌ی ۵۰ تومانی، به چند طریق می‌توان ۱۳ سکه انتخاب کرد؟

حل: فرض کنید x_1 سکه‌ی ۱۰ تومانی، x_2 سکه‌ی ۲۵ تومانی و x_3 سکه‌ی ۵۰ تومانی انتخاب کنیم، در این صورت $x_1+x_2+x_3=13$. باید تعداد جواب‌های این معادله را با شرایط $0\le x_1\le 8$، $0\le x_2\le 5$ و $0\le x_3\le 11$ بیابیم. فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های این معادله در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی باشد، در این صورت $|S|=\binom{15}{2}=105$. سه دسته از جواب‌های S مطلوب نیستند. یک دسته جواب‌هایی که $x_1\ge 9$، دسته‌ی دیگر جواب‌هایی که $x_2\ge 6$ و دسته‌ی آخر جواب‌هایی که $x_3\ge 12$. این سه دسته را به ترتیب A_1، A_2 و A_3 می‌نامیم. در این صورت:

$$|A_1|=\binom{13+3-1-(9+0+0)}{2}=\binom{6}{2}=15$$

$$|A_2|=\binom{13+3-1-(0+6+0)}{2}=\binom{9}{2}=36$$

$$|A_3|=\binom{13+3-1-(0+0+12)}{2}=\binom{3}{2}=3$$

به وضوح $A_1\cap A_2$، $A_1\cap A_3$، $A_2\cap A_3$ و $A_1\cap A_2\cap A_3$ همگی تهی هستند. پس پاسخ برابر است با:

$$|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=105-(15+36+3)=51$$

تست ۷: معادله‌ی $x+y+z=13$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $2\le x\le 5$، $0\le y\le 4$ و $z\ge 3$ چند جواب دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

حل: فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x+y+z=13$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x\ge 2$، $y\ge 0$ و $z\ge 3$ باشد. در این‌صورت دو دسته از این جواب‌ها نامطلوبند. دسته‌ی اول جواب‌هایی که در آن‌ها $x\ge 6$ و دسته‌ی دوم جواب‌هایی که $y\ge 5$. این دو دسته را به ترتیب با A_1 و A_2 نشان می‌دهیم. هر یک از مجموعه‌های S، A_1، A_2 و $A_1\cap A_2$، مجموعه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی $x+y+z=13$ هستند با شرایطی که در زیر ذکر شده‌اند:

$S: x\ge 2\ ,\ y\ge 0\ ,\ z\ge 3$ $\qquad$ $A_1: x\ge 6\ ,\ y\ge 0\ ,\ z\ge 3$

$A_2: x\ge 2\ ,\ y\ge 5\ ,\ z\ge 3$ $\qquad$ $A_1\cap A_2: x\ge 6\ ,\ y\ge 5\ ,\ z\ge 3$

(توجه کنید که چون در مجموعه‌ی مرجع S، $y \geq ۰$ و $z \geq ۳$ و $A_۱ \subseteq S$، پس در این مجموعه نیز $y \geq ۰$ و $z \geq ۳$).

بنا بر قضیه‌ی (۳)، (از بخش قبل)، $|S| = \binom{۱۰}{۲}$، $|A_۱| = \binom{۶}{۲}$ و $|A_۲| = \binom{۵}{۲}$. هم‌چنین به وضوح $|A_۱ \cap A_۲| = ۰$. حال جواب‌های مطلوب، جواب‌هایی از S هستند که در هیچ‌یک از $A_۱$ و $A_۲$ قرار ندارند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲| = \binom{۱۰}{۲} - (\binom{۶}{۲} + \binom{۵}{۲} - ۰) = ۴۵ - (۱۵ + ۱۰) = ۲۰$$

بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

تابع حسابی اویلر:

فرض کنید n عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد. $\varphi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی با n که نسبت به n اول‌اند.

مثال: $\varphi(۱۰) = ۴$، زیرا اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰ که نسبت به ۱۰ اول‌اند، عبارتند از ۱، ۳، ۷ و ۹.

قضیه‌ی ۶: **فرض کنید n عدد طبیعی باشد $(n \geq ۲)$ و نمایش متعارف n آن به صورت زیر باشد:** $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots p_k^{\alpha_k}$

در این صورت داریم:

$$\varphi(n) = n(۱ - \frac{۱}{p_۱})(۱ - \frac{۱}{p_۲}) \dots (۱ - \frac{۱}{p_k})$$

تذکر ۱: واضح است که اگر p عدد اول باشد آن‌گاه $\varphi(p) = p - ۱$.

تذکر ۲: تابع $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را تابع حسابی اویلر می‌نامند.

مثال: می‌دانیم $۲۰ = ۲^۲ \times ۵$، **لذا** $\varphi(۲۰) = ۲۰(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۸$.

تست ۸: **چند عدد از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۱۵۰\}$ نسبت به ۱۵۰ اول‌اند؟**

۱) ۴۰ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

حـل: (راه اول): اعدادی نسبت به $۱۵۰ = ۲ \times ۳ \times ۵^۲$ اول‌اند، که بر هیچ یک از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشند. اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را به ترتیب مجموعه‌ی اعدادی از $\{۱, ۲, \dots, ۱۵۰\}$ در نظر بگیریم که بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیرند، مقدار $|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap \bar{A}_۳|$ را می‌خواهیم. داریم:

$$|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap \bar{A}_۳| = |S| - |A_۱| - |A_۲| - |A_۳| + |A_۱ \cap A_۲| + |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۳| - |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$

$$= ۱۵۰ - [\frac{۱۵۰}{۲}] - [\frac{۱۵۰}{۳}] - [\frac{۱۵۰}{۵}] + [\frac{۱۵۰}{۶}] + [\frac{۱۵۰}{۱۵}] + [\frac{۱۵۰}{۱۰}] - [\frac{۱۵۰}{۳۰}] = ۱۵۰ - ۷۵ - ۵۰ - ۳۰ + ۲۵ + ۱۰ + ۱۵ - ۵ = ۴۰$$

راه دوم: جواب سوال $\varphi(۱۵۰)$ است و چون $۱۵۰ = ۲ \times ۳ \times ۵^۲$، داریم: $\varphi(۱۵۰) = ۱۵۰(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۳})(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۴۰$ بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

نکته‌ی ۲: **از هر n عدد صحیح متوالی، $\varphi(n)$ عدد نسبت به n اول‌اند.**

مسأله‌ی ۱۴: **چند عدد از مجموعه‌ی $\{۴۱, ۴۲, \dots, ۱۲۰\}$ نسبت به ۲۰ اول‌اند؟**

راه حل: مجموعه‌ی موردنظر شامل ۸۰ عدد متوالی است (۴تا ۲۰تا)، لذا جواب سوال برابر است با: $۴\varphi(۲۰) = ۴ \times ۲۰ \times (۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۳۲$

تست ۹: **به ازای چند عدد a متعلق به مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۵\}$ معادله‌ی سیاله‌ی $ax + ۱۰۵y = ۶$ جواب دارد؟**

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

حل: معادله در صورتی جواب دارد که $(a, ۱۰۵) | ۶$، هم‌چنین می‌دانیم $۱۰۵ = ۳ \times ۵ \times ۷$ و $۶ = ۲ \times ۳$، لذا معادله در صورتی جواب دارد که $(a, ۱۰۵)$ برابر ۱ یا ۳ باشد، یعنی a نباید بر هیچ یک از اعداد ۵ و ۷ بخش‌پذیر باشد، یا معادلاً a باید نسبت به ۳۵ اول باشد. چون $۱۰۵ = ۳ \times ۳۵$، لذا در مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۵\}$ دقیقاً $۳\varphi(۳۵) = ۷۲$ عدد نسبت به ۳۵ اول‌اند. بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

فصل ۳

اصل شمول و عدم شمول

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۵- چند عدد از مجموعه‌ی {۰,۱,۲,...,۱۰۰} بر ۳ بخش‌پذیر نیستند؟

۱) ۳۳ ۲) ۴۵ ۳) ۶۱ ۴) ۶۷

۲۶- در چند عدد ٤ رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ٤، رقم ۲ وجود دارد؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۲۶۴ ۳) ۴۰۰ ۴) ۳۰۸

۲۷- در بین ۸۰ داوطلب کنکور، ۵۰ نفر در کنکور سراسری، ۳۰ نفر در کنکور آزاد و ۲۵ نفر در هیچ یک از ۲ کنکور شرکت نکرده‌اند. چند نفر در هر دو کنکور شرکت کرده‌اند؟

۱) ۰ ۲) ۵ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۲۸- در بین ۲۰۰ نوزاد، ۸۰ نفر واکسن فلج اطفال و ۹۰ نفر واکسن کزاز را تزریق کرده‌اند. در ضمن ٦۰ نفر هیچ یک از دو واکسن را تزریق نکرده‌اند. چند تا از این ۲۰۰ نوزاد فقط یکی از دو واکسن را تزریق کرده‌اند؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۴۰

۲۹- چند عدد از مجموعه‌ی {۰,۱,۲,...,۱۰۰} نه مربع کامل‌اند و نه مکعب کامل؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۶ ۳) ۸۸ ۴) ۹۰

۳۰- در چند عدد ٤ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ٤ حداقل یکی از ارقام ۱ و ۲ وجود دارند؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۶۶ ۳) ۱۳۲ ۴) ۲۴۰

۳۱- چند عدد ٤ رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ وجود دارد که در آن‌ها رقم ۳ حداقل یک بار ظاهر شود؟

۱) ۱۰۱ ۲) ۱۳۸ ۳) ۱۴۲ ۴) ۱۵۶

۳۲- در چند عدد ٤ رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ هر ۲ رقم ۰ و ۱ وجود دارند؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۷ ۳) ۷۳ ۴) ۱۱۱

۳۳- چند عدد از مجموعه‌ی {۰,۱,۲,...,۱۰۰} بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۰ ۳) ۴۱ ۴) ۳۳

۳٤- چند عدد از مجموعه‌ی {۰,۱,۲,...,۱۰۰} بر هیچ یک از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیستند؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۱ ۳) ۳۰ ۴) ۲۶

۳۵- چند عدد سه رقمی داریم که در هر یک از آن‌ها هر یک از دو رقم ۲ و ۵ حداقل یک بار ظاهر شده باشد؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۶ ۴) ۵۷

۳٦- چند عدد از مجموعه‌ی {۰,۱,۲,...,۱۰۰} دقیقاً بر یکی از اعداد ٤ و ٦ بخش‌پذیرند؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۷ ۳) ۴۱ ۴) ۲۵

۳۷- در چند عدد ٤ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ٤ و ۵ هر دو رقم ۱ و ۲ وجود دارند؟

۱) ۱۹۴ ۲) ۵۲۹ ۳) ۶۱۰ ۴) ۷۲۰

* ۳۸- در چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دقیقاً دو تا از سه رقم ۱، ۲ و ۳ وجود دارد؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۳۳۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۳۹۰

۳۹- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی dream هیچ‌یک از حروف d، m و r سر جای اصلی خود قرار ندارند؟

۱) ۶۲ ۲) ۶۴ ۳) ۶۶ ۴) ۶۸

* ٤۰- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی triangle حداقل دو تا از عبارت‌های tri، an و gle وجود دارند؟

۱) ۲۲۴ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۵۲ ۴) ۲۵۸

* ٤۱- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی mail هیچ حرفی در سر جای اصلی خود قرار ندارند؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۴۲- ٤ نفر را به چند طریق می‌توان به ۳ اتاق مختلف فرستاد به‌طوری که در هر اتاق حداقل یک نفر قرار گیرد؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۴۲

۴۳- به چند طریق می‌توان ۱۰ سکه‌ی یکسان را بین علی، رضا، محمد و حسین توزیع کرد به‌طوری که هر یک از علی و رضا حداکثر ۳ سکه دریافت کنند؟

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۲۸

٤٤- روی مجموعه‌ی ۳ عضوی A چند رابطه می‌توان نوشت که تقارنی نباشد؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۷۲ ۳) ۴۲۲ ۴) ۴۴۸

٤٥- روی مجموعه‌ی ۳ عضوی A چند رابطه‌ی تقارنی می‌توان نوشت که پادتقارنی نباشد؟

۱) ۶۴ ۲) ۵۶ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲

٤٦- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، چند رابطه روی A می‌توان تعریف کرد که خاصیت پادتقارنی داشته باشد، اما خاصیت انعکاسی نداشته باشد؟

۱) $۳^{۱۲}\times ۵$ ۲) ۵×۳^{۷} ۳) $۳^{۶}\times ۴$ ۴) $۳^{۷}$

٤٧- روی مجموعه‌ی ۳ عضوی A چند رابطه می‌توان نوشت که نه بازتابی باشد و نه پادتقارنی؟

۱) ۱۴۵ ۲) ۳۲۰ ۳) ۲۵۹ ۴) ۳۹۴

٤٨- اگر A یک مجموعه‌ی ۵ عضوی باشد، چه تعداد رابطه روی A می‌توان نوشت که تقارنی و پادتقارنی باشد، اما بازتابی نباشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۱ ۳) ۱ ۴) $۲^{۱۵}$

٤٩- چند رابطه‌ی متقارن روی $\{a,b,c,d\}$ می‌توان نوشت که شامل (a,b) و (c,c) باشد، اما خاصیت بازتابی نداشته باشد؟

۱) ۲۲۴ ۲) ۲۵۶ ۳) ۹۶ ۴) ۴۴۸

۵۰- چند رابطه‌ی متقارن روی مجموعه‌ی $\{a,b,c\}$ هیچ یک از ویژگی‌های بازتابی و پادتقارنی را ندارند؟

۱) ۳۷ ۲) ۴۱ ۳) ۴۵ ۴) ۴۹

۵۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه چند ماتریس صفر و یک مانند $M_{۳\times۳}$ وجود دارد که نه $M \ll A$ و نه $A \ll M$ ؟

۱) ۷۲ ۲) ۵۱۱ ۳) ۴۳۹ ۴) ۴۴۱

۵۲- روی مجموعه‌ی ٤ عضوی A، چند رابطه‌ی بازتابی و تقارنی وجود دارد که ترایایی نباشد؟

۱) ۴۹ ۲) ۴۵ ۳) ۴۲ ۴) ۳۶

۵۳- چند تابع پوشا از مجموعه‌ی ۳ عضوی A به مجموعه‌ی ۳ عضوی B می‌توان تعریف کرد؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۵

٥٤- چند تابع پوشا از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ به مجموعه‌ی $B=\{a,b\}$ می‌توان تعریف کرد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۵۵- تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ به مجموعه‌ی $\{a,b,c\}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۲۶ ۳) ۲۴۰ ۴) ۱۵۰

٥٦- چند ماتریس صفر و یک مثل $M_{۴\times۴}$ وجود دارد که در شرایط $I_{۴} \ll M$ و $M=M^{T}$ صدق کرده، ولی در شرط $M \gg M^{(۲)}$ صدق نکند؟

۱) ۴۹ ۲) ۳۶ ۳) ۶۴ ۴) ۳۲

۵۷- مجموعه‌ی M که شامل تمام روابط متقارن تعریف شده روی مجموعه‌ی A است، ٦٤ عضوی است. چه تعداد از اعضای M بازتابی بوده و ترایایی نیستند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۸- معادله‌ی $x+y+z=۱۵$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی با شرط $x \le ۵$ چند جواب دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۴۰ ۳) ۵۵ ۴) ۷۰

۵۹- معادله‌ی $x+y+z=۱۰$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی با شرایط $x \le ۴$ و $y \le ۵$ چند جواب دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

٦٠- معادله‌ی $x+y+z=۱۴$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $۱ \le x \le ۶$، $۲ \le y \le ۶$ و $۰ \le z \le ۷$ چند جواب دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

٦١- معادله‌ی $x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}=۸$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرط $۰ \le x_{i} \le ۷$ چند جواب دارد؟ $(i=۱,۲,۳)$

۱) ۲۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۵۲

۶۲- معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $2 \le x_i \le 5$ چند جواب دارد؟ $(i \in 1,2,3)$

۱) ۱۰ ۲) ۱۸ ۳) ۲۳ ۴) ۴۲

۶۳- معادله‌ی $x + y + z = 12$ در مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5,6\}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

* ۶۴- به چند طریق می‌توان ۴ سکه ۱۰ ریالی و ۴ سکه ۲۰ ریالی را بین ۳ نفر تقسیم کرد طوری‌که به هر نفر حداقل یک سکه برسد؟

۱) ۹۳ ۲) ۱۰۹ ۳) ۱۲۷ ۴) ۱۵۳

۶۵- چند عدد ۲ رقمی وجود دارد که نسبت به ۲۴ اول باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

۶۶- چند عدد از مجموعه‌ی $\{1,2,...,70\}$ نسبت به ۷۰ اول‌اند؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۶۷- چند عدد از مجموعه‌ی $\{1,2,...,240\}$ نسبت به ۶۰ اول‌اند؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۶۸- چند عدد از مجموعه‌ی $\{81,82,...,980\}$ نسبت به ۳۰ اول‌اند؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۶۹- چند عدد از مجموعه‌ی $\{1,2,...,422\}$ نسبت به ۱۰۵ اول‌اند؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۸۶ ۳) ۱۹۲ ۴) ۱۹۴

۷۰- از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبیات و ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت نکرده‌اند؟ (سراسری ـ ۸۲)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۷۱- اگر تعداد اعداد مثبت و کوچک‌تر از ab که نسبت به $a \times b$ اول‌اند، برابر k باشد و a، b و c اعداد اول غیر مساوی باشند، تعداد اعداد مثبت کوچک‌تر از abc که نسبت به عدد $a \times b \times c$ اول‌اند، کدام است؟ (آزاد ـ ۸۰)

۱) $\frac{k(c-1)}{c}$ ۲) k ۳) $c \times k$ ۴) $k(c-1)$

۷۲- چند عدد صحیح مثبت و کوچک‌تر از ۳۰۱ وجود دارد که نسبت به اعداد ۷۵ و ۶۰ اول باشند؟ (آزاد ـ ۸۱)

۱) ۱۶۰ ۲) ۴۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۸۰

۷۳- اگر تعداد اعداد طبیعی که نسبت به عدد $5^2 \times 3^3$ اول‌اند و از آن کوچک‌ترند k باشد، تعداد اعداد طبیعی که نسبت به عدد $2^2 \times 3^4 \times 5^2$ اول‌اند و از آن کوچک‌ترند کدام است؟ (آزاد ـ ۸۲)

۱) $12k$ ۲) k ۳) $3k$ ۴) $6k$

۷۴- به ازاء چند مقدار a از مجموعه‌ی $\{1,2,3,...,50\}$، معادله‌ی سیاله‌ی $ax + 18y = 3$ دارای جواب است؟ (آزاد ـ ۸۲)

۱) ۲۲ ۲) ۲۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷

۷۵- چند تابع پوشا از $A = \{1,2,3,4,5\}$ به $B = \{1,2\}$ وجود دارد؟ (آزاد ـ ۸۴)

۱) ۲۴ ۲) ۲۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۰

۷۶- چند رابطه‌ی انعکاسی و غیرتقارنی روی مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ می‌توان نوشت؟ (آزاد ـ ۸۵)

۱) 2^6 ۲) 8×2^6 ۳) $8(4^6 - 2^6)$ ۴) $4^6 - 2^6$

۷۷- معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ چند جواب صحیح غیر منفی با شرط $3 \le x_1, x_2, x_3 \le 4$، دارد؟ (آزاد ـ ۸۵)

۱) ۵ ۲) ۱۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۷۸- چند تابع یک به یک از $A = \{1,2,3,4\}$ به $B = \{1,2,3,4,5\}$ وجود دارد که شامل عضو $(1,1)$ باشد؟ (آزاد ـ ۸۶)

۱) صفر ۲) ۲۴ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

فصل ۳

اصل شمول و عدم شمول

پاسخ‌های تشریحی

A **۲۵- گزینه‌ی (۴)** اگر A مجموعه‌ی اعدادی باشد که بر ۳ بخش‌پذیرند:

$$|\overline{A}|=|S|-|A|=۱۰۰-[\frac{۱۰۰}{۳}]=۱۰۰-۳۳=۶۷$$

B **۲۶- گزینه‌ی (۴)** اگر S مجموعه‌ی اعداد ۴ رقمی با ارقام ۰ تا ۴ باشد و A را مجموعه‌ی اعدادی از S در نظر بگیریم که شامل رقم ۲ نباشند، داریم:

$$|S|= ۴\,۵\,۵\,۵ =۵۰۰$$
$$|A|= ۳\,۴\,۴\,۴ =۱۹۲$$

لذا تعداد اعدادی از S که رقم ۲ را دارند برابر است با: $|S|-|A|=۵۰۰-۱۹۲=۳۰۸$

B **۲۷- گزینه‌ی (۳)** اگر $A_۱$ مجموعه‌ی داوطلبان کنکور سراسری و $A_۲$ مجموعه‌ی داوطلبان کنکور آزاد باشد، با توجه به فرض سؤال نتیجه می‌گیریم:

$$|A_۱|=۵۰\ ,\ |A_۲|=۳۰\ ,\ |\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}|=۲۵$$
$$|A_۱\cup A_۲|=|S|-|\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}|=۸۰-۲۵=۵۵$$
$$|A_۱\cup A_۲|=|A_۱|+|A_۲|-|A_۱\cap A_۲|\Rightarrow ۵۵=۵۰+۳۰-|A_۱\cap A_۲|\Rightarrow |A_۱\cap A_۲|=۲۵$$

B **۲۸- گزینه‌ی (۱)** اگر S را کل نوزادان و A و B را مجموعه‌ی نوزادهایی در نظر بگیریم که به ترتیب واکسن فلج اطفال و کزاز را تزریق کرده‌اند، دراین صورت داریم:

$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=۸۰+۹۰-۱۴۰=۳۰$$

لذا تعداد نوزادانی که فقط یکی از این دو واکسن را تزریق کرده‌اند برابر است با:

$$|A\Delta B|=|A|+|B|-۲|A\cap B|=۸۰+۹۰-۶۰=۱۱۰$$

B **۲۹- گزینه‌ی (۳)** فرض کنید $S=\{۱,۲,...,۱۰۰\}$، $A_۱$ مجموعه‌ی اعضایی از S باشد که مربع کامل و $A_۲$ مجموعه‌ی اعضایی از S باشد که مکعب کامل‌اند. در این صورت $|S|=۱۰۰$، $|A_۱|=۱۰$ (زیرا $۱^۲$، $۲^۲$، ... و $۱۰^۲$ تنها مربع‌های کامل مجموعه‌ی S هستند) و $|A_۲|=۴$ (زیرا $۱^۳$، $۲^۳$، $۳^۳$ و $۴^۳$) تنها مکعب‌های کامل مجموعه‌ی S هستند).

همچنین $A_۱\cap A_۲$ مجموعه‌ی اعضایی از S است که هم مربع و هم مکعب کامل‌اند، معادلاً $A_۱\cap A_۲$ مجموعه‌ی اعضایی از S است که توان ششم کامل‌اند، لذا $|A_۱\cap A_۲|=۲$ (فقط $۱^۶$ و $۲^۶$ در $A_۱\cap A_۲$ قرار دارند). نتیجه می‌گیریم تعداد اعضایی از S که نه مربع و نه مکعب کامل‌اند برابر است با:

$$|S|-|A_۱\cap A_۲|=۱۰۰-(۱۰+۴-۲)=۸۸$$

B **۳۰- گزینه‌ی (۴)**

S: مجموعه‌ی اعداد۴ رقمی $\Rightarrow |S|=۴\times۴\times۴\times۴=۲۵۶$

$\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}$: مجموعه‌ی اعداد ۴ رقمی فاقد ۱ و ۲ $\Rightarrow |\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}|=۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$

لذا تعداد ارقام ۴ رقمی که در آن‌ها حداقل یکی از ارقام ۱ و ۲ وجود دارد، برابر است با:

$$|A_۱\cup A_۲|=|S|-|\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}|=۲۵۶-۱۶=۲۴۰$$

B **۳۱- گزینه‌ی (۲)** اگر S مجموعه‌ی اعداد ۴ رقمی با ارقام ۰،۱،۲و۳ و A مجموعه‌ای از اعداد S باشد که فاقد رقم ۳ باشند، جواب برابر است با:

$$|S|-|A|=۳\times۴\times۴\times۴-۲\times۳\times۳\times۳=۱۳۸$$

C **۳۲- گزینه‌ی(۳)** S را مجموعه‌ی اعداد ۴ رقمی با ارقام ۰ تا ۳ و A_1 و A_2 را به ترتیب مجموعه‌ی اعدادی از S درنظر می‌گیریم که ترتیب رقم‌های ۰ و ۱ را ندارند. در این صورت داریم:

$$|S|=3\;4\;4\;4=192$$
$$|A_1|=3\;3\;3\;3=81 \quad , \quad |A_2|=2\;3\;3\;3=54$$
$$|A_1\cap A_2|=2\;2\;2\;2=16$$

در این صورت پاسخ سؤال برابر است با:

$$|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=192-81-54+16=73$$

A **۳۳- گزینه‌ی (۴)** A_1 و A_2 را مجموعه‌ی اعدادی درنظر می‌گیریم که به ترتیب بر ۲ و ۳ بخش‌پذیرند:

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=100-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=100-[\frac{100}{2}]-[\frac{100}{3}]+[\frac{100}{6}]=33$$

B **۳۴- گزینه‌ی (۴)** با استفاده از اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$
$$=100-[\frac{100}{2}]-[\frac{100}{3}]-[\frac{100}{5}]+[\frac{100}{6}]+[\frac{100}{10}]+[\frac{100}{15}]-[\frac{100}{30}]=26$$

C **۳۵- گزینه‌ی (۱)**

S: مجموعه‌ی اعداد ۳ رقمی $\Rightarrow |S|=9\times10\times10=900$

A_1: مجموعه‌ی اعداد ۳ رقمی فاقد ۲ $\Rightarrow |A_1|=8\times9\times9=648$

A_2: مجموعه‌ی اعداد ۳ رقمی فاقد ۵ $\Rightarrow |A_2|=8\times9\times9=648$

$A_1\cap A_2$: مجموعه‌ی اعداد ۳ رقمی فاقد ۲ و ۵ $\Rightarrow |A_1\cap A_2|=7\times8\times8=448$

لذا تعداد اعداد ۳ رقمی که در آن‌ها هر دو رقم ۲ و ۵ وجود دارند، برابر است با:

$$900-648-648+448=52$$

B **۳۶- گزینه‌ی (۴)** اگر A_1 و A_2 به ترتیب مجموعه‌ی مضارب ۴ و ۶ باشند، تعداد اعدادی که فقط به یکی از ۲ مجموعه تعلق دارند، برابر است با:

$$|A_1\Delta A_2|=|A_1|+A_2|-2|A_1\cap A_2|=[\frac{100}{4}]+[\frac{100}{6}]-2\times[\frac{100}{12}]=25+16-16=25$$

B **۳۷- گزینه‌ی (۱)** فرض کنید S مجموعه‌ی اعداد ۴ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد. A_1 و A_2 را مجموعه‌ی اعدادی از S در نظر می‌گیریم که به ترتیب رقم‌های ۱ و ۲ را ندارند. در این صورت تعداد اعدادی از S که هر دو رقم ۱ و ۲ را دارند، برابر است با:

$$|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=5^4-4^4-4^4+3^4=194$$

۳۸- گزینه‌ی (۲) فرض کنید S مجموعه‌ی اعداد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد و A، B و C مجموعه‌ی اعدادی از S باشند که به‌ترتیب رقم‌های، ۱، ۲ و ۳ را ندارند. در این صورت اعدادی که دقیقاً دو تا از سه رقم ۱، ۲ و ۳ را دارند اعضایی از S هستند که فقط به یکی از A، B و C تعلق دارند. لذا تعداد این اعداد برابر است با:

C $$|A|+|B|+|C|-2|A\cap B|-2|B\cap C|+3|A\cap B\cap C|=4^4+4^4+4^4-2\times3^4-2\times3^4-2\times3^4+3\times2^4=330$$

۳۹- گزینه‌ی (۲) فرض کنید S مجموعه‌ی کل جایگشتهای حروف کلمه‌ی dream باشد و A، B و C مجموعه جایگشتهایی باشند که به‌ترتیب حروف d، m و r در سر جای اصلی خود قرار دارند. در این صورت پاسخ برابر است با:

$$|S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|=5!-4!-4!-4!+3!+3!+3!=64$$

۴۰- گزینه‌ی(۳) فرض کنید A، B و C مجموعه جایگشتهایی از حروف کلمه‌ی triangle باشند که به‌ترتیب عبارت‌های tri، an و gle را دارند. در این صورت پاسخ برابر است با:

$$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-2|A\cap B\cap C|=5!+4!+5!-2\times3!=252$$

۴۱- گزینه‌ی (۱) فرض کنید S مجموعه کل جایگشتهای حروف کلمه mail باشد و A، B، C و D مجموعه جایگشتهایی باشند که به‌ترتیب حروف m، a، i و l در سر جای اصلی خود قرار دارند. در این صورت پاسخ برابر است با:

$$|S|-4|A|+6|A\cap B|-4|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap C\cap D|=4!-4\times3!+6\times2!-4+1=9$$

C **۴۲- گزینه‌ی(۲)** فرض کنید S مجموعه‌ی کل روش‌های تقسیم افراد در ۳ اتاق باشد، در این صورت $|S|=۳^۴$، زیرا برای هر نفر ۳ انتخاب وجود دارد. ۳ دسته از این روش‌های تقسیم مطلوب نیستند، یکی آن‌هایی که اتاق اول خالی بماند، دیگری اتاق دوم و در نهایت اتاق سوم خالی بماند. این۳ دسته را به ترتیب $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ می‌نامیم. در این صورت:

$$|A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲^۴, |A_۱\cap A_۲|=|A_۱\cap A_۳|=|A_۲\cap A_۳|=۱, |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$$

زیرا مثلاً برای محاسبه‌ی $|A_۱|$، توجه کنید که هر فرد را باید به اتاق دوم یا سوم بفرستیم، لذا برای هر نفر ۲ انتخاب وجود دارد. نتیجه می‌گیریم تعداد روش‌های مطلوب تقسیم برابر است با:

$$|S|-|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|=۳^۴-(۲^۴+۲^۴+۲^۴-۱-۱-۱+۰)=۳۶$$

C **۴۳- گزینه‌ی (۴)** فرض کنید به علی، رضا، محمد و حسین به ترتیب $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ سکه برسد، در این صورت $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۰$. با توجه به شرط مسأله باید تعداد جواب‌های این معادله را با شرایط $۰\le x_۱\le ۳$، $۰\le x_۲\le ۳$، $x_۳\ge ۰$ و $x_۴\ge ۰$ بیابیم. فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های این معادله در مجموعه‌ی اعداد صحیح و نامنفی باشد، در این صورت $|S|=\binom{۱۳}{۳}=\frac{۱۳!}{۳!۱۰!}=\frac{۱۳\times ۱۲\times ۱۱}{۳!}=۲۸۶$. دو دسته از جواب‌های S مطلوب نیستند، یک دسته جواب‌هایی که $x_۱\ge ۴$ و دسته‌ی دیگر جواب‌هایی که $x_۲\ge ۴$. این دو دسته را به ترتیب $A_۱$ و $A_۲$ می‌نامیم. در این صورت:

$$|A_۱|=|A_۲|=\binom{۱۰+۴-۱-(۴+۰+۰+۰)}{۳}=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!۶!}=\frac{۹\times ۸\times ۷}{۳!}=۸۴$$

$A_۱\cap A_۲$ مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۰$ با شرایط $x_۱\ge ۴$، $x_۲\ge ۴$، $x_۳\ge ۰$ و $x_۴\ge ۰$ است، لذا $|A_۱\cap A_۲|=\binom{۱۰+۴-۱-(۴+۴+۰+۰)}{۳}=\binom{۵}{۳}=۱۰$، نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با:

$$|S|-|A_۱\cup A_۲|=۲۸۶-(۸۴+۸۴-۱۰)=۱۲۸$$

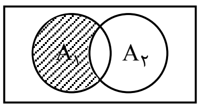
A **۴۴- گزینه‌ی (۴)** اگر S مجموعه‌ی کل رابطه‌ها و $A_۱$ مجموعه‌ی رابطه‌های تقارنی روی مجموعه A باشند، داریم:

$$|S|=۲^۹=۵۱۲ \quad , \quad |A_۱|=۲^۳\times ۲^۳=۶۴$$

لذا تعداد روابطی که تقارنی نیستند برابر است با:

$$|\overline{A_۱}|=|S|-|A_۱|=۵۱۲-۶۴=۴۴۸$$

B **۴۵- گزینه‌ی (۲)** اگر $A_۱$ و $A_۲$ را به ترتیب مجموعه‌ی رابطه‌های تقارنی و پادتقارنی روی مجموعه A فرض کنیم، داریم:



تعداد روابط تقارنی که پادتقارنی نباشند $=|A_۱\cap\overline{A_۲}|=|A_۱|-|A_۱\cap A_۲|$

لذا باید تعداد روابط تقارنی و پادتقارنی را از تعداد روابط تقارنی کم کنیم:

$$|A_۱\cap\overline{A_۲}|=|A_۱|-|A_۱\cap A_۲|=۲^۳\times ۲^۳-۲^۳=۵۶$$

B **۴۶- گزینه‌ی (۲)** اگر $A_۱$ و $A_۲$ به ترتیب مجموعه‌ی رابطه‌های پادتقارنی و انعکاسی روی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ باشند، دراین صورت داریم:

تعداد رابطه‌هایی که پادتقارنی‌اند و انعکاسی نیستند $=|A_۱\cap\overline{A_۲}|=|A_۱|-|A_۱\cap A_۲|$

لذا باید تعداد روابط انعکاسی و پادتقارنی را از تعداد روابط پادتقارنی کم کنیم:

$$|A_۱\cap\overline{A_۲}|=۳^۶\times ۲^۴-۳^۶=۳^۶(۱۶-۱)=۳^۷\times ۵$$

B **۴۷- گزینه‌ی (۳)** اگر S مجموعه‌ی کل رابطه‌ها و $A_۱$ و $A_۲$ به ترتیب مجموعه‌ی رابطه‌های بازتابی و پادتقارنی روی مجموعه‌ی ۳ عضوی A باشند، داریم:

تعداد روابطی که نه بازتابی و نه پادتقارنی‌اند $=|\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}|=|S|-|A_۱\cup A_۲|=|S|-|A_۱|-|A_۲|+|A_۱\cap A_۲|$

$$|S|=۲^۹=۵۱۲\ ,\ |A_۱|=۲^۶=۶۴\ ,\ |A_۲|=۲^۳\times ۳^۳=۶^۳=۲۱۶\ ,\ |A_۱\cap A_۲|=۳^۳=۲۷$$

$$\Rightarrow |\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}|=۵۱۲-۶۴-۲۱۶+۲۷=۲۵۹$$

B **۴۸- گزینه‌ی (۲)** اگر $A_۱$ مجموعه‌ی رابطه‌های تقارنی و پادتقارنی و $A_۲$ مجموعه‌ی رابطه‌های بازتابی روی مجموعه‌ی A باشند، داریم:

$|A_۱ \cap \overline{A_۲}| = |A_۱| - |A_۱ \cap A_۲|$ = تعداد روابطی که تقارنی و پادتقارنی‌اند، ولی انعکاسی نیستند.

لذا باید تعداد روابط انعکاسی، تقارنی و پادتقارنی را از تعداد روابط تقارنی و پادتقارنی کم کنیم:

$$|A_۱ \cap \overline{A_۲}| = ۲^۵ - ۱ = ۳۱$$

B **۴۹- گزینه‌ی (۱)** با توجه به فرض سؤال داریم:

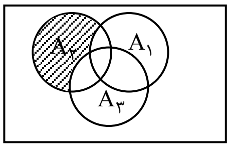
$A_۱ : (c,c)$ و (a,b) مجموعه رابطه‌های تقارنی شامل

$A_۲ : (c,c)$ و (a,b) مجموعه رابطه‌های بازتابی شامل

لذا جواب برابر است با:

$$|A_۱ \cap \overline{A_۲}| = |A_۱| - |A_۱ \cap A_۲| = ۲^۳ \times ۲^۵ - ۲^۵ = ۲۲۴$$

C **۵۰- گزینه‌ی (۴)** اگر $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ به ترتیب مجموعه‌ی رابطه‌های بازتابی، تقارنی و پادتقارنی روی مجموعه‌ی $\{a,b,c\}$ باشند دراین صورت جواب برابر است با:



$$|A_۲| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۲^۶ - ۲^۳ - ۲^۳ + ۱ = ۴۹$$

B **۵۱- گزینه‌ی (۴)** باید تعداد ماتریس‌های M را که $A \ll M$ یا $M \ll A$، از تعداد کل ماتریس‌های ۳×۳ کم کنیم. داریم:

$۲^۹ - (۲^۶ + ۲^۳) + ۱ = ۵۱۲ - (۶۴ + ۸) + ۱ = ۵۱۲ - ۷۲ + ۱ = ۴۴۱$ = تعداد ماتریس‌های مطلوب

C **۵۲- گزینه‌ی (۱)** روی مجموعه‌ی ناتهی A، تعداد روابط بازتابی و تقارنی که ترایایی نباشند، برابر است با تعداد روابط بازتابی و تقارنی منهای تعداد روابط هم‌ارزی. لذا داریم:

$۲^۶ - ۱۵ = ۴۹$ = تعداد روابط بازتابی، تقارنی و غیر ترایایی

یادآوری: روی مجموعه‌ی ۴ عضوی A، ۱۵ رابطه‌ی هم‌ارزی وجود دارد.

B **۵۳- گزینه‌ی (۲)** تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی n عضوی A به مجموعه‌ی n عضوی B برابر است با $n!$ ،لذا جواب سؤال برابر است با $۳! = ۶$.

B **۵۴- گزینه‌ی (۳)** اگر S کل توابعی باشد که از A به B تعریف می‌شوند در این صورت $|S| = ۲^۳ = ۸$. همچنین داریم:

$A_۱ :$ تعداد توابعی که a در بردشان نیست. $\Rightarrow |A_۱| = ۱$

$A_۲ :$ تعداد توابعی که b در بردشان نیست. $\Rightarrow |A_۲| = ۱$

$A_۳ :$ تعداد توابعی که b و a در بردشان نیست. $\Rightarrow |A_۱ \cap A_۲| = ۰$

لذا تعداد توابعی که a و b در بردشان قرار دارد. برابر است با:

$$|S| - |A_۱| - |A_۲| + |A_۱ \cap A_۲| = ۸ - ۱ - ۱ + ۰ = ۶$$

C **۵۵- گزینه‌ی (۴)** S را مجموعه‌ی کل توابعی درنظر می‌گیریم که از $A = \{a,b,c,d,e\}$ به $B = \{a,b,c\}$ تعریف می‌شوند. $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را مجموعه‌هایی را از این توابع در نظر می‌گیریم که در برد آن‌ها، به ترتیب a، b و c قرار ندارد. بنابراین:

$$|S| = ۳^۵ \quad , \quad |A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۲^۵$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۱^۵ \quad , \quad |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

$|\overline{A}_۱ \cap \overline{A}_۲ \cap \overline{A}_۳| = ۳^۵ - ۳ \times ۲^۵ + ۳ \times ۱ = ۱۵۰$ = تعداد توابع پوشا از A به B

C **۵۶- گزینه‌ی (۱)** اگر R رابطه‌ی متناظر با ماتریس M باشد، آنگاه شرایط داده شده در مساله معادل آن است که R بازتابی و تقارنی بوده، ولی ترایایی نباشد. حال اگر ترایایی بودن را $T_۲$ و تقارنی بودن را با $T_۱$ و بازتابی بودن را با B نشان دهیم آنگاه هدف ما محاسبه‌ی $n(B \cap T_۱ \cap \overline{T_۲})$ است که داریم:

$$n(B \cap T_۱ \cap \overline{T_۲}) = n(B \cap T_۱) - n(B \cap T_۲ \cap T_۱) = n(B \cap T_۱) - (M \text{ تعداد روابط هم‌ارزی روی}) = ۲^۶ - ۱۵ = ۶۴ - ۱۵ = ۴۹$$

B **۵۷- گزینه‌ی (۱)** از آنجا که تعداد روابط تقارنی روی مجموعه‌ی A، ۶۴ تاست، پس اگر تعداد اعضای A را n تا در نظر بگیریم، داریم:

$$۲^n \times ۲^{\frac{n^۲ - n}{۲}} = ۲^{\frac{n^۲ + n}{۲}} = ۶۴ = ۲^۶ \Rightarrow n^۲ + n = ۱۲ \Rightarrow n = ۳$$

در نتیجه هدف ما یافتن تعداد روابط تقارنی، بازتابی و غیرترایایی روی یک مجموعه‌ی ۳ عضوی است که داریم:

$$n(B \cap T \cap \overline{\text{تعدی}}) = n(B \cap T) - n(B \cap T \cap \text{تعدی}) = ۸ - ۵ = ۳$$

B **۵۸- گزینه‌ی (۳)** فرض کنید S، مجموعه‌ی همه‌ی جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x+y+z=۱۵$ باشد. دراین صورت داریم:

$$|S|=\binom{۱۵-۱}{۳-۱}=\binom{۱۴}{۲}=\frac{۱۴\times۱۳}{۲}=۹۱$$

اگر A را نیز مجموعه‌ی جواب‌های طبیعی معادله با شرط $x\ge ۶$ (جواب‌های نامطلوب) در نظر بگیریم، داریم:

$$A: x\ge ۶\,,\ y\ge ۱\,,\ z\ge ۱ \Rightarrow |A|=\binom{۱۵+۲-۶-۱-۱}{۲}=۳۶\Rightarrow |S|-|A|=۵۵$$

C **۵۹- گزینه‌ی(۳)** فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x+y+z=۱۰$ و $A_۱$ مجموعه‌ی جواب‌هایی از S باشد که $x\ge ۵$ و $A_۲$ مجموعه‌ی جواب‌هایی از S باشند که $y\ge ۶$ (در واقع $A_۱$ و $A_۲$ دو دسته از جواب‌های نامطلوبند). دراین صورت داریم:

$$A_۱: x\ge ۵\,,\ y\ge ۰\,,\ z\ge ۰ \Rightarrow |A_۱|=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

$$A_۲: x\ge ۰\,,\ y\ge ۶\,,\ z\ge ۰ \Rightarrow |A_۲|=\binom{۶}{۲}=۱۵$$

$$A_۱\cap A_۲: x\ge ۵\,,\ y\ge ۶\,,\ z\ge ۰ \Rightarrow |A_۱\cap A_۲|=۰$$

لذا تعداد جواب‌هایی از معادله که $x\le ۴$ و $y\le ۵$، برابر است با:

$$|S|-|A_۱|-|A_۲|+|A_۱\cap A_۲|=\binom{۱۲}{۲}-۲۱-۱۵=۳۰$$

روش دوم: چون $x\le ۴$ و $y\le ۵$، لذا برای x، ۵ انتخاب و برای y، ۶ انتخاب وجود دارد و هر بار عدد z نیز به صورت منحصر به فرد تعیین می‌شود. لذا معادله $۵\times۶=۳۰$ جواب دارد.

C **۶۰- گزینه‌ی (۱)** فرض کنید S مجموعه‌ی همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی $x+y+z=۱۴$ با شرایط $x\ge ۱$، $y\ge ۲$ و $z\ge ۰$ باشد. دراین صورت داریم:

$$|S|=\binom{۱۴+۳-۱-۱-۲}{۳-۱}=\binom{۱۳}{۲}=۷۸$$

هم‌چنین با توجه به اصل شمول و عدم شمول مجموعه‌های نامطلوب $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ را مشخص می‌کنیم:

$$A_۱: x\ge ۷\,,\ y\ge ۲\,,\ z\ge ۰ \Rightarrow |A_۱|=\binom{۱۴+۳-۱-۷-۲}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

$$A_۲: x\ge ۱\,,\ y\ge ۷\,,\ z\ge ۰ \Rightarrow |A_۲|=\binom{۱۴+۳-۱-۱-۷}{۳-۱}=\binom{۸}{۲}=۲۸$$

$$A_۳: x\ge ۱\,,\ y\ge ۲\,,\ z\ge ۸ \Rightarrow |A_۳|=\binom{۱۴+۳-۱-۱-۲-۸}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

$$A_۱\cap A_۲: x\ge ۷\,,\ y\ge ۷\,,\ z\ge ۰ \Rightarrow |A_۱\cap A_۲|=\binom{۱۴+۳-۱-۷-۷}{۳-۱}=\binom{۲}{۲}=۱$$

$$A_۱\cap A_۳: x\ge ۷\,,\ y\ge ۲\,,\ z\ge ۸ \Rightarrow |A_۱\cap A_۳|=۰$$

$$A_۲\cap A_۳: x\ge ۱\,,\ y\ge ۷\,,\ z\ge ۸ \Rightarrow |A_۲\cap A_۳|=۰$$

$$A_۱\cap A_۲\cap A_۳: x\ge ۷\,,\ y\ge ۷\,,\ z\ge ۸ \Rightarrow |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$$

لذا جواب برابر است با: $۷۸-۲۱-۲۸-۱۰+۱=۲۰$

B **۶۱- گزینه‌ی (۲)** با توجه به شرط $۰\le x_i\le ۷$ تمام جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱+x_۲+x_۳=۸$ غیر از ۳ جواب $(۸,۰,۰)$، $(۰,۸,۰)$ و $(۰,۰,۸)$ قابل قبول است. لذا تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$\binom{۸+۳-۱}{۳-۱}-۳=۴۲$$

C **۶۲- گزینه‌ی (۱)** فرض کنید S مجموعه همه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادلـه‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۲$ بـا شـرایط $x_i \geq ۲$ باشـد. در ایـن صورت داریم:

$$|S| = \binom{۱۲+۳-۱-۲-۲-۲}{۳-۱} = \binom{۸}{۲} = \frac{۸\times ۷}{۲} = ۲۸$$

هم‌چنین مجموعه‌های نامطلوب $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را مشخص می‌کنیم:

$$A_۱ : x_۱ \geq ۶ \,,\, x_۲ \geq ۲ \,,\, x_۳ \geq ۲ \Rightarrow |A_۱| = \binom{۱۲+۳-۱-۶-۲-۲}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$$

با توجه به شرایط مشابه برای $A_۲$ و $A_۳$ داریم: $|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۶$

$$A_۱ \cap A_۲ : x_۱ \geq ۶ \,,\, x_۲ \geq ۶ \,,\, x_۳ \geq ۲ \Rightarrow |A_۱ \cap A_۲| = ۰$$

با توجه به شـرایط مـشابه بـرای مجموعـه‌هـای $A_۱ \cap A_۳$ و $A_۲ \cap A_۳$ نتیجـه مـی‌گیـریم $|A_۱ \cap A_۲| = |A_۲ \cap A_۳| = |A_۱ \cap A_۳| = ۰$
هم‌چنین واضح است که $|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$ پس با توجه به اصل شمول و عدم شمول جواب برابر است با:

$$|S| - ۳|A_۱| + ۳|A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۲۸ - ۳\times ۶ = ۱۰$$

C **۶۳- گزینه‌ی (۳)** فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x + y + z = ۱۲$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد. سه دسته از جواب‌هـای S مطلوب نیستند. یک دسته جواب‌هایی که $x \geq ۷$، دسته‌ی دیگر جواب‌هایی که $y \geq ۷$ و دسته‌ی آخر جواب‌هـایی کـه $z \geq ۷$. ایـن۳ دسـته را بـه ترتیب با $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ نشان می‌دهیم. در این صورت $|S| = \binom{۱۱}{۲} = ۵۵$، $|A_۱| = \binom{۱۲+۳-۱-(۷+۱+۱)}{۲} = \binom{۵}{۲} = ۱۰$ و به طور مـشابه $|A_۲| = |A_۳| = ۱۰$. همچنین واضح است که $A_۱ \cap A_۲$، $A_۱ \cap A_۳$، $A_۲ \cap A_۳$ و $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳$ همگی تهی هستند. پس پاسخ برابر است با:

$$|S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۵۵ - (۱۰+۱۰+۱۰) = ۲۵$$

۶۴- گزینه‌ی (۴) فرض کنید به نفر iام؛ x_i سکه ۱۰ ریالی و y_i سکه ۲۰ ریـالی برسـد، $i = ۱,۲,۳$، در ایـن صـورت $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴$ و $y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۷$. فرض کنید S مجموعه کلیه جوابهای این دو معادله در مجموعه اعداد صحیح نامنفی باشد و A_i مجموعه جوابهـایی از S باشد که ، $i = ۱,۲,۳$. در این صورت تعداد راههای توزیع سکه‌ها بین ۳ نفر طوری‌که به هر سه نفر حداقل یک سکه برسد برابر تعـداد جوابهـایی از S است که در هیچ‌یک از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار ندارند. پس پاسخ برابر است با:

$$|S| - ۳|A_۱| + ۳|A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \binom{۶}{۲}\binom{۶}{۲} - ۳\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱} + ۳ - ۰ = ۱۵۳$$

B **۶۵- گزینه‌ی (۱)** چون $۳ \times ۲^۳ = ۲۴$، لذا باید اعداد طبیعی ۲ رقمی را پیدا کنیم که نسبت به ۳ و ۲ (عوامل اول ۲۴) اول باشد:

مجموعه‌ی اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۲ $= A_۱ \Rightarrow |A_۱| = [\frac{۹۹}{۲}] - [\frac{۹}{۲}] = ۴۹ - ۴ = ۴۵$

مجموعه‌ی اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۳ $= A_۲ \Rightarrow |A_۲| = [\frac{۹۹}{۳}] - [\frac{۹}{۳}] = ۳۳ - ۳ = ۳۰$

مجموعه‌ی اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۶ $= A_۱ \cap A_۲ \Rightarrow |A_۱ \cap A_۲| = [\frac{۹۹}{۶}] - [\frac{۹}{۶}] = ۱۶ - ۱ = ۱۵$

لذا جواب سؤال برابر است با:

$$|S| - |A_۱| - |A_۲| + |A_۱ \cap A_۲| = ۹۰ - ۴۵ - ۳۰ + ۱۵ = ۳۰$$

روش دوم : می‌دانیم از هر ۶ عدد متوالی $\varphi(۶) = ۲$ عدد نسبت به ۶ اول‌اند . چون مجموعه‌ی اعداد ۲ رقمی شامل $۶\times ۱۵ = ۹۰$ عدد متوالی است، پس از این مجموعه $۲\times ۱۵ = ۳۰$ عدد نسبت به ۶ اول‌اند.

A **۶۶- گزینه‌ی (۲)** جواب سؤال $\varphi(۷۰)$ است. داریم:

$$۷۰ = ۲\times ۵\times ۷ \Rightarrow \varphi(۷۰) = ۷۰(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۵})(۱-\frac{۱}{۷}) = ۲۴$$

B **۶۷- گزینه‌ی (۴)** عوامل اول ۲۴۰ و ۶۰ یکسان و برابر اعداد ۲ و ۳ و ۵ می‌باشد، لذا جواب سؤال همان $\varphi(۲۴۰)$ است.

$$\varphi(۲۴۰) = ۲۴۰(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۵}) = ۶۴$$

C **۶۸- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم از هر ۳۰ عدد متوالی دقیقاً $\varphi(۳۰) = ۸$ عدد نسبت به ۳۰ اول‌اند. چون مجموعه‌ی $\{۸۱,۸۲,...,۹۸۰\}$ شـامل ۹۰۰ عدد متوالی است، لذا پاسخ برابر $۳۰\varphi(۳۰) = ۲۴۰$ است.

C **۶۹- گزینه‌ی(۴)** می‌دانیم از هر ۱۰۵ عدد متوالی دقیقاً $\varphi(105)=48$ عدد نسبت به ۱۰۵ اول‌اند. چون مجموعه‌ی $\{1,2,...,422\}$ شامل ۴۲۲ عدد صحیح متوالی است و $422=4\times105+2$، پس در مجموعه‌ی $\{1,2,...,420\}$ دقیقاً $4\varphi(105)=192$ عدد نسبت به ۱۰۵ اول‌اند. ضمناً ۲ عدد ۴۲۱ و ۴۲۲ نیز نسبت به ۱۰۵ اول‌اند. لذا جواب برابر $194=2+192$ است.

A **۷۰- گزینه‌ی(۴)** اگر A مجموعه‌ی شرکت‌کنندگان کلاس ادبیات و B مجموعه‌ی شرکت‌کنندگان کلاس عربی باشد، داریم:

$$|A|=35\ ,\ |B|=31\ ,\ |A\cap B|=23\Rightarrow|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=43\Rightarrow|\overline{A\cup B}|=51-43=8$$

C **۷۱- گزینه‌ی (۴)**

$$\varphi(ab)=k\Rightarrow ab(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})=k\Rightarrow(a-1)(b-1)=k$$

$$\varphi(abc)=abc(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})(1-\frac{1}{c})=\underbrace{(a-1)(b-1)}_{k}(c-1)=k(c-1)$$

C **۷۲- گزینه‌ی(۳)** راه اول: با توجه به آن‌که $5^2\times3=75$ و $5\times3\times2^2=60$، اعداد مورد نظر نباید بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشند. طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد چنین اعدادی برابر است با:

$$300-[\frac{300}{2}]-[\frac{300}{3}]-[\frac{300}{5}]+[\frac{300}{6}]+[\frac{300}{10}]+[\frac{300}{15}]-[\frac{300}{30}]=300-150-100-60+50+30+20-10=80$$

راه دوم: اگر a بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد، داریم $(a,300)=1$، زیرا $300=2^2\times3\times5^2$، پس تعداد اعدادی را می‌خواهیم که کوچک‌تر از ۳۰۱ هستند و نسبت به آن اول‌اند، یعنی همان $\varphi(300)$، بنابراین:

$$\varphi(300)=2^2\times3\times5^2\times(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=2\times5\times2\times4=80$$

C **۷۳- گزینه‌ی (۴)** تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که نسبت به n اول‌اند، برابر است با: $\varphi(n)$. داریم:

$$k=\varphi(3^3\times5^2)=3^3\times5^2\times(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=3^2\times5\times2\times4$$

$$\text{مقدار مطلوب}=\varphi(2^2\times3^4\times5^2)=2^2\times3^4\times5^2\times(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=2\times3^3\times5\times2\times4=2\times3\times k=6k$$

C **۷۴- گزینه‌ی (۱)** باید $3\mid(a,18)$، یعنی $(a,18)=1$ یا $(a,18)=3$. چون $18=2\times9$، پس اولاً a نباید مضرب ۲ باشد، ثانیاً نباید مضرب ۹ باشد. بنابراین طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد اعدادی چون a برابر است با:

$$50-[\frac{50}{2}]-[\frac{50}{9}]+[\frac{50}{18}]=50-25-5+2=22$$

B **۷۵- گزینه‌ی (۴)** اگر A مجموعه‌ی توابعی باشد که عدد ۲ در برد آن‌ها نیست و B مجموعه‌ی توابعی که ۱ متعلق به برد آن‌ها نیست، $|\overline{A\cup B}|$ را می‌خواهیم. با توجه به مثال‌های بخش آموزش داریم:

$$|\overline{A\cup B}|=2^5-1^5-1^5+0=30$$

B **۷۶- گزینه‌ی (۴)** در ماتریس متناظر رابطه، قطعاً درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر ۱ هستند. درایه‌های دیگر به $\frac{16-4}{2}=6$ زوج متقارن نسبت به قطر اصلی تقسیم می‌شوند. اگر رابطه‌ی R تقارنی باشد، هر کدام از این زوج‌ها ۲ حالت خواهند داشت (هر دو صفر یا هر دو یک) و بنابراین 2^6 رابطه‌ی تقارنی و انعکاسی داریم. هم‌چنین در حالت کلی 2^{12} رابطه‌ی انعکاسی داریم. پس تعداد روابط انعکاسی و غیرتقارنی برابر است با:

$$2^{12}-2^6=4^6-2^6$$

B **۷۷- گزینه‌ی (۱)** اگر فرض کنیم $y_i=x_i-3$ $(1\le i\le3)$، آن‌گاه $0\le y_1,y_2,y_3\le1$ و $x_4,x_5\ge0$ و می‌خواهیم تعداد جواب‌های معادله‌ی $y_1+y_2+y_3+x_4+x_5=1$ را پیدا کنیم. این معادله ۵ جواب دارد (در هر جواب یکی از متغیرها ۱ و مابقی صفر هستند).

B **۷۸- گزینه‌ی (۲)**

$$f=\{(1,1),(2,x),(3,y),(4,z)\}$$

تابع را می‌توانیم به صورت بالا نشان بدهیم که در آن x، y و z سه عضو متمایز (به دلیل یک‌به‌یک بودن تابع) از مجموعه‌ی B هستند. به همین دلیل برای x، ۴ انتخاب، برای y، ۳ انتخاب و برای z، ۲ انتخاب وجود دارد. تعداد چنین توابعی برابر است با:

$$4\times3\times2=24$$