# ۲–۲: الگوریتم تقسیم

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} -24 & 6 \\ \hline 3 & \end{array}$$

«الگوریتم تقسیم» با وجود اسم جدید آن، در واقع بحث بسیار ساده و آشنایی برای شماست. از دوره‌ی ابتدایی و راهنمایی به یاد دارید که هنگام تقسیم یک عدد بر عددی دیگر، یک خارج قسمت و یک باقی‌مانده پیدا می‌کردید. مثلاً در تقسیم مقابل عدد ۶، خارج قسمت و ۳ باقی‌مانده‌ی تقسیم است. حتماً به یاد دارید که برای امتحان درست بودن تقسیم دو کار را انجام می‌دادیم، یکی این که درستی تساوی $27 = 3 + 4 \times 6$ را بررسی می‌کردیم و دیگری این که مراقب بودیم، عدد باقی‌مانده کم‌تر از مقسوم علیه باشد (یعنی $3 < 4$). همین مطلب ساده، در نظریه‌ی اعداد به «الگوریتم تقسیم» موسوم است.

**قضیه‌ی ۱۲:** (قضیه‌ی تقسیم) **اگر $a$ عددی صحیح و $b$ عددی طبیعی باشد، در این صورت اعداد منحصر به فرد $q$ و $r$ وجود دارند که:**

$$a = bq + r \quad , \quad 0 \le r < b$$

به $q$ و $r$ به ترتیب خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر $b$ گفته می‌شود.

**نکته‌ی ۳: رابطه‌ی $0 \le r < b$ در قضیه‌ی تقسیم واضح است که بیشترین مقداری که $r$ می‌تواند داشته باشد $b - 1$ است.**

➢ **مثال:** در تقسیم ۵۰ بر ۱۱ خارج قسمت برابر ۴ و باقی‌مانده برابر ۶ است:

$$50 = 11 \times 4 + 6 \quad , \quad 0 \le 6 < 11$$

و در تقسیم ۵۰– بر ۱۱ خارج قسمت ۵– و باقی‌مانده برابر ۵ است.

$$-50 = 11(-5) + 5 \quad , \quad 0 \le 5 < 11$$

علّت نام‌گذاری قضیه‌ی فوق به «الگوریتم تقسیم»، ریشه در مفهوم تقسیم دارد. هنگام تقسیم یک عدد مانند $a$، بر عدد دیگری مانند $b$، در واقع شما از الگوریتمی استفاده می‌کنید که مرتباً $b$ را از $a$ کم می‌کند و چک می‌کند که آیا حاصل از $b$ کم‌تر شده است یا نه. با طی این فرآیند و الگوریتم، در پایان باقی‌مانده‌ی تقسیم به جا می‌ماند.

مسائل مربوط به الگوریتم تقسیم تنوع زیادی دارند ولی جدا از راه‌حل‌های ابتکاری، تمام آن‌ها بر مبنای مفهوم قضیه‌ی تقسیم و به خصوص **مقایسه‌ی مقدار باقی‌مانده و مقسوم علیه** قابل حل هستند.

❍ **مسأله‌ی ۱۰: بزرگ‌ترین عدد $a$ را بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۵۲ دو برابر مربع خارج قسمت تقسیم باشد؟**

**حل:** فرض کنید $q$ و $r$ به ترتیب خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۵۲ باشند. چون $r = 2q^2$، پس:

$$a = 52q + 2q^2 \quad , \quad 0 \le 2q^2 < 52$$

پس $q^2 < 26$ و در نتیجه $q \le 5$، لذا بیشترین مقدار $a$ وقتی به دست می‌آید که $q = 5$. در این صورت حداکثر مقدار $a$ برابر $52 \times 5 + 50 = 310$ است.

**تست ۴: در یک تقسیم اگر ۱۰۰ واحد به مقسوم و یک واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند و باقی‌مانده ۲ واحد زیاد می‌شود. در این تقسیم خارج قسمت کدام است؟**

**۱)** ۱۰۲ **۲)** ۸۸ **۳)** ۱۰۰ **۴)** ۹۸

**حل:** تقسیم اولیه را به صورت $a = bq + r$ فرض می‌کنیم و تغییرات فرض سؤال را روی آن اعمال می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} a = bq + r \\ a + 100 = (b+1)q + r + 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم کردن دو رابطه}} q = 98$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

**مسأله‌ی ۱۱: باقی‌مانده‌ی تقسیم چند عدد طبیعی دو رقمی بر ۹ برابر ٤ است؟**

**حل:** اگر عددی مانند $a$، در تقسیم بر ۹ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ داشته باشد، طبق تعریف داریم: $a = ۹q + ۴$، بنابراین باید تعداد اعداد صحیح $q$ را بیابیم که در نابرابری $۱۰ \le ۹q + ۴ \le ۹۹$ صدق می‌کنند:

$$۱۰ \le ۹q + ۴ \le ۹۹ \Rightarrow ۶ \le ۹q \le ۹۵ \Rightarrow \frac{۶}{۹} \le q \le \frac{۹۵}{۹} \xrightarrow{q \in Z} ۱ \le q \le ۱۰$$

پس مجموعه‌ی مقادیر $q$ که در نابرابری فوق صدق می‌کنند عبارت است از $\{۱, ۲, ..., ۱۰\}$، که تعداد اعضای این مجموعه برابر ۱۰ است.

**مسأله‌ی ۱۲: باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۷ برابر ۳ است.**

**الف) باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر ۷ چند است؟**

**ب) باقی‌مانده‌ی تقسیم $a - ۲۳$ بر ۷ چند است؟**

**پ) باقی‌مانده‌ی تقسیم $a + ۱۳$ بر ۷ چند است؟**

**حل: الف)** طبق فرض، عدد صحیحی مانند $q$ وجود دارد که $a = ۷q + ۳$، بنابراین:

$$a = ۷q + ۳ \Rightarrow -a = -(۷q + ۳) = ۷(-q) - ۳$$

طبق شرط باقی‌مانده در قضیه‌ی تقسیم $(۰ \le r < b)$ باید $۰ \le r < ۷$، لذا با اضافه و کم کردن عدد ۷ ( مقسوم علیه) شرط باقی‌مانده را ایجاد می‌کنیم:

$$-a = ۷(-q) - ۷ + ۷ - ۳ = ۷\overbrace{(-q - ۱)}^{q_۱} + ۴ = ۷q_۱ + ۴$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر ۷ برابر ۴ است.

**ب)** مشابه قسمت قبل داریم:

$$a = ۷q + ۳ \Rightarrow a - ۲۳ = ۷q - ۲۰ = ۷q - ۳ \times ۷ + ۳ \times ۷ - ۲۰ = ۷\overbrace{(q - ۳)}^{q_۲} + ۱ = ۷q_۲ + ۱$$

همان طور که مشاهده کردید در این قسمت نیز برای این‌که $۰ \le r < ۷$، ۳ برابر مقسوم علیه را اضافه کردیم.

**پ)** مشابه قسمت‌های قبل داریم:

$$a = ۷q + ۳ \Rightarrow a + ۱۳ = ۷q + ۱۶ = ۷q + ۱۴ + ۲ = ۷\overbrace{(q + ۲)}^{q_۳} + ۲ = ۷q_۳ + ۲$$

**تست ۵: در تقسیم $a$ بر ٦٣، باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ٦۰ واحد به $a$ اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کنند؟ (آزاد ـ ۸۵)**

**۱) سه واحد کم می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.** **۲) سه واحد اضافه می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.**

**۳) سه واحد اضافه می‌شود ـ تغییر نمی‌کند.** **٤) سه واحد کم می‌شود ـ دو واحد اضافه می‌شود.**

**حل:** با توجه به فرض، اگر عدد $q$ خارج قسمت تقسیم اول باشد، داریم: $a = ۶۳q + ۱۷$. حال اگر ۶۰ واحد به $a$ اضافه شود داریم:

$$a + ۶۰ = ۶۳q + ۱۷ + ۶۰ = ۶۳(q + ۱) + ۱۴$$

پس در تقسیم جدید، خارج قسمت $q + ۱$ و باقی‌مانده ۱۴ است. بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

**مسأله‌ی ۱۳: در تقسیم عدد صحیح $a$ بر عدد صحیح $b$، خارج قسمت و باقی‌مانده به ترتیب ۵ و ۲۱ می‌باشند. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا خارج قسمت و مقسوم تغییر نکنند؟**

**حل:** با فرض این‌که $a$ و $b$ به ترتیب مقسوم و مقسوم علیه باشند، داریم: $a = ۵b + ۲۱$. به فرآیندهای جبری زیر دقت کنید:

$$۱)\ a = ۵b + ۲۱ = ۵b + ۵ + ۱۶ = ۵(b + ۱) + ۱۶$$

$$۲)\ a = ۵b + ۲۱ = ۵b + ۱۰ + ۱۱ = ۵(b + ۲) + ۱۱$$

همان طور که مشاهده می‌کنید برای این‌که خارج قسمت و مقسوم تغییر نکند، به ازای هر واحد که به مقسوم علیه اضافه می‌شود، ۵ واحد ( به اندازه‌ی مقدار خارج قسمت) از باقی‌مانده کم می‌شود. پس حداکثر به مقدار $[\frac{۲۱}{۵}]$ یعنی ۴ واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکند.

**توجه:** دقت کنید که اگر با شرایط مسأله بیشتر از ۴ واحد بخواهیم به مقسوم علیه اضافه کنیم باقی‌مانده منفی می‌شود.

**مسأله‌ی ۱۴:** **در یک تقسیم مقسوم علیه ۱۱ و باقی‌مانده ۳ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد به طوری کـه در تقـسیم بر ۱۱، خارج قسمت تغییر نکند؟**

**حل:** فرض کنید $a$ و $q$ به ترتیب مقسوم و خارج قسمت این تقسیم باشند، پس: $a = 11q + 3$. اکنون داریم:

$$a + x = 11q + x + 3 \xrightarrow{0 \le r < b} 0 \le x + 3 < 11 \Rightarrow 0 \le x < 8 \xrightarrow{x \in Z} x_{max} = 7$$

برای درک بهتر مسأله یک بار ۸ واحد و یک بار ۹ واحد به مقسوم علیه اضافه کنید:

$$a + 8 = 11q + 11 = 11(q + 1)$$

$$a + 9 = 11q + 12 = 11q + 11 + 1 = 11(q + 1) + 1$$

پس اگر بیشتر از ۷ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر می‌کند.

**مسأله‌ی ۱۵:** **فرض کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۷ برابر ٤ باشد:**

**الف) باقی‌مانده‌ی تقسیم $9a + 5$ بر ۷ چند است؟**

**ب) باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2$ بر ۷ چند است؟**

**حل: الف)** با توجه به فرض سؤال عدد صحیحی مانند $q$ وجود دارد که $a = 7q + 4$، در نتیجه:

$$a = 7q + 4 \Rightarrow 9a + 5 = 9(7q + 4) + 5 = 9 \times 7q + 41 = 7 \times (9q) + 35 + 6 = 7\overbrace{(9q + 5)}^{q'} + 6 = 7q' + 6$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $9a + 5$ بر ۷ برابر ۶ است.

**ب)** برای این قسمت نیز از $a = 7q + 4$ استفاده می‌کنیم:

$$a = 7q + 4 \Rightarrow a^2 = (7q + 4)^2 = 49q^2 + 56q + 16 = 7 \times 7q^2 + 7 \times 8q + 14 + 2 = 7\overbrace{(7q^2 + 8q + 2)}^{q'} + 2 = 7q' + 2$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2$ بر ۷ برابر ۲ است.

**یادداشت:** همان طورکه در راه‌حل مساله‌ی قبل مشخص است، باقی‌مانده‌ی تقسیم $9a + 5$ بر ۷، برابر باقی‌مانـده‌ی تقـسیم $9 \times 4 + 5$ بـر ۷، و هم‌چنین باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2$ بر ۷ برابر باقی‌مانده‌ی تقسیم $4^2$ بر ۷ است. در حالت کلی نتیجه‌ی زیر را داریم:

**نکته‌ی ۴:** **اگر باقی‌مانده تقسیم $a$ بر $b$ برابر $r$ باشد:**

**۱- در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^n$ بر $b$، برابر باقی‌مانده‌ی تقسیم $r^n$ بر $b$ است.**

**۲- باقی‌مانده‌ی تقسیم $x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \ldots + x_0$ بر $b$، برابر باقی‌مانده‌ی تقسیم $x_n r^n + x_{n-1} r^{n-1} + \ldots + x_0$ بر $b$ است.**

یعنی در واقع برای یافتن باقی‌مانده در یک تقسیم، می‌توانیم همان اعمال جبری را که روی $a$ (مقسوم) اعمال شده است، روی $r$ (باقی‌مانـده) نیـز اعمال کنیم و با عدد کوچک‌تر به دست آمده به عنوان مقسوم جدید کار کنیم.

**تذکر:** منظور از اعمال جبری، ضرب در یک عدد و جمع با عدد دیگر است. مواردی چون تقسیم، در این نکته صدق نمی‌کند. هـم‌چنـین در مـواردی مانند $a^n$ ($a$ مقسوم)، همان‌طور که گفته شد چون از تعدادی ضرب تشکیل شده، این نکته صادق است، ولی اگر با حـالتی چـون $n^a$ سـر و کـار داشتیم ( یعنی مقسوم در توان ظاهر شد)، مجاز به استفاده از این نکته نیستید، چون نمی‌توان آن را به صورت مخلوطی از اعمال جمع و ضرب توصیف کرد.

**مسأله‌ی ۱۶:** **باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۱۱ برابر ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2 + 3a + 1$ بر ۱۱ چند است؟**

**حل:** با توجه به نکته‌ی قبل، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2 + 3a + 1$ بر ۱۱، برابر باقی‌مانده‌ی تقسیم $(5)^2 + 3(5) + 1 = 41$ بر ۱۱، یعنی برابر ۸ است.

**مسأله‌ی ۱۷:** **باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۱۲ برابر ۸ است.**

**الف) باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ٦ چند است؟**

**ب) باقی‌مانده‌ی تقسیم $20a$ بر ۳۰ چند است؟**

**حل: الف)** چون باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۱۲ برابر ۸ است، عدد صحیح $q$ وجود دارد که:

$$a = 12q + 8 \Rightarrow a = 6(2q) + 6 + 2 \Rightarrow a = 6(2q + 1) + 2 = 6q' + 2$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۶ برابر ۲ می‌شود.

**ب)** مشابه راه‌حل الف داریم:

$$a = 12q + 8 \Rightarrow 20a = 20(12q) + 20 \times 8 = 30 \times (8q) + 160 = 30 \times (8q) + 150 + 10 = 30(8q + 5) + 10 = 30q' + 10$$

پس باقی‌مانده‌ی مورد نظر برابر ۱۰ است.

**مسأله‌ی ۱۸: باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۹ و ۸ به ترتیب برابر ۳ و ۲ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۷۲ و ۳۶ چند است؟**

**حل:** طبق فرض اعداد صحیح $q_1$ و $q_2$ وجود دارند که $a = 9q_1 + 3$ و $a = 8q_2 + 2$. اکنون برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی $a$ بر ۷۲، $a = 9q_1 + 3$ را در ۸ و $a = 8q_2 + 2$ را در ۹ ضرب می‌کنیم تا عدد ۷۲ ایجاد شود:

$$\left.\begin{aligned} 8a = 8(9q_1 + 3) \Rightarrow 8a = 72q_1 + 24 \\ 9a = 9(8q_2 + 2) \Rightarrow 9a = 72q_2 + 18 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}} 9a - 8a = (72q_2 + 18) - (72q_1 + 24)$$

$$\Rightarrow a = 72(q_2 - q_1) - 6 = 72(q_2 - q_1) - 72 + 72 - 6 = 72\overbrace{(q_2 - q_1 - 1)}^{q_3} + 66$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۷۲، برابر ۶۶ است. اکنون برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی $a$ بر ۳۶ داریم:

$$a = 72q_3 + 66 \Rightarrow a = 36 \times (2q_3) + 36 + 30 = 36(2q_3 + 1) + 30$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۳۶، برابر ۳۰ است.

**تست ۶: باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۳ و ۷، به ترتیب ۲ و ٤ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۲۱ چند است؟**

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) صفر ٤) ۲

**حل:** طبق فرض سؤال اعداد صحیح $q_1$ و $q_2$ وجود دارند به طوری که $a = 3q_1 + 2$ و $a = 7q_2 + 4$. اکنون چون باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۲۱ را می‌خواهیم باید ترکیبی خطی از $7a$ و $3a$ پیدا کنیم که برابر $a$ شود. به طور مثال می‌توان نوشت:

$$a = (7a) - 2 \times (3a) = 21q_1 + 14 - 2(21q_2 + 12) = 21(q_1 - 2q_2) - 10$$
$$= 21(q_1 - 2q_2) - 21 + 21 - 10 = 21(q_1 - 2q_2 - 1) + 11$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۲۱، برابر ۱۱ است. بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

## صورت‌های یک عدد بر حسب یک پیمانه: ( افراز اعداد صحیح)

بسیاری از مسائل نظریه‌ی اعداد را می‌توان به وسیله‌ی در نظر گرفتن صورت‌های یک عدد بر حسب یک پیمانه بررسی و حل کرد. مفهوم اصلی این بحث به قضیه‌ی تقسیم مربوط می‌شود.

**قضیه‌ی ۱۳: فرض کنید $b$ عدد طبیعی باشد. در این صورت هر عدد صحیح به پیمانه‌ی $b$ به یکی و فقط یکی از $b$ صورت زیر است.**

$$bk\ ,\ bk + 1\ ,\ \ldots\ ,\ bk + b - 1$$

**اثبات:** مطابق قضیه‌ی تقسیم برای عدد صحیح $a$، اعداد منحصر به فرد $q$ و $r$ وجود دارند که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$، پس $r$ یکی از $b$ عدد ۰، ۱، ... و $b - 1$ است.

**مثال:** هر عدد صحیح به پیمانه‌ی ۲ به یکی از دو صورت $2k$ و $2k + 1$ است.

هر عدد صحیح به پیمانه‌ی ۳ به یکی از ۳ صورت $3k$، $3k + 1$ و $3k + 2$ است.

هر عدد صحیح به پیمانه‌ی ۴ به یکی از ۴ صورت $4k$، $4k + 1$، $4k + 2$ و $4k + 3$ است.

برای درک بهتر موضوع یک عدد صحیح مثل ۷۵ را در نظر می‌گیریم. داریم: $75 = 2 \times 37 + 1 = 3 \times 25 = 4 \times 18 + 3$

پس ۷۵ به پیمانه‌ی ۲ به صورت $2k + 1$، به پیمانه‌ی ۳ به صورت $3k$ و به پیمانه‌ی ۴ به صورت $4k + 3$ است.

**مسأله‌ی ۱۹: ثابت کنید هر عدد صحیح به یکی از ۵ صورت $5k$، $5k \pm 1$ و $5k \pm 2$ است.**

**حل:** طبق قضیه هر عدد به پیمانه‌ی ۵، به یکی از ۵ صورت $5k$، $5k + 1$، $5k + 2$، $5k + 3$ و $5k + 4$ است. از طرفی داریم:

$$5q + 3 = 5q + 5 - 5 + 3 = 5(q + 1) - 2$$
$$5q + 4 = 5q + 5 - 5 + 4 = 5(q + 1) - 1$$

پس هر عددی که به صورت $5k + 3$ باشد به صورت $5k - 2$ و هر عددی که به صورت $5k + 4$ باشد به صورت $5k - 1$ نیز می‌باشد.

**تذکر ۱:** از راه‌حل مسأله‌ی قبل برای سهولت در محاسبات استفاده می‌کنیم. مثلاً برای پیمانه‌ی ۶ می‌توانیم از صورت‌های $۶k$، $۶k \pm ۱$، $۶k \pm ۲$ و $۶k + ۳$، یا برای پیمانه‌ی ۷ می‌توانیم از صورت‌های $۷k$، $۷k \pm ۱$، $۷k \pm ۲$ و $۷k \pm ۳$ استفاده کنیم.

**نکته‌ی ۵:** **اگر $a$ به صورت $bk + r$ باشد، آنگاه $a^n$ به صورت $bk + r^n$ است (نکته‌ی(٤) را ببینید).**

**مسأله‌ی ۲۰: عدد صحیح $a$ به فرم $۷k + ۲$ است. چند عدد ۳ رقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم بر ۷ با عدد $a^۳$ هم‌باقی‌مانده‌اند؟**

**حل:**

$$a = ۷k + ۲ \Rightarrow a^۳ = ۷k + ۲^۳ = ۷k + ۸ = ۷k + ۷ + ۱ = ۷(k + ۱) + ۱ = ۷q + ۱$$

پس باقی‌مانده‌ی $a^۳$ بر ۷ برابر ۱ است و باید تعداد اعداد ۳ رقمی طبیعی به فرم $۷q + ۱$ را پیدا کنیم:

$$۱۰۰ \le ۷q + ۱ \le ۹۹۹ \Rightarrow \frac{۹۹}{۷} \le q \le \frac{۹۹۸}{۷} \xrightarrow{q \in Z} ۱۵ \le q \le ۱۴۲$$

لذا جواب مورد نظر برابر $۱۴۲ - ۱۵ + ۱ = ۱۲۸$ است.

**تست ۷: اگر $a = ۵k + ۳$، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^۴ + a^۳ + a^۲ + a$ بر ۵ برابر است با: ( آزاد ـ ۷۹)**

**۱)** ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **٤)** صفر

**حل:** با توجه به نکته‌ی قبل داریم:

$$a = ۵k + ۳ \Rightarrow a^۲ = ۵k_۱ + ۹ \ , \ a^۳ = ۵k_۲ + ۲۷ \ , \ a^۴ = ۵k_۳ + ۸۱$$

$$\Rightarrow a + a^۲ + a^۳ + a^۴ = ۵(\underbrace{k + k_۱ + k_۲ + k_۳}_{q}) + ۳ + ۹ + ۲۷ + ۸۱ = ۵q + ۱۲۰ = ۵(q + ۲۴) = ۵q'$$

پس عدد حاصل بر ۵ بخش‌پذیر است و در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده‌ی صفر دارد. بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

**مسأله‌ی ۲۱: ثابت کنید مربع هر عدد صحیح به صورت $۳k$ یا $۳k + ۱$ است.**

**حل:** می‌دانیم هر عدد صحیح به یکی از سه صورت $۳q$ و $۳q \pm ۱$ است. اما:

$$(۳q)^۲ = ۳(۳q^۲) = ۳k$$

$$(۳q \pm ۱)^۲ = ۹q^۲ \pm ۶q + ۱ = ۳(۳q^۲ \pm ۲q) + ۱ = ۳k + ۱$$

**نکته‌ی ۶:** **توان دوم هر عدد صحیح به صورت $۳k$ یا $۳k + ۱$ است.**

**مسأله‌ی ۲۲: ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت $۸k + ۱$ است.**

**حل:** با فرض این‌که $a$ فرد باشد داریم:

$$a = ۲q + ۱ \Rightarrow a^۲ = (۲q + ۱)^۲ = ۴q^۲ + ۴q + ۱ = ۴q(q + ۱) + ۱$$

اما $q(q + ۱)$ حاصل ضرب دو عدد متوالی است و می‌دانیم حاصل ضرب دو عدد متوالی عددی زوج است (زیرا در هر صورت یکی از $q$ و $q + ۱$، عددی زوج و دیگری عددی فرد است)، پس به ازای عددی صحیح مانند $t$، $q(q + ۱) = ۲t$. بنابراین:

$$a^۲ = ۴q(q + ۱) + ۱ = ۴(۲t) + ۱ = ۸t + ۱$$

**مسأله‌ی ۲۳: ثابت کنید توان چهارم هر عدد فرد، به صورت $۱۶k + ۱$ است.**

**حل:** می‌دانیم اگر $a$ عددی فرد باشد، آن‌گاه: $a^۲ = ۸q + ۱$. بنابراین:

$$a^۴ = (a^۲)^۲ = (۸q + ۱)^۲ = ۶۴q^۲ + ۱۶q + ۱ = ۱۶(\underbrace{۴q^۲ + q}_{k}) + ۱ = ۱۶k + ۱$$

**مسأله‌ی ۲۴:** ثابت کنید توان چهارم هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $5k$ و $5k+1$ است.

**حل:** هر عدد صحیح به یکی از ۵ صورت $5k$، $5k\pm 1$، و $5k\pm 2$ است. بنابراین طبق نکته‌ی(۵):

$$a=5k \Rightarrow a^4=5k'$$
$$a=5k\pm 1 \Rightarrow a^4=5k'+(\pm 1)^4=5k'+1$$
$$a=5k\pm 2 \Rightarrow a^4=5k'+(\pm 2)^4=5k'+16=5(\underbrace{k'+3}_{k''})+1=5k''+1$$

پس همواره $a^4$ در تقسیم بر ۵، یا باقی‌مانده‌ی صفر دارد یا باقی‌مانده‌ی ۱.

**مسأله‌ی ۲۵:** ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد به فرم $4k+3$، یک عدد به فرم $4k+1$ است.

**حل:** دو عدد $a=4k_1+3$ و $b=4k_2+3$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$ab=(4k_1+3)(4k_2+3)=16k_1k_2+12k_1+12k_2+9=4(\underbrace{4k_1k_2+3k_1+3k_2+2}_{q})+1=4q+1$$

پس $ab$ به فرم $4k+1$ است.

**مسأله‌ی ۲۶:** ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

**حل:** از هر $n$ عدد متوالی دقیقاً یکی از آن‌ها بر $n$ بخش‌پذیر است (چرا؟)، پس از هر ۳ عدد صحیح متوالی حداقل یکی بر ۲ و یکی بر ۳ بخش‌پذیر است. در نتیجه حاصل ضرب آن‌ها بر ۶ بخش‌پذیر است.

**تست ۸:** اگر $a$ مضرب ۶ نباشد و مضرب ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی $a^2$ بر ٤ کدام است؟ (آزاد ـ ۷۷)

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) صفر ٤) ۲

**حل:** هر عدد طبیعی به یکی از ۶ صورت $6k$، $6k\pm 1$، $6k\pm 2$ و $6k+3$ است. از این ۶ صورت، دو صورت $6k$ و $6k+3$ بر ۳ بخش‌پذیرند. به طور دقیق‌تر اعداد به فرم $6k$ بر ۶ بخش‌پذیرند، ولی اعداد به فرم $6k+3$ بر ۳ بخش‌پذیرند و مضرب ۶ نیستند. بنابراین از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم: $a=6k+3$ و باید باقی‌مانده‌ی $a^2$ را بر ۴ پیدا کنیم.

**روش اول:**

$$a=6k+3 \Rightarrow a^2=36k^2+36k+9=4(\underbrace{9k^2+9k+2}_{q})+1=4q+1$$

**روش دوم:** $a$ از مجموع یک عدد زوج $(6k)$ و یک عدد فرد (۳) تشکیل شده، بنابراین $a$ خود یک عدد فرد است و می‌دانیم مربع هر عدد فرد به فرم $8k+1$ یا $4(2k)+1$ است. پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2$ بر ۴، برابر ۱ است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

**تست ۹:** کدام معادله در $Z$، به ازای هیچ مقدار $k$، جواب ندارد؟ (آزاد ـ ۷۸)

۱) $x^2+y^2=4k$ ۲) $x^2+y^2=4k+3$ ۳) $x^2+y^2=4k+1$ ٤) $x^2+y^2=4k+2$

**حل:** می‌دانیم برای هر عدد صحیح $a$، $a^2$ به فرم $4k$ یا $4k+1$ است (اگر $a$ زوج باشد، $a^2=4k$ و اگر $a$ فرد باشد: $a^2=8k+1=4q+1$). بنابراین هم $x^2$ و هم $y^2$ به یکی از دو فرم فوق خواهند بود، و داریم:

$$x^2=4k \quad , \quad y^2=4k' \Rightarrow x^2+y^2=4(k+k')=4k''$$
$$x^2=4k+1 \ , \ y^2=4k' \Rightarrow x^2+y^2=4(k+k')+1=4k''+1$$
$$x^2=4k+1 \ , \ y^2=4k'+1 \Rightarrow x^2+y^2=4(k+k')+2=4k''+2$$

پس همواره $x^2+y^2$ به یکی از سه فرم $4k$، $4k+1$ و $4k+2$ است، بنابراین هیچ $x$ و $y$ صحیحی وجود ندارد که $x^2+y^2=4k+3$، یعنی معادله‌ی گزینه‌ی (۲) هیچ گاه جواب صحیح ندارد. برای گزینه‌های دیگر می‌توان جواب ارائه کرد. مثلاً اگر $k=0$، معادله‌ی گزینه‌ی (۱)، جواب $x=y=0$ و معادله‌ی گزینه‌ی (۳)، جواب $x=1$ و $y=0$ و معادله‌ی گزینه‌ی (۴)، جواب $x=y=1$ را دارد.
بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

**یادداشت:** دقت کنید که لزوماً برای هر عدد صحیح $k$، معادله‌های گزینه‌های دیگر جواب ندارد. مثلاً برای $k=1$، معادله‌ی گزینه‌ی (۴) هیچ جواب صحیحی ندارد. (چرا؟)

# فصل ۲

# الگوریتم تقسیم

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۳- **اگر اعضای مجموعه‌ی $A=\{a_1,a_2,...,a_{15}\}$ را بر ۱٤ تقسیم کنیم و $R$ را مجموعه‌ی باقی‌مانده‌های تقسیم در نظر بگیریم، در این صورت کدام گزینه درست است؟ $(a_i \in N)$**

۱) مجموعه‌ی $R$ حداکثر ۱۴ عضو دارد.
۲) مجموعه‌ی $R$ حداقل ۱۴ عضو دارد.
۳) مجموعه‌ی $R$ دقیقاً ۱۴ عضو دارد.
۴) مجموعه‌ی $R$ حداکثر ۱۵ عضو دارد.

۲٤- **باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۱۸ برابر ۱۱ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ٦ چند است؟**

۱) ۵  ۲) ۴  ۳) ۳  ۴) ۲

۲۵- **باقی‌مانده‌ی چند عدد از مجموعه‌ی $\{15,16,...,60\}$ در تقسیم بر ۱۱ برابر ۲ است؟**

۱) ۳  ۲) ۴  ۳) ۵  ۴) ۶

۲٦- **در یک تقسیم خارج قسمت ۱۱و باقی مانده ۲۷ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد به طوری که مقسوم و خارج قسمت تغییر نکند؟**

۱) صفر  ۲) ۱  ۳) ۲  ۴) ۳

۲۷- **باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۱۱ برابر ۹ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر ۱۱ چند است؟**

۱) ۲  ۲) ۷  ۳) ۹  ۴) ۱۰

۲۸- **کوچک‌ترین عضو مثبت $\{-17k+63 : k \in Z\}$ چند است؟**

۱) ۵  ۲) ۹  ۳) ۱۲  ۴) ۲۹

۲۹- **تمام اجزاء یک تقسیم اعداد طبیعی هستند. اگر باقی مانده ۱۱ باشد، حداقل مقسوم چند است؟**

۱) ۲۷  ۲) ۲۶  ۳) ۲۴  ۴) ۲۳

۳۰- **باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد فرد $a$ بر ۱۱ برابر ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۲۲ چند است؟**

۱) ۵  ۲) ۸  ۳) ۱۰  ۴) ۱۱

۳۱- **باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ٦ و ۷ به ترتیب ۱ و ۳ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۲۱ چند است؟**

۱) ۲  ۲) ۴  ۳) ۸  ۴) ۱۰

۳۲- **چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم هر کدام از آن‌ها بر ۷۰، مساوی مجذور خارج قسمت این تقسیم باشد؟**

۱) ۶  ۲) ۷  ۳) ۸  ۴) ۹

۳۳- **در تقسیم عدد صحیح $a$ بر عدد طبیعی $b$، خارج قسمت و باقی‌مانده برابر $q$ اند. اگر ۳ واحد از مقسوم علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود. کدام‌یک می‌تواند مقدارهای $q$ باشد؟**

۱) ۸ و ۵  ۲) ۹ و ۴  ۳) ۱۰ و ۵  ۴) ۱۰ و ۸

۳٤- **باقی‌مانده‌ی تقسیم $2a$ بر ۸۱ برابر ٤۵ است. باقی‌ماندهی تقسیم $a$ بر ۲۷ کدام است؟**

۱) ۱۸  ۲) ۲۲  ۳) ۹  ۴) برای مقادیر مختلف، فرق می‌کند.

۳۵- **اگر در یک تقسیم، ۱۳٦ واحد به مقسوم و ۳ واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند اما به باقی‌مانده یک واحد اضافه می‌شود. در این تقسیم خارج قسمت چند است؟**

۱) ۵۴  ۲) ۴۵  ۳) ۶۳  ۴) ۷۲

۳٦- در یک تقسیم مقسوم علیه برابر ۳۱ و باقی‌مانده برابر ۱۱ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد به طوری‌که خارج قسمت و مقسوم علیه تغییر نکنند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۹ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۳۷- باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۱۷ برابر ۱۰ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^۲ + ۵a$ بر ۱۷ چند است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۳۸- در یک تقسیم، مقسوم ۵۰۰ واحد بیشتر از مقسوم علیه و باقی‌مانده برابر ۵۰ است. برای خارج قسمت چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۹- عدد ٦۰۰، در تقسیم بر چند عدد طبیعی، دارای خارج قسمتی برابر ٦ است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

٤۰- در یک تقسیم، مقسوم ۲۰ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد. مقسوم و مقسوم‌علیه به ترتیب برابرند با:

۱) ۳۸۰ و ۱۹ ۲) ۳۸۰ و ۲۰ ۳) ۳۶۰ و ۲۰ ۴) ۳۶۰ و ۱۹

٤۱- در یک تقسیم مقسوم ۷ برابر باقی‌مانده است. خارج قسمت تقسیم حداکثر چند است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

٤۲- چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳۳، $\frac{۵}{۳}$ خارج قسمت شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

٤۳- باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ و $۲a$ بر $b$ به ترتیب ۵ و ٤ است. چند عدد طبیعی برای $b$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

٤٤- در یک تقسیم، مقسوم ٤٦۱ و خارج قسمت ۱۱ است. اگر مقسوم علیه زوج باشد، برای مقسوم علیه چند جواب وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

٤٥- باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد فرد $a$ بر ۱۲ برابر ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $\frac{a-۱}{۲}$ بر ۱۲ چند است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) گزینه (۱) یا (۲)

٤٦- چند عدد طبیعی وجود دارد که خارج قسمت تقسیم ۸۲۳ بر هر کدام از آن‌ها ١٤ باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

٤۷- باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۱۱۳ و ۱۰۸ به ترتیب ۱۱ و ۳۱ است. اگر خارج قسمت هر دو تقسیم $q$ باشد، مجموع ارقام $a$ چند است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

٤۸- در یک تقسیم مقسوم ۱۸۷ و باقی‌مانده ۱۷ است. مقسوم علیه این تقسیم چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

٤۹- چند عدد طبیعی ۲ رقمی مانند $n$ وجود دارد که $۷ | ۴n + ۱۱$؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۵۰- در یک تقسیم، مقسوم علیه ۳٦ و باقی‌مانده ۱۵ است. چند عدد مانند $x$ وجود دارد که اگر $x$ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت یک واحد اضافه شود؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۶ ۳) ۴۶ ۴) ۵۶

۵۱- حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $۵k + ۳$ به چه صورتی است؟

۱) $۵k + ۱$ ۲) $۵k + ۳$ ۳) $۵k + ۴$ ۴) $۵k + ۲$

۵۲- باقی‌مانده‌ی تقسیم توان چهارم هر عدد صحیح بر ۵ چند مقدار متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۳- کدام معادله در اعداد صحیح جواب ندارد؟

۱) $a^2 = 5b + 6$ ۲) $a^2 = 5b + 12$ ۳) $a^2 = 5b + 9$ ۴) $a^2 = 5b - 9$

۵٤- به ازای چند عدد متعلق به مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., 100\}$ مانند $a$، باقی‌مانده‌ی $a^2$ بر ٦ برابر ۳ است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۷ ۳) ۲۷ ۴) ۳۴

۵۵- به ازای چند عدد متعلق به مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., 50\}$ مانند $a$، باقی‌مانده‌ی $a^2$ بر ۷ برابر ۲ است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۵٦- کدام معادله در اعداد صحیح جواب ندارد؟

۱) $a^2 = 4b + 1$ ۲) $a^2 = 4b + 8$ ۳) $a^2 = 4b + 6$ ۴) $a^2 = 4b + 5$

* ۵۷- باقی‌مانده‌ی تقسیم $5a + 14b$ بر ۴۷ برابر ۷ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $3a - b$ بر ۴۷ چند است؟

۱) ۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۳ ۴) ۴۰

۵۸- در تقسیم عدد طبیعی $a$ بر ۳۷ باقی‌مانده‌ی تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است. بزرگ‌ترین مقدار $a$ مضرب کدام است؟ (سراسری- ۸٤)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۵۹- باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $a$ بر ٤ و ٦ برابر ۳ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۱۲ کدام است؟ (آزاد- ۸۱)

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۹

٦۰- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد فرد $a$ بر ۲، ٤ و ۸ یکسان باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $a^2 + 6$ بر ۲، ٤ و ۸ به ترتیب کدام است؟ (آزاد -۸۲)

۱) ۱، ۱ و ۱ ۲) ۱، ۳ و ۷ ۳) ۵، ۳ و ۱ ۴) صفر، صفر و صفر

٦۱- باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۸ برابر ۷ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $(2a + 1)$ بر ٤ کدام است؟ (آزاد- ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

٦۲- در تقسیم عدد $a$ بر ٦۳، باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ٦۰ واحد به $a$ اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کنند؟ (آزاد -۸۵)

۱) سه واحد کم می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.
۲) سه واحد اضافه می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.
۳) سه واحد اضافه می‌شود ـ تغییر نمی‌کند.
۴) سه واحد کم می‌شود ـ دو واحد اضافه می‌شود.

٦۳- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ٤۷، باقی‌مانده‌ی آن توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟ (آزاد -۸۵)

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

فصل ۲

# الگوریتم تقسیم

## پاسخ‌های تشریحی

A **۲۳- گزینه‌ی(۱)** باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد طبیعی مانند $a$ بر ۱۴ عددی است از صفر تا ۱۳، پس $R$ حداکثر ۱۴ عضو دارد.

A **۲۴- گزینه‌ی(۱)**

$$a = 18q + 11 = 6(3q) + 6 + 5 = 6\overbrace{(3q+1)}^{q'} + 5 = 6q' + 5$$

A **۲۵- گزینه‌ی(۲)** باید تعداد اعداد صحیح $q$ را بیابیم که در نابرابری $15 \le 11q + 2 \le 60$ صدق می‌کنند، داریم:

$$15 \le 11q + 2 \le 60 \Rightarrow 13 \le 11q \le 58 \Rightarrow \frac{13}{11} \le q \le \frac{58}{11} \xrightarrow{q\in Z} 2 \le q \le 5$$

لذا $5 - 2 + 1 = 4$ مقدار صحیح برای $q$ وجود دارد.

B **۲۶- گزینه‌ی (۳)** با توجه به فرض سؤال داریم:

$$a = 11b + 27 \Rightarrow a = 11b + 22 + 5 \Rightarrow a = 11(b+2) + 5$$

پس حداکثر ۲ واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد.

A **۲۷- گزینه‌ی(۱)** با فرض صحیح بودن $q$ داریم:

$$a = 11q + 9 \Rightarrow -a = -(11q+9) = 11(-q) - 9 = 11(-q) - 11 + 2 = 11\overbrace{(-q-1)}^{q_1} + 2 = 11q_1 + 2$$

به طور کلی اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر $b$ برابر $r$ باشد و $r \neq 0$، باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر $b$ برابر است با $b - r$.

A **۲۸- گزینه‌ی(۳)**

$$-17k + 63 = -17k + 3\times 17 + 12 = -17(k-3) + 12$$

با فرض $-k + 3 = k'$ داریم: $-17(k-3) + 12 = 17k' + 12$، لذا کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی مورد نظر برابر است با ۱۲.

B **۲۹- گزینه‌ی (۴)** برای این‌که مقسوم $(a)$ کمترین مقدار باشد، باید مقسوم علیه $(b)$ و خارج قسمت $(q)$ را حداقل در نظر بگیریم. حداقل مقسوم علیه برابر $r + 1 = 12$ و حداقل خارج قسمت برابر $q = 1$ است. لذا حداقل مقدار $a$ برابر است با $12\times 1 + 11 = 23$.

B **۳۰- گزینه‌ی(۱)** از رابطه‌ی $a = 11q + 5$ و با توجه به فرد بودن $a$، نتیجه می‌گیریم $q$ زوج است. در نتیجه داریم:

$$a = 11q + 5 \xrightarrow{q=2k} a = 22k + 5$$

پس باقی‌مانده‌ی $a$ بر ۲۲ نیز ۵ است.

**توجه:** هم‌چنین با توجه به فرض سؤال می‌توانستید به طور مثال $a$ را عدد ۲۷ در نظر بگیریم که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۲۲ برابر ۵ می‌شود.

B **۳۱- گزینه‌ی (۴)** با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a = 6q + 1 \Rightarrow 7a = 42q + 7 \\ a = 7q' + 3 \Rightarrow 6a = 42q' + 18 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 42(q - q') - 11$$

$$= 21(2q - 2q') - 21 + 21 - 11 = 21\overbrace{(2q - 2q' - 1)}^{q_1} + 10 = 21q_1 + 10$$

A **۳۲- گزینه‌ی(۳)**

$$a = 70q + q^2 \xrightarrow{0\le r<b} q^2 < 70 \xrightarrow{q\in N} 1 \le q \le 8$$

پس ۸ مقدار برای $q$ و درنتیجه ۸ مقدار برای $a$ وجود دارد.

دقت کنید که اگر $q \le 0$، در این صورت $a$، عددی غیر طبیعی خواهد بود.

B **۳۳- گزینه‌ی (۳)** فرض کنید $a = bq + q$، رابطه‌ی تقسیم مورد نظر باشد. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$a = (b-3)(q+5) + 0 \xrightarrow{a=bq+q} bq + q = (b-3)(q+5) \Rightarrow 4q = 5(b-3)$$

سمت راست رابطه‌ی فوق مضرب ۵ است، لذا $4q$ نیز باید مضرب ۵ باشد، در نتیجه $q = 5k$.

**یادداشت:** هرچند که حل تست با همین نتیجه‌ی $q=5k$ مشخص می‌شود، ولی برای بررسی دقیق‌تر می‌توانید به این صورت عمل کنید:

$$q=5k \Rightarrow 4\times 5k=5(b-3) \Rightarrow b=4k+3$$

حال با توجه به آن که q باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b است، داریم: $0\le q<b$. بنابراین:

$$0\le 5k<4k+3 \Rightarrow 0\le k<3 \Rightarrow k=0,1,2$$

حالت $k=0$ به $b=3$ منجر می‌شود و در تقسیم دوم مقسوم‌علیه $b-3=0$ می‌شود که در تناقض با قضیه‌ی تقسیم است. بنابراین تنها اعداد مجاز $k=1$ و $k=2$ هستند که به $q=5$ و $q=10$ منجر می‌شوند.

B **۳۴- گزینه‌ی (۳)** داریم: $2a=81q+45$، چون $2a$ عددی زوج و ۴۵ عددی فرد است، باید $81q$ نیز عددی فرد باشد. بنابراین q یک عدد فرد است، یعنی:

$$q=2k+1 \Rightarrow 2a=81(2k+1)+45=81\times 2k+126$$

$$\Rightarrow a=81k+63 \Rightarrow a=27\times 3k+27\times 2+9=27(3k+2)+9 \Rightarrow a=27q'+9$$

A **۳۵- گزینه‌ی (۲)** فرض کنید $a=bq+r$، رابطه‌ی تقسیم مورد نظر باشد. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$136+a=(b+3)q+r+1 \xrightarrow{a=bq+r} 136+(bq+r)=(b+3)q+r+1 \Rightarrow q=45$$

B **۳۶- گزینه‌ی (۲)** با توجه به فرض سوال $a=31q+11$. اگر k واحد به مقسوم اضافه کنیم، داریم $a+k=31q+11+k$. اما برای این‌که مقسوم‌علیه و خارج قسمت تغییر نکند باید شرط باقی‌مانده را لحاظ کنیم:

$$0\le r<b \Rightarrow 0\le 11+k<31 \Rightarrow -11\le k<20 \xrightarrow{k\in Z} k_{max}=19$$

B **۳۷- گزینه‌ی (۳)** باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2+5a$ بر ۱۷، برابر باقی‌مانده‌ی تقسیم $150=(10)^2+5(10)$ بر ۱۷، یعنی برابر ۱۴ است (نکته‌ی (۳)).

B **۳۸- گزینه‌ی (۱)** با فرض $a=bq+r$، داریم:

$$500+b=bq+50 \Rightarrow b=\frac{450}{q-1} \xrightarrow{b>r} \frac{450}{q-1}>50 \Rightarrow q<10 \xrightarrow{q\in N} q\in\{1,2,\dots,9\}$$

به ازای مقادیر ۵، ۸ و ۹ برای b عدد غیر صحیح به دست می‌آید و به ازای $q=1$ نیز b تعریف نمی‌شود. پس q یکی از مقادیر ۲، ۳، ۴، ۶ و ۷ است.

B **۳۹- گزینه‌ی (۴)** فرض کنید عدد ۶۰۰، در تقسیم بر عدد a، خارج قسمت ۶ داشته باشد. بنابراین:

$$600=6a+r\ ,\ 0\le r<a \Rightarrow 0\le 600-6a<a$$

از حل دو نامعادله‌ی $600-6a\ge 0$ و $600-6a<a$ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{600}{7}<a\le\frac{600}{6} \xrightarrow{a\in N} 86\le a\le 100 \Rightarrow a\in\{86,\dots,100\} \xrightarrow{\text{تعداد جوابها}} 100-86+1=15$$

B **۴۰- گزینه‌ی(۴)** با فرض $a=bq+r$ داریم:

$$a=bq+r \xrightarrow{a=20r} 20r=bq+r \Rightarrow 19r=bq$$

از طرفی بیشترین مقدار باقی‌مانده $b-1$ است. پس با فرض $r=b-1$ داریم:

$$19r=bq \Rightarrow 19(b-1)=bq \Rightarrow 19b-bq=19 \Rightarrow b(19-q)=19 \Rightarrow b\,|\,19$$

پس $b=19$ (چرا $b\ne 1$؟)، و لذا $r=b-1=18$ و $a=20r=360$.

B **۴۱- گزینه‌ی (۳)** فرض کنید $a=bq+r$، رابطه‌ی تقسیم مورد نظر باشد. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$a=7r \Rightarrow 7r=bq+r \Rightarrow bq=6r$$

$$r<b \Rightarrow 6r<6b \xrightarrow{bq=6r} bq<6b \Rightarrow q<6 \xrightarrow{q\in Z} q_{max}=5$$

C **۴۲- گزینه‌ی(۳)** مطابق فرض سوال داریم:

$$a=33q+\frac{5}{3}q \xrightarrow{0\le r<b} 0\le\frac{5}{3}q<33 \Rightarrow 0\le q<\frac{99}{5} \xrightarrow{q\in Z} 0\le q\le 19$$

از طرفی $\frac{5}{3}q$ باید عددی طبیعی باشد، پس $q=3k$ و در نتیجه:

$$0\le 3k\le 19 \xrightarrow{k\in N} 1\le k\le 6 \xrightarrow{\text{تعداد جوابها}} 6-1+1=6$$

C **۴۳- گزینه‌ی (۱)** مطابق فرض داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a = bq_۱ + ۵ \\ ۲a = bq_۲ + ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲(bq_۱ + ۵) = bq_۲ + ۴ \Rightarrow b(q_۲ - ۲q_۱) = ۶ \Rightarrow b \mid ۶$$

لذا $b = ۱, ۲, ۳, ۶$. اما چون باقی‌مانده‌ها ۵ و ۴ هستند، پس باید $b \geq ۶$. در نتیجه فقط $b = ۶$ قابل قبول است.

B **۴۴- گزینه‌ی (۲)** با توجه به فرض‌های سؤال داریم:

$$۴۶۱ = ۱۱b + r \Rightarrow r = ۴۶۱ - ۱۱b$$

$$۰ \leq r < b \Rightarrow ۰ \leq ۴۶۱ - ۱۱b < b \Rightarrow \frac{۴۶۱}{۱۲} < b \leq \frac{۴۶۱}{۱۱} \xrightarrow{b \in Z} ۳۹ \leq b \leq ۴۱$$

لذا چون $b$ زوج است، فقط $b = ۴۰$ قابل قبول است.

B **۴۵- گزینه‌ی (۴)** با توجه به فرد بودن $a$، فرض می‌کنیم $a = ۲a' + ۱$. از فرض سوال داریم $a = ۱۲q + ۵$. عدد $q$ دو حالت دارد: یا زوج است $(q = ۲k)$ و یا فرد $(q = ۲k + ۱)$. در این صورت داریم:

$$q = ۲k \Rightarrow ۲a' + ۱ = ۱۲(۲k) + ۵ \Rightarrow a' = ۱۲k + ۲$$
$$q = ۲k + ۱ \Rightarrow ۲a' + ۱ = ۱۲(۲k + ۱) + ۵ \Rightarrow a' = ۱۲k + ۸$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $\frac{a - ۱}{۲}$ بر ۱۲، ۲ یا ۸ است.

B **۴۶- گزینه‌ی (۴)** مطابق فرض سؤال داریم:

$$۸۲۳ = ۱۴b + r \Rightarrow r = ۸۲۳ - ۱۴b \xrightarrow{۰ \leq r < b} ۰ \leq ۸۲۳ - ۱۴b < b \Rightarrow \frac{۸۲۳}{۱۵} < b \leq \frac{۸۲۳}{۱۴}$$

از نامساوی اخیر برای $b$ مقادیر ۵۵، ۵۶، ۵۷ و ۵۸ به دست می‌آید.

B **۴۷- گزینه‌ی (۴)** با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۱۱۳q + ۱۱ \\ a = ۱۰۸q + ۳۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۱۳q + ۱۱ = ۱۰۸q + ۳۱ \Rightarrow q = ۴$$

$$a = ۱۰۸q + ۳۱ \xrightarrow{q=۴} a = ۴۶۳$$

لذا جواب سؤال $۱۳ = ۳ + ۴ + ۶$ است.

C **۴۸- گزینه‌ی (۲)** با توجه به فرض سوال داریم:

$$۱۸۷ = bq + ۱۷ \ , \ b > ۱۷ \Rightarrow bq = ۱۸۷ - ۱۷ \Rightarrow bq = ۱۷۰ \Rightarrow b \in \{۱, ۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ۳۴, ۸۵, ۱۷۰\}$$

اما چون $b > ۱۷$، فقط $b = ۳۴, ۸۵, ۱۷۰$ قابل قبول است.

C **۴۹- گزینه‌ی (۴)** با استفاده از رابطه‌ی $۷ \mid ۷n$ و فرض سؤال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۷ \mid ۴n + ۱۱ \Rightarrow ۷ \mid ۸n + ۲۲ \\ ۷ \mid ۷n \end{array}\right\} \Rightarrow ۷ \mid ۸n + ۲۲ - ۷n \Rightarrow ۷ \mid n + ۲۲ \Rightarrow n + ۲۲ = ۷k \Rightarrow n = ۷k - ۲۲$$

باید تعداد اعداد ۲ رقمی به صورت $۷k - ۲۲$ را پیدا کنیم:

$$۱۰ \leq ۷k - ۲۲ \leq ۹۹ \Rightarrow \frac{۳۲}{۷} \leq k \leq \frac{۱۲۱}{۷} \xrightarrow{k \in Z} ۵ \leq k \leq ۱۷ \xrightarrow{\text{تعداد جوابها}} ۱۷ - ۵ + ۱ = ۱۳$$

B **۵۰- گزینه‌ی (۲)** با توجه به فرض سؤال $a = ۳۶q + ۱۵$. اگر $x$ واحد به مقسوم اضافه کنیم تا خارج قسمت یک واحد اضافه شود، داریم:

$$a + x = ۳۶(q + ۱) + r \xrightarrow{a=۳۶q+۱۵} ۳۶q + ۱۵ + x = ۳۶(q + ۱) + r \Rightarrow r = x - ۲۱$$

از طرفی: $۰ \leq r \leq ۳۵ \Rightarrow ۰ \leq x - ۲۱ \leq ۳۵ \Rightarrow ۲۱ \leq x \leq ۵۶ \xrightarrow{\text{تعداد جوابها}} ۵۶ - ۲۱ + ۱ = ۳۶$

**توجه:** به طور کلی اگر به اندازه‌ی تفاضل مقسوم علیه و باقی‌مانده به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت یک واحد اضافه می‌شود.

A **۵۱- گزینه‌ی (۳)** دو عدد $a = ۵k_۱ + ۳$ و $b = ۵k_۲ + ۳$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$ab = (۵k_۱ + ۳)(۵k_۲ + ۳) = ۲۵k_۱k_۲ + ۱۵k_۲ + ۱۵k_۱ + ۹ = ۵\overbrace{(۵k_۱k_۲ + ۳k_۲ + ۳k_۱ + ۱)}^{q} + ۴ = ۵q + ۴$$

B **۵۲- گزینه‌ی (۲)** اگر $a$ عدد صحیح باشد، همواره $a^۴$ در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده‌ی صفر یا ۱ دارد (مسأله‌ی ۲۳ را ببینید).

**۵۳- گزینه‌ی (۲)** اگر $a$ عدد صحیح باشد، $a^۲$ به یکی از صورت‌های $۵k$، $۵k+۱$ و $۵k+۴$ است. لذا معادله‌ی $a^۲=۵b+۱۲$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب ندارد، زیرا: B

$$a^۲=۵b+۱۲=۵b+۱۰+۲=۵(b+۲)+۲\xrightarrow{b+۲=k}a^۲=۵k+۲$$

**۵۴- گزینه‌ی (۲)** در صورتی $a^۲=۶k+۳$ که $a=۶k+۳$. لذا داریم: B

$$۱\le ۶k+۳\le ۱۰۰\Rightarrow \frac{-۱}{۳}\le k\le \frac{۹۷}{۶}\Rightarrow ۰\le k\le ۱۶$$

لذا $۱۷=۱+۰-۱۶$ عدد به صورت $۶k+۳$ در مجموعه‌ی مورد نظر وجود دارد.

**۵۵- گزینه‌ی (۴)** در صورتی $a^۲=۷k+۲$ که $a=۷k\pm ۳$. لذا داریم: C

$$۱\le a\le ۵۰\Rightarrow ۱\le ۷k\pm ۳\le ۵۰$$

$$۱\le ۷k+۳\le ۵۰\Rightarrow \frac{-۲}{۷}\le k\le \frac{۴۷}{۷}\xrightarrow{k\in Z}۰\le k\le ۶$$

$$۱\le ۷k-۳\le ۵۰\Rightarrow \frac{۴}{۷}\le k\le \frac{۵۳}{۷}\xrightarrow{k\in Z}۱\le k\le ۷$$

لذا در مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۵۰\}$، $۷=۱+۰-۶$ عدد به صورت $۷k+۳$ و $۷=۱+۱-۷$ عدد دیگر نیز به صورت $۷k-۳$ وجود دارد. در نتیجه جواب سؤال ۱۴ است.

**۵۶- گزینه‌ی (۳)** اگر $a$ عدد صحیح باشد $a^۲$ به یکی از صورت‌های $۴k$ یا $۴k+۱$ است. B

معادله‌ی $a^۲=۴b+۶$ در مجموع اعداد صحیح جواب ندارد، زیرا:

$$a^۲=۴b+۶=۴b+۴+۲=۴(b+۱)+۲\xrightarrow{b+۱=k}a^۲=۴k+۲$$

**۵۷- گزینه‌ی (۳)** داریم $۵a+۱۴b=۴۷q+۷$. در نتیجه:

$$۵۰a+۱۴۰b=۴۷۰q+۷۰\Rightarrow ۴۷a+۳a+۱۴۱b-b=۴۷(۱۰q)+۴۷+۲۳$$
$$\Rightarrow ۳a-b=۴۷(۱۰q-a-۳b+۱)+۲۳\Rightarrow ۳a-b=۴۷q_۱+۲۳$$

**۵۸- گزینه‌ی (۴)** با توجه به قضیه‌ی تقسیم داریم: B

$$a=۳۷q+r\ ,\ r=q^۲-۲\Rightarrow ۰\le q^۲-۲<۳۷\Rightarrow ۲\le q^۲<۳۹$$
$$\Rightarrow q\in\{۲,۳,...,۶\}\Rightarrow \max(q)=۶\Rightarrow \max(a)=۳۷\times ۶+۳۴=۲۵۶=۲^۸$$

**۵۹- گزینه‌ی(۲)** با توجه به قضیه‌ی تقسیم داریم: B

$$\left.\begin{array}{l}a=۴q+۳\Rightarrow ۳a=۱۲q+۹\\ a=۶q'+۳\Rightarrow ۲a=۱۲q'+۶\end{array}\right\}\Rightarrow ۳a-۲a=۱۲\underbrace{(q-q')}_{q''}+۳\Rightarrow a=۱۲q''+۳$$

**۶۰- گزینه‌ی(۲)** می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $۸k+۱$ نوشت. پس داریم: B

$$a^۲+۶=۸k+۱+۶=۸k+۷=۴(۲k+۱)+۳=۲(۴k+۳)+۱$$

پس باقی‌مانده‌ی $a^۲+۶$ بر اعداد ۲، ۴ و ۸ به ترتیب برابر ۱، ۳ و ۷ است.
راه دوم: به جای $a$، عدد ۱ را قرار دهید!

**۶۱- گزینه‌ی (۳)** با توجه به قضیه‌ی تقسیم داریم: B

$$a=۸q+۷\Rightarrow ۲a+۱=۱۶q+۱۴+۱=۴(\underbrace{۴q+۳}_{q'})+۳=۴q'+۳$$

**۶۲- گزینه‌ی(۱)** با توجه به قضیه‌ی تقسیم و فرض سؤال، داریم: A

$$a=۶۳q+۱۷\Rightarrow a+۶۰=۶۳q+۱۷+۶۰=۶۳(q+۱)+۱۴=۶۳q'+۱۴$$

پس خارج قسمت یک واحد اضافه می‌شود و باقی‌مانده ۳ واحد کم می‌شود.

**۶۳- گزینه‌ی (۳)** با توجه به قضیه‌ی تقسیم داریم: A

$$a=۴۷q+r\ ,\ r=q^۲\Rightarrow ۰\le q^۲<۴۷\Rightarrow q\in\{۰,۱,...,۶\}$$

چون بزرگ‌ترین مقدار $a$ را می‌خواهیم، باید $q=۶$، در این صورت: $a=۴۷\times ۶+۶^۲=۳۱۸$ که مجموع ارقام آن ۱۲ است.

# ۲–۳: نمایش اعداد صحیح در مبناهای مختلف

همه‌ی ما می‌نویسیم «۳۷۵۲» و می‌خوانیم « سه هزار و هفتصد و پنجاه و دو»، یعنی:
۳ تا ۱۰۰۰ تایی، ۷ تا ۱۰۰ تایی، ۵ تا ۱۰ تایی و دو تا یکی، یا:

$$\mathbf{3}\times10^{3}+\mathbf{7}\times10^{2}+\mathbf{5}\times10+\mathbf{2}\times10^{0}$$

رقم‌های این عدد را سیاه‌تر نوشته‌ایم تا تشخیص آن‌ها از بقیه ساده‌تر باشد.
در واقع این نمایش نوعی دسته‌بندی است که عدد ۱۰ نقش ویژه‌ای در آن دارد و مبنای دسته‌بندی محسوب می‌شود و به همین دلیل است که این دستگاه عدد نویسی را دستگاه دهدهی (اعشاری) می‌نامند. همچنین برای نوشتن اعداد در مبنای ۱۰، از ۱۰ نماد ویژه‌ی ۰ تا ۹ به عنوان رقم استفاده می‌کنیم.
حال فرض کنید بخواهیم از مبنای دیگری مثل ۶ برای نمایش استفاده کنیم. در این حالت نیز مانند قبل می‌توانیم از شش نماد ۰ تا ۵ استفاده کنیم.

**مسأله‌ی ۲۷: نمایش عدد ۷۲۹ را در مبنای ٦ بیابید ( هرگاه در نمایش یک عدد مبنا ذکر نشود، منظور نمایش آن در مبنای ۱۰ است).**

**حل:** می‌خواهیم مبنای دسته‌بندی را از ۱۰ به ۶ تغییر دهیم. برای درک بهتر فرض کنید ۷۲۹ عدد چوب کبریت در اختیار داریم و می‌خواهیم آنها را به بسته‌های ۶ تایی تقسیم کنیم. با تقسیم ۷۲۹ بر ۶ به تساوی $3+121\times6=729$ می‌رسیم. یعنی ۱۲۱ بسته‌ی ۶ تایی و ۳ چوب کبریت تنها. اکنون بسته‌های ۶ تایی را مجدداً به بسته‌های ۶ تایی تقسیم می‌کنیم. در این صورت نیز از تساوی $1+20\times6=121$ مشخص می‌شود که ۲۰ بسته‌ی $6^{2}$ تایی و یک بسته‌ی ۶ تایی خواهیم داشت. چنان‌چه بسته‌های $6^{2}$ تایی را نیز به بسته‌های ۶ تایی تقسیم کنیم، ۳ بسته‌ی $6^{3}$ تایی و ۲ بسته‌ی $6^{2}$ تایی خواهیم داشت، زیرا $2+3\times6=20$، پس ۷۲۹ چوب کبریت به ۳ بسته‌ی $6^{3}$ تایی، ۲ بسته‌ی $6^{2}$ تایی، ۱ بسته‌ی ۶ تایی و ۳ بسته‌ی تکی تقسیم می‌شود:

$$729=3\times6^{3}+2\times6^{2}+1\times6+3\times6^{0}$$

اکنون دستگاه عدد نویسی از ۱۰ به ۶ تغییر کرده است. همان طور که مشخص است، رقم‌های این عدد نیز همگی از ۰ تا ۵ هستند. در این حالت می‌نویسیم:

$$729=(3213)_{6}$$

**یادداشت:** راه حل مثال قبل را می‌توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم:

۷۲۹ | ۶
۷۲۶ ۱۲۱ | ۶
۳ ۱۲۰ ۲۰ | ۶
۱ ۱۸ ۳
۲

یعنی رقم‌های مورد نظر به همان ترتیب که مشاهده می‌کنید، از تقسیم‌های متوالی ۷۲۹ بر ۶ به دست آمده است.

**مسأله‌ی ۲۸: نمایش عدد ۴۲۷۴ را در مبنای ۹ بیابید.**

**حل:** با توجه به روش حل مثال قبل می‌توان نوشت:

۴۲۷۴ | ۹
۴۲۶۶ ۴۷۴ | ۹
۸ ۴۶۸ ۵۲ | ۹
۶ ۴۵ ۵
۷

در نتیجه نمایش عدد ۴۲۵۳ در مبنای ۹ به صورت $(5768)_{9}$ است.

**مسأله‌ی ۲۹: نمایش عدد ۶۰۸۵ را در مبنای ۱۵ بیابید (اگر مبنا بزرگ‌تر از ۱۰باشد، ارقام بزرگ‌تر از ۹ را به ترتیب با a، b، c و ... نشان می‌دهیم، یعنی: a = ۱۰، b = ۱۱ و... ).**

**حل:** از تقسیم‌های متوالی ۶۰۸۵ بر ۱۵ استفاده می‌کنیم:

۶۰۸۵ | ۱۵
۶۰۷۵ ۴۰۵ | ۱۵
۱۰ ۴۰۵ ۲۷ | ۱۵
۰ ۱۵ ۱
۱۲

پس نمایش ۶۰۸۵ در مبنای ۱۵ به صورت $(1c0a)_{15}$ است.

**مسأله‌ی ۳۰: نمایش عددی در مبنای ۱۳ به صورت $(b10)$ است. نمایش این عدد را در مبنای ۱۰ بیابید.**

**حل:** خواهیم داشت:

$$(b10)_{13} = 0\times 13^0 + 1\times 13^1 + 11\times 13^2 = 1872$$

**تست ۱۰: در نمایش عدد طبیعی ۶۷ در مبنای ۳، رقم صفر چند مرتبه تکرار شده است؟ (سراسری - ۸۴)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد رقم صفر

**حل:**

$$\begin{array}{l|l} 67 & 3 \\ 66 & 22 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 22 & 3 \\ 21 & 7 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 7 & 3 \\ 6 & 2 \\ \hline 1 & \end{array} \longrightarrow 67 = (2111)_3$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

**تست ۱۱: در یک عدد دو رقمی، اگر جای رقم‌ها را عوض کنیم، ۴۵ واحد به آن افزوده می‌شود. تفاضل رقم دهگان از یکان کدام است؟ (سراسری - ۷۲)**

۱) ۵ ۲) $-5$ ۳) ۴ ۴) $-4$

**حل:**

همان‌طور که اشاره کردیم، وقتی عدد بدون ذکر مبنا آورده می‌شود، منظور در مبنای ۱۰ است. عدد مورد نظر را $\overline{ab}$ درنظر می‌گیریم، پس باید $b-a$ را پیدا کنیم. از فرض سؤال داریم:

$$\overline{ba} = \overline{ab} + 45 \Rightarrow 10b + a = 10a + b + 45 \Rightarrow 9(b-a) = 45 \Rightarrow b - a = 5$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

**نکته‌ی ۷: فرض کنید نمایش عددی در مبنای $b$ داده شده باشد. برای به‌دست آوردن نمایش این عدد در مبنای $c$، ابتدا عدد داده شده را در مبنای ۱۰ پیدا می‌کنیم. سپس این عدد را به مبنای $c$ می‌بریم.**

**مسأله‌ی ۳۱: نمایش عددی در مبنای ۴ به صورت $(3133)_4$ است. نمایش این عدد را در مبنای ۵ بدست آورید.**

**حل:** با توجه به نکته‌ی بالا خواهیم داشت:

$$(3133)_4 = 3\times 4^0 + 3\times 4^1 + 1\times 4^2 + 3\times 4^3 = 223$$

اکنون ۲۲۳ را به مبنای ۵ می‌بریم:

$$\begin{array}{l|l} 223 & 5 \\ 220 & 44 \\ \hline 3 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 44 & 5 \\ 40 & 8 \\ \hline 4 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 8 & 5 \\ 5 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

پس ۲۲۳ در مبنای ۵ به صورت $(1343)_5$ خواهد بود، و بنابراین: $(1343)_5 = (3133)_4$.

**تست ۱۲: نمایش عددی در مبنای ۷ به صورت $(ba)_7$ و در مبنای ۹ به صورت $(ab)_9$ است. مجموع ارقام این عدد در مبنای ۱۰ چند است؟**

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۱۴ ۴) ۱۹

**حل:**

با توجه به فرض $(ba)_7 = (ab)_9$، لذا:

$$a + 7b = b + 9a \Rightarrow 8a = 6b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

چون هریک از $a$ و $b$ یک رقم در مبنای ۷ هستند، پس $0 \le a,b \le 6$، لذا از تساوی $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ نتیجه می‌گیریم $a = 3$ و $b = 4$ و عدد مورد نظر برابر است با: $(43)_7 = 3 + 4\times 7 = 31$. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

**مسألهٔ ۳۲: نمایش عددی در مبنای ۲ به صورت $(1011001011)_2$ است. نمایش این عدد را در مبنای ۴ بیابید.**

**حل:** می‌توان نوشت:

$$(1011001011)_2 = (1+1\times 2)+(0\times 2^2+1\times 2^3)+(0\times 2^4+0\times 2^5)+(1\times 2^6+1\times 2^7)+(0\times 2^8+1\times 2^9)$$
$$= 3+2^2(0+1\times 2)+2^4(0+0\times 2)+2^6(1+1\times 2)+2^8(0+1\times 2)$$
$$= 3+2\times 4^1+0\times 4^2+3\times 4^3+2\times 4^4=(23203)_4$$

**یادداشت:** با توجه به راه حل این مسأله مشخص می‌شود که روش ساده‌ای برای تبدیل نمایش اعداد از مبنای ۲ بـه مبنـای ۴ و بـرعکس وجـود دارد. به کمک جدول زیر می‌توانیم این تبدیل را انجام دهیم.در این جدول اعداد ستون دوم از تقسیم‌های متوالی اعداد ستون اول بر ۲ به‌دست آمده است. با توجه به این جدول هر رقم در مبنای ۴، متناظر با دو رقم در مبنای ۲ است.

| نمایش عدد در مبنای ۲ | نمایش عدد در مبنای ۴ |
|---|---|
| ۰ ۰ | ۰ |
| ۰ ۱ | ۱ |
| ۱ ۰ | ۲ |
| ۱ ۱ | ۳ |

**مسألهٔ ۳۳: نمایش عددی در مبنای ۴ به صورت $(32011)_4$ است. نمایش این عدد را در مبنای ۲ بیابید.**

**حل:** با استفاده از جدول خواهیم داشت:

$$(32011)_4 = (\underline{11}\ \underline{10}\ \underline{00}\ \underline{01}\ \underline{01})_2$$

**مسألهٔ ۳۴: نمایش عددی در مبنای ۲ به صورت $(100110110)_2$ است. نمایش این عدد را در مبنای ۸ بیابید.**

**حل:** می‌توان نوشت:

$$(100110110)_2 = (0\times 2^0+1\times 2^1+1\times 2^2)+(0\times 2^3+1\times 2^4+1\times 2^5)+(0\times 2^6+0\times 2^7+1\times 2^8)$$
$$= 6+2^3(0\times 1+1\times 2+1\times 2^2)+2^6(0\times 1+0\times 2+1\times 2^2)$$
$$= 6+6\times 8^1+4\times 8^2=(466)_8$$

همانند جدول تبدیل مبناهای ۲ و ۴، می‌توانیم جدولی برای تبدیل مبناهای ۲ و ۸ به یکدیگر بیابیم.در این جدول اعداد ستون دوم از تقسیم‌های متوالی اعداد ستون اول بر ۲ به‌دست آمده است. با توجه به این جدول هر رقم در مبنای ۸، متناظر با ۳رقم در مبنای ۲ است.

| نمایش عدد در مبنای ۲ | نمایش عدد در مبنای ۸ |
|---|---|
| ۰۰۰ | ۰ |
| ۰۰۱ | ۱ |
| ۰۱۰ | ۲ |
| ۰۱۱ | ۳ |
| ۱۰۰ | ۴ |
| ۱۰۱ | ۵ |
| ۱۱۰ | ۶ |
| ۱۱۱ | ۷ |

**نکتهٔ ۸:**
**۱- برای تبدیل هر عدد از مبنای $b$ به مبنای $b^n$، ارقام عدد را از سمت راست، $n$ تا $n$ تا رقم جدا می‌کنیم و هر قسمت را جداگانه به مبنای $b^n$ می‌بریم.**
**۲-برای تبدیل هر عدد از مبنای $b^n$ به مبنای $b$، برای هر رقم $n$ جای خالی در نظر می‌گیریم و با تقسیم‌های متوالی آن رقم بر $b$، جاهای خالی را پر می‌کنیم.**

**مسئله‌ی ۳۵:** **نمایش عددی در مبنای ۹ به صورت $(۷۶۰۱)_۹$ است. نمایش این عدد را در مبنای ۳ بیابید.**

**حل:** می‌خواهیم عدد را از مبنای $۳^۲$ به مبنای ۳ تبدیل کنیم. به ازای هر رقم باید ۲ جای خالی در نظر بگیریم و هر رقم را جداگانه به مبنـای ۳ ببریم:

| ۷ | ۶ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|---|
| ۲۱ | ۲۰ | ۰۰ | ۰۱ |

$$\Rightarrow (۷۶۰۱)_۹ = (۲۱۲۰۰۰۰۱)_۳$$

**تست ۱۳:** **عدد $(۲۱۱۲۱۱۰۳)_۴$، در مبنای ۱۶ به صورت $(\overline{mnpq})_{۱۶}$ نوشته شده‌است. بزرگ‌ترین رقم کدام است؟ (آزاد -۸۲)**

۱) q ۲) p ۳) n ۴) m

**حل:**

چون قرار است مبنای عدد مورد نظر از ۴ به $۴^۲$ تغییر کند، رقم‌ها را از سمت راست، ۲ تا ۲ تا، دسته بندی می‌کنیم و مقدار معادل هر دو رقـم را در مبنای ۱۶ می‌نویسیم: (برای نوشتن معادل، کافی است ۲ رقم را به مبنای ۱۰ ببریم!)

$$(\underline{۲۱}\,\underline{۱۲}\,\underline{۱۱}\,\underline{۰۳})_۴ = (۹۶۵۳)_{۱۶}$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

**تست ۱۴:** **اگر عددی در مبنای ٤ به صورت $(۲۱a۳)_۴$ و در مبنای ۸ به صورت $(b۳۷)_۸$ نوشته شود، آنگاه $a+b$ کدام است؟ (آزاد)**

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۲

**حل:**

**روش اول:** در این سؤال در واقع یک عدد به دو نمایش متفاوت ارائه شده است. بنابراین اگر آن‌ها را به مبنـای ۲ نمـایش دهـیم، بایـد ارقـام آن‌هـا یکسان باشند:

| نمـــایش در مبنـــای ۴ | ۲ | ۱ | a | ۳ |
|---|---|---|---|---|
| نمـــایش در مبنـــای ۲ | ۱۰ | ۰۱ | $x_۱x_۲$ | ۱۱ |

| نمـــایش در مبنـــای ۸ | b | ۳ | ۷ |
|---|---|---|---|
| نمـــایش در مبنـــای ۲ | $x_۳x_۴x_۵$ | ۰۱۱ | ۱۱۱ |

در این‌صورت دو نمایش زیر به‌دست می‌آیند که از یکسان بودن آن‌ها ارقام مجهول را به دست می‌آوریم:

$$(x_۳\ x_۴\ x_۵\ ۰\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ )_۲$$
$$(۰\ ۱\ ۰\ ۰\ ۱\ x_۱\ x_۲\ ۱\ ۱\ )_۲$$

دقت کنید که برای آن‌که تعداد رقم‌های دو نمایش را یکسان کنیم، یک صفر به نمایش دوم در سمت چپ آن اضافه کرده‌ایم که به وضوح تغییـری در مقدار عدد ایجاد نمی‌کند.

نتیجه می‌گیریم $x_۲=۱$ ، $x_۱=۱$ ، $x_۵=۰$ ، $x_۴=۱$ و $x_۳=۰$ بنابراین:

$$a=(x_۱x_۲)_۲=(۱۱)_۲=۱\times ۲^۰+۱\times ۲=۳$$
$$b=(x_۳x_۴x_۵)_۲=(۰۱۰)_۲=۰\times ۲^۰+۱\times ۲^۱+۰\times ۲^۲=۲$$

پس $a+b=۵$.

**روش دوم:** با استفاده از مفاهیم گفته شده هر دو عدد را به مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم.

$$(۲۱a۳)_۴=(b۳۷)_۸$$
$$\Rightarrow ۲\times ۴^۳+۱\times ۴^۲+a\times ۴+۳\times ۴^۰=b\times ۸^۲+۳\times ۸^۱+۷\times ۸^۰$$
$$\Rightarrow ۲\times ۸^۲+۲\times ۸+۴a+۳=b\times ۸^۲+۳\times ۸+۷$$

از مقایسه‌ی دو طرف تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم: $b=۲$ (دقت کنید $۰\le a\le ۳$)، همچنین:

$$۲\times ۸+۴a+۳=۳\times ۸+۷\Rightarrow a=۳\Rightarrow a+b=۵$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

**مسأله‌ی ۳۶:** عدد $a$ در مبنای $m$ به صورت $(bcde)_m$ نوشته شده‌است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر $m$ چند است؟

**حل:**

$$a=(bcde)_m=b\times m^3+c\times m^2+d\times m+e$$
$$=m(\underbrace{bm^2+cm+d}_{q})+e=mq+e$$

چون $a=mq+e$ و می‌دانیم $0\le e<m$ (زیرا $e$ یک رقم در مبنای $m$ است)، پس $e$ همان باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر $m$ می‌باشد.

**نکته‌ی ۹:** رقم سمت راست نمایش یک عدد $a$ در مبنای $m$، همان باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر $m$ است.

برای درک بهتر، در یک عدد معمولی (یعنی در مبنای ۱۰) مثل ۳۴۲، رقم یکان آن باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد بر ۱۰ است.

**تست ۱۵:** نمایش عددی در مبنای ۶ به صورت $(405302)_6$ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۱۸ چند است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱۱ ۴) ۲

**حل:** می‌توان نوشت:

$$(405302)_6=2\times 6^0+0\times 6^1+3\times 6^2+5\times 6^3+0\times 6^4+4\times 6^5$$
$$=2+6^2(3+5\times 6+4\times 6^3)=2+36q=2+18k$$

پس باقی‌مانده‌ی عدد مورد نظر بر ۱۸ برابر ۲ است. بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

**تست ۱۶:** به ازای کدام مقدار $n$، مجموع ارقام عدد $10^{3n}-10^n$ برابر ۲۱۶ می‌شود؟ (سراسری -۸۵)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

**حل:** می‌دانیم: $a=10^{3n}-10^n=10^n(10^{2n}-1)$، پس اگر $b=10^{2n}-1$، آن‌گاه: $a=10^n b$. عدد $b$، همان بزرگ‌ترین عدد $2n$ رقمی در مبنای ۱۰ است و از $2n$ رقم ۹ تشکیل شده است، یعنی: $b=\underbrace{99...9}_{2n}$ (برای فهم بهتر به تساوی‌هایی چون $99=10^2-1$ ، $999=10^3-1$ و ... دقت کنید).

ضرب عدد $b$ در $10^n$، جلوی آن $n$ تا صفر در نمایش مبنای ۱۰ آن ایجاد می‌کند. یعنی:

$$a=\underbrace{99...9}_{2n}\underbrace{00...0}_{n}\to \text{مجموع ارقام } a=\underbrace{9+...+9}_{2n}=2n\times 9=18n\Rightarrow 18n=216\Rightarrow n=12$$

بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

در حل تست قبل از یک نکته‌ی کلی استفاده کرده‌ایم که برای تأکید آن را تکرار می‌کنیم:

**نکته‌ی ۱۰:** بر اثر ضرب یک عدد در $m^n$، $n$ رقم صفر در سمت راست نمایش آن در مبنای $m$ اضافه می‌شود.

**تست ۱۷:** اگر عدد $A$ در مبنای دو به صورت $(10101)_2$ باشد، $33A$ در مبنای دو چند صفر دارد؟ (آزاد ـ ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

**حل:** می‌دانیم: $33A=32A+A$، چون $2^5=32$، پس نمایش $32A$، در مبنای دو، از اضافه کردن ۵ رقم صفر در سمت راست نمایش $A$ به‌دست می‌آید. یعنی:

$$32A=(1010100000)_2\Rightarrow 33A=(1010100000)_2+(10101)_2=(1010110101)_2$$

که در نمایش فوق ۴ رقم صفر وجود دارد. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

فصل ۲

# نمایش اعداد صحیح در مبناهای مختلف

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۴- نمایش عدد ۶۲۱ در مبنای ۵ کدام است؟

۱) ۳۲۱۲ ۲) ۴۴۴۱ ۳) ۲۴۰۴ ۴) ۴۲۴۱

۶۵- اگر نمایش $A$ در مبنای ۳ به صورت ۲۱ باشد، $81A$ در مبنای ۳ چند صفر دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۶- نمایش عدد $a$ در مبنای ۵ به کدام صورت نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۴۲۲۱ ۳) ۵۱۰۱ ۴) ۲۱۱۱

۶۷- بزرگ‌ترین عدد ۵ رقمی در مبنای ٤، کدام است؟

۱) ۲۴۲ ۲) ۲۵۵ ۳) ۵۱۱ ۴) ۱۰۲۳

۶۸- عدد $a$ در مبنای ۲ دارای ۷ رقم است. این عدد در مبنای ۳ چند رقم دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۴ یا ۵ ۴) ۵ یا ۶

۶۹- نمایش عدد ۱۴۶ در مبنای $a$ به صورت ۲۲۲ است. $a$ چند است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۷۰- اگر $A = (۶۳۰۶)_۷$، نمایش $\frac{A}{۳}$ در مبنای ۷ کدام است؟

۱) ۳۰۱۳ ۲) ۲۱۰۲ ۳) ۲۱۳ ۴) ۳۱۰۲

۷۱- اگر $A = (۵۱۰۳)_۶$، نمایش $\frac{A}{۳}$ در مبنای ۶ کدام است؟

۱) ۱۴۲۱ ۲) ۱۵۰۱ ۳) ۲۱۳۱ ۴) ۱۴۵۱

۷۲- نمایش عددی در مبنای ۷ به صورت ۴۴۶۳ است. نمایش این عدد در مبنای ۱۴ کدام است؟

۱) ۱۱b۳ ۲) ۷۲۳ ۳) ۱b۲۳ ۴) ۸۳۳

۷۳- عددی دو رقمی، ۸ برابر مجموع ارقامش است. باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۵ چند است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۴- هرگاه $(۳a۱)_۴ = (۲۰۲۱)_۳$، در این صورت $a$ چند است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۵- عددی در مبنای ۵ به صورت $\overline{xy۴}$ و در مبنای ۸ به صورت $\overline{۱z۵}$ نوشته می‌شود. بزرگ‌ترین مقدار $z$ چند است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۶- نمایش عددی در مبنای ۱۲ به صورت ۹۸۳۷ است. باقی‌مانده‌ی این عدد بر ۴ چند است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۷- مربع رقم دهگان به‌علاوه‌ی ۹ برابر مجذور رقم یکان یک عدد دورقمی، مساوی ۶ برابر حاصل ضرب ارقامش است. چند عدد دورقمی با این شرایط وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۸- اگر $(\overline{ba})_7 = (\overline{ab})_7$، مربع یک عدد طبیعی باشد، برای $a+b$ چند مقدار متمایز وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۹- به ازای چند مقدار x، عدد $(1331)_x$ مکعب کامل است؟ $(x < 10)$

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۸۰- حاصل $(110110)_2 + (1010)_2$ برابر است با:

۱) $(100010)_2$ ۲) $(1101110)_2$ ۳) $(100000)_2$ ۴) $(1000000)_2$

۸۱- به ازای هر عدد طبیعی $a > 3$، عدد $[(131)_a]^2 - 1$ بر کدام یک از اعداد زیر همواره بخش‌پذیر است؟ (بزرگ‌ترین عدد ممکن را انتخاب کنید.)

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۸۲- چند عدد ۴ رقمی در مبنای ۴ می‌توان نوشت؟

۱) ۱۹۲ ۲) ۲۵۶ ۳) ۸۱ ۴) ۱۹۶

۸۳- نمایش عددی در مبنای ۹ به صورت ۶۳۴ است. نمایش این عدد در مبنای ۳ کدام است؟

۱) ۲۱۰۱۱۰ ۲) ۲۲۱۰۱۱ ۳) ۱۲۱۱۱۰ ۴) ۲۰۱۰۱۱

۸۴- نمایش عددی در مبنای ۲ به صورت ۱۰۱۱۰۱۱۱۰۱ است. نمایش این عدد در مبنای ۸ کدام است؟

۱) ۱۳۳۵ ۲) ۱۲۴۵ ۳) ۱۰۳۳ ۴) ۱۱۳۲

۸۵- نمایش عددی در مبنای ۹ به صورت ۵۴۷ است. نمایش این عدد در مبنای ۳ کدام است؟

۱) ۱۲۱۱۲۱ ۲) ۱۲۲۲۱۱ ۳) ۱۲۲۱۲۱ ۴) ۱۲۱۲۲۱

۸۶- نمایش عددی در مبنای ۴ به صورت ۳۱۰۱۲ است. نمایش این عدد در مبنای ۸ کدام است؟

۱) ۱۷۱۴ ۲) ۱۵۰۶ ۳) ۲۱۰۲ ۴) ۱۷۱۹

۸۷- عدد ۱۶۹ در مبنای ۳ دارای چند رقم است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۸- عددی در مبنای ۴ به صورت $a023$ و در مبنای ۸ به صورت $31b$ نوشته می‌شود. $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۹- نمایش x در مبنای ۵ به صورت ۳۰۴۲۴ است. نمایش $x - 10$ در مبنای ۵ کدام است؟

۱) ۳۰۴۰۴ ۲) ۳۰۴۴۴ ۳) ۳۰۴۲۰ ۴) ۳۰۴۲۴

۹۰- اگر $(\overline{yx})_9 = (\overline{xy})_7$، عدد $(x+y)^2$ در مبنای ۲ چند رقم دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۵ یا ۶ ۴) ۷

۹۱- اگر $(cba)_9 = (abc)_7$، حاصل $a+b+c$ چند است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹۲- چند عدد چهار رقمی به صورت $A = \overline{abcd}$ وجود دارد که $A = 105\overline{ab}$؟

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۲۰

۹۳- به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 3$، عدد $(10)_n \times (11)_n \times (12)_n$ همواره بر کدام یک بخش‌پذیر است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۹۴- نمایش عدد $a^4 - a^3$ در مبنای a کدام است؟

۱) $\overline{(a-1)000}$ ۲) $\overline{a000}$ ۳) $\overline{(a-2)000}$ ۴) $\overline{1(a-1)00}$

۹۵- عددی در مبنای x به صورت $\overline{3a}$ و در مبنای $x-2$ به صورت $\overline{a3}$ نوشته می‌شود. $a+x$ چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۹۶- نمایش عدد $a = ۲^{۱۹} \times ۳^{۷}$ در مبنای ٤، در سمت راست خود چند رقم صفر دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹۷- عدد $(۱۲۱۱۰)_۳$ در مبنای ۹ به صورت $(\overline{abc})_۹$ نوشته شده. $a^۲ + b^۲ + c^۲$ چقدر است؟ (آزاد – ۸۲)

۱) ۲۵ ۲) ۶۰ ۳) ۵۸ ۴) ۵۹

۹۸- اگر عدد $A$ در مبنای ۴ به‌صورت $\overline{ab۳۲}$ و در مبنای ۸ به‌صورت $\overline{۱۳c}$ باشد، $a + b + c$ کدام است؟ (آزاد – ۸۴)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹۹- اگر $A = (۲۱۲۲)_۳$، باقی‌مانده‌ی تقسیم $۸۲A$ بر ۱۰ کدام است؟ (آزاد – ۸۶)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۴

# فصل ۲
# نمایش اعداد صحیح در مبناهای مختلف

## پاسخ‌های تشریحی

**۶۴- گزینه‌ی (۲)** از تقسیم‌های متوالی ۶۲۱ بر ۵ استفاده می‌کنیم: A

$$\begin{array}{r|l} ۶۲۱ & ۵ \\ \hline ۶۲۰ & ۱۲۴ \\ ۱ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۱۲۴ & ۵ \\ \hline ۱۲۰ & ۲۴ \\ ۴ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۲۴ & ۵ \\ \hline ۲۰ & ۴ \\ ۴ & \end{array}$$

$$۶۲۱ = (۴۴۴۱)_۵$$

**۶۵- گزینه‌ی (۳)** اگر عدد $A$ نمایش عددی در مبنای $b$ باشد، آن‌گاه نمایش $b^n A$ در مبنای $b$ به صورت $A\underbrace{۰۰...۰}_{n \text{ تا}}$ خواهد بود. لذا: A

$$۸۱A = ۳^۴ \times A = ۳^۴ \times (۲۱)_۳ = (۲۱۰۰۰۰)_۳$$

پس $۸۱A$ در مبنای ۳، ۴ صفر دارد.

**۶۶- گزینه‌ی(۳)** رقم‌های هر عدد در مبنای $b$، باید از $b$ کوچک‌تر باشد. A

**۶۷- گزینه‌ی (۴)** **(راه حل اول:** ارقام یک عدد در مبنای ۴، حداکثر ۳ هستند. پس بزرگ‌ترین عدد ۵ رقمی در مبنای ۴، عدد $(۳۳۳۳۳)_۴$ است، که باید آن‌را به مبنای ۱۰ تبدیل کنیم: B

$$A = (۳۳۳۳۳)_۴ = ۳ + ۳\times ۴^۱ + ۳\times ۴^۲ + ۳\times ۴^۳ + ۳\times ۴^۴ = ۳(۱ + ۴^۲ + ۴^۳ + ۴^۴)$$

طبق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(۴^۴ + ۴^۳ + ۴^۲ + ۴ + ۱)(۴ - ۱) = ۴^۵ - ۱ \Rightarrow A = ۴^۵ - ۱ = ۱۰۲۴ - ۱ = ۱۰۲۳$$

**راه حل دوم:** کوچک‌ترین عدد ۶ رقمی در مبنای ۴، عدد $b = (۱۰۰۰۰۰)_۴$ است، که واضح است از عدد $a$، یعنی بزرگ‌ترین عدد ۵ رقمی در مبنای ۴، یک واحد بیش‌تر است. پس:

$$a = b - ۱ \ , \quad b = ۱\times ۴^۵ \Rightarrow a = ۴^۵ - ۱ = ۱۰۲۳$$

**۶۸- گزینه‌ی (۳)** چون $a$ در مبنای ۲ دارای ۷ رقم است، داریم: B

$$۲^۶ \le a < ۲^۷ \Rightarrow ۳^۳ < ۲^۶ \le a < ۲^۷ < ۳^۵$$

پس یا $۳^۳ < a < ۳^۴$ یا $۳^۴ \le a < ۳^۵$. درنتیجه $a$ در مبنای ۳، دارای ۴ یا ۵ رقم است.

**۶۹- گزینه‌ی(۳)** با توجه به فرض سوال داریم: A

$$(۲۲۲)_a = ۱۴۶ \Rightarrow ۲a^۲ + ۲a + ۲ = ۱۴۶ \Rightarrow ۲a^۲ + ۲a - ۱۴۴ = ۰ \Rightarrow (a - ۸)(a + ۹) = ۰ \Rightarrow a = ۸$$

**۷۰- گزینه‌ی(۲)** B

$$A = ۶\times ۷^۰ + ۰\times ۷ + ۳\times ۷^۲ + ۶\times ۷^۳ \Rightarrow \frac{A}{۳} = ۲\times ۷^۰ + ۱\times ۷^۲ + ۲\times ۷^۳ = (۲۱۰۲)_۷$$

**۷۱- گزینه‌ی(۱)** B

$$A = (۵۱۰۳)_۶ = ۵\times ۶^۳ + ۱\times ۶^۲ + ۰\times ۶ + ۳\times ۶^۰ \Rightarrow \frac{A}{۳} = ۵\times ۲\times ۶^۲ + ۲\times ۶ + ۱ = (۶ + ۴)\times ۶^۲ + ۲\times ۶ + ۱ =$$

$$۶^۳ + ۴\times ۶^۲ + ۲\times ۶ + ۱ = (۱۴۲۱)_۶$$

**۷۲- گزینه‌ی(۴)** B

$$(۴۴۶۳)_۷ = ۳ + ۶\times ۷ + ۴\times ۷^۲ + ۴\times ۷^۳ = ۳ + ۳\times ۱۴ + ۱۴^۲ + ۷\times ۱۴^۲ = ۸\times ۱۴^۲ + ۳\times ۱۴ + ۳\times ۱۴^۰ = (۸۳۳)_{۱۴}$$

B **۷۳- گزینه‌ی (۳)** فرض کنید $\overline{ab}$ عدد مورد نظر باشد. داریم:

$$\overline{ab}=۸(a+b)\Rightarrow b+۱۰a=۸a+۸b\Rightarrow ۲a=۷b\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow a=۷\ ,\ b=۲$$

پس عدد موردنظر ۷۲ است که باقی‌مانده‌ی آن بر ۵، برابر ۲ است.

B **۷۴- گزینه‌ی (۴)**

$$(۲۰۲۱)_۳=(۳a۱)_۴\Rightarrow ۲\times ۳^۳+۰\times ۳^۲+۲\times ۳+۱=۳\times ۴^۲+a\times ۴+۱\Rightarrow a=۳$$

B **۷۵- گزینه‌ی (۲)** با توجه به فرض سوال داریم: $(xy۴)_۵=(۱z۵)_۸\Rightarrow ۴+۵y+۲۵x=۵+۸z+۶۴\Rightarrow ۵(۵x+y-۱۳)=۸z\Rightarrow ۵\,|\,z$

لذا $z=۰$ یا $z=۵$ که بیش‌ترین مقدار برای $z$ عدد ۵ است.

A **۷۶- گزینه‌ی (۴)**

$$(۹۸۳۷)_{۱۲}=۷+۳\times ۱۲+۸\times ۱۲^۲+۹\times ۱۲^۳=۳+۴+۳\times ۱۲+۸\times ۱۲^۲+۹\times ۱۲^۳$$
$$=۳+۴(۱+۳\times ۳+۲\times ۱۲^۲+۹\times ۳\times ۱۲^۲)=۳+۴k$$

B **۷۷- گزینه‌ی (۴)**

فرض می‌کنیم $M=\overline{ab}$. داریم: $a^۲+۹b^۲=۶ab\Rightarrow (a-۳b)^۲=۰\Rightarrow a=۳b\Rightarrow M=\overline{ab}=\overline{(۳b)b}\Rightarrow M=۳۱,۶۲,۹۳$

A **۷۸- گزینه‌ی (۲)**

$$(\overline{ab})_۷+(\overline{ba})_۷=۷a+b+۷b+a=۸(a+b)$$

برای این‌که $۸(a+b)$ مربع کامل باشد، باید $a+b=۲$ یا $a+b=۸$ (زیرا $۰\le a+b\le ۱۴$)، بنابراین ۲ مقدار متمایز برای $a+b$ وجود دارد.

B **۷۹- گزینه‌ی (۳)**

$$(۱۳۳۱)_x=x^۳+۳x^۲+۳x+۱=(x+۱)^۳$$

پس عدد موردنظر به ازای هر $۳<x<۱۰$ مکعب کامل است. لذا ۶ مقدار متفاوت برای $x$ وجود دارد، $x\in\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$.

A **۸۰- گزینه‌ی (۴)** در مبنای عددنویسی ۲، $۱+۱=(۱۰)_۲$، لذا:

$$\begin{array}{r} ۱۱۰۱۱۰ \\ ۱۰۱۰ \\ \hline ۱۰۰۰۰۰۰ \end{array}$$

C **۸۱- گزینه‌ی (۴)**

$$[(۱۳۱)_a]^۲-۱=[(۱۳۱)_a-۱][(۱۳۱)_a+۱]=[a^۲+۳a][a^۲+۳a+۲]$$
$$=a(a+۱)(a+۲)(a+۳)\quad \text{حاصل‌ضرب ۴ عدد متوالی}$$

و می‌دانیم حاصل‌ضرب ۴ عدد متوالی همواره بر $۴!=۲۴$ بخش‌پذیر است.

B **۸۲- گزینه‌ی (۱)** اگر $\overline{x_۱x_۲x_۳x_۴}$ نمایش اعداد در مبنای ۴ باشد، در این صورت $۱\le x_۱\le ۳$ و $۰\le x_۲,x_۳,x_۴\le ۳$، پس $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ هر کدام ۴ انتخاب و $x_۱$ نیز ۳ انتخاب دارد. لذا طبق اصل ضرب، $۴\times ۴\times ۴\times ۳$ عدد متمایز در مبنای ۴ می‌توان نوشت.

A **۸۳- گزینه‌ی (۴)** هر رقم در مبنای $۳^۲$، متناظر با ۲ رقم در مبنای ۳ است:

| ۶ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|
| ۲۰ | ۱۰ | ۱۱ |

$\Rightarrow (۶۳۴)_۹=(۲۰۱۰۱۱)_۳$

A **۸۴- گزینه‌ی (۱)** برای تبدیل هر عدد از مبنای ۲ به $۲^۳$، باید عدد را از سمت راست ۳ رقم ۳رقم جدا کنیم و هرقسمت را جداگانه به مبنای ۸ ببریم:

| ۱ | ۰۱۱ | ۰۱۱ | ۱۰۱ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۳ | ۵ |

A **۸۵- گزینه‌ی (۱)** به ازای هر رقم عدد مورد نظر، باید ۲ رقم خالی در نظر بگیریم و هر رقم را جداگانه به مبنای ۳ ببریم:

| ۵ | ۴ | ۷ |
|---|---|---|
| ۱۲ | ۱۱ | ۲۱ |

$\rightarrow\ (۵۴۷)_۹=(۱۲۱۱۲۱)_۳$

B **۸۶- گزینه‌ی (۲)** اول عدد را از مبنای ۴ به ۲ و بعد از مبنای ۲ به ۸ می‌بریم:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 11 | 01 | 00 | 01 | 10 |

$$\Rightarrow (31012)_4 = (1101000110)_2$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 101 | 000 | 110 |
| 1 | 5 | 0 | 6 |

$$\Rightarrow (1101000110)_2 = (1506)_8$$

B **۸۷- گزینه‌ی (۲)** اگر $a^n \le x < a^{n+1}$، در این صورت x در مبنای a دارای $n+1$ رقم است. لذا چون $3^4 < 169 < 3^5$، بنابراین ۱۶۹ در مبنای ۳ دارای ۵ رقم است.

C **۸۸- گزینه‌ی (۴)** اگر هر ۲ عدد را در مبنای ۲ نمایش دهیم، باید ارقام آن‌ها یکسان باشند:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 2 | 3 |
| $x_1x_2$ | 00 | 10 | 11 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | $b$ |
| 011 | 001 | $x_3x_4x_5$ |

با مقایسه ۲ نمایش به دست آمده و مساوی قرار دادن آن‌ها، مجهول‌ها را پیدا می‌کنیم:

$x_1x_2\ 001\ 0\ 1\ 1$

$1\ 1\ 001\ x_3x_4x_5$

پس $x_5 = 1$، $x_4 = 1$، $x_3 = 0$، $x_2 = 1$ و $x_1 = 1$ و در نتیجه ارقام a و b به دست می‌آید:

$$a = (x_1x_2)_2 = (11)_2 = 3 \quad , \quad b = (x_3x_4x_5)_2 = (011)_2 = 3$$

B **۸۹- گزینه‌ی (۱)** می‌دانیم $(20)_5 = 10$، بنابراین داریم:

$$x - 10 = (30424)_5 - (20)_5 = (30404)_5$$

B **۹۰- گزینه‌ی (۲)**

$$(\overline{xy})_7 = (\overline{yx})_9 \Rightarrow y + 7x = x + 9y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

چون $0 \le x, y \le 6$، پس $x = 4$ و $y = 3$ و لذا $(x+y)^2 = 49$. از طرفی داریم $2^5 < 49 < 2^6$، پس $(x+y)^2$ در مبنای ۲، ۶ رقم دارد.

C **۹۱- گزینه‌ی (۳)**

$$(abc)_7 = (cba)_9 \Rightarrow c + 7b + 49a = a + 9b + 81c \Rightarrow b = 24a - 40c \Rightarrow b = 8(3a - 5c) \Rightarrow b = 8k$$

اما $0 \le b \le 6$ (چرا؟)، لذا داریم:

$$b = 0 \Rightarrow 24a = 40c \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 5\ ,\ c = 3 \Rightarrow a + b + c = 8$$

B **۹۲- گزینه‌ی (۲)**

$$\overline{abcd} = 105\,\overline{ab} \Rightarrow 100\,\overline{ab} + \overline{cd} = 105\,\overline{ab} \Rightarrow 5\,\overline{ab} = \overline{cd}$$

$$5\,\overline{ab} < 100 \Rightarrow \overline{ab} < 20 \Rightarrow 10 \le \overline{ab} \le 19$$

بنابراین $19 - 10 + 1 = 10$ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

B **۹۳- گزینه‌ی (۱)**

$$(10)_n \times (11)_n \times (12)_n = (n+0)(n+1)(n+2) = \text{حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی}$$

و می‌دانیم حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی بر $3! = 6$ بخش‌پذیر است.

B **۹۴- گزینه‌ی (۱)** با توجه به این‌که $a^4 = (10000)_a$ و $a^3 = (1000)_a$ داریم:

$$a^4 - a^3 = (10000)_a - (1000)_a = \overline{(a-1)000}$$

B **۹۵- گزینه‌ی (۳)** با توجه به فرض سوال داریم:

$$(\overline{3a})_x = (\overline{a3})_{x-2} \Rightarrow 3x + a = a(x-2) + 3 \Rightarrow x = \frac{3a-3}{a-3} = 3 + \frac{6}{a-3}$$

اما چون x عددی صحیح است، لذا باید $a - 3 \mid 6$. در نتیجه $a - 3$ یکی از مقسوم‌علیه‌های ۶ است:

$$a - 3 = 1 \Rightarrow a = 4\ ,\ x = 9$$

$$\left.\begin{array}{l} a-3=2 \Rightarrow a=5\ ,\ x=6 \\ a-3=3 \Rightarrow a=6\ ,\ x=5 \\ a-3=6 \Rightarrow a=9\ ,\ x=4 \end{array}\right\} \text{قابل قبول نیستند زیرا باید } a < x-2$$

در نتیجه $a + x = 13$.

**۹۶- گزینه‌ی(۳)** می‌توانیم بنویسیم: $a = 2^{18}\times 2\times 3^{7} = 4^{9}\times b$، که در آن $b = 2\times 3^{7}$ و $b$ عددی است که بر ۴ بخش‌پذیر نیست. چون $b$ مضرب ۴ نیست، وقتی در مبنای ۴ نوشته می‌شود، در سمت راست آن رقم صفر وجود ندارد (زیرا عددی که رقم سمت راست آن صفر باشد، باقی‌مانده‌ی آن بر ۴، همان صفر می‌شود). B

ضریب $4^{9}$ نیز ۹ رقم صفر به سمت راست نمایش $b$ در مبنای ۴ اضافه می‌کند. پس نمایش $a$، ۹ رقم صفر در سمت راست خود دارد.

**۹۷- گزینه‌ی (۴)** رقم‌ها را ۲ تا ۲ تا دسته‌بندی می‌کنیم و به مبنای ۹ می‌بریم: A

| مبنای ۳ | ۰۱ | ۲۱ | ۱۰ |
|---|---|---|---|
| مبنای ۹ | $3\times 0+1$ | $3\times 2+1$ | $3+0$ |

$$\Rightarrow (12110)_3 = (173)_9 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 1+49+9 = 59$$

**۹۸- گزینه‌ی (۳)** هر دو عدد را در مبنای ۲ می‌بریم و باهم مقایسه می‌کنیم: C

$$\left.\begin{array}{l}(\overline{ab32})_4 = (\overline{x_1x_2y_1y_2 1110})_2\\ (\overline{13c})_8 = (1011z_1z_2z_3)_2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

| $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |

چون باید دو نمایش یکسان باشد، با مقایسه‌ی رقم‌ها مشخص است که: $c=(110)_2$، $b=(01)_2$ و $a=(01)_2$. بنابراین:

$$a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=6 \Rightarrow a+b+c=8$$

**۹۹- گزینه‌ی (۲)** B

$$A = 2+2\times 3+1\times 3^2+2\times 3^3 = 71 \Rightarrow 82A = 82\times 71 = 10k+2$$