۱

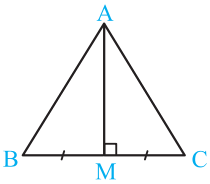
فصل اول
جلسه اول

CHAPTER ONE

هندسه و استدلال

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گویند.

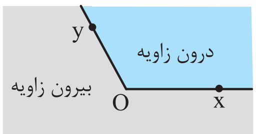
مثلاً اگر با مشاهده‌ی تعدادی مثلث مانند شکل مقابل که میانه و ارتفاع آن‌ها بر هم منطبق‌اند، نتیجه‌گیری کنیم چنین مثلث‌هایی متساوی‌الساقین هستند یک استدلال استقرایی انجام داده‌ایم.



استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری کلی براساس مفاهیمی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم (مانند اصول، تعاریف، مفاهیم تعریف نشده و قضایای از قبل اثبات شده) استدلال استنتاجی نامیده می‌شود.

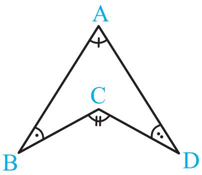
نکته: استدلال استنتاجی همان اثبات در هندسه و ریاضیات است و استدلال استقرایی در مقام یک حدس است که ممکن است درست یا نادرست باشد.

زاویه: اجتماع نقاط متعلق به دو نیم‌خط که روی یک امتداد نیستند و مبدأ مشترک دارند، زاویه نامیده می‌شود.

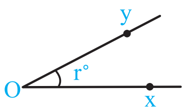


اندازه‌ی زاویه: به هر زاویه عددی مثبت بین صفر و ۱۸۰° نسبت داده می‌شود که وضعیت دو ضلع زاویه را نسبت به هم نشان می‌دهد و آن را اندازه‌ی زاویه می‌نامند.

مثلاً در چهارضلعی مقابل یکی از زوایا بیرون آن واقع است.

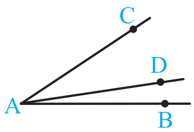


اصل رسم زاویه: اگر ox یک نیم‌خط باشد، آن‌گاه دقیقاً یک نیم‌خط مانند oy در نیم‌صفحه‌ی بالای ox می‌توان رسم کرد که اندازه‌ی زاویه‌ی xoy برابر r° باشد $(۰ < r < ۱۸۰)$.



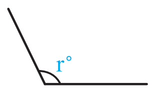
اصل جمع زوایا: اگر نقطه‌ی D درون زاویه‌ی $B\hat{A}C$ باشد، آن‌گاه:

$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C$$



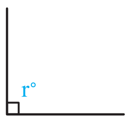
طبقه‌بندی زاویه:

زاویه‌ی منفرجه



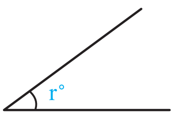
$۹۰ < r < ۱۸۰$

زاویه‌ی قائمه



$r = ۹۰$

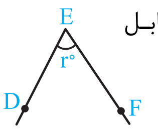
زاویه‌ی حاده

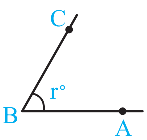


$۰ < r < ۹۰$

انطباق یا همنهشتی زوایا

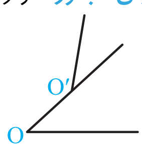
دو زاویه را قابل انطباق و یا همنهشت گویند هرگاه اندازه‌های آن‌ها برابر باشند. مثلاً دو زاویه‌ی روبه‌رو قابل انطباق یا همنهشت‌اند و جای آن‌ها در صفحه اهمیت ندارد.



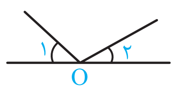


تذکر: تساوی دو زاویه یعنی این‌که دو زاویه قابل انطباق هستند.

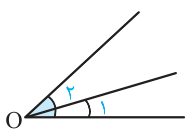
زوایای مجاور: دو زاویه که رأس و یک ضلع مشترک داشته و هیچ نقطه‌ی اشتراک داخلی نداشته باشند، مجاور نامیده می‌شوند.



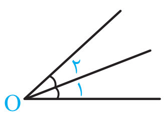
$\hat{O}, \hat{O}'$ مجاور نیستند.



$\hat{O}_۱, \hat{O}_۲$ مجاور نیستند.



$\hat{O}_۱, \hat{O}_۲$ مجاور نیستند.



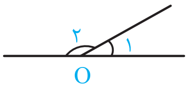
$\hat{O}_۱, \hat{O}_۲$ مجاورند.

زوایای متمم: اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه ۹۰° باشد، آن دو زاویه را متمم یکدیگر می‌نامند و جای آن‌ها در صفحه اهمیت ندارد. اگر اندازه‌ی یک زاویه‌ی حاده α درجه باشد متمم آن $۹۰-\alpha$ درجه است.

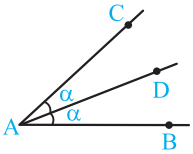
زوایای مکمل: اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه ۱۸۰° باشد آن دو زاویه را مکمل یکدیگر می‌نامند و جای آن‌ها در صفحه اهمیت ندارد. اگر اندازه‌ی یک زاویه α درجه باشد، مکمل آن $۱۸۰-\alpha$ درجه است.

زوایای مجانب: اگر دو زاویه مجاور باشند و اضلاع غیرمشترکشان در امتداد هم باشد، مجانب نامیده می‌شوند. در شکل زیر $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ مجانب‌اند.

اصل زوایای مجانب: اگر دو زاویه مجانب باشند مکمل‌اند. در شکل مقابل $\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ$



نیمساز زاویه: نیم‌خط AD درون زاویه‌ی $B\hat{A}C$ که آن را به دو زاویه با اندازه‌های برابر تقسیم می‌کند، نیمساز زاویه‌ی $B\hat{A}C$ نامیده می‌شود.



مثال ۱: اگر نسبت اندازه‌ی یک زاویه به مکمل آن ۳ به ۷ باشد، آن‌گاه نسبت اندازه‌ی آن زاویه به اندازه‌ی متمم آن کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

پاسخ: اگر اندازه‌ی زاویه را برحسب درجه α فرض کنیم، مکمل آن $۱۸۰-\alpha$ است و داریم:

$$\frac{\alpha}{۱۸۰-\alpha}=\frac{۳}{۷}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{\alpha}{۱۸۰}=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow \alpha=۳\times۱۸=۵۴$$

$$\frac{\text{اندازه‌ی زاویه}}{\text{متمم زاویه}}=\frac{\alpha}{۹۰-\alpha}=\frac{۵۴}{۳۶}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow$$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

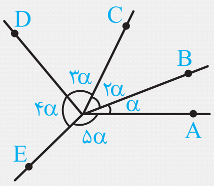
مثال ۲: در شکل روبه‌رو مقدار α کدام است؟

۱) ۱۸

۲) ۱۵

۳) ۲۴

۴) ۲۷



پاسخ: مجموع اندازه‌ی زوایای شکل برابر ۳۶۰° است، پس:

$\alpha+۲\alpha+۳\alpha+۴\alpha+۵\alpha=۳۶۰\Rightarrow ۱۵\alpha=۳۶۰\Rightarrow \alpha=۲۴\Rightarrow$ گزینه‌ی (۳) صحیح است.

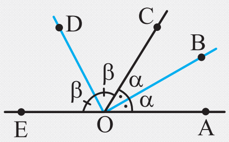
مثال ۳: مکمل متمم یک زاویه $\frac{۳}{۲}$ برابر اختلاف مکمل و متمم آن است، اندازه‌ی این زاویه را تعیین کنید.

پاسخ: اندازه‌ی زاویه را x درنظر می‌گیریم. متمم و مکمل آن به‌ترتیب $۹۰^\circ-x$ و $۱۸۰^\circ-x$ می‌باشند و داریم:

$$۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ-x)=\frac{۳}{۲}((۱۸۰^\circ-x)-(۹۰^\circ-x))\Rightarrow ۹۰^\circ+x=\frac{۳}{۲}(۹۰^\circ)\Rightarrow ۹۰^\circ+x=۱۳۵^\circ\Rightarrow x=۴۵^\circ$$

مثال ۴: ثابت کنید نیمسازهای دو زاویه‌ی مجانب بر یکدیگر عمودند.

پاسخ: OB و OD به ترتیب نیمسازهای زوایای $A\hat{O}C$ و $C\hat{O}E$ هستند.



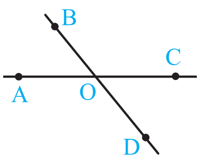
$$\beta+\beta+\alpha+\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۱۸۰^\circ\Rightarrow \alpha+\beta=۹۰^\circ\Rightarrow B\hat{O}D=۹۰^\circ\Rightarrow OB\perp OD$$

قضیه ۱: متمم‌های دو زاویه‌ی همنهشت، همنهشت‌اند.

قضیه ۲: مکمل‌های دو زاویه‌ی همنهشت، همنهشت‌اند.

زوایای متقابل به رأس: دو زاویه که رأس مشترک داشته و امتداد اضلاع یکی اضلاع دیگری باشد، متقابل به رأس نامیده می‌شوند.

در شکل روبه‌رو $A\hat{O}B$ و $C\hat{O}D$ و نیز دو زاویه‌ی $B\hat{O}C$ و $A\hat{O}D$ متقابل به رأس هستند.

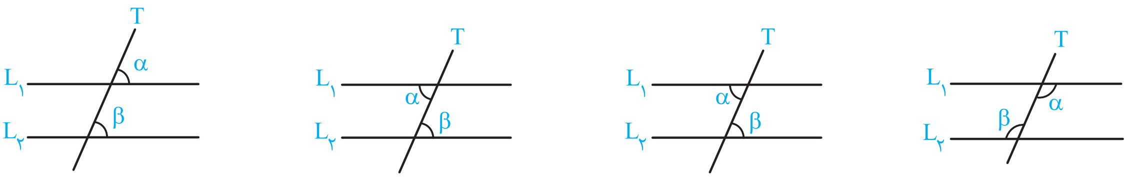


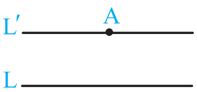
قضیه ۳ (زاویه‌های متقابل به رأس): هر دو زاویه‌ی متقابل به رأس همنهشت‌اند.

اثبات: در شکل قبل دو زاویه‌ی $A\hat{O}B$ ، $C\hat{O}D$ هر دو مکمل $B\hat{O}C$ هستند، پس $A\hat{O}B = C\hat{O}D$

قضیه‌ی خطوط موازی و مورب

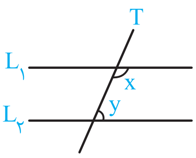
قضیه ۴: مطابق اشکال زیر، اگر خط مورب T، دو خط L_1 و L_2 را قطع کند به‌طوری که $\alpha = \beta$، آن‌گاه $L_1 \parallel L_2$





اصل توازی: از یک نقطه خارج یک خط، تنها یک خط می‌توان موازی آن رسم کرد.

قضیه ۵ (عکس قضیه ۴): مطابق چهار شکل فوق، اگر خط مورب T دو خط موازی L_1 و L_2 را قطع کند، آن‌گاه $\alpha = \beta$



نتایج:

۱) در شکل مقابل $L_1 \parallel L_2$ باشد، آن‌گاه $x + y = ۱۸۰^\circ$ و به‌عکس اگر $x + y = ۱۸۰^\circ$ آن‌گاه $L_1 \parallel L_2$

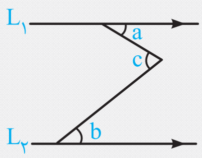
۲) اگر خط موربی یکی از دو خط متوازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

۳) اگر دو خط با خط سومی موازی باشند، با یکدیگر نیز موازی‌اند.

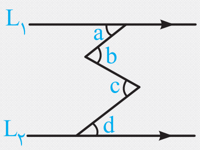
۴) اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

۵) اگر دو خط بر یک خط عمود باشند، آن‌گاه آن دو خط موازی هستند.

مثال ۵: در شکل‌های زیر آیا تساوی‌های داده شده درست است؟

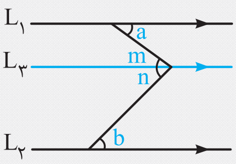
آ) 

$c = a + b$

ب) 

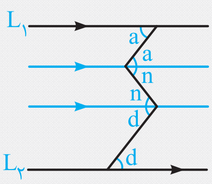
$a + c = b + d$

پاسخ: آ) هر دو تساوی داده شده درست است. خط L_3 را موازی L_1 و L_2 رسم می‌کنیم. بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:



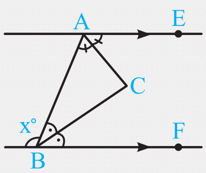
$$m = a \quad , \quad n = b \quad , \quad m + n = c \Rightarrow c = a + b$$

ب) با توجه به قضیه‌ی خطوط موازی و مورب اندازه‌ی زوایا مطابق شکل می‌شود و داریم:



$$\begin{cases} a + n = b \\ c = n + d \end{cases} \Rightarrow a + c + n = b + d + n \Rightarrow a + c = b + d$$

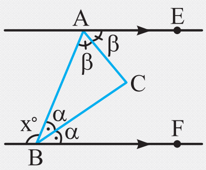
مثال ۶: در شکل مقابل $AE \parallel BF$ و AC و BC نیمساز هستند. اگر $۳C\hat{A}E = ۵C\hat{B}F$ باشد، آن‌گاه مقدار x کدام است؟



۱) ۱۲۰ ۲) ۱۱۲/۵

۳) ۱۰۵ ۴) ۱۳۵

پاسخ: دو زاویه‌ی $B\hat{A}E$ و $A\hat{B}F$ مکمل هستند، پس:

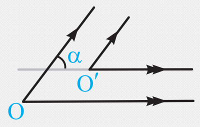


$$\left.\begin{array}{l} ۲\beta + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۹۰^\circ \\ \text{(فرض)}\ ۳\beta = ۵\alpha \end{array}\right\}$$

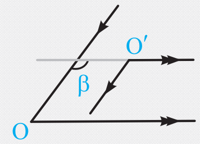
$$\Rightarrow \underbrace{۵\alpha}_{۳\beta} + ۵\beta = ۵ \times ۹۰^\circ \Rightarrow ۸\beta = ۴۵۰^\circ \Rightarrow \beta = \frac{۲۲۵}{۴} \quad , \quad x = ۲\beta = ۲ \times \frac{۲۲۵}{۴} = \frac{۲۲۵}{۲} = ۱۱۲/۵$$

پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۷: **ثابت کنید اگر اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی باشند، آن‌گاه دو زاویه هم‌اندازه یا مکمل هستند.**

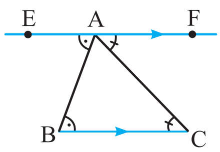


پاسخ : بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب در شکل مقابل هر دو زاویه‌ی $\widehat{O}$ و $\widehat{O'}$ اندازه‌شان برابر α است. پس $\widehat{O}=\widehat{O'}$

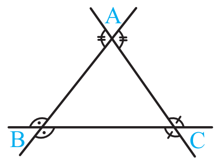


مطابق شکل مقابل، بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب $\widehat{O}=180^\circ-\widehat{\beta}$ و اندازه‌ی $\widehat{O'}$ برابر β است. در نتیجه $\widehat{O}=180^\circ-\widehat{O'}$، پس $\widehat{O}+\widehat{O'}=180^\circ$

قضیه ۶: **مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است.**

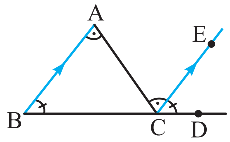


اثبات: از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم $B\widehat{A}E=\widehat{B}$ و $C\widehat{A}F=\widehat{C}$. از طرفی $B\widehat{A}E+B\widehat{A}C+C\widehat{A}F=180^\circ$، در نتیجه $\widehat{B}+\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ$



زاویه‌ی خارجی: زاویه‌ی حاصل از امتداد یک ضلع زاویه‌ی مثلث که با آن زاویه مجانب است، زاویه‌ی خارجی نامیده می‌شود. هر مثلث شش زاویه‌ی خارجی دارد که سه جفت زاویه‌ی متقابل به رأس می‌باشند.

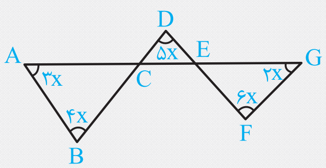
قضیه ۷: **اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های زوایای غیرمجاور داخلی آن.**



اثبات: از رأس C خط CE را موازی AB رسم می‌کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CE\ ,\ \text{مورب}\ AC \Rightarrow A\widehat{C}E=\widehat{A} \\ AB \parallel CE\ ,\ \text{مورب}\ BD \Rightarrow E\widehat{C}D=\widehat{B} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین دو رابطه}} A\widehat{C}D=\widehat{A}+\widehat{B}$$

مثال ۸: **با توجه به شکل، اندازه‌ی زاویه‌ی G چند درجه است؟**



۱) ۱۸ ۲) ۳۰

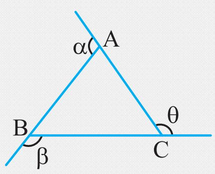
۳) ۳۶ ۴) ۱۵

پاسخ :

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC}\ \text{زاویه‌ی خارجی}: A\widehat{C}D=3x+4x=7x \\ \overset{\Delta}{DCE}\ \text{زاویه‌ی خارجی}: A\widehat{C}D=5x+D\widehat{E}C \end{array}\right\} \Rightarrow D\widehat{E}C=7x-5x=2x \Rightarrow G\widehat{E}F=2x$$

$\overset{\Delta}{GEF}: 2x+2x+6x=180^\circ \Rightarrow 10x=180^\circ \Rightarrow x=18^\circ\ ,\ \widehat{G}=2x=36^\circ \Rightarrow$ گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۹: **ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° است.**



پاسخ :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\widehat{B}+\widehat{C} \\ \beta=\widehat{A}+\widehat{C} \\ \theta=\widehat{A}+\widehat{B} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع سه رابطه}} \alpha+\beta+\theta=2\underbrace{(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C})}_{180^\circ}=360^\circ$$

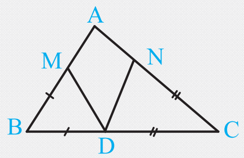
مثلث‌های خاص

۱) **مثلث قائم‌الزاویه:** مثلثی که یک زاویه‌ی آن قائمه باشد، مثلث قائم‌الزاویه نامیده می‌شود و دو زاویه‌ی دیگر آن متمم یکدیگر هستند.

۲) **مثلث متساوی‌الساقین:** مثلثی که دو ضلع آن برابر باشد، مثلث متساوی‌الساقین نامیده می‌شود. بنابر قرارداد این دو ضلع برابر را ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین می‌نامند. در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها مساویند. (این مطلب را بعداً به کمک همنهشتی مثلث‌ها اثبات می‌کنیم.)

۳) **مثلث متساوی‌الاضلاع:** مثلثی که سه ضلع آن اندازه‌های برابر دارند، متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود و اندازه‌های هر سه زاویه‌ی آن 60° است و به عکس، مثلثی که هر سه زاویه‌ی آن هم‌اندازه باشند، متساوی‌الاضلاع است.

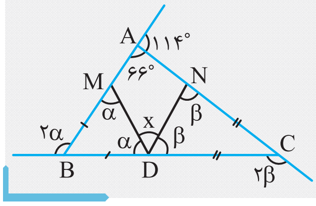
مثال ۱۰: در شکل مقابل $\hat{A}=۶۶^\circ$ و $BM=BD$ و $CN=CD$، زاویه‌ی $M\hat{D}N$ چند درجه است؟



۱) ۵۸ ۲) ۵۹

۳) ۵۷ ۴) ۶۰

پاسخ: با توجه به مثلث‌های متساوی‌الساقین و زاویه‌های خارجی نتیجه می‌شود که زاویه‌های خارجی مثلث ABC عبارت‌اند از: ۲α، ۲β و ۱۱۴، پس:



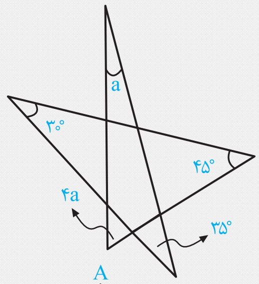
$$\begin{cases}۲\alpha+۲\beta+۱۱۴^\circ=۳۶۰^\circ\\ \alpha+\beta+x=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+۵۷^\circ=۱۸۰^\circ\\ \alpha+\beta+x=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow x=۵۷^\circ$$

پس گزینه‌ی (۳) صحیح است.

نکته: با روش فوق می‌توان ثابت کرد $M\hat{D}N=۹۰^\circ-\dfrac{\hat{A}}{۲}$ و این دستور را می‌توان برای مسائلی مانند مثال قبل به‌کار برد:

$$M\hat{D}N=۹۰^\circ-\frac{۶۶^\circ}{۲}=۹۰^\circ-۳۳^\circ=۵۷^\circ$$

مثال ۱۱: در شکل مقابل، مقدار a کدام است؟



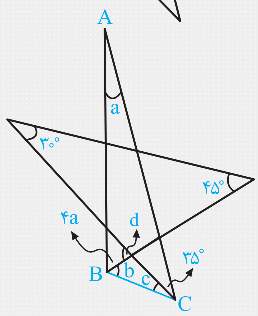
۱) ۱۵°

۲) ۱۲°

۳) ۱۳°

۴) ۱۴°

پاسخ: دو رأس پایینی شکل را به هم وصل می‌کنیم. داریم:



$$d=b+c=۳۰^\circ+۴۵^\circ\Rightarrow b+c=۷۵^\circ \quad \text{زاویه‌ی خارجی}$$

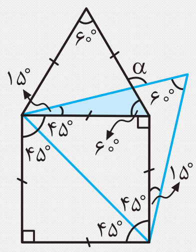
$$\overset{\Delta}{ABC}: a+۴a+\underbrace{b+c}_{۷۵}+۳۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۵a+۱۱۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۵a=۷۰^\circ\Rightarrow a=۱۴^\circ$$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۱۲: دو مثلث متساوی‌الاضلاع یکی روی ضلع مربع در خارج آن و یکی روی قطر مربع چنان می‌سازیم که دو ضلع این مثلث‌ها یکدیگر را در خارج مربع قطع کنند. زاویه‌ی تقاطع این دو ضلع چند درجه است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۹۰

پاسخ: با توجه به شکل داریم:



$$\alpha=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۱۵^\circ)=۱۸۰^\circ-۷۵^\circ=۱۰۵^\circ$$

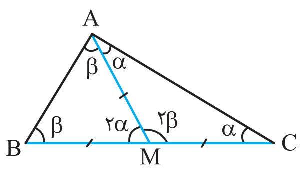
بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

رابطه‌ی میانه‌ی نظیر وتر با وتر مثلث قائم‌الزاویه

با فرض پذیرش این‌که در یک مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مقابل ساق‌ها هم‌اندازه هستند و به عکس (این قضیه را در مبحث همنهشتی مثلث‌ها ثابت می‌کنیم)، داریم:

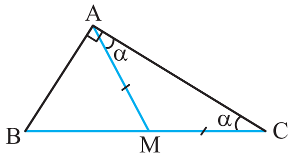
۱) اگر میانه‌ی نظیر یک ضلع مثلثی نصف همان ضلع باشد، مثلث قائم‌الزاویه است.

اثبات: بنابر فرض $AM=MB=MC$، پس زاویه‌ها مطابق شکل می‌شود و داریم:



$$A\hat{M}B+A\hat{M}C=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha+\beta=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۹۰^\circ$$

۲) در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی نظیر وتر نصف وتر است (عکس شماره‌ی ۱).



اثبات: مطابق شکل AM را چنان رسم می‌کنیم که زاویه‌ی $M\hat{A}C$ با $\hat{C}$ هم‌اندازه شود.

با فرض $\hat{C}=\alpha$، نتیجه می‌شود $B\hat{A}M=۹۰^\circ-\alpha$ و داریم:

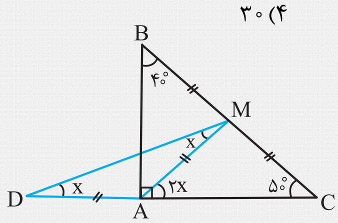
$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=۹۰^\circ-\hat{C}=۹۰^\circ-\alpha\\ B\hat{A}M=۹۰^\circ-\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}=B\hat{A}M\Rightarrow AM=BM$$

از طرفی $AM=MC$، پس $AM=MC=BM$ و در نتیجه $AM=\frac{BC}{۲}$

نتیجه: مثلثی قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر میانه‌ی نظیر یک ضلع آن نصف آن ضلع باشد.

مثال ۱۳: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\hat{A}=۹۰^\circ$، $\hat{B}=۴۰^\circ$ و ضلع AC را از سمت A به اندازه‌ی نصف وتر امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی D به‌دست آید. اگر M وسط وتر باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $M\hat{D}C$ چند درجه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰



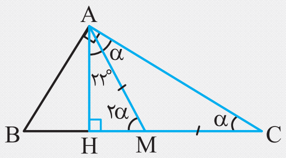
پاسخ: میانه‌ی نظیر وتر را رسم می‌کنیم که نصف وتر است، پس مثلث AMD متساوی‌الساقین است و با توجه به زاویه‌ی خارجی نتیجه می‌شود $M\hat{A}C=۲x$ و نهایتاً:

$$۲x=۵۰\Rightarrow x=۲۵$$

پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۱۴: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه‌ی زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی نظیر وتر ۲۲ درجه است. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۲۸



پاسخ: میانه‌ی نظیر وتر نصف وتر است پس مثلث AMC متساوی‌الساقین است. در نتیجه زوایا مطابق شکل می‌شود و داریم:

$$۲\alpha+۲۲=۹۰\Rightarrow \alpha=۳۴\Rightarrow \hat{C}=۳۴\ ,\ \hat{B}=۵۶$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث قائم‌الزاویه داده شده ۳۴° است و گزینه‌ی (۱) صحیح است.

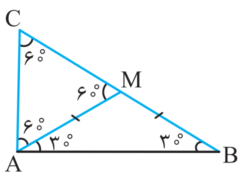
نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی نظیر وتر برابر است با قدرمطلق تفاضل دو زاویه‌ی دیگر. مثلاً در شکل مثال قبل $H\hat{A}M=\hat{B}-\hat{C}$ است.

با دانستن این نکته پرسش به شرح زیر حل می‌شود:

$$\begin{cases}\hat{B}-\hat{C}=۲۲^\circ\\ \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}(\hat{B}+\hat{C})-(\hat{B}-\hat{C})=۹۰^\circ-۲۲^\circ\Rightarrow ۲\hat{C}=۶۸^\circ\Rightarrow \hat{C}=۳۴^\circ$$

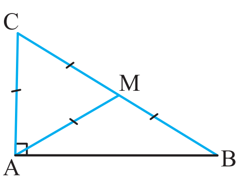
رابطه‌ی ضلع کوچک‌تر و وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به زوایای ۳۰°، ۶۰° و ۹۰°

۱) ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی یک زاویه ۳۰° باشد، ضلع روبه‌رو به آن نصف وتر است.



اثبات: از رأس A، پاره‌خط AM را چنان رسم می‌کنیم که $M\hat{A}B=۳۰^\circ$ شود. بنابر قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی $A\hat{M}C=۶۰^\circ$، مثلث AMC متساوی‌الاضلاع است در نتیجه $AC=AM=CM=MB$ و $AC=\frac{BC}{۲}$

۲) ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یک ضلع نصف وتر باشد، زاویه‌ی روبه‌رو به آن ضلع ۳۰° است. (عکس شماره‌ی ۱).

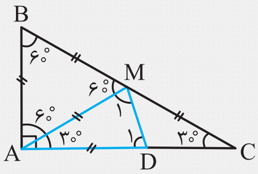


اثبات: بنابر فرض $AC=\frac{BC}{۲}$، اگر AM میانه‌ی نظیر وتر باشد، داریم $AM=\frac{BC}{۲}$.

در نتیجه $AM=AC=CM$، یعنی مثلث AMC متساوی‌الاضلاع است پس $\hat{C}=۶۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{B}=۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ$

مثال ۱۵: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC وتر BC دو برابر ضلع AB است. نقطه‌ی D روی ضلع AC چنان قرار دارد که $AD = AB$. اگر M وسط وتر باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $D\widehat{M}C$ چند درجه است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۹۰

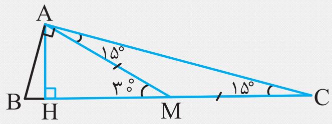


پاسخ: چون $AB = \frac{BC}{۲}$، پس $\widehat{C} = ۳۰^\circ$ و $\widehat{B} = ۶۰^\circ$. از طرفی میانه‌ی نظیر وتر نصف وتر است، پس مثلث ABM متساوی‌الاضلاع می‌شود و داریم:

$$\overset{\Delta}{AMD}: \widehat{M}_۱ + \widehat{D}_۱ + ۳۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{M}_۱ = \widehat{D}_۱ = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{DMC}\text{ زاویه‌ی خارجی}: \widehat{D}_۱ \Rightarrow \widehat{D}_۱ = D\widehat{M}C + \widehat{C} \Rightarrow D\widehat{M}C = ۷۵^\circ - ۳۰^\circ = ۴۵^\circ \Rightarrow$$ گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۱۶: ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی یک زاویه ۱۵° یا ۷۵° باشد، آن‌گاه ارتفاع نظیر وتر $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است.



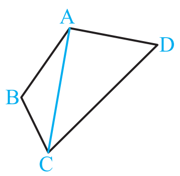
پاسخ: می‌خواهیم ثابت کنیم $AH = \frac{BC}{۴}$. میانه‌ی نظیر وتر نصف وتر است. پس مثلث AMC متساوی‌الساقین است که نتیجه می‌دهد $M\widehat{A}C = ۱۵^\circ$ و $A\widehat{M}H = ۳۰^\circ$

حال می‌گوییم ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AMH نصف وتر است $AH = \frac{AM}{۲}$

از طرفی $AM = \frac{BC}{۲}$، بنابراین $AH = \frac{\frac{BC}{۲}}{۲} = \frac{BC}{۴}$

تمرین: ثابت کنید که اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع نظیر وتر یک چهارم وتر باشد، اندازه‌ی یک زاویه‌ی مثلث ۱۵° یا ۷۵° است. (عکس مثال قبل)

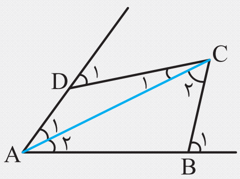
مجموع اندازه‌ی زوایای داخلی یک چهارضلعی محدب



اگر امتداد اضلاع یک چهارضلعی از درون آن نگذرند چهارضلعی را محدب می‌گویند. مجموع زوایای داخلی آن همواره برابر ۳۶۰° است زیرا:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = (\text{مجموع اندازه‌های زوایای دو مثلث ABC و ADC}) = ۱۸۰^\circ + ۱۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$

مثال ۱۷: ثابت کنید در یک چهارضلعی محدب مجموع اندازه‌های زاویه‌های روبه‌رو به هم برابر است با مجموع اندازه‌های زوایای خارجی دو زاویه‌ی دیگر.



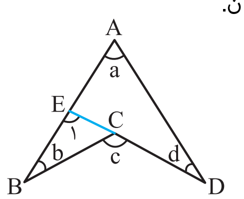
پاسخ: می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B}_۱ + \widehat{D}_۱$، به همین جهت قطر AC را رسم می‌کنیم. به کمک زاویه‌ی خارجی داریم:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{D}_۱ &= \widehat{A}_۱ + \widehat{C}_۱ \\ \widehat{B}_۱ &= \widehat{A}_۲ + \widehat{C}_۲ \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \widehat{B}_۱ + \widehat{D}_۱ = (\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲) + (\widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲) = \widehat{A} + \widehat{C}$$

رابطه‌ی اندازه‌ی زوایای یک چهارضلعی مقعر

یک چندضلعی را مقعر گویند هرگاه لااقل امتداد یک ضلع آن از داخل آن بگذرد.

در هر چهارضلعی مقعر اندازه‌ی زاویه‌ای که بیرون چهارضلعی قرار می‌گیرد، برابر است با مجموع اندازه‌ی زوایای داخلی آن.

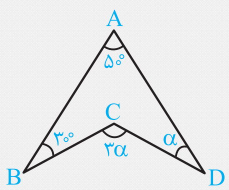


اثبات: CD را امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در E قطع کند.

بنابر زاویه‌ی خارجی داریم:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{E}_۱ &= \widehat{A} + \widehat{D} = a + d \\ B\widehat{C}D &= \widehat{B} + \widehat{E}_۱ = b + \widehat{E}_۱ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{B\widehat{C}D}_{c} = b + a + d \Rightarrow c = a + b + d$$

مثال ۱۸: در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی زاویه‌ی $A\widehat{D}C$ چند درجه است؟

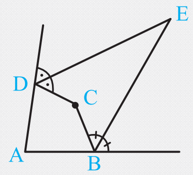


۱) ۴۰ ۲) ۳۵
۳) ۳۰ ۴) ۲۵

پاسخ: $۳\alpha = ۳۰^\circ + ۵۰^\circ + \alpha \Rightarrow ۲\alpha = ۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ \Rightarrow A\widehat{D}C = ۴۰^\circ$

پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

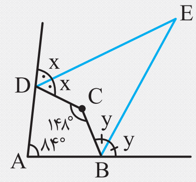
مثال ۱۹: مطابق شکل در چهارضلعی ABCD نیمسازهای زوایای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ یکدیگر را در نقطه‌ی E قطع کرده‌اند. اگر $\hat{A}=۸۴^\circ$ و $\hat{C}=۱۴۸^\circ$ آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی E کدام است؟



۱) ۳۲   ۲) ۳۶

۳) ۳۰   ۴) ۲۷

پاسخ:



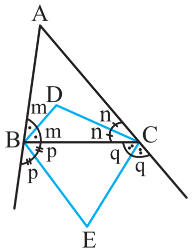
$$\begin{array}{l} \text{چهارضلعی محدب } ABCD \Rightarrow \\ \text{چهارضلعی مقعر } BCDE \Rightarrow \end{array} \begin{cases} ۲x+۲y=۸۴^\circ+۱۴۸^\circ \\ x+y+\hat{E}=۱۴۸^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۱۶^\circ \\ \hat{E}=۱۴۸^\circ-(x+y) \end{cases} \Rightarrow \hat{E}=۱۴۸^\circ-۱۱۶^\circ=۳۲^\circ$$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

زاویه‌ی حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای یک مثلث

زاویه‌ی بین دو نیمساز داخلی: ثابت کنید: زاویه‌ی بین هر دو نیمساز داخلی یک مثلث برابر است با: (نصف اندازه‌ی زاویه‌ی سوم) + ۹۰°

اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم $B\hat{D}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$، داریم:



$$B\hat{D}C=m+n+\hat{A}=\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}+\hat{A}=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}+\hat{A}$$

از طرفی $\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{A}$ پس:

$$B\hat{D}C=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}+\hat{A}=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$$

زاویه‌ی بین دو نیمساز خارجی: ثابت کنید: زاویه‌ی بین هر دو نیمساز خارجی یک مثلث برابر است با: (نصف اندازه‌ی زاویه‌ی سوم) − ۹۰°

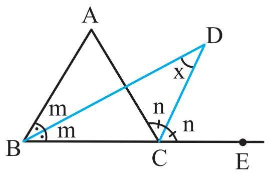
اثبات: از شکل فوق استفاده می‌کنیم. ثابت می‌کنیم $\hat{E}=۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}$ به همین جهت می‌گوییم در چهارضلعی BDCE، دو زاویه‌ی $E\hat{B}D$ و $D\hat{C}E$ قائمه هستند و داریم:

$$\hat{E}+۹۰^\circ+B\hat{D}C+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{E}=۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲})=۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}$$

زاویه‌ی بین نیمساز داخلی یک زاویه با نیمساز خارجی زاویه‌ی دیگر

ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمساز داخلی یک زاویه و نیمساز خارجی زاویه‌ی دیگر برابر است با نصف اندازه‌ی زاویه‌ی سوم مثلث .

اثبات:



$$\text{زاویه‌ی خارجی } \overset{\Delta}{BDC}:\ D\hat{C}E=\hat{D}+D\hat{B}C \Rightarrow n=x+m \Rightarrow x=n-m$$

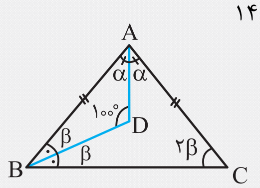
$$\text{زاویه‌ی خارجی } \overset{\Delta}{ABC}:\ A\hat{C}E=\hat{A}+\hat{B} \Rightarrow ۲n=\hat{A}+۲m \Rightarrow \hat{A}=۲(n-m)$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود که: $\hat{A}=۲x$ و $x=\frac{\hat{A}}{۲}$

مثال ۲۰: در مثلث متساوی‌الساقین ABC، (AB = AC)، اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو نیمساز زوایای A و B برابر °۱۰۰ است. اندازه‌ی زاویه‌ی A کدام است؟

۱) ۱۲۰   ۲) ۱۰۰   ۳) ۱۳۵   ۴) ۱۴۰

پاسخ: روش اول:



$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+۱۰۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۸۰^\circ \\ ۲\alpha+۲\beta+۲\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۲\beta=۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \beta=۱۰^\circ \Rightarrow \alpha=۷۰^\circ$$

در نتیجه $\hat{A}=۲\alpha=۱۴۰^\circ$ و گزینه‌ی (۴) صحیح است.

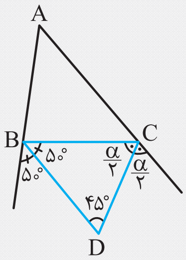
روش دوم: با استفاده از دستور $A\hat{D}B=۹۰^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}$ داریم:

$$۹۰^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}=۱۰۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{۲}=۱۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۲۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۲۰^\circ$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۲۰^\circ+۲۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۱۴۰^\circ$$

مثال ۲۱: در مثلث ABC اندازه‌ی زاویه‌های خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ به ترتیب ۱۰۰ و α درجه‌اند و اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمسازهای این دو زاویه‌ی خارجی ۴۵ درجه است. α چه‌قدر است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۷۰



پاسخ : **روش اول:** مفروضات پرسش روی شکل مشخص است.

$$\overset{\Delta}{BDC}: \frac{\alpha}{۲} + ۵۰^\circ + ۴۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{۲} = ۸۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۷۰^\circ$$

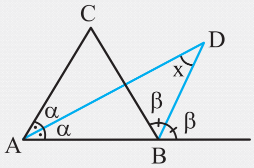
روش دوم:
$$B\hat{D}C = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow ۴۵^\circ = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

$\overset{\Delta}{ABC}$ مجموع زوایای خارجی $= ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۰۰^\circ + \alpha + ۹۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۷۰^\circ$

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۲۲: در مثلثی زوایای A، B و C به نسبت ۳، ۴ و ۵ تقسیم شده‌اند، زاویه‌ای که نیمساز داخلی A با نیمساز خارجی B می‌سازد، چند درجه است؟

۱) ۳۷/۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲/۵ ۴) ۴۰



پاسخ : **روش اول:** بنابر فرض اندازه‌ی زوایا $A = ۳x$ ، $B = ۴x$ و $C = ۵x$ است و داریم:

$$A + B + C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳x + ۴x + ۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

پس اندازه‌ی زوایا $A = ۴۵^\circ$ ، $B = ۶۰^\circ$ و $C = ۷۵^\circ$ می‌باشد و مطابق شکل بنابر زاویه‌ی خارجی داریم:

$$\begin{cases} ۲\beta = ۲\alpha + \hat{C} \\ \beta = \alpha + x \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = ۲(\beta - \alpha) = ۲x \Rightarrow x = \frac{۷۵^\circ}{۲} = ۳۷/۵^\circ$$

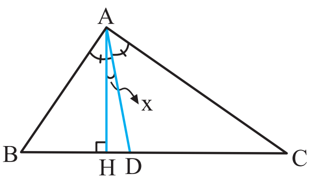
روش دوم: بعد از محاسبه‌ی اندازه‌ی زوایا مطابق روش اول برای محاسبه‌ی x می‌توانیم از دستور $x = \frac{\hat{C}}{۲} = \frac{۷۵^\circ}{۲} = ۳۷/۵^\circ$ استفاده کنیم.

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز رأس یک مثلث

ثابت کنید زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز مرسوم از یک رأس مثلث برابر نصف قدرمطلق تفاضل اندازه‌ی دو زاویه‌ی دیگر مثلث است.

اثبات:

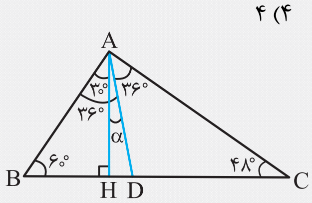


$$B\hat{A}D = D\hat{A}C \Rightarrow \underbrace{B\hat{A}H}_{۹۰^\circ - B} + x = \underbrace{C\hat{A}H}_{۹۰^\circ - C} - x$$

$$\Rightarrow ۹۰^\circ - \hat{B} + x = ۹۰^\circ - \hat{C} - x \Rightarrow ۲x = \hat{B} - \hat{C} \Rightarrow x = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲}$$

مثال ۲۳: اگر اندازه‌ی زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۴، ۵ و ۶ باشند، اندازه‌ی زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز مرسوم از بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۴



پاسخ : **روش اول:** زوایای مثلث $۴x$ ، $۵x$ و $۶x$ است.

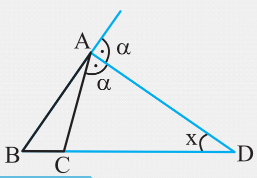
$$۴x + ۵x + ۶x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۲^\circ$$

مطابق شکل اندازه‌ی زوایای مثلث $\hat{A} = ۷۲^\circ$ ، $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۴۸^\circ$ می‌شود. پس زاویه‌ی مطلوب برابر $\alpha = ۳۶^\circ - ۳۰^\circ = ۶^\circ$ است با

روش دوم: بعد از محاسبه‌ی زوایای مثلث می‌توانیم از دستور $\alpha = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲} = \frac{۶۰^\circ - ۴۸^\circ}{۲} = ۶^\circ$ استفاده کنیم.

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۲۴: ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمساز خارجی یک زاویه‌ی مثلث و ضلع مقابل به آن زاویه برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه‌ی دو زاویه‌ی دیگر.



پاسخ : به کمک زاویه‌ی خارجی در مثلث‌های ABD و ACD داریم:

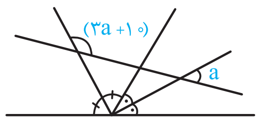
$$\left.\begin{matrix} \alpha = \hat{B} + x \\ \hat{C} = \alpha + x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} + x + x \Rightarrow ۲x = \hat{C} - \hat{B} \Rightarrow x = \frac{\hat{C} - \hat{B}}{۲}$$

۱ پرسش‌های جلسه‌ی اول

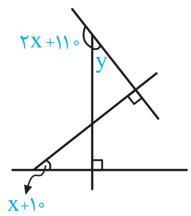
۱ چهار برابر اندازه‌ی زاویه‌ای ۶ درجه بیش‌تر از سه برابر اندازه‌ی مکمل آن است. اندازه‌ی این زاویه را بیابید.

۲ مجموع اندازه‌های یک زاویه‌ی حاده و یک زاویه‌ی منفرجه ۱۴۰ درجه است. مجموع اندازه‌های دو برابر مکمل زاویه‌ی منفرجه و سه برابر متمم زاویه‌ی حاده ۳۴۰ درجه است. اندازه‌های این دو زاویه را به‌دست آورید.

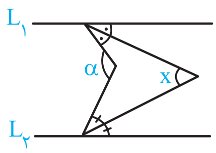
۳ با توجه به شکل مقابل مقدار a را به‌دست آورید.



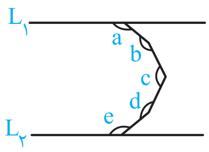
۴ در شکل مقابل مقادیر x و y را حساب کنید.



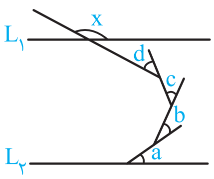
۵ در شکل مقابل $L_۱ \parallel L_۲$ است، ثابت کنید $x = \frac{\alpha}{۲}$



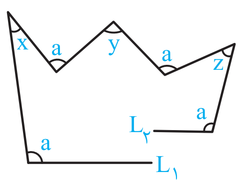
۶ در شکل مقابل $L_۱ \parallel L_۲$، ثابت کنید $a + b + c + d + e = ۷۲۰^\circ$



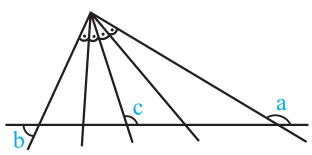
۷ در شکل مقابل $L_۱ \parallel L_۲$، ثابت کنید $x = a + b + c + d$



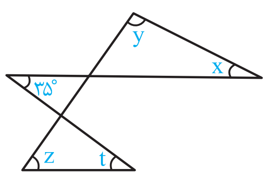
۸ در شکل مقابل $L_۱ \parallel L_۲$ است. مقدار $x + y + z$ را حساب کنید.

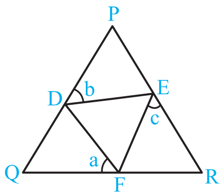


۹ در شکل مقابل ثابت کنید $a + b = ۲c$



۱۰ در شکل مقابل، مقدار $x + y + z + t$ را حساب کنید.





۱۱ در شکل مقابل مثلث DEF متساوی‌الاضلاع است و $PQ = PR$ ثابت کنید $a = \frac{b+c}{۲}$

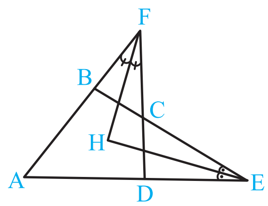
۱۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(AB = AC)$، طول نیمساز زاویه‌ی B برابر طول قاعده‌ی BC است. اندازه‌ی زاویه‌ی A را محاسبه کنید.

۱۳ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، AH ارتفاع و BE نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ است. محل تلاقی آن‌ها را F می‌نامیم. ثابت کنید $AE = AF$

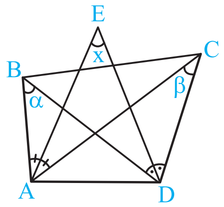
☆ ۱۴ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ثابت کنید نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ و نیمساز زاویه‌ی CAH برهم عمود هستند.

۱۵ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه نیمساز زاویه‌ی قائمه نیمساز زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی مرسوم از همان رأس است.

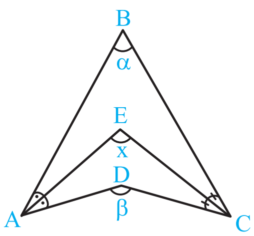
☆ ۱۶ در مثلث ABC از نقطه‌ی D محل تلاقی نیمساز زاویه‌ی B و نیمساز خارجی زاویه‌ی C خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا اضلاع AC و AB را به‌ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید $EF = |BF - CE|$



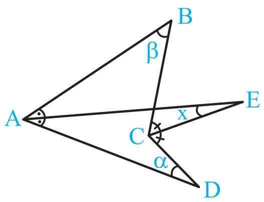
☆ ۱۷ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل داریم $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$
ثابت کنید نیمسازهای زوایای E و F برهم عمود هستند.



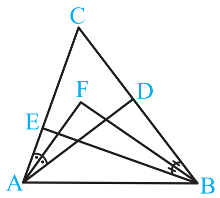
۱۸ در چهارضلعی ABCD مطابق شکل ثابت کنید $x = \frac{\alpha+\beta}{۲}$



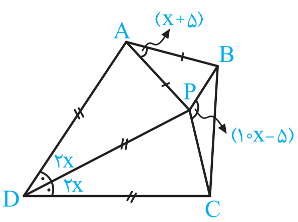
۱۹ در چهارضلعی ABCD مطابق شکل ثابت کنید $x = \frac{\alpha+\beta}{۲}$



۲۰ در شکل مقابل ثابت کنید $x = \frac{\beta-\alpha}{۲}$



☆ ۲۱ در مثلث ABC مطابق شکل AF و BF نیمساز هستند. ثابت کنید مجموع اندازه‌های دو زاویه‌ی AEB و ADB دو برابر اندازه‌ی زاویه‌ی AFB است.



☆ ۲۲ در شکل مقابل نقطه‌ی P درون چهارضلعی ABCD واقع است، به‌طوری که $DA = DP = DC$ و $AP = AB$. اگر $A\hat{D}P = C\hat{D}P = ۲x$ ، $B\hat{A}P = x + ۵$ و $B\hat{P}C = ۱۰x - ۵$ ، آن‌گاه مقدار x را به‌دست آورید.

۱ پاسخ پرسش‌های جلسه‌ی اول

۱

$$۴\alpha = ۳(۱۸۰^\circ - \alpha) + ۶^\circ \Rightarrow ۷\alpha = ۵۴۶^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۵۴۶^\circ}{۷} = ۷۸^\circ$$

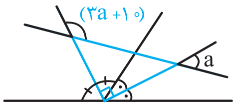
۲

$$\begin{cases} x + y = ۱۴۰^\circ \\ ۲(۱۸۰^\circ - x) + ۳(۹۰^\circ - y) = ۳۴۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۴۰^\circ \\ ۲x + ۳y = ۲۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x = ۱۳۰^\circ \;,\; y = ۱۰^\circ$$

۳

نیمسازهای دو زاویه‌ی مجانب برهم عمود هستند و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل داریم:

$$a + ۱۸۰^\circ - (۳a + ۱۰^\circ) = ۹۰^\circ \Rightarrow ۲a = ۸۰^\circ \Rightarrow a = ۴۰^\circ$$

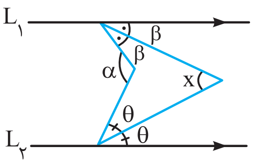


۴

با توجه به شکل پرسش دو زاویه به اندازه‌های y و $x + ۱۰$ هر دو متمم دو زاویه‌ی متقابل به رأس هستند، پس برابرند و داریم:

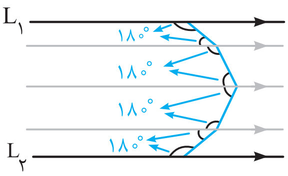
$$\begin{cases} y = x + ۱۰^\circ \\ y + ۲x + ۱۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow ۳x + ۱۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۲۰^\circ \;,\; y = ۳۰^\circ$$

۵



$$\begin{cases} x = \beta + \theta \\ \alpha = ۲\beta + ۲\theta = ۲(\beta + \theta) \end{cases} \Rightarrow \alpha = ۲x \Rightarrow x = \frac{\alpha}{۲}$$

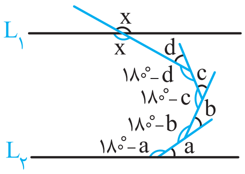
۶



با توجه به شکل مجموع تمام زوایای نشان داده شده همـان مجمـوع $a + b + c + d + e$ در شـکل پرسش است پس:

$$a + b + c + d + e = ۱۸۰^\circ + ۱۸۰^\circ + ۱۸۰^\circ + ۱۸۰^\circ = ۷۲۰^\circ$$

۷

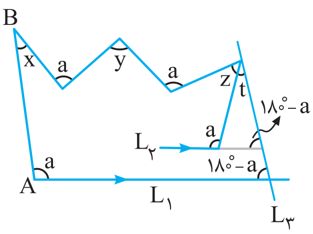


با توجه به پرسش قبل داریم:

$$x + ۱۸۰^\circ - d + ۱۸۰^\circ - c + ۱۸۰^\circ - b + ۱۸۰^\circ - a = ۷۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow x + ۷۲۰^\circ - a - b - c - d = ۷۲۰^\circ \Rightarrow x = a + b + c + d$$

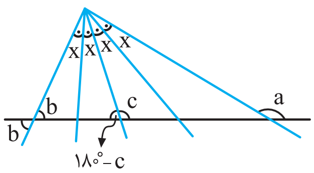
۸



خط $L_۳$ را موازی AB رسم می‌کنیم داریم:

$$\begin{cases} a = t + ۱۸۰^\circ - a \\ x + y + z + t = a + a \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} x + y + z + t + a = a + t + ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + y + z = ۱۸۰^\circ$$

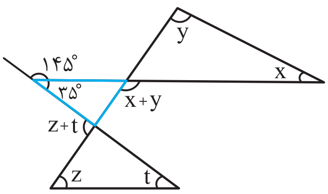
۹



مطابق شکل می‌توان نوشت:

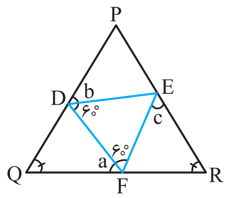
$$\begin{cases} a = ۲x + c \\ b + ۲x + ۱۸۰^\circ - c = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲x + c \\ b + ۲x = c \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} a + b + ۲x = ۲x + ۲c \Rightarrow a + b = ۲c$$

۱۰



$$x + y + z + t + ۱۴۵^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x + y + z + t = ۲۱۵^\circ$$

۱۱

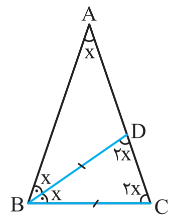


بنابر زاویه‌ی خارجی داریم:

$$\begin{cases} b+۶۰^\circ=\hat{Q}+a \\ a+۶۰^\circ=c+\hat{R} \end{cases} \Rightarrow a+۶۰^\circ+\hat{Q}+a=b+۶۰^\circ+c+\hat{R}$$

داریم $PQ=PR$، پس $\hat{Q}=\hat{R}$، در نتیجه: $۲a+۶۰^\circ=b+۶۰^\circ+c \Rightarrow ۲a=b+c$

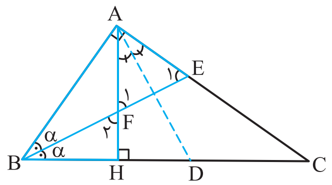
۱۲



با فرض $\hat{B}=۲x$، داریم $\hat{C}=۲x$ و $B\hat{D}C=۲x$. لذا بنابر زاویه‌ی خارجی، A برابر x می‌شود.

$$۲x+۲x+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۳۶^\circ \Rightarrow \hat{A}=۳۶^\circ$$

۱۳

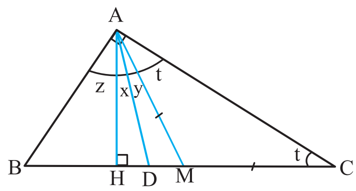


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABE}: \hat{E}_۱=۹۰^\circ-\alpha \\ \overset{\Delta}{BFH}: \hat{F}_۱=\hat{F}_۲=۹۰^\circ-\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{F}_۱ \Rightarrow AE=AF$$

۱۴

شکل این پرسش همان شکل پرسش قبل است. در مثلث متساوی‌الساقین AEF نیمساز زاویه‌ی رأس مثلث ارتفاع هم می‌باشد. پس $AD \perp BE$

۱۵

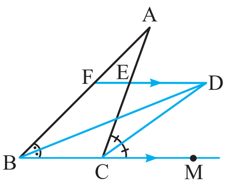


میانه‌ی نظیر وتر نصف وتر است. پس مثلث AMC متساوی‌الساقین است. پس $\hat{C}=t$ در نتیجه $\hat{B}=۹۰^\circ-t$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH نتیجه می‌شود که $z=۹۰^\circ-\hat{B}=۹۰^\circ-(۹۰^\circ-t)=t$ و چون AD نیمساز زاویه‌ی قائمه است لذا:

$$z+x=y+t=۴۵^\circ \xrightarrow{z=t} t+x=y+t \Rightarrow x=y$$

و این یعنی AD نیمساز زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی نظیر وتر هم است.

۱۶



$DF \parallel BC$ و مورب $BD \Rightarrow F\hat{D}B=D\hat{B}C=F\hat{B}D$

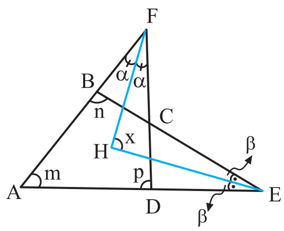
بنابراین مثلث BFD متساوی‌الساقین است و در نتیجه $BF=DF$ می‌شود.

$DF \parallel BC$ و مورب $CD \Rightarrow E\hat{D}C=D\hat{C}M=E\hat{C}D$

پس مثلث CED متساوی‌الساقین است و در نتیجه $CE=DE$ است و نهایتاً:

$$EF=DF-DE=BF-CE$$

۱۷



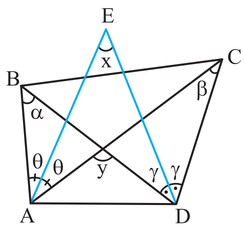
بنابر فرض پرسش $n+p=۱۸۰^\circ$:

در چهارضلعی $EAFH \Rightarrow x=m+\alpha+\beta$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AFD}: ۲\alpha+m+p=۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{ABE}: ۲\beta+m+n=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} ۲\alpha+۲\beta+۲m+\underbrace{n+p}_{۱۸۰^\circ}=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+m=۹۰^\circ \Rightarrow x=۹۰^\circ$$

۱۸



بنابر زاویه‌ی خارجی داریم:

$$y=\alpha+۲\theta=\beta+۲\gamma \Rightarrow \theta-\gamma=\frac{\beta-\alpha}{۲}$$

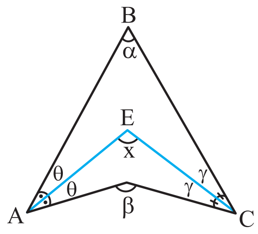
هم‌چنین می‌توان نوشت:

$$y=x+\theta+\gamma \Rightarrow \alpha+۲\theta=x+\theta+\gamma \Rightarrow \theta-\gamma=x-\alpha$$

از مقایسه‌ی دو تساوی اخیر داریم:

$$\frac{\beta-\alpha}{۲}=x-\alpha \Rightarrow x=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{۲}=\frac{۲\alpha+\beta-\alpha}{۲}=\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

۱۹

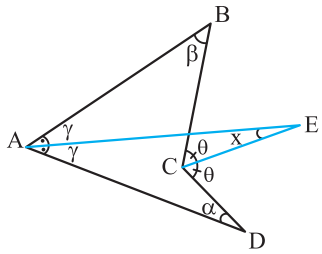


$$\begin{cases}\beta = x+\theta+\gamma\\ \beta=\alpha+2\theta+2\gamma\end{cases}$$

از معادله‌ی اول داریم $\theta+\gamma=\beta-x$، آن را در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$\beta=\alpha+2(\beta-x)\Rightarrow\beta=\alpha+2\beta-2x\Rightarrow 2x=\alpha+\beta\Rightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

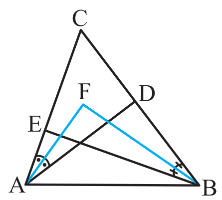
۲۰



$$\begin{cases}\theta=x+\gamma+\alpha\\ 2\theta=\alpha+\beta+2\gamma\end{cases}\Rightarrow 2(x+\gamma+\alpha)=\alpha+\beta+2\gamma$$

$$\Rightarrow 2x+2\alpha=\alpha+\beta\Rightarrow 2x=\beta-\alpha\Rightarrow x=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

۲۱



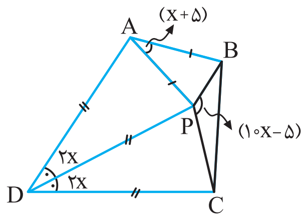
در چهارضلعی ACBF داریم:

$$A\hat{F}B=\hat{C}+C\hat{A}F+C\hat{B}F\Rightarrow 2A\hat{F}B=2\hat{C}+C\hat{A}D+C\hat{B}E$$

$$\Rightarrow 2A\hat{F}B=\underbrace{\hat{C}+C\hat{B}E}_{\text{زاویه‌ی خارجی } A\hat{E}B}+\underbrace{\hat{C}+C\hat{A}D}_{A\hat{D}B}\Rightarrow 2A\hat{F}B=A\hat{E}B+A\hat{D}B$$

۲۲

در مثلث‌های متساوی‌الساقین PDA ،PAB و PDC داریم:



$$A\hat{P}B=\frac{180^\circ-(x+5^\circ)}{2}=\frac{175^\circ-x}{2}$$

$$A\hat{P}D=\frac{180^\circ-2x}{2}=90^\circ-x$$

$$D\hat{P}C=\frac{180^\circ-2x}{2}=90^\circ-x$$

$$A\hat{P}B+A\hat{P}D+D\hat{P}C+C\hat{P}B=360^\circ\Rightarrow\frac{175^\circ-x}{2}+90^\circ-x+90^\circ-x+10x-5^\circ=360^\circ$$

$$\Rightarrow 175^\circ-x+16x+360^\circ-10^\circ=720^\circ\Rightarrow 15x+525^\circ=720^\circ\Rightarrow 15x=195^\circ\Rightarrow x=\frac{195^\circ}{15}=13^\circ$$

۱ تست‌های جلسه اول

۱. چند زاویه‌ی حاده با اندازه‌ی صحیح مثبت وجود دارد که نسبت متمم آن به مکمل آن از $\frac{1}{10}$ کم‌تر است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۲. کدام گزینه درست است؟

۱) استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی براساس اصول است.

۲) اگر اضلاع دو زاویه دوبه‌دو برهم عمود باشند، اندازه‌ی دو زاویه برابر است.

۳) اگر نیمساز خارجی یک زاویه‌ی مثلثی موازی ضلع مقابل آن زاویه باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

۴) اگر اضلاع دو زاویه موازی باشند، دو زاویه هم‌اندازه هستند.

۳. کدام گزینه نادرست است؟

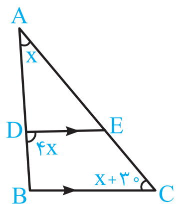
۱) دو زاویه‌ی مجانب مکمل یکدیگر هستند.

۲) نیمسازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس در یک امتداد هستند.

۳) در دو مثلث دو زاویه‌ی مکمل وجود ندارد.

۴) دو زاویه‌ی مجاور همواره متمم یکدیگر هستند.

۴. با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{B}$ کدام است؟



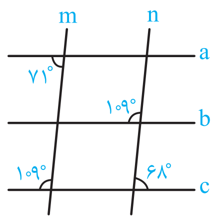
۱) 110°

۲) 130°

۳) 100°

۴) 120°

۵. در شکل مقابل با توجه به اندازه‌ی زوایا، کدام جفت خط‌ها موازی هستند؟



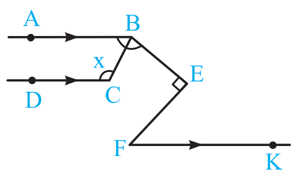
۱) a و b

۲) b و c

۳) a و c

۴) m و n

۶. در شکل روبه‌رو $AB \parallel CD \parallel FK$ ، $\hat{F} = 50^\circ$ ، $\hat{E} = 90^\circ$ و BC نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ است. مقدار x کدام است؟



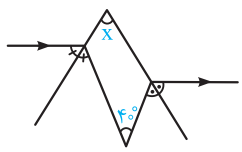
۱) 100°

۲) 110°

۳) 120°

۴) 130°

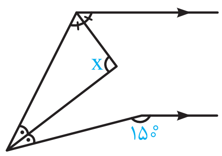
۷. با توجه به شکل مقابل مقدار x کدام است؟



۱) 70° ۲) 65°

۳) 60° ۴) 50°

۸. در شکل روبه‌رو مقدار x کدام است؟



۱) 100° ۲) 105°

۳) 90° ۴) 110°

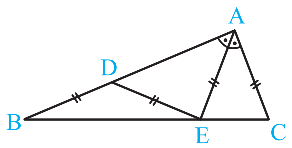
۹. دو زاویه‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین به اندازه‌های ۷۰ و x درجه است. مجموع مقادیر ممکن برای x کدام است؟

۱) 95° ۲) 125° ۳) 140° ۴) 165°

۱۰. زوایای یک مثلث به نسبت ۲، ۳ و ۴ می‌باشند. اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمساز بزرگ‌ترین زاویه و ارتفاع نظیر کوچک‌ترین ضلع کدام است؟

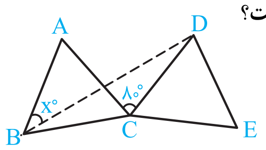
۱) ۳۵ ‏ ۲) ۵۰ ‏ ۳) ۴۵ ‏ ۴) ۶۰

۱۱. در شکل مقابل $BD = DE = AE = AC$ و AE نیمساز زاویه‌ی A است. اندازه‌ی زاویه‌ی B کدام است؟



۱) ۱۰° ‏ ۲) ۲۰° ‏ ۳) ۱۵° ‏ ۴) $۲۲/۵^\circ$

۱۲. در شکل مقابل دو مثلث ABC و CDE متساوی‌الاضلاع هستند و $BC = CE$ و $A\hat{C}D = ۸۰^\circ$، مقدار x کدام است؟

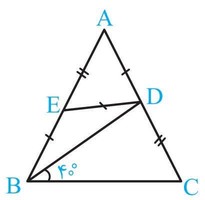


۱) ۲۵° ‏ ۲) ۳۰° ‏ ۳) ۳۵° ‏ ۴) ۴۰°

۱۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(AB = AC)$، نقطه‌ی D روی قاعده‌ی BC چنان قرار دارد که $BD = AB$، اگر $D\hat{A}C = ۱۸^\circ$ آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی رأس مثلث ABC کدام است؟

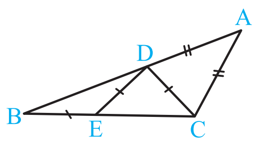
۱) ۸۰ ‏ ۲) ۸۴ ‏ ۳) ۷۲ ‏ ۴) ۷۸

۱۴. در شکل روبه‌رو $AD = DE = BE$ و $AE = CD$، اگر $C\hat{B}D = ۴۰^\circ$ آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی EDB چند درجه است؟



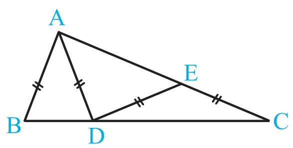
۱) ۳۵ ‏ ۲) ۲۰ ‏ ۳) ۲۵ ‏ ۴) ۳۰

۱۵. در شکل مقابل $AD = AC$ و $BE = DE = CD$ است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی ACB برابر ۱۰۰° باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی B کدام است؟



۱) ۲۵° ‏ ۲) ۱۰° ‏ ۳) ۱۵° ‏ ۴) ۲۰°

۱۶. در شکل مقابل $AB = AD = DE = CE$، اگر $B\hat{A}C = ۹۶^\circ$، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی EDC چند درجه است؟



۱) ۲۱ ‏ ۲) ۲۴ ‏ ۳) ۱۸ ‏ ۴) ۱۵

۱۷. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۷۶^\circ$. نقطه‌ی N روی ضلع BC چنان است که $AB = BN$ و نقطه‌ی M روی امتداد BC در سمت C چنان است که $AC = CM$. اندازه‌ی زاویه‌ی $M\hat{A}N$ کدام است؟

۱) ۵۲° ‏ ۲) ۳۸° ‏ ۳) ۲۷° ‏ ۴) ۸۸°

۱۸. در مثلث ABC طول نیمساز زاویه‌ی A با ضلع AB برابر است، $(AB = AD)$، اگر اندازه‌ی زاویه‌ی C برابر ۲۷ درجه باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی A چند درجه است؟

۱) ۸۴ ‏ ۲) ۸۰ ‏ ۳) ۸۱ ‏ ۴) ۷۶

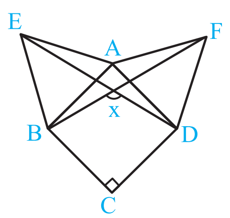
۱۹. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، که قائم‌الزاویه نیست اندازه‌ی زاویه‌ی A دو برابر اندازه‌ی زاویه‌ی B است. اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمسازهای زوایای A و B کدام است؟

۱) ۱۲۶ ‏ ۲) ۱۴۴ ‏ ۳) ۱۰۸ ‏ ۴) ۱۳۶

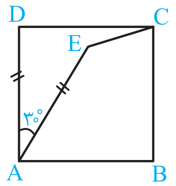
۲۰. نیمساز خارجی یک زاویه‌ی مثلث متساوی‌الساقین امتداد یک ضلع آن را با زاویه‌ی ۱۵° قطع می‌کند. اندازه‌ی زاویه‌ی رأس این مثلث کدام است؟

۱) ۲۰ ‏ ۲) ۵۰ ‏ ۳) ۴۰ ‏ ۴) ۳۰

۲۱. در شکل مقابل چهارضلعی $ABCD$ مربع و مثلث‌های $\overset{\Delta}{AEB}$ و $\overset{\Delta}{AFD}$ متساوی‌الاضلاع هستند. مقدار x کدام است؟

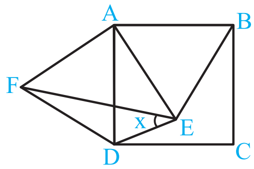


۱) ۱۳۵° ‏ ۲) ۱۵۰° ‏ ۳) ۱۲۰° ‏ ۴) ۱۰۵°



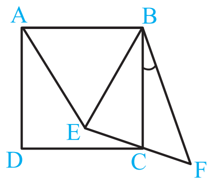
۲۲. در مربع مقابل داریم $D\hat{A}E = ۳۰^\circ$ و $AE = AD$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی AEC چند درجه است؟

۱) ۱۱۰
۲) ۱۵۰
۳) ۱۳۵
۴) ۱۲۰



۲۳. در شکل $ABCD$ مربع و مثلث‌های AEB و AEF متساوی‌الاضلاع هستند، مقدار x کدام است؟

۱) ۲۲/۵
۲) ۱۵
۳) ۳۰
۴) ۲۵



۲۴. در شکل مقابل $ABCD$ مربع، مثلث ABE متساوی‌الاضلاع و EF از رأس C می‌گذرد و مثلث BEF متساوی‌الساقین است $(BE = EF)$، اندازه‌ی زاویه‌ی $F\hat{B}C$ چند درجه است؟

۱) ۲۲/۵
۲) ۱۵
۳) ۳۰
۴) ۲۵

۲۵. در مثلث ABC ، $\hat{B} = ۸۰^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی بین عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویه‌ی A کدام است؟

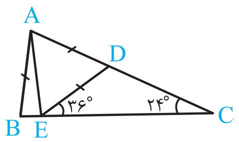
۱) ۱۵° ۲) ۲۰° ۳) ۲۵° ۴) ۳۰°

۲۶. در مثلث ABC اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}$ واسطه‌ی حسابی اندازه‌ی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمساز داخلی زاویه‌ی B و نیمساز خارجی زاویه‌ی C کدام است؟

۱) ۴۵° ۲) ۳۰° ۳) ۶۰° ۴) ۱۵°

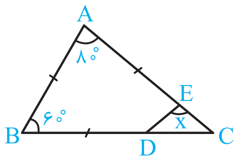
۲۷. در مثلث ABC ، اندازه‌ی زاویه‌ی B ، ۴۰° بیش‌تر از اندازه‌ی زاویه‌ی C است. اندازه‌ی زاویه‌ای که نیمساز زاویه‌ی A با ضلع مقابل به آن زاویه می‌سازد چند درجه است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰



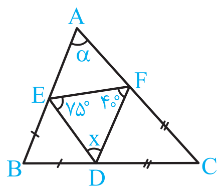
۲۸. در شکل روبه‌رو $AB = AD = DE$ ، $\hat{C} = ۲۴^\circ$ و $D\hat{E}C = ۳۶^\circ$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی B چند درجه است؟

۱) ۸۴
۲) ۸۰
۳) ۷۶
۴) ۷۲



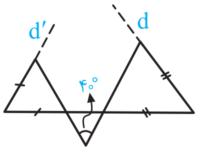
۲۹. ✩ در شکل روبه‌رو $AB = BD = AE$ ، مقدار x کدام است؟

۱) ۸۰°
۲) ۸۵°
۳) ۱۰۰°
۴) ۹۵°



۳۰. در شکل مقابل مثلث‌های کناری، متساوی‌الساقین هستند. مقدار x چند برابر α است؟

۱) ۱/۱
۲) ۱/۲
۳) ۱/۳
۴) ۱/۴



۳۱. در شکل مقابل خط‌های d و d' با زاویه‌ی چند درجه متقاطع هستند؟

۱) ۱۰۰
۲) ۹۰
۳) ۱۱۰
۴) ۱۰۵

۳۲. اگر در مثلث ABC که در آن زاویه‌ی B منفرجه است، طول نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A برابر باشند، $\hat{B} - \hat{C}$ کدام است؟

۱) ۴۵° ۲) ۹۰° ۳) $\hat{A}$ ۴) $\frac{\hat{A}}{۲}$

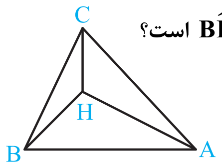
۳۳. اگر در مثلث حاده الزوایای ABC ، اندازه‌ی زاویه‌ی برخورد نیمسازهای خارجی زوایای B و C دو برابر اندازه‌ی زاویه‌ی A باشد، زاویه‌ی برخورد عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC چند درجه است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۴

۳۴. نقطه‌ی P درون مثلث ABC از سه رأس آن به یک فاصله است و $A\hat{B}P = ۳۰^\circ$ و $C\hat{B}P = ۴۰^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $P\hat{A}C$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۲۵

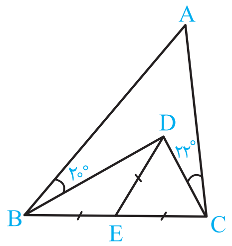
۳۵. در مثلث ABC که در آن $A = ۴۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و H محل تلاقی سه ارتفاع است. زاویه‌ی $A\hat{H}C$ چند برابر زاویه‌ی $B\hat{H}C$ است؟



۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

۳۶. در شکل مقابل BE = DE = EC ، $A\hat{B}D = ۲۰^\circ$ و $A\hat{C}D = ۲۲^\circ$ ، اندازه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟

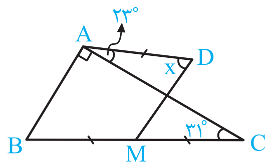


۱) ۴۵
۲) ۴۲
۳) ۴۸
۴) ۳۸

۳۷. در مثلث ABC ، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{C} = ۲۰^\circ$. نقطه‌ی D روی امتداد BC سمت B چنان قرار دارد که $AD = \frac{BC}{۲}$. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{D}C$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

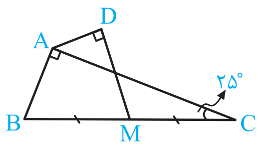
۳۸.☆ در شکل مقابل مثلث ABC قائم‌الزاویه است و BM = MC = AD ، مقدار x کدام است؟



۱) ۶۰ ۲) ۶۳

۳) ۵۶ ۴) ۵۸

۳۹.☆ در شکل مقابل $AD = \frac{BC}{۴}$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{A}C$ چند درجه است؟



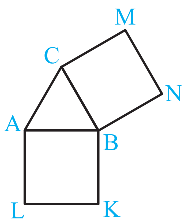
۱) ۳۰ ۲) ۳۵

۳) ۴۵ ۴) ۴۰

۴۰.☆ در یک مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع نظیر ساق نصف آن است، زاویه‌ی بین این ارتفاع و قاعده‌ی مثلث کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۳۰

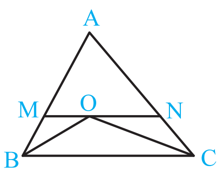
۴۱. در شکل روبه‌رو ABC مثلث متساوی‌الاضلاع و چهارضلعی‌های BNMC و ABKL مربع هستند.
اندازه‌ی زاویه‌ی CNK کدام است؟



۱) ۷۵° ۲) ۹۰°

۳) ۱۰۵° ۴) ۱۲۰°

۴۲. در شکل مقابل اندازه‌ی اضلاع $\overset{\Delta}{ABC}$ ، AB = ۴ و AC = ۶ می‌باشد. اگر OB نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ و OC نیمساز زاویه‌ی $\hat{C}$ باشند و MN || BC ، آن‌گاه محیط مثلث AMN کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۳.☆ از نقطه‌ی O محل تلاقی نیمسازهای زوایای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در مثلث ABC خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا امتداد دو ضلع دیگر را قطع کند اگر AB = ۴ ، AC = ۸ و BC = ۶ ، محیط بزرگ‌ترین مثلث چه‌قدر بیش‌تر از محیط ذوزنقه‌ی ایجاد شده است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱ پاسخ تست‌های جلسه‌ی اول

۱ — ۱ **۲** ۳ ۴

α زاویه‌ی حاده است ($0^\circ<\alpha<90^\circ$)، داریم:

$$\frac{90^\circ-\alpha}{180^\circ-\alpha}<\frac{1}{10}\Rightarrow 900^\circ-10\alpha<180^\circ-\alpha$$

$$\Rightarrow 720^\circ<9\alpha\Rightarrow 80^\circ<\alpha<90^\circ$$

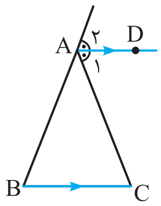
مقادیر قابل قبول α اعداد صحیح $81^\circ, 82^\circ, \dots, 89^\circ$ است که تعداد آن‌ها ۹ می‌باشد.

۲ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنابر فرض نیمساز خارجی AD موازی ضلع BC است. پس بنابر خطوط موازی و مورب داریم:

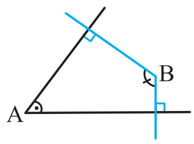
$$\left.\begin{aligned}\hat{A}_1&=\hat{C}\\ \hat{A}_2&=\hat{B}\\ (\text{فرض})\ \hat{A}_1&=\hat{A}_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}\Rightarrow$$

$\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.

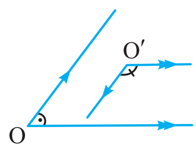


عکس این مطلب هم درست است. یعنی در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز خارجی زاویه‌ی رأس مثلث، موازی قاعده‌ی آن است. سایر گزینه‌ها نادرست‌اند.

گزینه‌ی (۱): استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی براساس مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.



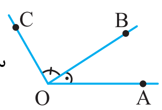
گزینه‌ی (۲): اضلاع دو زاویه‌ی مقابل بر هم عمود هستند، اما دو زاویه هم‌اندازه نیستند، بلکه مکمل هستند.



گزینه‌ی (۴): در شکل مقابل اضلاع موازی هستند اما دو زاویه هم‌اندازه نیستند بلکه مکمل هستند.

۳ — ۱ ۲ ۳ **۴**

دو زاویه‌ی مجاور لزوماً متمم نیستند.



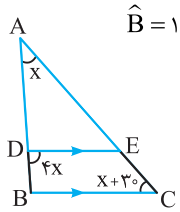
سایر گزینه‌ها درست هستند.

۴ — ۱ ۲ ۳ **۴**

AC مورب و $DE \parallel BC \Rightarrow A\hat{E}D=\hat{C}=x+30^\circ$

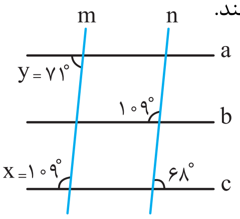
زاویه‌ی خارجی: $B\hat{D}E=\hat{A}+A\hat{E}D\Rightarrow 4x=x+x+30^\circ\Rightarrow x=15^\circ$

$$\hat{B}=180^\circ-4x=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$



۵ — ۱ ۲ **۳** ۴

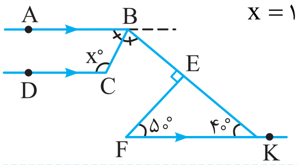
مطابق شکل قاطع m دو خط a و c را قطع کرده است و $x+y=109^\circ+71^\circ=180^\circ$ در نتیجه $a \parallel c$. سایر جفت خطوط با توجه به اندازه‌ی زاویه‌ها نمی‌توانند موازی باشند.



۶ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$A\hat{B}E=180^\circ-40^\circ=140^\circ\Rightarrow A\hat{B}C=70^\circ$$

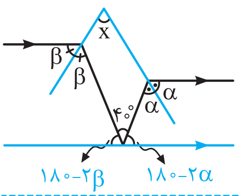
$$x=180^\circ-70^\circ=110^\circ$$



۷ — **۱** ۲ ۳ ۴

در چهارضلعی محدب روی شکل داریم $\alpha+\beta=x+40^\circ$ و $180^\circ-2\beta+40^\circ+180^\circ-2\alpha=180^\circ$، پس:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x+40^\circ\\ \alpha+\beta=110^\circ\end{cases}\Rightarrow x+40^\circ=110^\circ\Rightarrow x=70^\circ$$



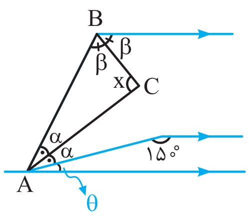
۸ — ۱ **۲** ۳ ۴

از نقطه‌ی A خطی موازی دو خط موازی رسم می‌کنیم داریم:

$$\theta=180^\circ-150^\circ=30^\circ$$

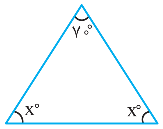
$$2\beta+(2\alpha+\theta)=180^\circ\Rightarrow 2(\alpha+\beta)=150^\circ\Rightarrow \alpha+\beta=75^\circ$$

$$x+\alpha+\beta=180^\circ\Rightarrow x=180^\circ-75^\circ=105^\circ$$

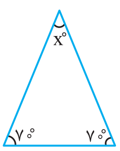


۹ — **۱** ۲ ۳ ۴

این پرسش دو حالت دارد.



آ) $x+x+70^\circ=180^\circ\Rightarrow x=55^\circ$

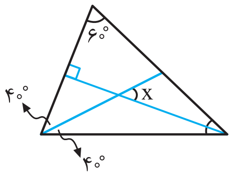


ب) $x+70^\circ+70^\circ=180^\circ\Rightarrow x=40^\circ$

و مجموع مقادیر ممکن x برابر $40^\circ+55^\circ=95^\circ$ است.

۱۰ — ۱ **۲** ۳ ۴

$۲x+۳x+۴x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۲۰^\circ$

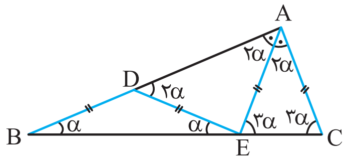


پس اندازه‌ی زوایای مثلث ۴۰، ۶۰ و ۸۰ درجه است . مطابق شکل زاویه‌ی بین ارتفاع نظیر کوچک‌ترین ضلع و نیمساز بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث برابر $x=۹۰^\circ-۴۰^\circ=۵۰^\circ$ است.

۱۱ — ۱ ۲ ۳ **۴**

با توجه به زاویه‌ی خارجی و این‌که AE نیمساز زاویه‌ی A است، اندازه‌ی زوایای مثلث مطابق شکل می‌شود.

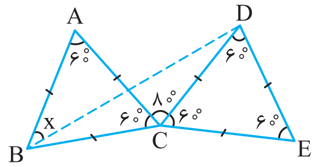
$\overset{\Delta}{AEC}: ۲\alpha+۳\alpha+۳\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۸\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۲۲/۵^\circ$



۱۲ — ۱ ۲ ۳ **۴**

مطابق شکل مثلث BCD متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس $۶۰^\circ+۸۰^\circ=۱۴۰^\circ$ است پس:

$C\hat{B}D=B\hat{D}C=\dfrac{۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۸۰^\circ)}{۲}=۲۰^\circ \Rightarrow x=۶۰^\circ-۲۰^\circ=۴۰^\circ$

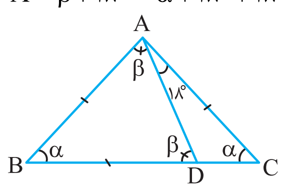


۱۳ — ۱ **۲** ۳ ۴

$\alpha+\beta+\beta=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\beta=\alpha+۱۸^\circ} \alpha+۲(\alpha+۱۸^\circ)=۱۸۰^\circ$

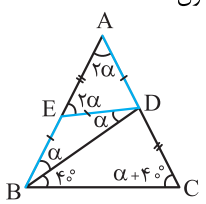
$\Rightarrow ۳\alpha+۳۶^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۱۲^\circ=۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=۴۸^\circ$

$\hat{A}=\beta+۱۸^\circ=\alpha+۱۸^\circ+۱۸^\circ=۴۸^\circ+۳۶^\circ=۸۴^\circ$



۱۴ — ۱ ۲ **۳** ۴

زوایا مطابق شکل مشخص شده است. چون $AB=AC$ است پس $\hat{C}=\hat{B}=\alpha+۴۰^\circ$ و در نتیجه:



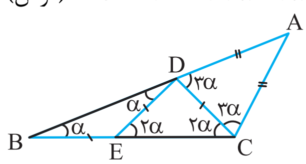
$۲\alpha+۲(\alpha+۴۰^\circ)=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow ۴\alpha=۱۰۰^\circ \Rightarrow \alpha=۲۵^\circ$

۱۵ — ۱ ۲ ۳ **۴**

زوایا مطابق شکل است و داریم:

$A\hat{C}B=۱۰۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha+۲\alpha=۱۰۰^\circ \Rightarrow ۵\alpha=۱۰۰^\circ \Rightarrow \alpha=۲۰^\circ$ (فرض)



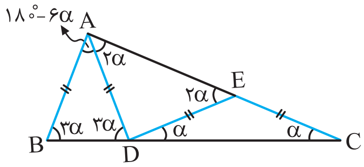
پس اندازه‌ی زاویه‌ی B برابر ۲۰ درجه است.

۱۶ — **۱** ۲ ۳ ۴

با فرض $\hat{C}=\alpha$ و به کمک مثلث‌های متساوی‌الساقین و زوایای خارجی، اندازه‌ی زوایا مطابق شکل می‌شود:

$B\hat{A}D=۱۸۰^\circ-۶\alpha$

$B\hat{A}C=۹۶^\circ \Rightarrow ۱۸۰^\circ-۶\alpha+۲\alpha=۹۶^\circ \Rightarrow ۴\alpha=۸۴^\circ \Rightarrow \alpha=۲۱^\circ$



بنابراین اندازه‌ی زاویه‌ی EDC برابر ۲۱° است.

۱۷ — ۱ **۲** ۳ ۴

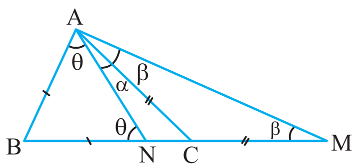
با توجه به مفروضات پرسش یعنی $AC=CM$ و $AB=BN$. اندازه‌ی زوایا مطابق شکل می‌شود.

$\hat{A}=۷۶^\circ \Rightarrow \theta+\alpha=۷۶^\circ$ (فرض) , زاویه‌ی خارجی $:\hat{C}=\beta+\beta=۲\beta$

زاویه‌ی خارجی $: A\hat{N}B=\alpha+A\hat{C}N=\alpha+۲\beta$

$\Rightarrow \theta=\alpha+۲\beta \Rightarrow \theta+\alpha=۲(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow ۷۶^\circ=۲(\alpha+\beta) \Rightarrow \alpha+\beta=۳۸^\circ \Rightarrow M\hat{A}N=۳۸^\circ$



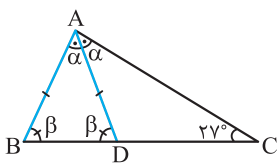
۱۸ — **۱** ۲ ۳ ۴

$\beta=\alpha+۲۷^\circ$

$\alpha+\beta+\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۲(\alpha+۲۷^\circ)=۱۸۰^\circ$

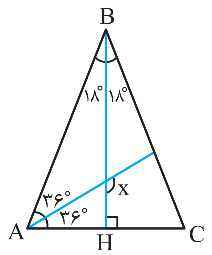
$\Rightarrow ۳\alpha=۱۸۰^\circ-۵۴^\circ \Rightarrow \alpha=۴۲^\circ$

$\hat{A}=۲\alpha=۸۴^\circ$



۱۹ — **۱** ۲ ۳ ۴

اگر A رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC باشد آن‌گاه $\hat{B}=\hat{C}$ و با فرض $A=۲B$ نتیجه می‌شود $۲B+\hat{B}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$ و $B=۴۵^\circ$ و $\hat{A}=۹۰^\circ$. با توجه به این‌که مثلث قائم‌الزاویه نیست این حالت قابل قبول نیست. بنابراین B رأس مثلث متساوی‌الساقین است پس $\hat{A}=\hat{C}$



$\hat{A}+\dfrac{\hat{A}}{۲}+\hat{A}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵\hat{A}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۷۲^\circ, \hat{C}=۷۲^\circ, \hat{B}=۳۶^\circ$

$x=۹۰^\circ+۳۶^\circ=۱۲۶^\circ$

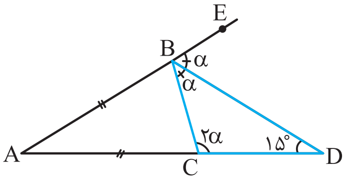
۲۰ (۱ ۲ **۳** ۴)

نیمساز خارجی زاویه‌ی رأس یک مثلث متساوی‌الساقین با قاعده‌ی آن موازی است و آن را قطع نمی‌کند، اما نیمساز خارجی زوایای مجاور به قاعده مطابق شکل امتداد ساق را قطع می‌کند.

$$AB=AC\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}\Rightarrow B\hat{C}D=C\hat{B}E=۲\alpha$$

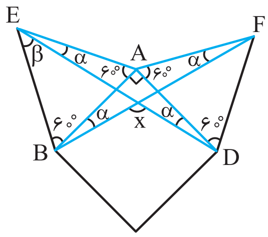
$$\overset{\Delta}{BCD}:\alpha+۲\alpha+۱۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳\alpha=۱۶۵^\circ\Rightarrow \alpha=۵۵^\circ$$

$$E\hat{B}D=\hat{A}+\hat{D}\Rightarrow ۵۵^\circ=\hat{A}+۱۵^\circ\Rightarrow \hat{A}=۴۰^\circ$$



۲۱ (۱ ۲ **۳** ۴)

با توجه به این‌که $AE=AD$ است در مثلث متساوی‌الساقین AED نتیجه می‌شود $\alpha=\frac{۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+۶۰^\circ)}{۲}=۱۵^\circ$. به همین ترتیب در مثلث ABF، داریم: $\alpha=۱۵^\circ$



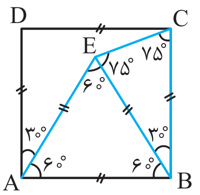
و نهایتاً:

زاویه‌ی خارجی: $x=\beta+۶۰^\circ+\alpha=۶۰^\circ-\alpha+۶۰^\circ+\alpha=۱۲۰^\circ$

۲۲ (۱ ۲ **۳** ۴)

مثلث AEB متساوی‌الاضلاع است زیرا $AE=AB$ و $E\hat{A}B=۶۰^\circ$ در نتیجه $BE=BC$ و $E\hat{B}C=۳۰^\circ$ یعنی مثلث BEC متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس ۳۰° است، پس:

$$B\hat{E}C=B\hat{C}E=\frac{۱۸۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$



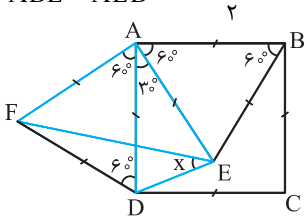
و نهایتاً:

$$A\hat{E}C=۶۰^\circ+۷۵^\circ=۱۳۵^\circ$$

۲۳ (۱ ۲ **۳** ۴)

در مثلث متساوی‌الساقین ADE اندازه‌ی زاویه‌ی رأس ۳۰° است، پس:

$$A\hat{D}E=A\hat{E}D=\frac{۱۸۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$



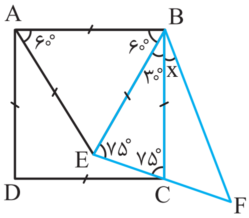
از طرفی مثلث AEF قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است بنابراین $A\hat{F}E=A\hat{E}F=۴۵^\circ$ و نهایتاً $x=۷۵^\circ-۴۵^\circ=۳۰^\circ$

۲۴ (**۱** ۲ ۳ ۴)

در مثلث متساوی‌الساقین BEC اندازه‌ی زاویه‌ی رأس ۳۰° است، پس اندازه‌ی دو زاویه‌ی دیگر $B\hat{E}C=B\hat{C}E=۷۵^\circ$ می‌شود و داریم:

$$BE=EF\Rightarrow \hat{F}=x+۳۰$$

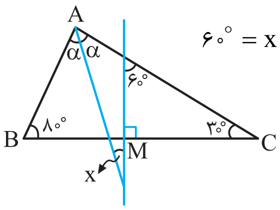
$$\overset{\Delta}{BEF}:۷۵^\circ+x+۳۰^\circ+x+۳۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=\frac{۴۵^\circ}{۲}=۲۲/۵^\circ$$



۲۵ (۱ ۲ **۳** ۴)

روش اول: $\hat{A}=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ-۳۰^\circ=۷۰^\circ\Rightarrow \alpha=\frac{A}{۲}=۳۵^\circ$

$$۶۰^\circ=x+\alpha\Rightarrow x=۶۰^\circ-۳۵^\circ=۲۵^\circ$$



روش دوم: اگر در شکل فوق ارتفاع AH را رسم کنیم، زاویه‌ی مطلوب زاویه‌ی بین نیمساز و ارتفاع مرسوم از رأس A می‌شود، یعنی:

$$x=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}=\frac{۸۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=۲۵^\circ$$

۲۶ (۱ **۲** ۳ ۴)

$$۲\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}\Rightarrow ۲\hat{A}=۱۸۰^\circ-\hat{A}\Rightarrow \hat{A}=\frac{۱۸۰^\circ}{۳}=۶۰^\circ$$

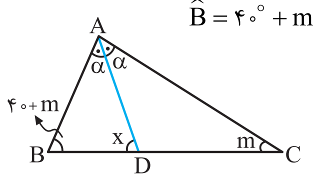
و اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمساز داخلی زاویه‌ی B و نیمساز خارجی زاویه‌ی C برابر $x=\frac{\hat{A}}{۲}=۳۰^\circ$ است.

۲۷ (۱ ۲ ۳ **۴**)

بنابر فرض $\hat{B}=۴۰^\circ+\hat{C}$ است پس $\hat{B}=۴۰^\circ+m$

$$x+\alpha+۴۰^\circ+m=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow x+m+\alpha=۱۴۰^\circ$$



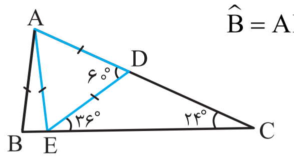
از طرفی بنابر زاویه‌ی خارجی $x=m+\alpha$ است، پس:

$$x+x=۱۴۰^\circ\Rightarrow ۲x=۱۴۰^\circ\Rightarrow x=۷۰^\circ$$

۲۸ (**۱** ۲ ۳ ۴)

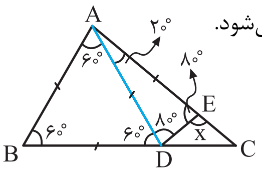
بنابر قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی زاویه‌ی $A\hat{D}E$ برابر ۶۰° است و چون $AD=DE$ است، پس مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است، لذا $AB=AE$ می‌شود:

$$\hat{B}=A\hat{E}B=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ-۳۶^\circ=۸۴^\circ$$



۲۹
۱ ۲ **۳** ۴

A را به D وصل می‌کنیم. مثلث ABD متساوی‌الاضلاع است، زیرا متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس ۶۰° است، پس $AD = AE$ و $D\hat{A}E = ۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۲۰^\circ$، بنابراین زوایای مجاور به قاعده در مثلث متساوی‌الساقین ADE برابر $A\hat{D}E = A\hat{E}D = \frac{۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ}{۲} = ۸۰^\circ$ است و نهایتاً $x = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰۰^\circ$ می‌شود.



۳۰
۱ ۲ **۳** ۴

در مثلث DEF داریم:

$$x = ۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ - ۴۰^\circ = ۶۵^\circ$$

$$x = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲} \Rightarrow ۶۵^\circ = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲} \Rightarrow \frac{\alpha}{۲} = ۲۵^\circ$$

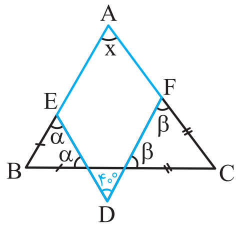
$$\Rightarrow \alpha = ۵۰^\circ \quad , \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{۶۵^\circ}{۵۰^\circ} = ۱/۳$$

۳۱
۱ ۲ ۳ ۴

اندازه‌ی زاویه‌ی تقاطع دو خط d و d' را x می‌نامیم. در چهارضلعی AEDF داریم: $\alpha + \beta = x + ۴۰^\circ$

و در مثلث پایین ضلع BC می‌توان نوشت: $\alpha + \beta + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ$ یا $\alpha + \beta = ۱۴۰^\circ$، در نتیجه:

$$۱۴۰^\circ = x + ۴۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰۰^\circ$$

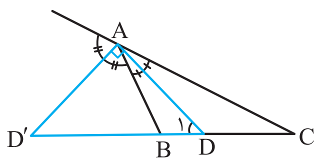


۳۲
۱ **۲** ۳ ۴

روش اول: دو نیمساز داخلی و خارجی یک زاویه‌ی مثلث همواره بر هم عمود هستند، پس مثلث ADD' قائم‌الزاویه است. اگر $AD = AD'$ باشد، نتیجه می‌شود $\hat{D'} = \hat{D}_۱ = ۴۵^\circ$ پس:

$$\text{زاویه‌ی خارجی}: \hat{D}_۱ = \frac{\hat{A}}{۲} + \hat{C} \Rightarrow ۹۰^\circ = \hat{A} + ۲\hat{C}$$

$$\Rightarrow ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ - \hat{B} - \hat{C} + ۲\hat{C} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = ۹۰^\circ$$



روش دوم: زاویه‌ی D' همواره برابر است با $\frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲}$ (زاویه‌ی تلاقی نیمساز خارجی یک زاویه‌ی مثلث با امتداد ضلع مقابل به آن زاویه) و با فرض $AD = AD'$، داریم $\hat{D'} = ۴۵$ و در نتیجه $\hat{B} - \hat{C} = ۹۰$

۳۳
۱ ۲ ۳ **۴**

محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع AC و AB را O می‌نامیم.

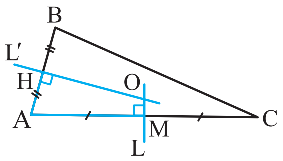
در چهارضلعی AHOM مجموع زوایا ۳۶۰° است، پس:

$$H\hat{O}M = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$$

بنابر فرض داریم:

$$۲\hat{A} = \frac{\hat{A}}{۲} - ۹۰^\circ = \hat{A'}$$ (اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$)

$$\Rightarrow \hat{A} = ۳۶^\circ \Rightarrow H\hat{O}M = ۱۸۰^\circ - ۳۶^\circ = ۱۴۴^\circ$$

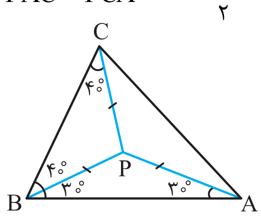


۳۴
۱ ۲ ۳ ۴

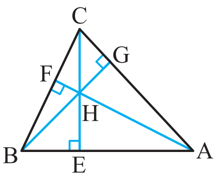
مفروضات روی شکل مشخص است داریم:

$$A\hat{P}C = B\hat{C}P + C\hat{B}A + P\hat{A}B = ۴۰^\circ + ۷۰^\circ + ۳۰^\circ = ۱۴۰^\circ$$

$$P\hat{A}C = P\hat{C}A = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ}{۲} = ۲۰^\circ$$



۳۵
۱ ۲ **۳** ۴



$$BEHF: E\hat{H}F + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + \hat{B} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow E\hat{H}F = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

بنابر زوایای متقابل به رأس داریم:

$$A\hat{H}C = E\hat{H}F = ۱۲۰^\circ$$

$$AEHG: E\hat{H}G + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + A = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow E\hat{H}G = ۱۸۰^\circ - \hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ = ۱۴۰^\circ$$

پس $B\hat{H}C = E\hat{H}G = ۱۴۰^\circ$ و نهایتاً $\frac{A\hat{H}C}{B\hat{H}C} = \frac{۱۲۰^\circ}{۱۴۰^\circ} = \frac{۶}{۷}$

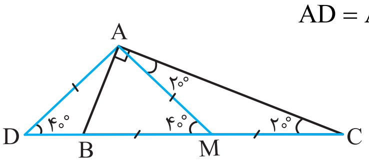
۳۶
۱ ۲ **۳** ۴

زاویه‌ی $B\hat{D}C$ قائمه است، زیرا میانه‌ی نظیر ضلع BC نصف آن است و در چهارضلعی مقعر ABDC داریم:

$$B\hat{D}C = A\hat{B}D + \hat{A} + A\hat{C}D \Rightarrow ۹۰^\circ = ۲۰^\circ + \hat{A} + ۲۲^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۴۸^\circ$$

۳۷
۱ ۲ **۳** ۴

میانه‌ی نظیر وتر را رسم می‌کنیم. بنابر $AM = \frac{BC}{۲}$ فرض $AD = \frac{BC}{۲}$ پس $AD = AM$

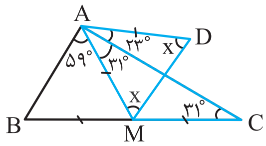


از طرفی $A\hat{M}D = ۲۰^\circ + ۲۰^\circ = ۴۰^\circ$ و در مثلث متساوی‌الساقین AMD نتیجه می‌شود $\hat{D} = ۴۰^\circ$.

۳۸ ۱ **۲** ۳ ۴

میانه‌ی نظیر وتر را رسم می‌کنیم. $AM=\frac{BC}{۲}$. بنابر فرض $AD=\frac{BC}{۲}$ پس مثلث AMD متساوی‌الساقین است. هم‌چنین در مثلث متساوی‌الساقین AMC نتیجه می‌شود $M\hat{A}C=M\hat{C}A=۳۱$ ، لذا:

$$x+x+۳۱^\circ+۲۳^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x=۱۸۰^\circ-۵۴^\circ \Rightarrow x=\frac{۱۲۶^\circ}{۲}=۶۳^\circ$$

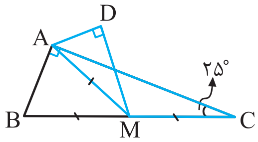


۳۹ ۱ **۲** ۳ ۴

میانه‌ی نظیر وتر را در مثلث ABC رسم می‌کنیم:

$AM=MB=MC$

بنابر فرض $AD=\frac{BC}{۴}$ پس $AD=\frac{۲AM}{۴}=\frac{AM}{۲}$ یعنی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AMD ضلع AD نصف وتر است. پس: $D\hat{A}M=۶۰^\circ$ و $D\hat{M}A=۳۰^\circ$



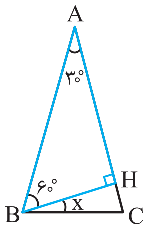
اما در مثلث متساوی‌الساقین AMC، داریم $M\hat{A}C=۲۵^\circ$ پس:

$$D\hat{A}C=D\hat{A}M-M\hat{A}C=۶۰^\circ-۲۵^\circ=۳۵^\circ$$

۴۰ ۱ **۲** ۳ ۴

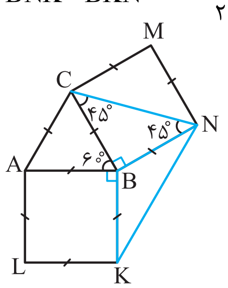
بنابه فرض $AB=AC$ و $BH=\frac{AB}{۲}=\frac{AC}{۲}$ است. پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH نتیجه می‌شود که اندازه‌ی زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع BH برابر ۳۰° است و $A\hat{B}H=۶۰^\circ$. داریم:

$$x+۶۰^\circ+x+۶۰^\circ+۳۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x=۳۰^\circ \Rightarrow x=۱۵^\circ$$



۴۱ **۱** ۲ ۳ ۴

با توجه به $BK=BN$ ، مثلث BNK متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس ۱۲۰° است، پس $B\hat{N}K=B\hat{K}N=\frac{۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$ و $C\hat{N}K=۴۵^\circ+۳۰^\circ=۷۵^\circ$.



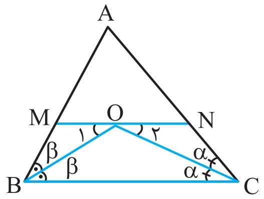
۴۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$OM \parallel BC$ و OB مورب $\Rightarrow \hat{O}_۱=\beta \Rightarrow OM=MB$

$ON \parallel BC$ و OC مورب $\Rightarrow \hat{O}_۲=\alpha \Rightarrow ON=NC$

محیط AMN $=AM+MN+AN=AM+OM+ON+AN$

$=AM+MB+NC+AN=AB+AC=۴+۶=۱۰$



۴۳ **۱** ۲ ۳ ۴

بنابر قضیه‌ی خطوط موازی مورب $x=\alpha$ و $y=\beta$ پس مثلث‌های OBE و OCF متساوی‌الساقین‌اند. در نتیجه:

(محیط ذوزنقه EBCF) − (محیط مثلث AEF)

$=۴+m+m+n+n+۸-(m+۶+n+n+m)$

$=۱۲+۲m+۲n-۲m-۲n-۶=۶$