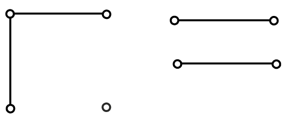
فصل ۱

تست‌های مرور (بخش‌های ۱ تا ۳)

پاسخ‌های تشریحی

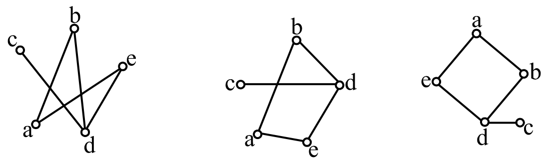
۱- گزینه‌ی (۲)

با رسم گراف‌ها مشخص می‌شود که دو گراف با شرایط مورد نظر وجود دارد.



۲- گزینه‌ی (۱)

در گراف گزینه‌ی (۱) رئوس درجه‌ی ۳ و درجه‌ی ۱ مجاور نیستند. اما در گراف‌های سایر گزینه‌ها این دو رأس مجاورند. برای اثبات یک‌ریخت بودن گراف‌های ۳ گزینه‌ی دیگر، باید بتوانیم رئوس گراف‌ها را طوری نام‌گذاری کنیم که گراف‌ها مساوی شوند (مجموعه‌ی V و E هر سه یکسان شود).



هر سه گراف مساوی‌اند، زیرا مجموعه‌ی V و مجموعه‌ی E در هر سه گراف یکسان است:

$V = \{a,b,c,d,e\}$ و $E = \{ab,ae,bd,ed,dc\}$

۳- گزینه‌ی (۴)

اگر G گرافی ساده از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q باشد، داریم:

$$q_{\max} = \binom{p}{۲} \Rightarrow q_{\max} = \binom{۱۰}{۲} = ۴۵$$

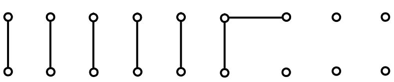
۴- گزینه‌ی (۳)

راه‌حل اول: در گراف G، ۵ رأس از درجه‌ی صفر است. پس ۱۳ رأس باقی‌مانده، باید حداقل از درجه‌ی ۱ باشد. از طرفی در هر گراف مجموع درجه‌ی رأس‌ها، دوبرابر تعداد یال‌هاست، پس داریم:

$$۲q \geq ۱۳ \Rightarrow q \geq ۷$$

پس حداقل اندازه‌ی G برابر ۷ است.

راه‌حل دوم: با استفاده از رسم شکل نیز راحت به جواب می‌رسید. کافی است که ۵ رأس را کنار بگذارید و روی ۱۳ رأس باقی‌مانده حداقل یال ممکن را قرار دهید.



۵- گزینه‌ی (۴)

اول باید ببینیم گراف از اندازه‌ی ۲۳ حداقل چند رأس نیاز دارد. با توجه به رابطه‌ی بین مرتبه و اندازه‌ی گراف‌های ساده، داریم:

$$q \leq \frac{p(p-۱)}{۲} \xrightarrow{q=۲۳} p(p-۱) \geq ۴۶ \Rightarrow p \geq ۸$$

چون گراف G، ۶ رأس از درجه‌ی صفر نیز دارد، پس حداقل مرتبه‌ی G برابر است با:

$$۶ + ۸ = ۱۴$$

۶- گزینه‌ی (۴)

چون ۶ رأس از درجه‌ی صفر است، پس $p-۶$ رأس باقی‌مانده حداقل از درجه‌ی ۱ می‌باشند. برای این که مرتبه‌ی G حداکثر باشد، باید یال‌ها طوری توزیع شود که درجه‌ی هر رأس دقیقا برابر ۱ باشد، یعنی هر یال بین دو رأس مجزا قرار گیرد (در واقع $p-۶$ رأس درجه‌ی ۱ داریم). برای محاسبه‌ی اندازه‌ی گراف داریم:

$$p-۶=۲\times ۲۳ \Rightarrow p=۵۲$$

۷- گزینه‌ی (۲)

یک گراف با ۵ رأس حداکثر می‌تواند $۱۰=\frac{۵\times ۴}{۲}=\binom{۵}{۲}$ یال داشته باشد. برای رسم یک گراف، هر یال ۲ انتخاب دارد، پس در حالت کلی $۲^{۱۰}$ گراف قابل رسم است. اما با توجه به فرض سؤال $ab\in E$، $cd\in E$ و $ac\notin E$ (یعنی تکلیف ۳ یال مشخص است)، پس تعداد گراف‌های قابل رسم برابر است با:

$$۲^{۱۰-۳}=۲^{۷}=۱۲۸$$

۸- گزینه‌ی (۲)

با توجه به این‌که در هر گراف ساده، تعداد رئوس فرد عددی زوج است، پس غیر از رأس درجه‌ی ۳ حداقل باید یک رأس درجه‌ی فرد دیگر وجود داشته باشد. لذا گراف G حداکثر می‌تواند $۷-۲=۵$ رأس از درجه‌ی زوج داشته باشد.

۹- گزینه‌ی (۳)

تعداد رئوس درجه‌ی ۳ و ۲ را به ترتیب x و y فرض می‌کنیم. در هر گراف ساده، مجموع درجه‌ی رأس‌ها دو برابر تعداد یال‌هاست. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x+y=۸ \\ ۳x+۲y=۲\times ۱۱ \end{cases} \Rightarrow x=۶\,,\, y=۲$$

۱۰- گزینه‌ی (۴)

تعداد رئوس درجه‌ی ۵ را x فرض می‌کنیم. چون در هر گراف، مجموع درجه‌ی رأس‌ها دو برابر تعداد یال‌هاست، داریم:

$$۲\times ۲+۳\times ۳+۵\times x=۲\times ۲۴ \Rightarrow x=۷$$

پس مرتبه‌ی G برابر است با:

$$۲+۳+۷=۱۲$$

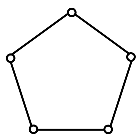
۱۱- گزینه‌ی (۲)

در گزینه‌ی (۱) تعداد رئوس درجه‌ی فرد، عددی فرد است. گزینه‌ی (۳) دنباله‌ی گرافی نیست، چون با وجود رأس درجه‌ی ۵ نمی‌تواند رأس درجه‌ی صفر داشته باشد. از طرفی اگر در گراف G از مرتبه‌ی p، m رأس از درجه‌ی $p-۱$ وجود داشته باشد $(m<p)$، آن‌گاه $\delta \geq m$. لذا گزینه‌ی (۴) نمی‌تواند دنباله‌ی گرافی باشد.

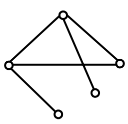
۱۲- گزینه‌ی (۴)

با توجه به این‌که گراف مورد نظر ۵ رأس دارد، باید سعی کنیم اعداد مورد نظر را به حاصل‌ضرب ۵ عدد طبیعی بین ۱ تا ۴ تجزیه کنیم تا بتوانند درجه‌ی رأس‌های یک گراف باشند.

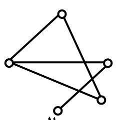
گزینه‌ی (۱): با توجه به این‌که $۲\times ۲\times ۲\times ۲\times ۲=۳۲$، می‌توان گرافی با دنباله‌ی درجه‌های ۲ ، ۲، ۲، ۲ و ۲ ساخت.



گزینه‌ی (۲): با توجه به این‌که $۱\times ۱\times ۲\times ۳\times ۳=۱۸$، می‌توان گرافی با دنباله‌ی درجه‌های ۱، ۱، ۲، ۳ و ۳ ساخت.

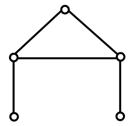


گزینه‌ی (۳): با توجه به این‌که $۱\times ۲\times ۲\times ۲\times ۳=۲۴$، می‌توان گرافی با دنباله‌ی درجه‌های ۱، ۲، ۲، ۲ و ۳ ساخت.



گزینه‌ی (۴): داریم: $۱\times ۱\times ۳\times ۳\times ۴=۱\times ۲\times ۲\times ۳\times ۳=۳۶$، اما هیچ‌یک از دنباله‌های ۱، ۱، ۳، ۳ و ۴ یا ۱، ۲، ۲، ۳ و ۳ نمی‌توانند دنباله‌ی درجه‌های یک گراف ساده باشند (چرا؟).

۱۳- گزینه‌ی (۱)



تنها گراف مورد نظر به صورت مقابل رسم می‌شود.

۱۴- گزینه‌ی (۳)

می‌دانیم که اگر در گراف ساده‌ی G، m رأس از درجه‌ی $p-۱$ وجود داشته باشد $(m<p)$، آن‌گاه $\delta \geq m$. در گراف مورد نظر ، ۳ رأس از درجه‌ی ۴ موجود است، لذا باید $\delta \geq ۳$.

۱۵- گزینه‌ی (۴)

این گراف، ۹ رأس دارد که ۴ رأس آن از درجه‌ی ۸ هستند، لذا باید $\delta \geq ۴$. اما اگر $\delta = ۴$ یا $\delta = ۶$، تعداد رئوس فرد گراف، عددی فرد خواهد شد، بنابراین $\delta = ۵$.

۱۶- گزینه‌ی (۴)

گزینه‌ی (۱) نادرست است، زیرا در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p، همواره $\Delta \leq p-۱$. گزینه‌های (۲) و (۳) نیز در رابطه‌ی کلی $\delta \leq \frac{۲q}{p} \leq \Delta$ صدق نمی‌کنند.

۱۷- گزینه‌ی (۳)

با توجه به این‌که در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، داریم $\frac{۲q}{p} \leq \Delta$، بنابراین در گراف G داریم:

$$\frac{۲\times ۴۰}{p} \leq ۷ \Rightarrow p \geq ۱۱/۴ \xrightarrow{P\in\mathbb{N}} p \geq ۱۲$$

برای درک بهتر، بررسی کنید که آیا گرافی با ۱۱ رأس و $\Delta = ۷$ می‌تواند وجود داشته باشد که $q = ۴۰$.

۱۸- گزینه‌ی (۳)

دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های گراف را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$۷, d_۲, d_۳, d_۴, d_۵, d_۶, d_۷, d_۸, d_۹, ۲$$

برای این‌که q بیش‌ترین مقدار خود را اختیار کند، باید $d_۲$ تا $d_۹$ حداکثر باشد، پس $d_۲$ تا $d_۸$ را برابر $\Delta = ۷$ و $d_۹$ را برابر ۶ قرار می‌دهیم، بنابراین داریم:

$$\sum \deg(v_i) = ۲q = ۷\times ۸ + ۶ + ۲ = ۶۴ \Rightarrow q = ۳۲$$

دقت کنید که اگر $d_۹$ را نیز برابر ۷ فرض می‌کردیم، تعداد رأس‌های فرد گراف عددی فرد می‌شد.

۱۹- گزینه‌ی (۱)

دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های گراف را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$۷, d_۲, d_۳, \cdots, d_۸, d_۹, ۲$$

برای این‌که q کم‌ترین مقدار خود را اختیار کند، باید $d_۲$ تا $d_۹$ حداقل باشند، پس $d_۳$ تا $d_۹$ را برابر $\delta = ۲$ و $d_۲$ را برابر ۳ قرار می‌دهیم (توجه کنید که تعداد رئوس فرد گراف باید عددی زوج باشد)، پس داریم:

$$\sum \deg(v_i) = ۲q = ۷ + ۳ + ۲\times ۸ = ۲۶ \Rightarrow q = ۱۳$$

۲۰- گزینه‌ی (۱)

اندازه‌ی یک گراف کامل با p رأس، برابر است با $\frac{p(p-۱)}{۲}$. به عبارتی در گراف کامل K_p، داریم: $۲q = p(p-۱)$. پس عددی می‌تواند اندازه‌ی یک گراف کامل باشد که ۲ برابر آن، حاصل‌ضرب ۲ عدد متوالی باشد. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۲): $۲\times ۳۶ = ۷۲ = ۹\times ۸ \to K_۹$

گزینه‌ی (۳): $۲\times ۲۸ = ۵۶ = ۸\times ۷ \to K_۸$

گزینه‌ی (۴): $۲\times ۴۵ = ۹۰ = ۱۰\times ۹ \to K_{۱۰}$

۲۱- گزینه‌ی (۲)

در گراف کامل K_p داریم $۲q = p(p-۱)$. از طرفی با توجه به فرض $p+q=۲۱$. با استفاده از این دو رابطه داریم:

$$۲q = p(p-۱) \xrightarrow{q=۲۱-p} ۲(۲۱-p) = p(p-۱) \Rightarrow (p+۷)(p-۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} p = ۶ \Rightarrow q = ۲۱-۶ = ۱۵ \\ p = -۷ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲۲- گزینه‌ی (۳)

در گراف $K_۵$ داریم: $\frac{۵(۵-۱)}{۲}=q \Rightarrow q=۱۰$

پس اگر یک یال از گراف $K_۵$ کم کنیم، به گراف G می‌رسیم. لذا گراف G از اندازه‌ی ۹ است.

۲۳- گزینه‌ی (۲)

گراف مکمل G، گرافی ساده از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی $۲=۴۳-\frac{۱۰\times ۹}{۲}$ است. چون به ازای هر گراف $\overline{G}$ یک گراف منحصر به فرد G وجود دارد، کافی است تعداد گراف‌های مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۲ را پیدا کنیم، که با توجه به شکل فقط ۲ گراف ساده از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۲ وجود دارد:

توجه: مفهوم اصلی آنچه گفته شد، این است که به چند طریق می‌توان ۲ یال از گراف $K_{۱۰}$ برداشت.

۲۴- گزینه‌ی (۳)

با توجه به این‌که در هر گراف $r-$منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی $rp=۲q$ برقرار است، پس حداقل یکی از p و r باید زوج باشد. لذا گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۷ و گراف ۵- منتظم از مرتبه‌ی ۱۳ وجود ندارد. گراف ۱۰- منتظم از مرتبه‌ی ۸ نیز وجود ندارد. زیرا در گرافی که مرتبه‌ی آن ۸ است، درجه‌ی هر رأس حداکثر می‌تواند ۷ باشد.

۲۵- گزینه‌ی (۴)

در هر گراف $r-$منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی $rp=۲q$ برقرار است. بنابراین گراف‌های گزینه‌های (۱) و (۲) نمی‌توانند وجود داشته باشند، زیرا با قرار دادن r و q در رابطه‌ی $rp=۲q$، مقدار p عددی غیر طبیعی به دست می‌آید که نادرست است.

در گزینه‌ی (۳) داریم: $۱۰\times p=۲\times ۵۰ \Rightarrow p=۱۰$

پس درجه‌ی هر رأس، حداکثر می‌تواند ۹ باشد.

۲۶- گزینه‌ی (۴)

مکمل گراف مورد نظر، گرافی ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۱۰ است. چون بین هر گراف و مکمل آن، تناظر یک به یک برقرار است، پس کافی است تعداد گراف‌های ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۱۰ را پیدا کنیم. برای پیدا کردن این تعداد، باید ببینیم که عدد $p=۱۰$ را به چند طریق می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی نوشت که هیچ‌کدام کوچک‌تر از ۳ نباشند. پس داریم:

$$\begin{array}{ccccccccc} G_۱ & & G_۲ & & G_۳ & & G_۴ & & G_۵ \\ ۱۰ & = & ۷+۳ & = & ۶+۴ & = & ۵+۵ & = & ۴+۳+۳ \end{array}$$

۲۷- گزینه‌ی (۲)

با توجه به رابطه‌ی $rp=۲q$ داریم:

$$۵p=۲\times ۳۰ \Rightarrow p=۱۲$$

۲۸- گزینه‌ی (۴)

در هر گراف $r-$ منتظم رابطه‌ی $rp=۲q$ و در هر گراف کامل K_p رابطه‌ی $q=\frac{p(p-۱)}{۲}$ برقرار است. لذا با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases} ۵p=۲q \\ p(p-۱)=۲(q+۸۰)\xrightarrow{۵p=۲q}p(p-۱)=۵p+۱۶۰ \Rightarrow p^۲-۶p-۱۶۰=۰ \Rightarrow (p-۱۶)(p+۱۰)=۰ \Rightarrow \begin{cases} p=۱۶ \\ p=-۱۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

۲۹- گزینه‌ی (۱)

گراف فرد منتظم از مرتبه‌ی فرد وجود ندارد.

۳۰- گزینه‌ی (۳)

در گراف کامل K_p، $\Delta=p-۱$. بنابراین طبق فرض داریم:

$$p=۲\Delta-۷\xrightarrow{\Delta=p-۱}p=۲(p-۱)-۷ \Rightarrow p=۹$$

$$\frac{p(p-۱)}{۲}=q\xrightarrow{p=۹}\frac{۹\times ۸}{۲}=q \Rightarrow q=۳۶$$

۳۱- گزینه‌ی (۳)

در گراف کامل K_p داریم:

$$\frac{p(p-۱)}{۲}=q \Rightarrow \frac{p(p-۱)}{۲}=۱۰۵ \Rightarrow p^۲-p-۲۱۰=۰ \Rightarrow (p+۱۴)(p-۱۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} p=۱۵ \Rightarrow \Delta=۱۴ \\ p=-۱۴ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۳۲- گزینه‌ی (۴)

چون $\Delta=۵$، لذا $\delta \leq ۵$. از طرفی δ نمی‌تواند برابر ۵ باشد، چون تعداد رئوس فرد گراف نمی‌تواند عددی فرد باشد، پس $\delta \leq ۴$. با فرض $\delta=۴$ داریم:

$$\sum \deg v_i = ۸\times ۵+۴=۴۴=۲q \Rightarrow q=۲۲$$

پس: $\delta=۴$

۳۳- گزینه‌ی (۲)

اندازه‌ی گراف کامل $K_{۱۰}$، برابر $۴۵=\frac{۱۰\times ۹}{۲}$ است، پس گراف G، ۵ یال کم‌تر از گراف کامل $K_{۱۰}$ دارد. برای داشتن حداقل مقدار δ در گراف G باید در گراف $K_{۱۰}$ هر ۵ یال را از یک رأس برداریم. چون درجه‌ی هر رأس در گراف کامل $K_{۱۰}$، برابر ۹ است، لذا $\delta=۹-۵=۴$.

۳۴- گزینه‌ی (۴)

می‌دانیم گراف ۶-منتظم مرتبه‌ی ۱۳ دارای $۳۹=\frac{۶\times ۱۳}{۲}$ یال است، پس اگر ۲ یال به این گراف اضافه کنیم، به گراف G خواهیم رسید. ۲ یال را می‌توان به ۴ رأس یا ۳ رأس متصل کرد، اما چون حداقل تعداد رأس درجه‌ی $\delta=۶$ مدنظر است، پس ۲ یال را به ۴ رأس گراف ۶-منتظم مرتبه‌ی ۱۳ وصل می‌کنیم که در این صورت گراف G، ۹ رأس از درجه‌ی $\delta=۶$ و ۴ رأس از درجه‌ی ۷ خواهد داشت.

۳۵- گزینه‌ی (۴)

می‌دانیم گراف $K_{۱۳}$ دارای $۷۸=\frac{۱۳\times ۱۲}{۲}$ یال و ۱۳ رأس از درجه‌ی $\Delta=۱۲$ است. اکنون برای این‌که به گراف G برسیم، کافی است ۲ یال از گراف $K_{۱۳}$ برداریم. چون حداقل تعداد رأس از درجه‌ی $\Delta=۱۲$ مورد نظر است، پس ۲ یال را از روی ۴ رأس برمی‌داریم. در این صورت G دارای $۱۳-۴=۹$ رأس از درجه‌ی $\Delta=۱۲$ و ۴ رأس از درجه‌ی $\delta=۱۱$ خواهد بود.

۳۶- گزینه‌ی (۲)

چون اشتراک بازه‌ی (۵,۸) فقط با بازه‌های (۷,۱۰)، (۶,۹)، (۴,۷) و (۳,۶) ناتهی است، پس درجه‌ی رأس متناظر این بازه برابر ۴ است.

۳۷- گزینه‌ی (۴)

غیر از گزینه‌ی (۴) سایر گراف‌ها دارای $n \geq ۴$ ضلعی فاقد قطر هستند.

فصل ۱

تست های مرور (بخش‌های ۴ تا ۶)

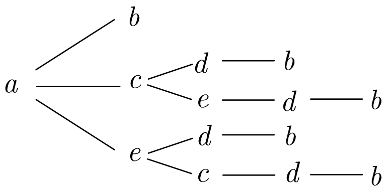
پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۲)

مسیرهای به طول ۳، از a به b عبارت‌اند از a,f,c,b و a,e,c,b و a,d,c,b و a,d,e,b و a,e,d,b.

۲- گزینه‌ی (۴)

با روش نمودار درختی مسیرهای از a به b به‌دست می‌آید:



بنابراین ۵ مسیر از a به b وجود دارد.

۳- گزینه‌ی (۴)

با توجه به این‌که تعداد مسیرهای به طول k در گراف K_p برابر با $\frac{p!}{۲(p-k-۱)!}$ است، تعداد مسیرهای به طول ۳ در گراف $K_۷$ برابر است با:

$$\frac{۷!}{۲(۷-۳-۱)!}=\frac{۷!}{۲\times ۳!}=۴۲۰$$

۴- گزینه‌ی (۴)

تعداد مسیرهای به طول m در گراف K_p بین دو رأس متمایز برابر است با:

$$\frac{(p-۲)!}{(p-m-۱)!}$$

بنابراین تعداد مسیرهای به طول ۴ بین دو رأس a و b در گراف $K_۷$ برابر است با:

$$\frac{(۷-۲)!}{(۷-۴-۱)!}=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$$

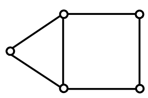
۵- گزینه‌ی (۲)

هر دور به طول ۴، از ۴ رأس متمایز تشکیل می‌شود. چون رأس a در دور مورد نظر وجود دارد باید $۴-۱=۳$ رأس دیگر را از $۷-۱=۶$ رأس باقی‌مانده انتخاب کنیم: $\binom{۶}{۳}$. از طرفی با این ۴ رأس $\frac{(۴-۱)!}{۲}$ دور متمایز می‌توان ساخت. پس تعداد دورهای به طول ۴ شامل رأس a، برابر است با:

$$\binom{۶}{۳}\frac{(۴-۱)!}{۲}=۶۰$$

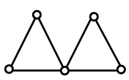
۶- گزینه‌ی (۳)

با رسم گراف مشخص می‌شود که ۳ دور متمایز در گراف G موجود است.

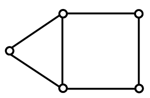


۷- گزینه‌ی (۲)

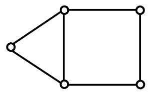
تنها گرافی که از مرتبه‌ی ۵ با فقط ۲ دور می‌توان رسم کرد، گراف شکل مقابل می‌باشد.



توجه کنید که اگر به طور مثال گراف به‌صورت زیر رسم می‌شد، ۳ دور داشت.



۸- گزینه‌ی (۳)



با توجه به شکل گراف با حذف ۲ یال از هر رأس درجه‌ی ۲، گرافی ناهمبند حاصل می‌شود.

۹- گزینه‌ی (۱)

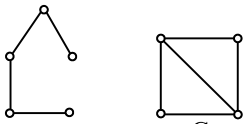
شرط لازم (نه کافی) برای همبند بودن گراف مرتبه‌ی p آن است که $q \geq p-1$، بنابراین در گراف مورد نظر $q \geq 9-1$.

۱۰- گزینه‌ی (۲)

در هر گراف همبند داریم $q \geq p-1$، با توجه به فرض داریم:

$$p+q=9 \xrightarrow{q \geq p-1} 9-p \geq p-1 \Rightarrow \begin{cases} p \leq 5 \\ q \geq 4 \end{cases}$$

پس یا $p=5$ و $q=4$ و یا $p=4$ و $q=5$. (توجه کنید p نمی‌تواند کم‌تر یا مساوی ۳ باشد، زیرا در این‌صورت $q \geq 6$ خواهد شد که رسم چنین گرافی غیرممکن است). بنابراین با ۲ گراف G_1 و G_2 روبه‌رو هستیم:



G_1 G_2

که فقط گراف G_2 دارای دور می‌باشد.

۱۱- گزینه‌ی (۲)

کافی است یک رأس را به‌صورت تنها (K_1) و ۱۶ رأس دیگر را به‌صورت گراف K_{16} در نظر بگیریم در این‌صورت $\binom{16}{2}=120$ یال خواهیم داشت.

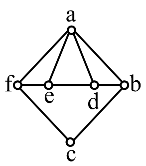
۱۲- گزینه‌ی (۴)

۲ مولفه را به‌صورت ۲ رأس تنها و ۸ رأس باقی مانده را به‌صورت یک گراف کامل K_8 در نظر می‌گیریم. لذا حداکثر اندازه‌ی گراف مورد نظر برابر است با:

$$\frac{8 \times 7}{2}=28$$

۱۳- گزینه‌ی (۲)

در این‌گونه سوال‌ها (البته این یکی انصافاً سخت است) بهتر است گراف را طوری رسم کنید که یال‌ها با هم تلاقی نداشته باشند. لذا دورهای به طول ۵ در این گراف به‌صورت زیر می‌باشند.



a,b,c,f,e,a
a,f,c,b,d,a
a,b,d,e,f,a
c,f,e,d,b,c

۱۴- گزینه‌ی (۲)

طبق فرض داریم:

$$pq=20=20\times 1=10\times 2=5\times 4=4\times 5$$

چون گراف G همبند است، پس $q \geq p-1$. بنابراین در دو حالت $p=5$ و $q=4$ یا $p=4$ و $q=5$، گراف G می‌تواند همبند باشد. بنابراین $p+q=9$.

۱۵- گزینه‌ی (۳)

اگر G همبند باشد، آن‌گاه $q \geq p-1$، پس اگر $q < p-1$، آن‌گاه G حتماً ناهمبند است.

۱۶- گزینه‌ی (۱)

چون عدد ۹ را به ۴ طریق می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت که هیچ‌کدام کوچک‌تر از ۳ نباشند، پس ۴ گراف، ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد که فقط یکی از آن‌ها (گراف G_1) همبند است و بقیه ناهمبند هستند.

$$\begin{array}{ccccccc} G_1 & & G_2 & & G_3 & & G_4 \\ 9 & = & 6+3 & = & 4+5 & = & 3+3+3 \end{array}$$

۱۷- گزینه‌ی (۴)

چون گراف مورد نظر گرافی اویلری است از هر رأس آن می‌توان شروع به کشیدن گراف کرد.

۱۸- گزینه‌ی (۴)

اگر یک گراف همبند فقط ۲ رأس درجه فرد داشته باشد، اگر از هر رأس درجه فرد شروع کنیم بعد از این‌که از هر یال یک‌بار (فقط یک‌بار) گذشتیم حتماً به رأس فرد دیگر می‌رسیم.

۱۹- گزینه‌ی (۲)

گراف همبند بدون دور، درخت است و در هر درخت $\delta = ۱$ (هر درخت حداقل ۲ رأس از درجه‌ی یک دارد) پس با توجه به رابطه‌ی $\Delta + \delta = ۱۷$ نتیجه می‌گیریم $\Delta = ۱۶$، لذا درخت G حداقل ۱۶ رأس درجه‌ی یک دارد.

(هر درخت حداقل Δ رأس درجه‌ی یک دارد.)

۲۰- گزینه‌ی (۲)

در گراف کامل K_p، اندازه‌ی گراف برابر $\frac{p(p-۱)}{۲}$ است و اندازه‌ی درخت برابر $p-۱$ است. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\frac{p(p-۱)}{۲} - ۴۵ = p - ۱ \Rightarrow p^۲ - ۳p - ۸۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (p-۱۱)(p+۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} p = ۱۱ \\ p = -۸ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۲۱- گزینه‌ی (۴)

اندازه‌ی یک درخت، $p-۱$ و اندازه‌ی یک گراف r- منتظم از مرتبه‌ی p، برابر $\frac{rp}{۲}$ است. بنابراین با توجه به فرض مسأله داریم:

$$۸ + p - ۱ = \frac{۳p}{۲} \Rightarrow ۱۴ + ۲p = ۳p \Rightarrow p = ۱۴$$

۲۲- گزینه‌ی (۳)

دنباله‌ی مورد نظر ۹ تایی است، لذا $p = ۹$، از طرفی داریم:

$$\sum \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۱۸ = ۲q \Rightarrow q = ۹$$

چون در این گراف $q \geq p$ لذا G قطعاً دارای دور است.

۲۳- گزینه‌ی (۳)

با توجه به رابطه‌ی $\sum \deg v_i = ۲q$ در هر گزینه اندازه‌ی گراف را به‌دست می‌آوریم.

گزینه‌ی (۱): $p = ۹\ ,\ q = ۹$

گزینه‌ی (۲): $p = ۷\ ,\ q = ۵$

گزینه‌ی (۳): $p = ۱۰\ ,\ q = ۹$

گزینه‌ی (۴): $p = ۷\ ,\ q = ۷$

با توجه به این‌که در هر درخت $q = p - ۱$، پس گزینه‌ی (۳) درست است.

همچنین دقت کنید که در هر درخت $\delta \geq ۱$ لذا گزینه‌ی (۲) رد می‌شود. همچنین در هر درخت حداقل Δ رأس درجه‌ی یک داریم، پس گزینه‌ی (۴) نیز قابل قبول نیست.

۲۴- گزینه‌ی (۱)

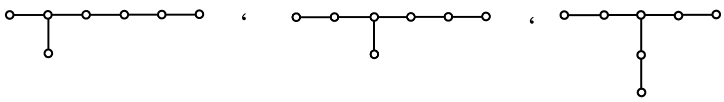
هر درخت حداقل Δ رأس درجه‌ی ۱ دارد. چون این درخت ۷ رأس درجه‌ی ۱ دارد، پس $\Delta \leq ۷$.

۲۵- گزینه‌ی (۲)

چون درخت مورد نظر بیش از دو رأس درجه‌ی یک دارد، پس حداقل Δ، برابر ۳ و حداکثر آن برابر ۱۷ است. (در هر درخت حداقل Δ رأس درجه‌ی یک داریم) بنابراین $۳ \leq \Delta \leq ۱۷$ و در نتیجه $۱۷ - ۳ + ۱ = ۱۵$ مقدار متمایز برای Δ وجود دارد.

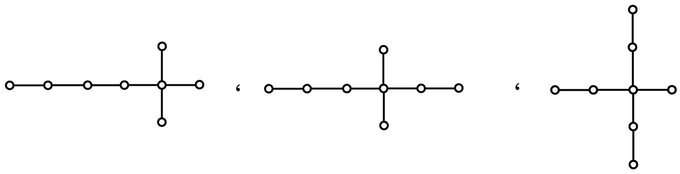
۲۶- گزینه‌ی (۲)

درخت‌های مورد نظر به‌صورت زیر می‌باشند:



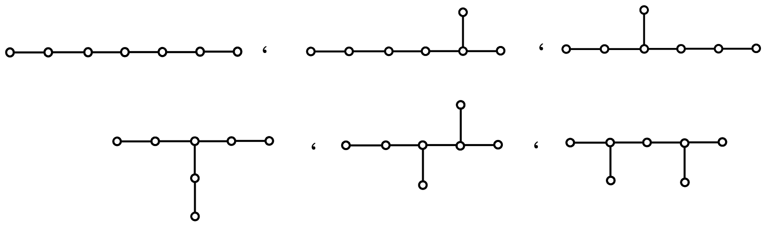
۲۷- گزینه‌ی (۳)

درخت‌های مورد نظر به صورت زیر هستند:



۲۸- گزینه‌ی (۲)

توجه کنید که $\Delta = 3$ یا $\Delta = 2$، بنابراین با این شرایط درخت‌های زیر قابل رسم هستند.



۲۹- گزینه‌ی (۲)

گراف G یک درخت است. در هر درخت از مرتبه‌ی p، $\binom{p}{2}$ مسیر به طول مثبت وجود دارد. بنابراین در گراف G، $\binom{10}{2} = 45$ مسیر وجود دارد.

۳۰- گزینه‌ی (۱)

با توجه به این‌که در هر درخت از مرتبه‌ی p، $\binom{p+1}{2}$ مسیر وجود دارد، داریم:

$$\binom{p+1}{2} = 45 \Rightarrow \frac{p(p+1)}{2} = 45 \Rightarrow p^2 + p - 90 = 0 \Rightarrow (p+10)(p-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 9 & \text{ق ق} \\ p = -10 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در هر درخت داریم: $q = p - 1$. بنابراین اندازه‌ی این درخت برابر است با $q = 9 - 1 = 8$.

۳۱- گزینه‌ی (۲)

در هر درخت از مرتبه‌ی p، $\binom{p}{2}$ مسیر به طول مثبت وجود دارد و داریم:

تعداد مسیرهای به طول ۱ − تعداد مسیرهای به طول مثبت = تعداد مسیرهای به طول حداقل ۲

مسیرهای به طول ۱، همان یال‌های گراف هستند و درخت مورد نظر ۱۲ یال دارد. پس داریم:

$$\text{تعداد مسیرهای به طول حداقل ۲} = \binom{12+1}{2} - 12 = 66$$

(توجه کنید در هر درخت $p = q + 1$)

۳۲- گزینه‌ی (۳)

با توجه به مفروضات مسأله، $p = 17$ و چون T یک درخت است، $q = 17 - 1 = 16$. از طرفی در هر گراف ساده داریم:

$$\sum \deg v_i = 2q \Rightarrow 4 \times 3 + 2 \times 2 + 10 \times 1 + \Delta = 2 \times 16 \Rightarrow \Delta = 6$$

۳۳- گزینه‌ی (۴)

ماتریس گزینه‌ی (۱)، ماتریس مجاورت گراف نیست زیرا درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفر نیستند. ماتریس گزینه‌ی (۲) متقارن نیست لذا نمی‌تواند ماتریس مجاورت گراف ساده باشد. ماتریس گزینه‌ی (۳) نیز قابل قبول نیست چون درایه‌های ماتریس مجاورت گراف ساده باید ۰ یا یک باشند.

۳۴- گزینه‌ی (۳)

چون مرتبه‌ی ماتریس ۷ است لذا $p = 7$. همچنین مجموع درایه‌ها برابر $2q$ است پس $q = 10$. بنابراین داریم:

$$p + q = 7 + 10 = 17$$

۳۵- گزینه‌ی (۲)

مجموع درایه‌های هر سطر برابر درجه‌ی رأس متناظر آن است. پس دنباله‌ی درجه‌های G به‌صورت ۱، ۲، ۲، ۲ و ۳ است.

۳۶- گزینه‌ی (۲)

چون گراف مورد نظر یک درخت است لذا $q = p - ۱ = ۶$.

از طرفی اگر A ماتریس مجاورت یک گراف باشد، در ماتریس $A^۲$، x_{ii} برابر $\deg v_i$ است. لذا مجموع عناصر روی قطر اصلی در ماتریس $A^۲$ برابر $\sum \deg v_i$ یا همان $۲q$ خواهد شد. بنابراین داریم:

$$A + A^۲ \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس } = ۲q + ۰ = ۲ \times ۶ + ۰ = ۱۲$$

۳۷- گزینه‌ی (۳)

تعداد درایه‌های صفر در ماتریس مجاورت یک گراف با p رأس و اندازه‌ی q برابر است با: $p^۲ - ۲q$، بنابراین در گراف G، تعداد درایه‌های صفر ماتریس مجاورت گراف برابر است با:

$$p^۲ - ۲q = p^۲ - \sum \deg v_i = ۸^۲ - ۲۶ = ۳۸$$

۳۸- گزینه‌ی (۳)

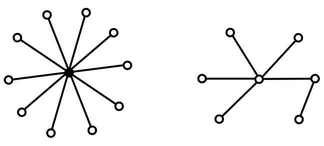
در یک درخت رابطه‌ی $q = p - ۱$ برقرار است. لذا در این درخت $q = ۱۳$. همچنین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲$ برابر مجموع درجه‌های رئوس گراف است. بنابراین داریم:

$$\sum \deg v_i = ۲q = ۲ \times ۱۳ = ۲۶$$

۳۹- گزینه‌ی (۱)

درایه‌های روی قطر اصلی در ماتریس $A^۲$، برابر درجه‌ی رئوس متناظر با آن درایه‌ها می‌باشند. با توجه به این مطلب دنباله‌ی درجه‌های رئوس گراف G به صورت $۱۰,\underbrace{۱,۱,\cdots,۱}_{\text{۱۰ بار}}$ یا $۵,۲,۱,۱,۱,۱,۱$. (توجه کنید که چون حاصل‌ضرب درایه‌ها عددی غیر صفر است، بنابراین هیچ رأسی از درجه‌ی صفر نمی‌تواند باشد.) در حالت دوم G کم‌ترین تعداد یال را می‌تواند داشته باشد، داریم:

$$\sum \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۱۲ = ۲q \Rightarrow q = ۶$$



$G_۱$ $G_۲$

۴۰- گزینه‌ی (۲)

اگر A ماتریس مجاورت گراف K_p باشد در این‌صورت درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $A^۲$ برابر $p - ۱$ و سایر درایه‌ها برابر $p - ۲$ خواهد بود. لذا مربع ماتریس مجاورت گراف $K_۴$ به‌صورت زیر است:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با ۳۶.

۴۱- گزینه‌ی (۲)

تعداد درایه‌های صفر در ماتریس مجاورت یک گراف ساده برابر است با $p^۲ - ۲q$، لذا با توجه به مفروضات مسأله داریم:

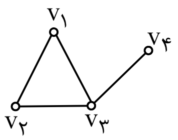
$$\begin{cases} p^۲ - ۲q = ۱۲ \\ rp = ۲q \end{cases} \Rightarrow p^۲ - rp = ۱۲ \Rightarrow p(p - r) = ۱۲ \qquad (۱)$$

از طرفی عدد ۱۲ را می‌توان به ۳ طریق تجزیه کرد:

$$۱۲ \times ۱ = ۶ \times ۲ = ۴ \times ۳ \Rightarrow \begin{cases} p = ۱۲\ ,\ r = ۱۱ \\ p = ۶\ ,\ r = ۴ \\ p = ۴\ ,\ r = ۱ \end{cases}$$

۴۲- گزینه‌ی (۳)

با توجه به گراف مورد نظر و ویژگی‌های ماتریس $A^۲$ داریم:



$$A^۲ = \begin{array}{c|cccc|} & v_۱ & v_۲ & v_۳ & v_۴ \\ v_۱ & ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ v_۲ & ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ v_۳ & ۱ & ۱ & ۳ & ۰ \\ v_۴ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ برابر ۱۸ است.

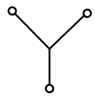
۴۳- گزینه‌ی (۴)

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $A^۲$، برابر درجه‌ی رأس‌های گراف می‌باشد. طبق فرض داریم:

$$\sum \deg v_i = ۲q \Rightarrow \sum \deg v_i = ۲ \times ۱۶ = ۳۲$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲$ برابر ۳۲ می‌باشد.

۴۴- گزینه‌ی (۱)



می‌دانیم درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲$ همان درجه‌ی رأس‌های گراف G هستند. پس باید ببینیم کدام گزینه می‌تواند حاصل‌ضرب درجه‌ی رأس‌های یک گراف از مرتبه‌ی ۴ باشد.

گزینه‌ی (۱): ۳,۱,۱,۱

گزینه‌ی (۲): ۳,۲,۱,۱

گزینه‌ی (۳): ۲,۲,۲,۱

گزینه‌ی (۴): ۳,۳,۱,۱

همان‌طور که می‌بینید فقط گزینه‌ی (۱) قابل قبول است. گزینه‌های (۲) و (۳) قابل قبول نیستند زیرا تعداد رأس‌های فرد آن‌ها عددی فرد است.
گزینه‌ی (۴) نیز قابل قبول نیست زیرا ۲ رأس از درجه‌ی $۴ - ۱ = ۳$ دارد لذا باید $\delta \geq ۲$.

۴۵- گزینه‌ی (۲)

تعداد درایه‌های صفر در ماتریس مجاورت G برابر است با $p^۲ - ۲q$، لذا طبق فرض داریم:

$$p^۲ - ۲q = ۹^۲ - ۲ \times ۱۵ = ۵۱$$

۴۶- گزینه‌ی (۴)

مجموع درایه‌های ۱ در ماتریس مجاورت گراف G برابر $۲q$ و تعداد درایه‌های صفر در ماتریس مجاورت گراف G برابر $p^۲ - ۲q$ می‌باشد. طبق مفروضات مسأله داریم:

$$\begin{cases} ۲q = ۲۸ \Rightarrow q = ۱۴ \\ p^۲ - ۲q = ۲۱ \xrightarrow{۲q=۲۸} p^۲ - ۲۸ = ۲۱ \Rightarrow p = ۷ \end{cases}$$

چون $\Delta = \delta$ بنابراین گراف مورد نظر، $r-$ منتظم می‌باشد. پس داریم:

$$rp = ۲q \Rightarrow r \times ۷ = ۲۸ \Rightarrow r = ۴$$

لذا درجه‌ی هر رأس برابر ۴ می‌باشد و چون $p = ۷$، هر ۷ رأس از درجه‌ی ۴ می‌باشند.

۴۷- گزینه‌ی (۳)

باید گزینه‌ها را بررسی کنیم. به این‌صورت که هر گزینه را به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد بین ۱ تا ۴ (چرا؟) تجزیه کنیم تا مشخص شود کدام گزینه می‌تواند حاصل‌ضرب درجه‌ی رأس‌های گراف G باشد.

$$۵۴ = ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

می‌دانیم گرافی با دنباله‌ی درجه‌های ۳,۳,۳,۲,۱ وجود دارد. پس گزینه‌ی (۱) قابل قبول است.

$$۲۴ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۱$$

دنباله‌ی ۴,۳,۲,۱,۱ گرافی نیست (چرا؟) اما دنباله‌ی ۳,۲,۲,۲,۱ می‌تواند متعلق به یک گراف ساده باشد.

$$۳۶ = ۴ \times ۳ \times ۳ \times ۱ \times ۱ = ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱$$

اما هیچ‌کدام از دنباله‌های ۴,۳,۳,۱,۱ و ۳,۳,۲,۲,۱ نمی‌توانند متعلق به یک گراف ساده باشند (چرا؟)

$$۴۸ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱$$

می‌دانیم دنباله‌ی درجه‌های ۴,۳,۲,۲,۱ می‌تواند متعلق به یک گراف ساده باشد. لذا فقط گزینه‌ی (۳) قابل قبول نیست.

توجه: اگر در تشخیص دنباله‌های گرافی مشکل دارید سری به بخش مربوط به آن در کتاب بزنید.