

آمار و مدل سازی

سال سوم که بودید، یک درس ریاضی بی اهمیت داشتید به اسم آمار و مدل سازی ریاضی؛ البته بی اهمیت از نظر شما! وگرنه آمار مهم ترین مطلب ریاضی است که با آن سر و کار دارید. جهت اطلاع، آمار تنها مبحث ریاضی است که در دانشگاه و پایان نامه تان هم لازم می شود. معمولاً دوتا تست ناقابل از آمار در کنکور سراسری می آید. گاهی یکی از این سوالات دشوار و پرمحاسبه هم هست. تا سال ۹۰، آمار در فصل اول ریاضی پیش دانشگاهی بود. اما در کتب درسی سال ۹۱-۹۰ حذف شد. برای همین احتمال دارد آمار در برنامه ی کلاس های درس هم به جای اول کار، به آخر کار تبعید شود. من توصیه می کنم آمار را آرام آرام از اول سال بخوانید. از پنج فصل اول کتاب درسی، سؤال های متنوعی هم می آید. از کنار این تست ها ساده نگذری.

راستی در این فصل، چند جا مجبور شدم نحوه ی محاسبات عددی را توضیح بدهم. لطفاً با دقت و حوصله دنبال کنید. مرسی

مدل سازی

ریاضیات یعنی دقیق بودن! برای دقیق بودن باید هر چیزی را برحسب اعداد و ارقام بیان کرد. برای همین یوهانس کپلر (ستاره شناس آلمانی) گفته: خداوند جهان را به زبان اعداد خلق کرده است. یعنی با دقت و حساب و کتاب! مثلاً کلمه های «بعضی»، «اکثر»، «کم» و «زیاد»، خیلی دقت ندارند؛ ولی با استفاده از اعداد، تکلیف کاملاً روشن می شود. می گوئیم خون طرف غلیظ است! خوب این که نشد حرف علمی. اما اگر بگوئیم هموگلوبین خونس ۱۷ گرم بر دسی لیتر است، شنونده درک درست تری از غلظت خون آن شخص به دست می آورد. پس قرار است دقیق باشیم و با دقت بررسی کنیم. برای دقت داشتن و کار در یک سیستم علمی (!) باید همه چیز با اعداد و ارقام و ریاضیات اندازه گیری شود. یعنی باید مسئله ها را به زبان ریاضی بیان کرد. به این کار می گویند مدل سازی!

۱- مدل سازی ریاضی چیست؟

- (۱) بیان مسئله به زبان ریاضی (۲) تقسیم بندی متغیرها (۳) روش محاسبه (۴) نمونه ای از سرشماری

مدل خوب

کتاب درسی گفته بچه ها با اتومبیل بازی می کنند چون در ذهنشان با اتومبیل اسباب بازی، ادای رانندگی درمی آورند. یا با عروسک بازی، رفتاری شبیه مادر را تقلید می کنند. اهمیت زیبایی اسباب بازی ها این است که تا حد ممکن ساده باشند و بچه بتواند آن چه در ذهنش می گذرد بهتر نشان بدهد. پس هر چه مفاهیم ریاضی که به کار می رود، ابتدایی و ساده تر باشد و نتیجه ی کار به پدیده ی مورد نظر نزدیک تر باشد، مدل سازی با ارزش تر است.

۲- کدام نوع مدل سازی ریاضی با ارزش تر است؟

- (۱) خطای اندازه گیری برابر صفر (۲) نتیجه ی حاصل همان پدیده ی مورد نظر
(۳) فقط مفاهیم ریاضی ساده تر (۴) مفاهیم ریاضی ساده تر - نتیجه به پدیده های مورد نظر نزدیک تر

خطای اندازه گیری

قرار شد دقیق و ریاضی باشیم و همه چیز را به زبان ریاضی مدل کنیم و اندازه بگیریم. حالا با چی اندازه بگیریم؟ مثلاً طول یک خودکار را با خط کش اندازه می گیریم و جوابی برحسب سانتی متر یا میلی متر می دهیم. اما در مورد چیزهای دقیق تر، مثلاً قطعه های کوچک توی چرخ خیاطی، از کولیس استفاده می کنیم و جواب در حد دهم میلی متر است. توی مسابقات اتومبیل رانی، هزرم ثانیه را هم اندازه می گیرند. اما هر چه قدر این وسیله ها دقیق تر باشند، هیچ وقت نمی توانند مقدار دقیق یک کمیت را اندازه بگیرند. پس هر اندازه گیری، یک اختلاف با واقعیت دارد. به این اختلاف می گوئیم خطا.

در واقع خطا یعنی مقدار واقعی منهای مقدار اندازه گیری شده. خطا را با E نشان می دهیم. همیشه قدر مطلق خطا کمتر از واحد اندازه گیری است. مثلاً می گوئیم ۳ ساعت و خرده ای، یعنی $E + 3$ و قدر مطلق E از یک ساعت کمتر است. یا می گوئیم وزن این کتاب دو کیلو و نیم است یعنی $E + 2.5$ و قدر مطلق E از 0.5 کیلو کمتر است. خطا می تواند مثبت یا منفی بشود ولی هیچ وقت صفر نمی شود.

۳- در مورد تفاضل مقدار واقعی و مقدار اندازه گیری شده، کدام نادرست است؟

- (۱) کمتر از واحد اندازه گیری است. (۲) ممکن است منفی باشد. (۳) ممکن است مثبت باشد. (۴) ممکن است صفر باشد.

۴- مدل وزن یک شخص به صورت $W = 72.5 + E$ کیلوگرم است. خطای این اندازه گیری چگونه است؟

- (۱) نیم کیلوگرم (۲) حداکثر ۱ کیلوگرم (۳) کمتر از نیم کیلوگرم (۴) یک کیلوگرم

۵- طول ضلع مربعی را برحسب سانتی متر اندازه گیری کرده ایم، مدل آن به صورت $L = 6 + E$ است. اگر این طول را برحسب میلی متر بیان کنیم، مدل آن چگونه است؟

- (۱) $L = 60 + \frac{1}{10}E$ (۲) $L = 60 + 10E$ (۳) $L = 60 + E$ (۴) اندازه گیری مجدد انجام شود.

محاسبات خطایی در مدل سازی

اگر یک پدیده، به چندتا متغیر بستگی داشته باشد، می توانیم آن متغیرها را اندازه بگیریم و سپس خودمان جواب پدیده ی نهایی را حساب کنیم. مثلاً ضلع یک مربع را اندازه بگیریم و سپس محیط و مساحتش را حساب کنیم و مدل آن ها را بنویسیم.

$$a = 4 + E \Rightarrow \begin{cases} \text{محیط} = 4a = 4(4 + E) = 16 + 4E & (4E = \text{خطای محیط}) \\ \text{مساحت} = a^2 = (4 + E)^2 = 16 + 8E + E^2 & (8E = \text{خطای مساحت}) \end{cases}$$

البته چون قدرمطلق E از یک کم تر است، می توانیم از جمله های شامل E^2 یا E^3 ... صرف نظر کنیم. پس مدل مساحت می شود: $16 + 8E$
 کتاب درسی گفته خطای مساحت $(8E)$ ، هشت برابر بزرگ تر از خطای ضلع (E) است. خوب درست گفته! یک اصطلاح دیگر هم توی کتاب هست: خطای اندازه گیری در مساحت و محیط مربع منتشر می شود.
 یعنی ما توی ضلع مربع به اندازه ی E خطا داشتیم، اما توی محیط به اندازه ی $(4E)$ و در مساحت به اندازه ی $(8E)$ خطا افزایش می یابد.

(کتاب درسی)

۶- شعاع دایره ای به صورت $R = 3 + E$ مدل سازی شده است. مدل مساحت آن چگونه است؟

$$S \approx 9\pi + E \quad (1) \quad S \approx 9\pi + 6E \quad (2) \quad S \approx 9\pi + 6\pi E \quad (3) \quad S \approx 9\pi + 9\pi E \quad (4)$$

۷- اگر ضلع مربعی به صورت $E + 5$ باشد، خطای اندازه گیری ضلع در مساحت مربع و محیط آن اثر می گذارد. نسبت این تأثیر در مساحت به محیط چه قدر است؟

$$2 \quad (1) \quad 2/5 \quad (2) \quad 4/3 \quad (3) \quad 5/4 \quad (4)$$

۸- خطای اندازه ی ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع (a) ، در محیط بیشتر اثر گذاشته است تا در مساحت آن. در مورد ضلع این مثلث کدام نتیجه درست است؟

$$a < 2 \quad (1) \quad a < 2\sqrt{3} \quad (2) \quad a < 3 \quad (3) \quad a < 4 \quad (4)$$

۹- در مدل سازی ریاضی برای مساحت دایره ای به قطر تقریبی 10° واحد، اگر خطای اندازه گیری قطر کم تر از $\frac{1}{6\pi}$ باشد، خطای مساحت تقریباً کم تر از چند واحد مربع است؟

$$\frac{5}{6} \quad (1) \quad \frac{5}{9} \quad (2) \quad \frac{5}{12} \quad (3) \quad \frac{5}{18} \quad (4)$$

۱۰- در مدل سازی برای حجم کره ای به شعاع 2 cm ، می خواهیم خطای حجم از واحد اندازه گیری (1 cm^3) بزرگ تر نشود، حداکثر خطای شعاع تقریباً چه قدر است؟

$$\frac{1}{16\pi} \quad (1) \quad \frac{1}{12\pi} \quad (2) \quad \frac{1}{8\pi} \quad (3) \quad \frac{1}{9\pi} \quad (4)$$

۱۱- در تابع $y = x^3 - x$ ، اگر x را با تقریب $2 + E$ مدل سازی کنیم، مدل y به کدام صورت است؟

$$6 + 12E \quad (1) \quad 8 + 12E \quad (2) \quad 6 + 11E \quad (3) \quad 8 + 11E \quad (4)$$

مدل سازی ها با چند خطا

اگر پدیده ای که بررسی می کنیم تابعی از چندتا متغیر باشد، ممکن است هر کدام از آن متغیرها خطای اندازه گیری خودشان را داشته باشند. یعنی E_1 ، E_2 و ... داریم. مسئله فرق زیادی با قبل ندارد، فقط این جا از حاصل ضرب E_1 ها هم صرف نظر می شود.

۱۲- اگر مدل طول و عرض یک مستطیل به ترتیب $5 + E_1$ و $3 + E_2$ باشد، مدل مساحت آن کدام است؟

$$15 + E_1 E_2 \quad (1) \quad 15 + E_1 + E_2 \quad (2)$$

$$15 + 3E_2 + 5E_1 \quad (3) \quad 15 + 3E_1 + 5E_2 \quad (4)$$

۱۳- مدل شعاع و ارتفاع یک استوانه به ترتیب $R = 2 + E_1$ و $h = 5 + E_2$ است. در مدل حجم آن E_1 و E_2 به ترتیب چند برابر می شوند؟

$$4\pi, 5\pi \quad (1) \quad 2\pi, 5\pi \quad (2) \quad 5\pi, 20\pi \quad (3) \quad 4\pi, 20\pi \quad (4)$$

$$L_1 = 3 + E_1$$

۱۴- اضلاع یک مکعب مستطیل را به صورت $L_2 = 4 + E_2$ داریم. در مدل حجم آن، کدام جمله را نمی بینیم؟

$$L_3 = 6 + E_3$$

$$12E_3 \quad (1) \quad 18E_2 \quad (2) \quad 24E_2 \quad (3) \quad 24E_1 \quad (4)$$

(کتاب درسی)

نمایش از جامعه و نمونه

جامعه ی آماری یعنی تمام افراد یا اشیایی که می خواهیم بررسی خاصی در مورد آن ها انجام دهیم. دقت کنید که می خواهیم در مورد آن ها بررسی کنیم. اگر این بررسی را روی همه ی افراد جامعه انجام دهیم می گوییم سرشماری کردیم. البته معمولاً زورمان نمی رسد همه را بررسی کنیم. چرا؟ چون گران تمام می شود، وقتمان را خیلی می گیرد، افراد در دسترس نیستند و جامعه ممکن است از بین برود. مثلاً می خواهیم ضربان قلب را در حین سقوط هواپیما بررسی کنیم. سرشماری یعنی همه ی مردم جامعه را سوار هواپیما کنیم، بعد سقوط کنیم و به همه ی افراد دستگاه ECG (نوار قلب) وصل کنیم!!! پس سرشماری خیلی عملی نیست. چه کار کنیم؟ خوب به قول کتاب درسی تان، مشت نمونه ی خروار است. یعنی به جای همه ی جامعه، یک نمونه از آن برمی داریم و بررسی می کنیم. نمونه در واقع یک زیرمجموعه از جامعه است. راستی به جای تعداد اعضا می گوییم اندازه. پس تعداد اعضای جامعه را اندازه ی جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه ی نمونه می نامیم.

۱۵- مجموعه‌ای از افراد یا اشیا که می‌خواهیم درباره‌ی اعضای آن، موضوع خاصی را بررسی کنیم، چه نام دارد؟

- (۱) نمونه (۲) جامعه‌ی آماری (۳) سرشماری (۴) متغیر

(تجربی ۸۹)

۱۶- در کدام بررسی، اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه است؟

- (۱) نمونه‌ی تصادفی (۲) دسته‌بندی (۳) سرشماری (۴) متغیر کیفی

۱۷- مهم‌ترین بخش آمار را کدام عمل تشکیل می‌دهد؟

- (۱) دسته‌بندی (۲) نمونه‌گیری (۳) اندازه‌ی جامعه (۴) تعیین شاخص‌ها

نمونه‌ی تصادفی ساده

یادتان هست که ما می‌خواستیم در مورد جامعه یک چیزی را بررسی کنیم؟! بعد فهمیدیم زورمان به جامعه نمی‌رسد (پول و وقت و دسترسی‌اش را نداریم) پس رفتیم سراغ قسمتی از جامعه، یعنی یک نمونه از بین اعضا انتخاب کردیم. بعد گفتیم این نمونه گرفتن، کار مهمی است و باید انتخاب نمونه، قاعده‌ی خاصی (پارتنری بازی) نداشته باشد. کتابتان گفته باید جوری نمونه‌گیری بشود که: اولاً امکان انتخاب هر عضو جامعه به عنوان عضوی از نمونه باشد. ثانیاً هر فردی برای شرکت در نمونه، همان‌قدر سهم داشته باشد که بقیه دارند. به این نمونه‌ی خوب می‌گوییم نمونه‌ی تصادفی ساده؛ یعنی باید شانس تمام افراد جامعه برای انتخاب در نمونه‌ی تصادفی ساده، با هم برابر باشند.

۱۸- در یک نمونه‌ی تصادفی ساده چهارتایی از اعداد ۱۰ تا ۲۰ شانس انتخاب کدام عدد از بقیه بیشتر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) شانس تمام اعداد با هم برابر است.

اعداد تصادفی

آدم‌ها، به خاطر اعتقادات (مثلاً نحس بودن سیزده) یا سلیقه و سابقه‌ی ذهنی، نمی‌توانند نمونه‌ی تصادفی ساده انتخاب کنند. ما هم که دقیق هستیم و می‌خواهیم همه‌ی عضوهای جامعه، شانس مساوی انتخاب شدن داشته باشند، پس چه کار می‌کنیم؟ به آدمیزاد دوبا نمی‌شود اعتماد کرد، می‌رویم سراغ کامپیوتر. هر چی باشه پارتنری بازی نمی‌کنه..... ماشین حساب‌های مهندسی و کامپیوترها (زبان‌های برنامه‌نویسی)، یک عملگر به اسم RAN یا RND دارند. (همون random خودمان) که عددی تصادفی بین ۰ و ۱ تولید می‌کند. این عدد را ضرب در اندازه‌ی جامعه می‌کنیم، بعد اعشارش را حذف کرده و یک واحد اضافه می‌کنیم.

مثلاً کامپیوتر ما ۴۳۱/۰ را می‌دهد. در جامعه‌ای با اندازه‌ی ۵۰۰ نفر داریم:

یعنی به عنوان عضو نمونه، باید نفر ۲۱۶ ام را برداریم.

حالا فرض کنید از ۵ تا ۴۱، نمونه‌ای ۳ عضوی می‌خواهیم. سه بار RND را می‌زنیم.

اعداد ۰/۱۰۸، ۰/۵۹۳، ۰/۸۷۷ را می‌دهد. بنابراین داریم:

$$[0/108 \times 20] + 1 = [2/16] + 1 = 3$$

$$[0/593 \times 20] + 1 = [11/86] + 1 = 12 ; [0/877 \times 20] + 1 = [17/54] + 1 = 18$$

یعنی باید ۳، ۴۴ و ۱۸ (عضوهای شماره‌ی ۳، ۱۲ و ۱۸) را به عنوان نمونه‌ی ۳ تایی از ۱ تا ۲۰ برداریم.

۱۹- اگر کامپیوتر عدد تصادفی ۳۷۴/۰ را بدهد، در جامعه‌ای به اندازه‌ی ۲۰۰ کدام عضو باید انتخاب شود؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۷۴ (۳) ۷۵ (۴) ۳۸ ام

۲۰- در انتخاب نمونه‌ی تصادفی از ۲۳ تا ۸۷، کامپیوتر عدد تصادفی ۶۱۴/۰ را داده است. کدام عضو انتخاب می‌شود؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۶۲ (۴) ۵۴

جمع‌آوری داده‌ها

عرض شود که ما می‌خواستیم در مورد جامعه، یک چیزی را بررسی کنیم. سرشماری (یعنی بررسی همه‌ی افراد) سخت بود. ما هم رفتیم دنبال نمونه. یک نمونه‌ی تصادفی ساده گرفتیم و می‌خواهیم روی آن بررسی کنیم. مثلاً می‌خواهیم قد اعضای این نمونه را اندازه بگیریم. اعدادی که به دست می‌آوریم را داده می‌نامند. پس داده یعنی نتایج حاصل از بررسی نمونه‌ی آماری.

حالا این داده‌ها را چه جوری به دست می‌آوریم؟ مثلاً قد را اندازه می‌گیریم؛ رنگ چشم را می‌بینیم؛ معدل را می‌پرسیم؛ در مورد ویژگی‌های اخلاقی، یک فرم پرسش‌نامه می‌دهیم که پر کنند؛ در مورد بعضی چیزها هم از داده‌هایی استفاده می‌کنیم که قبلاً تهیه شده‌اند. مثلاً در مورد زلزله‌هایی که رخ داده‌اند یا چیزهای مربوط به گذشته (... و پس روش‌های جمع‌آوری داده‌ها عبارت‌اند از:

۱ پرسش (کتبی یا پرسش‌نامه یا شفاهی) ۲ مشاهده و ثبت وقایع

۳ آزمایش و اندازه‌گیری ۴ استفاده از داده‌های موجود (از پیش تهیه‌شده)

طراحی پرسش‌نامه

طرح پرسش‌نامه خیلی مهم است. باید ببینیم چه چیزی را می‌خواهیم بدانیم؟ از چه مطالبی باید بپرسیم؟ دقت کنیم که اطلاعات غیرضروری نگیریم؛ سؤالات ساده و واضح بپرسیم که چند برداشت مختلف نشود؛ جواب‌ها تا حد ممکن یک‌کلمه‌ای باشند؛ در مورد سن (خانم‌ها) و یا درآمد (آقایان) به جای اعداد دقیق، بازه‌های مشخص بدهیم؛ سؤالات یا کلمات هدایت‌کننده ندهیم؛ پاسخ‌های کیفی را دسته‌بندی کنیم و ... در ضمن باید با مردم مؤدبانه برخورد کرد! یعنی روش پاسخ‌گویی به پرسش‌نامه را هم به آن ضمیمه کنیم و آخرش هم تشکر کنیم.

یک جایی یک پرسش‌نامه به رتبه‌های برتر کنکور داده بودند. این پرسش‌نامه بدترین پرسش‌نامه‌ی آماری در تاریخ ریاضیات بود. سؤال اول پرسیده بودند کدام کتاب‌های ما را استفاده کردید؟ (کتاب‌های خودشان) و ۸ خط جا گذاشته بودند، بعد پرسیده بودند کدام کتاب‌های ناشران دیگر را استفاده کردید؟ و نصف خط جا گذاشته بودند. خداوند همه را به راه راست هدایت کند.

از عباراتی مثل «بزرگ» و «کوچک» که معیار مشخصی ندارند استفاده نمی‌کنیم.

به پاسخ‌دهنده، نظر خودمان را تحمیل نمی‌کنیم. مثلاً نمی‌پرسیم «نظراتان در مورد برنامه‌ی کامل‌شده چیست؟» چون عبارات «کامل‌شده» نظر مثبت القا می‌کند.

متغیر تصادفی

توی آمار، ما یک چیزی را بررسی می‌کنیم. چرا بررسی می‌کنیم؟ چون از یک آدم به یک آدم دیگر با هم فرق دارد. مثلاً هیچ‌وقت در یک بررسی آماری، تعداد چشم‌های افراد سالم را بررسی نمی‌کنند. چون مال همه‌ی افراد یک جور است. بررسی‌های آماری، به ویژگی‌هایی اختصاص دارد که متغیر هستند. به این ویژگی‌ها (یعنی به موضوع مورد مطالعه) می‌گوییم متغیر تصادفی. دو جور متغیر تصادفی داریم:

الف متغیرهای کمی: مقدار این متغیرها با عدد معلوم می‌شود. یا اندازه‌گیری می‌کنیم یا می‌شماریم.

مثلاً قد، وزن، هزینه، دما، میزان بارندگی، میزان آلودگی هوا، شدت زلزله و ... کمی‌اند.

ب متغیرهای کیفی: این متغیرها با یک کلمه یا نوع معلوم می‌شوند. یعنی فقط اسم دارند. اندازه‌گیری یا شمارش در کار نیست. مثلاً نوع گروه خون، نوع ۲۲/۶، جنسیت، نوع شغل، نوع کشت (آبی باشد یا دیم باشد)، سطح تحصیلات و ... کیفی‌اند.

خود متغیرهای کمی دو جور هستند:

۱ متغیر پیوسته یعنی متغیری که اگر دو مقدار a و b را بگیرد، هر مقدار بین آن‌ها را هم بتواند بگیرد.

مثلاً قد، وزن، زمان، هزینه، میزان بارندگی، اکثر پدیده‌های فیزیکی مثل سرعت، شتاب، جریان، ولتاژ، مقاومت و اکثر مقادیر هندسی مثل اندازه‌ی زوایا، مساحت، محیط، حجم و ... متغیرهای پیوسته‌اند.

۲ متغیر گسسته یعنی متغیری که پیوسته نیست. یعنی هر مقدار بین دو مقدارش را نمی‌گیرد.

معمولاً این متغیرها از نوع شمارشی و تعدادی هستند. مثلاً تعداد طبقات ساختمان (دو طبقه داریم، سه طبقه هم داریم اما ۲/۴ طبقه نداریم). تعداد مکالمات، تعداد بیماران، تعداد روزهای بارانی، تعداد تصادفات و ... گسسته‌اند.

کیفی‌ها هم دو جورند.

۳ اکثر متغیرهای کیفی، اسمی هستند. یعنی فقط نوع دارند. مثلاً گروه خون، رنگ، وضع تأهل، وضع مسکن، وضع سواد (باسواد یا بی‌سواد)، جنسیت، نوع تلفن (ثابت یا همراه)، نوع بیماری و ...

۴ گروه کوچکی از متغیرهای کیفی، یک نوع ترتیب طبیعی دارند. به آن‌ها کیفی ترتیبی می‌گوییم.

مثلاً مراحل تحصیل (دبستان، راهنمایی، دبیرستان، دانشگاه)، مدارک تحصیلی، مراحل رشد، مراحل زندگی، روزهای هفته، فصل‌ها و ماه‌های سال و ... ترتیبی‌اند.

اندازه‌گیری ← پیوسته

شمارش ← گسسته

فقط اسم دارد ← اسمی

نوعی ترتیب طبیعی دارد ← ترتیبی

این هم هست: داده

۲۳- گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟

- (۱) کیفی - اسمی (۲) کیفی - ترتیبی (۳) کمی - پیوسته (۴) کمی - گسسته

۲۴- خرید و فروش کالا براساس تعداد، تابع کدام نوع متغیر است؟

- (۱) پیوسته (۲) اسمی (۳) گسسته (۴) ترتیبی

۲۵- کدام داده، کمی گسسته است؟

- (۱) شدت زلزله (۲) میزان آلودگی هوا (۳) درصد ادبیات یک نفر در کنکور سراسری (۴) هزینه بیمه خودرو

۲۶- برای تشکیل یک نمونه تصادفی ساده، کلید RND یا RAN در ماشین حساب را می‌زنیم و عدد تصادفی a به دست می‌آید. سپس شماره‌ی عضو انتخابی برای نمونه (b) را پیدا می‌کنیم. a و b به ترتیب کدام نوع متغیرند؟

- (۱) کمی پیوسته، کمی پیوسته (۲) کمی پیوسته، کمی گسسته (۳) کمی گسسته، کمی گسسته (۴) کمی گسسته، کمی پیوسته

دامنه‌ی تغییرات

دامنه‌ی تغییرات یعنی اختلاف بیشترین و کمترین داده. آن‌ها را با R نشان می‌دهند. پس: $R = \max - \min$
وقتی دامنه‌ی تغییرات کوچک است احتیاجی به دسته‌بندی نیست. چون اعضا به هم نزدیک‌اند و اختلاف زیاد ندارند؛ می‌گوییم جامعه یک‌دست است اما هر چه قدر دامنه‌ی تغییرات بزرگ‌تر باشد، نمی‌توانیم جامعه را یک‌دست فرض کنیم و مجبوریم دسته‌بندی کنیم.
پس دامنه‌ی تغییرات یعنی طول بازه‌ای که متغیر در آن تغییر می‌کند. اگر دامنه‌ی تغییرات صفر بشود تمام داده‌ها با هم مساوی‌اند.
بعضی وقت‌ها، به همان دلایل که در مورد سرشماری گفتیم، ممکن است نتوانیم دامنه‌ی تغییرات جامعه را حساب کنیم. بلکه به جایش دامنه‌ی تغییرات نمونه را حساب می‌کنیم.
کتاب درسی از شما پرسیده دامنه‌ی تغییرات جامعه بزرگ‌تر است یا نمونه؟ خب دامنه‌ی تغییرات جامعه بیشتر یا مساوی دامنه‌ی تغییرات نمونه است.

۲۷- در نوع طبقه‌بندی و تعیین تعداد طبقات داده‌ها، مهم‌ترین ویژگی چیست؟

- (۱) دامنه‌ی تغییرات (۲) فراوانی (۳) میانه (۴) میانگین

۲۸- کدام عبارت‌ها درست‌اند؟

الف) دامنه‌ی تغییرات جامعه از دامنه‌ی تغییرات نمونه کم‌تر نیست.

ب) از زیادبودن دامنه تغییرات در نمونه، نتیجه می‌شود دامنه تغییرات در جامعه زیاد است.

ج) کوچک‌بودن دامنه‌ی تغییرات در نمونه، نتیجه می‌دهد دامنه‌ی تغییرات جامعه کوچک است.

- (۱) هر سه نادرست‌اند. (۲) الف و ب (۳) الف و ج (۴) ب و ج

۲۹- دامنه‌ی تغییرات داده‌های ۹۹، ۱۱۸، ۱۲۱، ۱۰۱ کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۳۰- اگر به هر داده سه واحد اضافه کنیم، دامنه‌ی تغییرات چه تغییری می‌کند؟

- (۱) سه واحد اضافه می‌شود. (۲) شش واحد اضافه می‌شود. (۳) سه برابر می‌شود. (۴) تغییری نمی‌کند.

دسته‌بندی داده‌ها

بعد از پیدا کردن دامنه‌ی تغییرات، باید تعداد دسته‌ها را معلوم کنیم. البته صورت مسئله به ما تعداد دسته‌ها را می‌دهد. اگر دامنه‌ی تغییرات R و تعداد دسته‌ها k باشد، طول هر دسته $C = \frac{R}{k}$ است، پس داریم:
مثلاً اگر دامنه‌ی تغییرات ۲۴ باشد و ما ۶ دسته بخواهیم، طول دسته‌ها $\frac{24}{6} = 4$ می‌شود. در همین داده‌ها، اگر ۸ دسته بود، طول هر دسته $\frac{24}{8} = 3$ می‌شد.

۳۱- اگر در یک دسته‌بندی طول دسته‌ها برابر ۵ و تعداد طبقات ۱۰ باشد، دامنه‌ی تغییرات کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱۵ (۴) ۵۰

۳۲- در یک جدول، شش دسته با طول ۵ داریم. اگر بیشترین داده ۵۰ باشد، کمترین داده کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۴۰

۳۳- داده‌های آمار در ۹ طبقه به طول دسته‌ی ۴، دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۸ داده بین داده‌ی ماکسیمم و مینیمم به آن‌ها اضافه شود و یک واحد از طول دسته کم کنیم، در دسته‌بندی جدید تعداد دسته‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

(فارج ۱۷ و تهری ۹۰)

(کتاب درسی)

دسته‌ها

الان دامنه‌ی تغییرات را حساب کردیم، تعداد دسته‌ها را می‌دانیم، طول دسته‌ها را هم معلوم کرده‌ایم. حالا وقت دسته‌بندی است. یعنی باید دسته‌ها را پیدا کنیم. مثلاً وقتی ماکسیم و مینیمم داده‌ها ۲۰ و ۳۰ هستند (دامنه‌ی تغییرات می‌شود ۱۰) برای ۴ تا دسته این‌جوری عمل می‌کنیم: طول هر دسته $C = \frac{R}{k} = \frac{10}{4} = 2.5$ است. یعنی باید فاصله‌ی ۲۰ تا ۳۰ را به ۴ قسمت با طول ۲/۵ تقسیم‌بندی کنیم:

$$[20, 22.5), [22.5, 25), [25, 27.5), [27.5, 30]$$

دقت کنید که دسته‌ها به صورت $[a, b)$ هستند. یعنی عدد انتهایی هر دسته، جزء دسته‌ی بعدی است. البته در مورد دسته‌ی آخر، چون دسته‌ی بعدی نداریم مجبوریم بازه‌ی بسته بگیریم.

به عدد شروع دسته‌ها می‌گوییم حد پایین یا کران پایین دسته. به عدد آخر هر دسته هم می‌گوییم حد بالا یا کران بالا. در مثال بالا، دسته‌ی اول $[20, 22.5)$ بود، پس حد بالای دسته‌ی اول می‌شود ۲۲/۵.

من این‌جوری دسته‌ها را نشان می‌دهم:

در واقع یک تصاعد حسابی روی محور ساخته می‌شود. از داده‌ی min با قدرنسبت C به طرف داده‌ی max می‌رویم.

۳۴- اگر داده‌های آماری با ماکسیمم ۷۲ و ۳۲، در ۵ دسته، طبقه‌بندی شوند، کران پایین دسته‌ی دوم کدام است؟

۴۱ (۱) ۴۰ (۲) ۳۷ (۳) ۳۶ (۴)

۳۵- داده‌های آماری پیوسته، در ۸ دسته تقسیم‌بندی شده‌اند که دسته‌ی آخر ۹۲-۸۶ است. کوچک‌ترین این داده‌ها کدام است؟

۴۰ (۱) ۴۲ (۲) ۴۴ (۳) ۴۸ (۴)

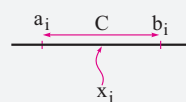
۳۶- در یک دسته‌بندی با دامنه‌ی تغییرات ۳۰، اگر حدود دسته‌ی اول و دوم به صورت $[45, 51)$ و $[51, 57)$ باشد، تعداد دسته‌ها، کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

مرکز دسته

هدف از دسته‌بندی داده‌ها صرف‌نظر از اختلاف‌های جزئی است. یعنی داده‌های توی یک دسته، فرق زیادی با هم ندارند و آن‌ها را یکی می‌گیریم. خب مثلاً همه‌ی اعداد دسته‌ی $(12, 16)$ را می‌خواهیم یکسان بگیریم. به نظر شما همه را ۱۲ بگیریم یا همه را ۱۶ بگیریم؟ هیچ‌کدام! بهترین انتخاب این است که مقدار مشترک داده‌ها را عدد وسطی دسته بگیریم. به این عدد می‌گوییم مرکز دسته یا نشان دسته یا نماینده‌ی دسته. در واقع ارزش مشترک یا اندازه‌ی مشترک داده‌ها در دسته‌ی $[a_i, b_i)$ برابر است با:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

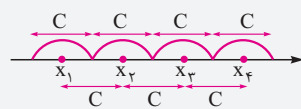


روی محور هم ببینیم:

$$x_i = a_i + \frac{C}{2} = b_i - \frac{C}{2}$$

$$a_i = x_i - \frac{C}{2}$$

$$b_i = x_i + \frac{C}{2} \Rightarrow [a_i, b_i) = [x_i - \frac{C}{2}, x_i + \frac{C}{2})$$



یک چیز کوچولوی دیگر هم بگوییم: فاصله‌ی مرکز دسته‌های متوالی از هم برابر C است، ببین:

$$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = x_n - x_{n-1} = C$$

۳۷- در ۵۶ داده‌ی آماری، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها به ترتیب ۹۶ و ۷۵ هستند. این داده‌ها را در ۷ طبقه دسته‌بندی می‌کنیم. اگر داده‌های هر دسته، یکسان در نظر گرفته شوند، مقدار مشترک آن‌ها در دسته‌ی پنجم چه قدر است؟

۸۷ (۱) ۸۷/۵ (۲) ۸۸ (۳) ۸۸/۵ (۴)

۳۸- اگر در یک جدول فراوانی، بزرگ‌ترین داده ۷۰ و طول دسته‌ها ۶ و تعداد دسته‌ها ۵ باشد، ارزش یا اندازه‌ی مشترک داده‌های دسته‌ی اول کدام عدد است؟

۴۳ (۱) ۴۰ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴)

(کتاب درسی)

۳۹- در جدول فراوانی روبه‌روی، حدود دسته‌ی اول و مرکز دسته‌ی آخر آمده است. کدام درست نیست؟

حدود دسته	مرکز	
۷-۱۱	a	$e = 19$ (۱)
۱۱-b	c	$c = 13$ (۲)
d-e	f	$m = 27$ (۳)
g-h	k	$k = 21$ (۴)
m-n	۲۵	

۴۰- کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌های آماری ۱۷/۲ و ۲۲/۶ هستند. اگر کران پایین دسته‌ی دوم ۱۷/۸ باشد، مرکز دسته‌ی آخر کدام است؟

- (۱) ۲۱/۷ (۲) ۲۱/۸ (۳) ۲۲/۳ (۴) ۲۲/۴ (فارج ۸۶)

۴۱- در یک دسته‌بندی با ۷ دسته، اگر اختلاف بیشترین و کم‌ترین داده ۲۸ و نشان دسته‌ی وسط ۲۶ باشد، حد بالای دسته‌ی آخر کدام است؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴) ۴۲

۴۲- داده‌های آماری به ۱۲ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. حدود دسته‌ی اول به صورت [۲۳، ۲۶] می‌باشد. اگر این داده‌ها به ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، مرکز دسته‌ی وسط کدام است؟

- (۱) ۴۰/۵ (۲) ۴۱ (۳) ۴۱/۵ (۴) ۴۲

وقتی C عدد اعشاری می‌شود!

تا الان هر بار از $C = \frac{R}{k}$ استفاده کردیم، جواب C عدد صحیح شد! ولی بعضی وقت‌ها این جور نمی‌شود. مثلاً اگر $R = ۲۵$ و $k = ۷$ باشد، جواب C می‌شود تقریباً $۳/۵۷۱۴$. خب دسته به طول $۳/۵۷۱۴$ که به درد نمی‌خورد. چون هدف از دسته‌بندی، از بین بردن اختلاف‌های جزئی داده‌ها بود نه این که در حد یک هزارم و یک صدم دقیق بشویم. پس باید C را عدد مناسب‌تری بگیریم. مثلاً $۳/۶$ یا ۴ خوب است. دقت کنید که نمی‌شود $۳/۵$ را برداشت. چون ۷ دسته با طول $۳/۵$ فاصله‌ای به طول $۲۴/۵ = ۷ \times ۳/۵$ را می‌پوشاند ولی دامنه‌ی تغییرات ما ۲۵ است. پس اگر C اعشاری شد، باید عدد مناسب‌تری بیشتر از آن برداریم. در تست معمولاً به سمت بالا گرد می‌کنیم؛ یعنی عدد صحیح بعدی را می‌گیریم.

۴۳- داده‌های آماری با دامنه‌ی تغییرات ۲۶ در شش دسته با طول صحیح طبقه‌بندی شده‌اند، مجموع طول دسته‌ها چه قدر است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴) ۳۴

دسته‌های متقارن

در سؤال قبلی دیدیم که اگر C اعشاری بشود، خودمان درستش می‌کنیم و عدد مناسب‌تری بیشتر از آن می‌گیریم. کتابتان گفته موضوع تقارن از زیباترین مفاهیم ریاضی است. پس دسته‌بندی را متقارن می‌کنیم. قضیه این جوری است که وقتی C مناسب‌تری انتخاب می‌کنیم، جمع طول دسته‌ها از دامنه‌ی تغییرات بیشتر است. آن وقت حد بالای دسته‌ی آخر، از داده‌ی ماکسیمم بیشتر می‌شود (یعنی دسته‌ها از دامنه‌ی تغییرات بیرون می‌آیند). ما به خاطر تقارن و زیبایی، این مقدار اضافی را دو قسمت می‌کنیم و در سرتو می‌گذاریم. یعنی دسته‌ی اول را زودتر شروع می‌کنیم. مثلاً در سؤال قبل، دامنه‌ی تغییرات ۲۶ بود و ما شش دسته به طول ۵ گرفتیم که ۳۰ واحد می‌شود. یعنی ۴ تا بیشتر از ۲۶. این ۴ تا را در دو طرف می‌گذاریم یعنی دسته‌ی اول را دو واحد زودتر شروع می‌کنیم:



کتاب درسی گفته این دومی زیباتر است. من بی‌تقصیرم!

۴۴- در داده‌های آماری با ماکسیمم و مینییم ۴۱ و ۱۹، اگر شش دسته‌ی متقارن با طول صحیح داشته باشیم، حدود دسته‌ی دوم کدام است؟

- (۱) ۲۲-۲۵ (۲) ۲۳-۲۷ (۳) ۲۲-۲۶ (۴) ۲۱-۲۴

فراوانی

بعد از دسته‌بندی باید ببینیم چند نفر در هر دسته هستند. مثلاً معلم شما می‌پرسد: چند نفر بین ۱۰ تا ۱۲ اند؟ چند نفر بین ۱۲ تا ۱۴ هستند و به تعداد دفعات تکرار یک داده یا تعداد داده‌های یک دسته می‌گوییم فراوانی. البته درست‌تر این است که بگوییم فراوانی مطلق.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
f_i	۵	۴	۳	۳	۳	۲

فراوانی مطلق داده‌ی x_i را با f_i نشان می‌دهیم. مثلاً اعداد حاصل از ۲۰ بار پرتاب تاس را طبقه‌بندی کردیم:

از این جدول می‌فهمیم عدد ۴، ۳ بار ظاهر شده. یا به زبان ریاضی: فراوانی داده‌ی $x_4 = ۴$ برابر $f_4 = ۳$ است. بقیه‌ی فراوانی‌ها هم معلوم‌اند: $f_1 = ۵, f_2 = ۴, f_3 = ۳$

$f_5 = ۳, f_6 = ۲$

جمع همه‌ی فراوانی‌ها می‌شود تعداد کل افراد نمونه. یعنی داریم: $f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$

۴۵- اگر فراوانی طبقات مختلف یک دسته‌بندی ۱، ۱، ۵، ۵، ۹، ۹، ۱۲ باشد، تعداد داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴۷ (۳) ۶ (۴) ۴

فراوانی نسبی

توی یک کلاس ۳ نفر نمره‌ی ۱۸ تا ۲۰ آورده‌اند و توی یک کلاس دیگر، ۷ نفر نمره‌ی ۱۸ تا ۲۰ گرفته‌اند. حالا سهم دانش‌آموزان قوی‌تر در کدام کلاس بیشتر است؟ یک کم فکر کنید... به این سؤال نمی‌شود جواب داد! چون به تعداد کل نفرات هر کلاس بستگی دارد. مثلاً ۳ نفر از بین ۱۰ نفر، خیلی بهتر از ۷ نفر در بین ۱۰۰ نفر است. $(\frac{۷}{۱۰۰} < \frac{۳}{۱۰})$

یعنی فراوانی مطلق چیز به دردیخوری نیست. مهم این است که ببینیم آن دسته (یا داده) به نسبت کل چه قدر سهم دارد.
پس فراوانی را تقسیم بر تعداد کل می کنیم تا نسبت به دست بیاید. به این نسبت می گوئیم فراوانی نسبی: $\frac{f_i}{n} = \text{فراوانی نسبی}$ $\frac{f_i}{n} = \frac{\text{فراوانی}}{\text{کل (جمع فراوانی‌ها)}}$
جواب فراوانی نسبی یک عدد کسری بین ۰ و ۱ می شود.

جمع همه ی فراوانی های نسبی می شود ۱. چون: $\frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \dots = \frac{f_1 + f_2 + \dots}{n} = \frac{n}{n} = 1$
پس برای از بین بردن تأثیر اختلاف نمونه ها (کلاس های بزرگ و کوچک)، فراوانی را بر کل تقسیم می کنیم.

۴۶- به منظور از بین بردن تأثیر اندازه ی نمونه و امکان مقایسه ی نتایج آزمون، محاسبه ی کدام مورد لازم است؟

- (۱) فراوانی نسبی (۲) میانگین وزنی (۳) ضریب تغییرات (۴) فراوانی تجمعی

۴۷- اگر توزیع فراوانی مطلق به صورت زیر باشد، فراوانی نسبی دسته ی سوم کدام است؟

x_i	۲	۵	۸	۱۱
f_i	۶	۸	۴	۱۲

- (۱) $\frac{2}{15}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۴۸- فراوانی نسبی طبقه ای ۵/۰ و تعداد داده ها ۸۰ است. فراوانی مطلق آن کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۴۹- فراوانی نسبی طبقه ای ۱۵/۰ و فراوانی مطلق آن ۱۲ است. در این دسته بندی، فراوانی نسبی دسته ای با ۱۰ داده چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۵۰- هشتاد داده ی آماری در ۷ طبقه دسته بندی شده اند. اگر ۲۰ داده ی جدید به این جدول افزوده شود، فراوانی نسبی وسط تغییر نمی کند. نسبت افزایش داده های دسته ی مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۵۱- در جدول روبه رو چه نسبتی از داده ها در سه طبقه ی اول هستند؟

نماینده ی طبقه	۱۷	۲۱	۲۵	۲۹
فراوانی مطلق	۴	۵	۷	۴

- (۱) ۷/۰ (۲) ۵/۰ (۳) ۶/۰ (۴) ۸/۰

درصد فراوانی نسبی

$\frac{3}{7}$ بیشتر است یا $\frac{2}{5}$ ؟ یک نفر در امتحان عربی $\frac{3}{7}$ تست ها را درست زده و دیگری $\frac{2}{5}$ تست ها را درست زده است. کدام بهتر؟ خب هر کس زیست بیشتر زده باشد!! نه پدر جان! عربی کدامشان بهتر است؟ واقعیتش اینه که مردم با کسر راحت نیستند. مقایسه ی کسرها یک کم زحمت دارد. اما درصد را همه بهتر می فهمند.

پس بیایید فراوانی نسبی را به درصد بیان کنیم. این جوری: $۱۰۰\% \times \text{فراوانی نسبی} = \text{درصد فراوانی نسبی}$

پس اگر درصد فراوانی را با P_i (برای داده ی i ام یا دسته ی i ام) نشان بدهیم، داریم:

$$P_i = \frac{f_i}{n} \times 100\%$$

جمع درصدهای فراوانی باید بشود ۱۰۰. (با عرض شرمندگی) جواب درصدهای فراوانی هم یک چیزی بین ۰ و ۱۰۰ است!

۵۲- در داده های آماری ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۵، ۵، ۶، ۶، ۷، ۷، ۸، ۸، ۹ درصد فراوانی نسبی مضارب ۳ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۵ (۳) $\frac{37}{5}$ (۴) ۴۸

(تهری ۸۳)

۵۳- اندازه ی قد ۱۲۰ دانش آموز، در جدول زیر دسته بندی شده است. فراوانی دسته ی چهارم کدام است؟

مرکز دسته	۱۵۵	۱۵۸	۱۶۱	۱۶۴	۱۶۷	۱۷۰
درصد فراوانی نسبی	۱۰	۱۵	۱۸	X	۲۰	۱۲

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰

۵۴- در یک نمونه گیری از تعداد افراد خانواده های یک ساختمان، F تعداد خانواده ها با x نفر است. چند درصد از خانواده ها ۳ یا ۴ نفری هستند؟

x	۱	۲	۳	۴	۵
F	۹	۱۸	۲۲	۲۶	۵

- (۱) ۴۵ (۲) ۵۴ (۳) ۵۸ (۴) ۶۰

۵۵- دانش آموزان یک مدرسه با سال تولد یکسان را وزن کشی کرده و عدد صحیح وزن آنان را یادداشت کرده ایم. چند درصد آن ها وزن کم تر از ۵۰ دارند؟ (فاج ۸۸)

وزن	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱
تعداد	۸	۹	۱۲	۱۵	۶	۵

- (۱) ۷۲ (۲) ۷۵ (۳) ۷۸ (۴) ۸۰

۵۶- در دسته بندی ۱۲۰ داده ی آماری در ۹ طبقه، دسته ی اول به صورت ۲۵-۲۲ می باشد. می دانیم ۴۵ درصد داده ها کم تر از ۳۴ و فراوانی نسبی دسته ی وسط ۲/۰ است. تعداد داده های کم تر ۳۷ از کدام است؟

- (۱) ۶۷ (۲) ۷۶ (۳) ۷۸ (۴) ۸۷

۵۷- ۷۵ داده‌ی آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند؛ کوچک‌ترین داده‌ها ۲۷ و بزرگ‌ترین آن‌ها ۴۷/۸ می‌باشد. می‌دانیم ۲۸ درصد داده‌ها کم‌تر از ۳۶ و ۴۰ درصد داده‌ها کم‌تر از ۳۹ می‌باشند. فراوانی مطلق دسته‌ی وسط کدام است؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

فراوانی نسبی

بعضی وقت‌ها به جای فراوانی هر دسته، مجموع فراوانی‌ها از دسته‌ی اول تا آن دسته برای ما مفیدتر است. به این فراوانی می‌گویند تجمعی. فراوانی تجمعی دسته‌ی اول، همان فراوانی مطلقش است. اما برای دسته‌ی دوم، باید فراوانی دسته‌ی اول و دوم را جمع کنیم. برای دسته‌ی سوم، باید اول و دوم و سوم را جمع کنیم؛ همین‌جور تا آخر. برای دسته‌ی آخر باید همه را با هم جمع کنیم. یعنی فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر می‌شود n (تعداد کل داده‌ها).

مثلاً اگر فراوانی‌ها به ترتیب ۳، ۴، ۶ باشند، فراوانی‌های تجمعی به ترتیب عبارت‌اند از: ۳ و $۳+۵=۸$ و $۳+۵+۴=۱۲$ و $۳+۵+۴+۶=۱۸$

همون مطلق $\leftarrow$ تعداد کل (n)

اگر فراوانی‌های تجمعی را به ما بدهند، می‌توانیم فراوانی‌های مطلق را حساب کنیم.

اولین فراوانی تجمعی که فراوانی مطلق هم هست. برای بعدی‌ها، هر فراوانی تجمعی را منهای قبلی‌اش می‌کنیم تا فراوانی مطلق دریابید. مثلاً اگر تجمعی‌ها ۴، ۱۱، ۱۷، ۲۰ باشند، مطلق‌ها به ترتیب ۴ و $۱۱-۴=۷$ و $۱۷-۱۱=۶$ و $۲۰-۱۷=۳$ است. راستی تعداد کل داده‌ها هم ۲۰ است. (آخری!)

فراوانی‌های تجمعی همیشه صعودی‌اند؛ یعنی فراوانی تجمعی هر دسته از فراوانی تجمعی قبلی کم‌تر نیست.

۵۸- توزیع تعداد فرزندان ۲۰ خانواده به صورت زیر است. فراوانی تجمعی دسته‌ی چهارم کدام است؟

حدود طبقات	۰-۱	۲-۳	۴-۵	۶-۷	۸-۹	۱۰ (۲)	۵ (۱)
فراوانی مطلق	۲	۸	۵	۳	۲	۱۸ (۴)	۱۵ (۳)

۵۹- فراوانی نسبی دسته‌ها در یک جدول به ترتیب ۳/۰، ۱۵/۰، ۲/۰ و ... است. اگر تعداد کل داده‌ها ۶۰ باشد، فراوانی تجمعی دسته‌ی دوم کدام است؟

۱۵ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴)

۶۰- داده‌های جدول مقابل، داده‌های آماری پیوسته است. چند درصد از داده‌ها، در فاصله‌ی $[۵/۲۱، ۵/۱۸]$ قرار دارند؟ (تقریبی ۸۸)

مرکز دسته	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶	۲۵ (۲)	۲۰ (۱)
فراوانی تجمعی	۵	۱۳	۲۵	۳۴	۴۰	۴۰ (۴)	۳۰ (۳)

۶۱- در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شده‌ی روبه‌رو، اگر درصد فراوانی نسبی دسته‌ی وسط ۲۴ باشد، فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم کدام است؟

مرکز دسته	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۱۵ (۲)	۱۴ (۱)
فراوانی تجمعی	۵	۱۴	a	۴۱	۵۰	۱۷ (۴)	۱۶ (۳)

فراوانی نسبی و درصد فراوانی تجمعی

اگر فراوانی‌های مطلق از طبقه‌ی اول تا طبقه‌ی دلخواهی را با هم جمع کنیم، فراوانی تجمعی آن طبقه به دست می‌آید.

حالا اگر فراوانی‌های نسبی از طبقه‌ی اول تا طبقه‌ی دلخواه را با هم جمع کنیم، فراوانی تجمعی نسبی آن طبقه به دست می‌آید و اگر درصد‌های فراوانی نسبی از طبقه‌ی اول تا طبقه‌ی دلخواه را جمع کنیم، به درصد فراوانی تجمعی می‌رسیم. بگذارید این کارها را ببینیم:

چهارتا ویژگی برای فراوانی‌های تجمعی (تجمعی عادی، تجمعی نسبی یا درصد تجمعی) داریم:

۱- برای دسته‌ی اول، فراوانی تجمعی و غیرتجمعی برابر است.

۲- برای دسته‌ی آخر فراوانی تجمعی برابر مجموع فراوانی‌ها است. (مطلق: n ، نسبی: ۱، درصدی: ۱۰۰)

۳- همیشه فراوانی‌های تجمعی صعودی‌اند (یعنی از یک دسته‌ی به دسته‌ی بعد زیاد می‌شوند و یا ثابت می‌مانند).

۴- اگر فراوانی تجمعی هر دسته را منهای دسته‌ی قبلی‌اش کنیم، به فراوانی غیرتجمعی می‌رسیم.

برای درصد فراوانی تجمعی یا فراوانی تجمعی نسبی، می‌توانیم از اول فراوانی‌های نسبی را حساب کنیم و بعد با هم جمع کنیم یا این‌که اول مطلق‌ها را تجمعی کنیم و بعد نسبی‌اش را به دست بیاوریم.

۶۲- در داده‌های روبه‌رو درصد فراوانی تجمعی متناظر با $x_3 = ۴$ کدام است؟

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۳۰ (۲)	۸ (۱)
F_i	۵	۷	۸	۵	۵	۶۶/۷ (۴)	۳۳/۳ (۳)

نمودار ساقه و برگ

از نمودار ساقه و برگ (stem & leaf) وقتی استفاده می‌شود که تعداد ارقام داده‌ها خیلی به هم نزدیک باشد. مثلاً دمای بدن افراد یک چیزی بین ۳۵ تا ۴۲ است. یعنی حتماً دهگان‌ش ۳ یا ۴ است.

ببینید: ۳۷, ۳۶, ۳۶, ۳۷, ۳۷, ۳۸, ۳۹, ۴۰, ۴۰ : دمای بدن ۱۰ نفر

چهار نفر آخر تب دارند!

حالا می‌توانیم این داده‌ها را با استفاده از ساقه و برگ نشان بدهیم. رقم سمت راست برگ است و سایر ارقام، ساقه هستند.

ساقه	برگ
۳	۷, ۶, ۶, ۷, ۷, ۸, ۹

ساقه	برگ
۴	۰, ۰

این جوری:

البته باید در جلوی هر ساقه، برگ‌هایش را صعودی بنویسیم (یعنی از کم به زیاد):

ساقه	برگ
۳	۶۶۷۷۷۸۹

ساقه	برگ
۴	۰۰

تعداد داده‌ها برابر تعداد برگ‌هاست.

به این نمودار نگاه کنید! چه چیزهایی می‌گویید؟ بیشترین داده ۴۰ و کم‌ترین ۳۶ بوده؛ دوتا ۳۶ و چهار تا ۳۷ و یک ۳۸ و یک ۳۹ و دوتا ۴۰ داشتیم.

فایده‌ی نمودار ساقه و برگ این است که از خود داده‌ها استفاده می‌کند و همه‌ی داده‌ها را توی خودش دارد. تعداد داده‌ها برابر تعداد برگ‌هاست.

اگر قرار باشد از روی نمودار داده‌ها را بخوانیم، یک کلید هم به ما می‌دهند. مثلاً می‌گویند: $۳۷ = ۳ \text{ / } ۷$ یا $۳۴ = ۳ \text{ / } ۴$.

۶۳- در نمودار ساقه و برگ زیر، زمانی که طول می‌کشد تا آمار مسمومیت در فرد ظاهر شود را آورده‌ایم. داده‌ها بر حسب دقیقه و با یک رقم اعشار هستند. دامنه‌ی تغییرات کدام است؟

ساقه	برگ
۵	۱۲۲۵
۶	۰۱۳۴۸
۷	۱۴۵۹۹
۸	۳۴۷

۵ / ۱ (۲)

۸ / ۷ (۱)

۵ / ۵ (۴)

۳ / ۶ (۳)

۶۴- در نمودار ساقه و برگ مقابل، اندازه‌ی نمونه برابر کدام است؟

ساقه	برگ
۱	۰۳۳۴
۲	۰۲۴۴۸۸
۳	۲

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۳۲ (۴)

۱۱ (۳)

۶۵- در نمودار ساقه و برگ روبه‌رو به جای ☐ چند عدد مختلف می‌توان نوشت؟

ساقه	برگ
۱	۲ ☐ ۵۶
۲	۷۹
۳	۲۴ ☐

۳ (۲)

۴ (۱)

۱ (۴)

۲ (۳)

۶۶- در نمودار ساقه و برگ ۵۰ داده بین ۱۰ و ۲۰، برخی داده‌ها یک رقم اعشاری دارند. برگ‌های مربوط به ساقه‌ی ۱۴، به صورت ۰۳۵۵۵۵۶۸۸۹ هستند. چند درصد داده‌ها دقیقاً ۱۴ / ۵ بوده‌اند؟

۲۰ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

۶۷- در نمودار ساقه و برگ مقابل چند درصد داده‌ها ناکم‌تر از ۴۰ و کم‌تر یا مساوی ۴۷ است؟

ساقه	برگ
۳	۲۳۳۳۴۴۵۵۶۷
۴	۰۱۳۴۴۵۵۷۷
۵	۱۱۱۲۲۳۳۴

۲۵ (۲)

۲۴ (۱)

۳۲ (۴)

۲۸ (۳)

نمودارها- نمودار میله‌ای

از نمودارها یا شاخص‌های هندسی، برای به تصویر درآوردن و تجسم جامعه استفاده می‌کنیم. نمودار میله‌ای برای متغیرهای کیفی (مثل نوع بیمه، نوع گروه خون و ...) یا متغیرهای کمی گسسته خوب است. در نمودارهای میله‌ای، مقایسه‌ی فراوانی‌ها مهم است.

اگر برای داده‌های کیفی نمودار میله‌ای رسم بشود، ترتیب قرار گرفتن میله‌ها مهم نیست. آن وقت بهتر است طوری نمودار بکشیم که فراوانی‌ها از بزرگ به کوچک یا از کوچک به بزرگ باشند (آن وقت مقایسه را سریع‌تر انجام می‌دهیم).

در نمودار میله‌ای، متغیر تصادفی را روی محور x ها و طول میله‌ها (فراوانی یا درصد فراوانی) را روی محور y ها مشخص می‌کنیم.

اگر روی محور y ها فراوانی داشته باشیم، اندازه‌ی جامعه برابر است با جمع طول‌های میله‌ها.

۶۸- در یک کلاس، توزیع گروه خون به شکل نمودار میله‌ای مقابل است. تعداد دانش‌آموزان این کلاس کدام است؟



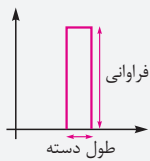
۳۰ (۲)

۲۵ (۱)

۵۵ (۴)

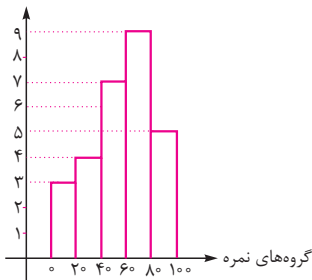
۵۰ (۳)

نمودار مستطیلی



این نمودار برای متغیرهای کمی پیوسته خوب است (مثل سن، نمره، هزینه و ...).
در این نمودار برای هر دسته یک مستطیل می‌کشیم. قاعده‌ی این مستطیل روی محور x ها و برای طول دسته‌ها است.
ارتفاعش هم متناسب با فراوانی است.
در نمودار مستطیلی، مساحت مستطیل‌ها با هم مقایسه می‌شوند.
هر چه قدر مساحت مستطیل بیشتر باشد، تعداد کسانی که در آن دسته قرار می‌گیرند بیشتر است.
اصلاً کتابتان نمودار مستطیلی را این‌جوری تعریف کرده: نمایشی از داده‌های دسته‌بندی‌شده که سطح مستطیل‌ها متناسب با فراوانی دسته‌ها است.
➡ به نمودار مستطیلی، نمودار ستونی یا هیستوگرام یا بافت‌نگار هم می‌گویند!

۶۹- نمرات دانش‌آموزان در یک آزمون تستی، در نمودار زیر آمده است. چند نفر کم‌تر از ۶۰ درصد گرفته‌اند؟



- (۱) ۷
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۳
- (۴) ۱۴

۷۰- در نمودار مستطیلی با طول دسته‌های مساوی، کدام ویژگی مستطیل‌ها مقایسه می‌شوند؟

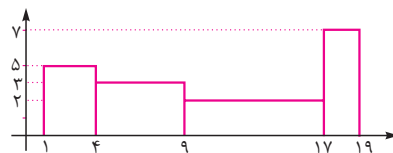
(۴) ارتفاع

(۳) مساحت

(۲) محیط

(۱) قاعده

۷۱- در نمودار مستطیلی مقابل، فراوانی در کدام دسته بیشتر است؟



(۲) $[4, 9)$

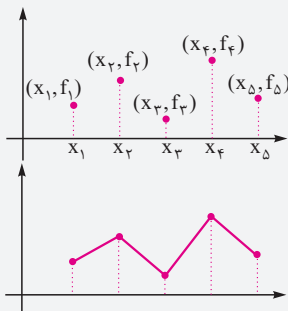
(۱) $[1, 4)$

(۴) $[17, 19]$

(۳) $[9, 17)$

چندبرفراوانی

وقتی می‌خواهیم داده‌های کمی پیوسته را بررسی کنیم، چندبرفراوانی بهترین نمودار است. ماجرا این است که کتابتان از نمودار مستطیلی خیلی راضی نیست! به قول کتاب: در نمودار مستطیلی، فراوانی در دسته‌ها تغییر نمی‌کند. منظورش این است که نمودار مستطیلی یک شکل پلکانی دارد و فراوانی را در طول هر دسته، ثابت می‌گیرد.



پس برای این‌که تغییرات را بهتر نشان بدهیم، از چندبر استفاده می‌شود.

اول باید مرکز دسته‌ها را مشخص کنیم. بعد نقاط (x_i, f_i) را روی دستگاه محورهای مختصات بگذاریم.

➡ طول این نقاط برابر مرکز دسته و عرض آن‌ها همان فراوانی است. مثلاً این‌جوری:

اگر این نقطه‌ها را با خطی شکسته به هم وصل کنیم، چندبر فراوانی به دست می‌آید:

➡ کتاب درسی تأکید کرده که اگر به جای فراوانی، از فراوانی‌های نسبی استفاده کنیم بهتر است. چون عملاً فراوانی هر دسته را با کل مقایسه می‌کنیم. می‌توانیم چندبر را هم با فراوانی نسبی رسم کنیم. این چندبر فراوانی نسبی هم برای داده‌های پیوسته خوب است.

۷۲- در توزیع فراوانی داده‌های پیوسته، کدام نمودار مناسب است؟

(۴) دایره‌ای

(۳) میله‌ای

(۲) چندبر فراوانی

(۱) مستطیلی

۷۳- چه نموداری برای توزیع درصدهای انواع هزینه‌های یک شرکت مناسب است؟

(۴) مستطیلی

(۳) چندبر فراوانی نسبی

(۲) دایره‌ای

(۱) چندبر فراوانی

۷۴- در یک نمودار چندبر فراوانی نقاط $(11/5, 3)$ ، $(14/5, 6)$ ، $(17/5, 7)$ و $(20/5, 4)$ را داریم. کدام درست نیست؟

(۲) طول دسته‌ها ۳ است.

(۱) چهار دسته داریم.

(۴) فراوانی تجمعی دسته‌ی دوم ۱۰ است.

(۳) اندازه‌ی نمونه ۲۰ است.

۷۵- در جدول فراوانی داده‌های پیوسته و دسته‌بندی‌شده، نقاط $(21, 42)$ و $(24, 47)$ متوالیاً از نمودار چندبر هستند. حدود دسته‌ی بعدی چگونه است؟

(۴) $[25/5, 28/5)$

(۳) $[22/5, 25/5)$

(۲) $[47, 52)$

(۱) $[24, 27)$

(تجربی ۸۷)

۷۶- برای دسته‌بندی زیر، نقطه‌ی متناظر با دسته‌ی وسط روی نمودار چندبر کدام است؟

حدود دسته	۲۰-۲۳	۲۳-۲۶	۲۶-۲۹	۲۹-۳۲	۳۲-۳۵
فراوانی تجمعی	۴	۱۹	۲۵	۳۲	۴۰

(۱) $(۲۷/۵, ۷)$

(۲) $(۲۷/۵, ۶)$

(۳) $(۲۹, ۲۵)$

(۴) $(۲۶, ۲۵)$

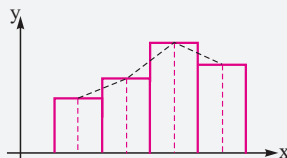
از مستطیلی به میله‌ای و چندبر برسیم

اگر نمودار مستطیلی را داشته باشیم می‌توانیم از روی آن نمودار میله‌ای یا چندبر بکشیم. برای میله‌ای، باید از مرکز هر دسته به وسط عرض بالایی‌اش وصل کنیم: (الف) حالا برای رسیدن به چندبر، باید ته میله‌ها را به هم وصل کنیم. این جور: (ب) فقط یک اشکال هست! مساحت زیر این نمودار چندبر، با مساحت نمودار مستطیلی مساوی نیست. این را هم حل می‌کنیم. نگران نباشید.

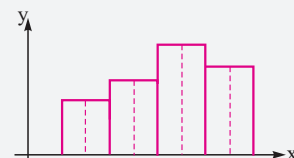
اگر اندازه‌ی نمونه را بزرگ کنیم، تعداد دسته‌ها بیشتر می‌شود و پاره‌خط‌های بیشتری داریم. چندبر فراوانی کم‌کم به یک منحنی هموار شبیه می‌شود. این منحنی بیان‌کننده‌ی وضعیت متغیر در جامعه است. در اکثر پدیده‌های طبیعی به شکل یک زنگوله درمی‌آید. این جور: (ج)



ج



ب



الف

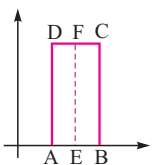
۷۷- مستطیل ABCD قسمتی از نمودار مستطیلی است. کدام خط جزو نمودار میله‌ای است؟

BC (۲)

AD (۱)

DC (۴)

EF (۳)

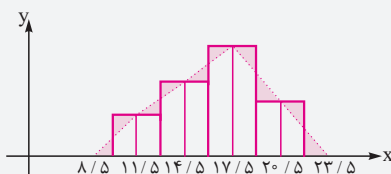
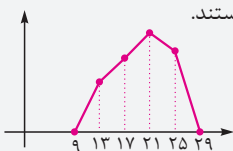


چندبر فراوانی تکمیل شده

یادتان هست که گفتیم مساحت زیر نمودار چندبر با مستطیلی مساوی نیست؟ حالا می‌خواهیم این مشکل را حل کنیم، یعنی نمودار چندبر را تکمیل کنیم تا مساحتش (مساحت زیر آن) با نمودار مستطیلی مساوی بشود.

مساحت نمودار مستطیلی برابر است با: $nC = \text{طول دسته} \times \text{اندازه‌ی نمونه}$ $S =$

قضیه از این قرار است: دوتا داده با فراوانی صفر به سرته داده‌ها اضافه می‌کنیم و نمودار را به محور x ها متصل می‌کنیم. این داده‌های جدید $x_1 - C$ (از مرکز دسته‌ی اول به اندازه‌ی طول دسته کم کنیم) و $x_k + C$ (به مرکز دسته‌ی آخر به اندازه‌ی طول دسته اضافه کنیم) هستند. پس مثلاً اگر مرکز دسته‌ها ۱۳، ۱۷، ۲۱، ۲۵ و ۲۹ باشد (پس طول دسته‌ها ۴ است)، داده‌ی $x_1 - C = ۱۳ - ۴ = ۹$ و $x_k + C = ۲۹ + ۴ = ۳۳$ را اضافه می‌کنیم و نمودار را به محور x ها متصل می‌کنیم.



با این کار، مساحت زیر مستطیلی و چندبر فراوانی مساوی می‌شود. شکل را ببینید:

۷۸- در داده‌های آماری دسته‌بندی‌شده، مساحت نمودار مستطیلی آن را S_1 و سطح زیر نمودار چندبر فراوانی را که دو سر آن بر محور افقی باشد، S'

می‌نامیم. نسبت $\frac{S}{S'}$ چگونه است؟ (قاج ۸۹)

(۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد

(۳) برابر ۱

(۲) بزرگ‌تر از ۱

(۱) کوچک‌تر از ۱

۷۹- سطح زیر نمودار چندبر فراوانی و نمودار مستطیلی یک جدول با هم برابرند. در این حالت برای نمودار چندبر فراوانی ۸ نقطه روی محور x ها و ۶ نقطه روی محور y ها داریم. تعداد دسته‌ها کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۷

(۲) ۶

(۱) ۵

۸۰- دسته‌ی اول یک جدول فراوانی $[۹, ۱۵]$ و فراوانی آن ۷ است. طول نقاط اول و دوم چندبر فراوانی تکمیل‌شده، چه اعدادی هستند؟

(۴) صفر و ۱۲

(۳) ۶ و ۱۲

(۲) ۵ و ۶

(۱) صفر و ۶

۸۱- در یک دسته‌بندی، کم‌ترین و بیشترین داده، ۶ و ۱۸ هستند و چهار طبقه داریم. انتهای نمودار چندبر فراوانی تکمیل شده در کدام نقطه به محور x ها وصل می‌شود؟

۱۹/۵ (۴)

۲۰ (۳)

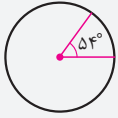
۲۰/۵ (۲)

۲۱ (۱)

نمودار دایره‌ای

نمودار دایره‌ای (pie diagram) از یک دایره ساخته می‌شود! معمولاً برای داده‌های کیفی رسم می‌شود.

برای هر نوع، یک قاچ از دایره را در نظر می‌گیریم. زاویه‌ی این قاچ $\theta = \frac{f}{n} \times 360^\circ$ است. پس می‌توان گفت: $360^\circ \times$ فراوانی نسبی = زاویه در نمودار دایره‌ای
مثلاً اگر در 20° داده، دسته‌ای با فراوانی ۳ باشد، زاویه‌ی متناظر آن $\theta = \frac{3}{4} \times 360^\circ = 54^\circ$ خواهد بود. در شکل هم این جوری می‌بینیم:



جمع زاویه‌های تمام دسته‌ها روی هم باید 360° بشود.

کتاب درسی سؤال کرده: «آیا با تغییر شعاع دایره، تفسیر جدیدی از توزیع داده‌ها به دست می‌آید؟»

خب، نه. بزرگ و کوچک شدن نمودار دایره‌ای توزیع فراوانی را تغییر نمی‌دهد. در واقع توی نمودار دایره‌ای زاویه مهم است نه مساحت. ترتیب نواحی روی دایره هم اهمیتی ندارد.

بیشتر تست‌های کنکور از نمودار دایره‌ای هستند. چون تنها نموداری است که فرمول دارد. پس یک بار دیگر بگوییم:

$$\theta = \frac{f}{n} \times 360^\circ$$

۸۲- رسم نمودار دایره‌ای که ترتیب کنار هم قرار گرفتن نواحی آن اهمیت نداشته باشد، برای کدام متغیر مناسب‌تر است؟

مراحل رشد (۱)

تعداد تصادفات (۲)

وزن افراد (۳)

گروه خون (۴)

۸۳- در 180° داده‌ی آماری، فراوانی طبقه‌ای 20° است. زاویه‌ی مربوط به این طبقه در نمودار دایره‌ای چه قدر است؟

80° (۴)

60° (۳)

40° (۲)

20° (۱)

۸۴- تعداد دانش‌آموزان سال چهارم ریاضی، تجربی و انسانی به ترتیب 60° ، 50° و 70° نفر است. در نمودار دایره‌ای این سه کلاس، زاویه‌ی مربوط به کلاس انسانی چند درجه است؟

100° (۴)

120° (۳)

150° (۲)

50° (۱)

۸۵- در نمودار دایره‌ای وضعیت تحصیلی ۴۸ کارمند یک شرکت، زاویه‌ی مرکزی مربوط به «کارشناسی» 45° بوده است. تعداد کارمندان با مدرک کارشناسی کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۸۶- داده‌های آماری در ۹ طبقه دسته‌بندی شده‌اند، فراوانی تجمعی نسبی در دسته‌ی چهارم و پنجم به ترتیب $28/0$ و $40/0$ است. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی پنجم چند درجه است؟

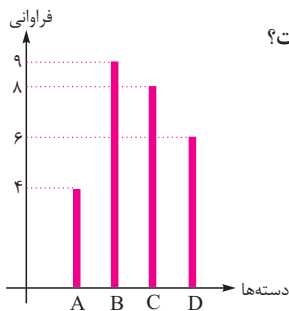
$43/2$ (۴)

$42/6$ (۳)

$41/4$ (۲)

$40/5$ (۱)

۸۷- شکل مقابل، نمودار میله‌ای داده‌ها در ۴ دسته است. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مرکزی دسته‌ی D چند درجه است؟



60° (۱)

75° (۲)

80° (۳)

90° (۴)

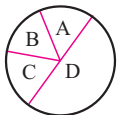
۸۸- در نمودار مقابل تعداد افراد دسته‌های A، B، C و D به نسبت ۱، ۲، ۳، ۶ است. زاویه‌ی دسته‌ی B کدام است؟

30° (۲)

20° (۱)

60° (۴)

40° (۳)



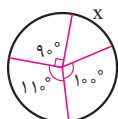
۸۹- در بین 15000 نفر، نمودار دایره‌ای مقابل برای ۴ گروه سنی به دست آمده است. چند نفر در گروه سنی X قرار دارند؟

3000 (۲)

6000 (۱)

1500 (۴)

2500 (۳)



۹۰- شرکتی ۱۶۰ کارمند دارد که مدارک تحصیلی آنان با ۶ کد متمایز مشخص شده‌اند. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مرکزی هر گروه با واحد درجه مطابق جدول روبه‌رو است. تعداد کارکنان با کد ۴ کدام است؟

کد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
زاویه‌ی مرکزی	۲۷	۴۵	۹۹	α	۵۴	۱۸

54° (۲)

52° (۱)

58° (۴)

56° (۳)

پاسخ تشریحی آمار و مدل سازی

$$3E > \frac{\sqrt{3}}{2} aE$$

پس داریم:

$$\Rightarrow 3 > \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

بنابراین با حذف E ها می توان گفت:

$$\Rightarrow a < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

و این یعنی:

اما توی گزینه ها $\frac{2}{\sqrt{3}}$ نداریم. خب نترسید. باید ساده تر کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 2}{\sqrt{3} \times 2} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

پس در واقع $a < 2\sqrt{3}$ جواب است.

نگران علامت E نباشید. منظور از تأثیر خطا در مساحت و محیط، قدرمطلق این اعداد است و مشکلی برای نامساوی ها به وجود نمی آید.

این چیزی که صورت سؤال گفته یعنی $d = 10 + E$

و $E < \frac{1}{6\pi}$. حال مساحت را می خواهد. اگر یادتان باشد (توی فیزیک هم دیدید) مساحت دایره $\pi \frac{d^2}{4}$ است.

$$S = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (10 + E)^2 = \frac{\pi}{4} (100 + 20E + E^2)$$

پس داریم:

قرار بود از E^2 هم صرف نظر کنیم. پس می شود:

$$S = \frac{\pi}{4} (100 + 20E) = 25\pi + \frac{5\pi E}{2}$$

حالا سؤال گفته بود E از $\frac{1}{6\pi}$ کم تر است:

$$E < \frac{1}{6\pi} \xrightarrow{\times 5\pi} 5\pi E < \frac{5\pi}{6\pi} \Rightarrow E_1 < \frac{5}{6}$$

پس خطای مساحت تقریباً از $\frac{5}{6}$ کم تر است.

کلمه ی «تقریباً» را برای این گذاشته است که از E^2 صرف نظر کرده ایم.

اگر مدل شعاع به صورت $R = 2 + E$ باشد، مدل

حجم را می توانیم پیدا کنیم:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi (2 + E)^3 = \frac{4}{3} \pi (8 + 6E^2 + 12E + E^3)$$

از توان های E هم چشم می پوشیم:

$$V \approx \frac{4}{3} \pi (8 + 12E) = \frac{4}{3} \pi (8) + \frac{4}{3} \pi (12E)$$

$$E' = \frac{4}{3} \pi (12E) = 16\pi E$$

پس خطای حجم می شود:

ما می خواهیم $16\pi E < 1$ باشد، پس $E < \frac{1}{16\pi}$.

خب به جای x، مدلس را بگذاریم:

$$y = x^3 - x = (2 + E)^3 - (2 + E)$$

$$= 8 + 12E + 6E^2 + E^3 - 2 - E$$

$$= 6 + 11E + 6E^2 + E^3$$

$$\approx 6 + 11E$$

با عرض شرمندگی فراوان، اتحاد $(a + b)^3$ را یادآور شدیم:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

خب مساحت می شود طول ضرب در عرض:

$$S = ab = (\Delta + E_1)(3 + E_2) = 15 + 3E_1 + 5E_2 + E_1E_2$$

$$S \approx 15 + 3E_1 + 5E_2$$

قرار شد ضرب E ها را بی خیال شویم:

۱- گزینه ی ۱

۲- گزینه ی ۴

۳- گزینه ی ۴

۴- گزینه ی ۳

در این اندازه گیری، واحد اندازه گیری $^\circ/5$ کیلو

بوده و خطا از $^\circ/5$ کیلو کم تر است.

۵- گزینه ی ۴

در سؤال قبل گفتیم خطا از واحد اندازه گیری

کم تر است. پس الان، از $L = 6 + E$ (برحسب سانتی متر) می فهمیم $|E|$ از یک سانتی متر کم تر است. این یعنی دقت خط کش ما، در حد سانتی متر بوده. حالا می خواهیم برحسب میلی متر بیانش کنیم. خب باید برویم یک خط کش جدید با دقت میلی متر پیدا کنیم و با آن دوباره اندازه بگیریم. جواب هم معلوم نیست.

فرض کنید طول خط کش تا سه رقم اعشار $6/217$ سانتی متر باشد.

آن وقت برحسب سانتی متر می شود $L = 6 + E$ و برحسب میلی متر می شود

$$L = 62 + E'$$

که هیچ کدام از گزینه ها نیست.

۶- گزینه ی ۳

مساحت دایره می شود $S = \pi R^2$. پس داریم:

$$S = \pi R^2 = \pi (3 + E)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد اول}} = \pi (9 + 6E + E^2)$$

$$= 9\pi + 6\pi E + \pi E^2$$

راستی E^2 را بی خیال می شویم. پس جواب می شود $S \approx 9\pi + 6\pi E$

خب برویم محیط و مساحت مربع را حساب کنیم:

$$4E = 4a = 4(\Delta + E) = 20 + 4E$$

$$4E = 4a = 4(\Delta + E) = 20 + 4E \approx 25 + 10E$$

راستی E^2 را بی خیال می شویم.

حالا نگاه کنید ... خطای اندازه گیری ضلع مربع، E بوده و در محیط به اندازه ی $4E$ و در مساحت به اندازه ی $10E$ اثر گذاشت. پس نسبت این تأثیر در

مساحت به محیط می شود $\frac{10E}{4E}$ یعنی $\frac{5}{2}$ یا $2/5$.

کتاب درسی پرسیده: خطای ناشی از اندازه گیری اضلاع، بیشتر در محیط مربع اثر می گذارد یا در مساحت آن؟ خب توی این سؤال که در مساحت بیشتر اثر گذاشت. حالا برویم سؤال بعدی

۸- گزینه ی ۲

خب فرض کنیم ضلع مثلث $a + E$ باشد. محیط

و مساحت را نگاه کنید.

محیط مثلث متساوی الاضلاع به ضلع x، می شود $3x$. مساحتش هم

$$\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \text{ است.}$$

$$\text{محیط} = 3x = 3(a + E) = 3a + 3E$$

$$\text{مساحت} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (a + E)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 + 2aE + E^2)$$

$$\approx \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} aE$$

آهان ... خطای ناشی از ضلع (یعنی E)، در محیط به $3E$ تبدیل شد. اما در

مساحت به $\frac{\sqrt{3}}{2} aE$ رسیدیم. سؤال گفته در محیط بیشتر اثر گذاشته است.

خیال!

فصل هجدهم

آمار و مدل سازی

۱۳- گزینه‌ی ۴

حجم استوانه می‌شود مساحت قاعده ضرب در ارتفاع، یعنی $\pi R^2 h$.

برویم حجم این استوانه را حساب کنیم:

$$V = \pi R^2 h = \pi (r + E_1)^2 (\delta + E_r)$$

$$= \pi (r^2 + 2rE_1 + E_1^2) (\delta + E_r)$$

قرار بود از E^2 ها صرف‌نظر کنیم:

$$\approx \pi (r^2 + 2rE_1) (\delta + E_r)$$

$$\approx \pi (20 + 20E_1 + 4E_r + 4E_1E_r)$$

از ضرب E ها هم خوشمان نمی‌آید، پس مدل V می‌شود:

$$V \approx \pi (20 + 20E_1 + 4E_r) = 20\pi + 20\pi E_1 + 4\pi E_r$$

یعنی E_1 و E_r به ترتیب 20π و 4π برابر می‌شوند.

۱۴- گزینه‌ی ۳

برویم حجم این مکعب مستطیل را پیدا کنیم:

حجم این مکعب مستطیل، $V = L_1 L_2 L_3$ یعنی طول $\times$ عرض $\times$ ارتفاع

$$V = L_1 L_2 L_3 = (3 + E_1)(4 + E_r)(6 + E_r)$$

است.

$$= (12 + 4E_1 + 3E_r + E_1E_r)(6 + E_r)$$

$$\approx 72 + 24E_1 + 18E_r + 12E_r + 4E_1E_r + 3E_rE_r$$

جملاتی که خط زدیم، شامل ضرب E_i ها بود. خوب قرار بود از ضرب E ها صرف‌نظر کنیم.

پس در مدل حجم این مکعب، $24E_r$ ندیدیم.

۱۵- گزینه‌ی ۲

۱۶- گزینه‌ی ۳

در سرشماری، همه را بررسی می‌کنیم. اما در

نمونه‌گیری، فقط بعضی‌ها را بررسی می‌کنیم. حالا اگر اندازه‌ی نمونه (یعنی اندازه‌ی زیرمجموعه) برابر اندازه‌ی جامعه بشود، یعنی سرشماری کرده‌ایم.

۱۷- گزینه‌ی ۲

کتاب درسی گفته «عمل نمونه‌گیری مهم‌ترین

بخش آمار را تشکیل می‌دهد».

حالا چرا؟ چون نمونه باید خصوصیات جامعه را نمایان کند. برای این که گروه کوچکی از اعضا بتوانند خصوصیات عده‌ی بزرگ‌تری را بیان کنند باید به نحو مناسبی انتخاب بشوند. مثلاً نمونه باید به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد و انتخاب اعضایش هم از قاعده و قانون خاصی پیروی نکند.

۱۸- گزینه‌ی ۴

۱۹- گزینه‌ی ۳

قرار شد عدد رندم را در اندازه ضرب کنیم:

$$\frac{74}{8} = 374 \times \frac{200}{100} = 748 \text{ بعد اعشارش را برداریم: } 74 \text{ و یکی اضافه کنیم: } 75$$

۲۰- گزینه‌ی ۳

وقتی نمونه‌ی تصادفی از ۱ تا n می‌خواهیم، عدد تصادفی را در n ضرب می‌کنیم، بعد اعشارش را می‌اندازیم و یکی اضافه می‌کنیم. حالا اگر نمونه‌ی تصادفی از a تا b می‌خواهیم، باید عدد تصادفی را ضرب در اندازه‌ی جامعه (یعنی تعداد اعداد از a تا b) کنیم، بعد اعشارش را بیندازیم و a تا اضافه کنیم. پس اگر فرمول دوست دارید:

$$\text{شماره‌ی عضو اول} + [\text{اندازه‌ی جامعه} \times \text{عدد تصادفی}] = \text{عضو انتخابی}$$

$$\text{مثلاً در این تست: } 23 = [39/9] + 23 = 62 = [0/614 \times 65] + 23$$

از ۲۳ تا ۸۷، تعداد اعداد ۶۵ تا است. $(87 - 23 + 1)$. حتماً می‌دانید...

۲۱- گزینه‌ی ۲

با توجه به این حرفا، الگوی خاص مناسب نیست.

۲۲- گزینه‌ی ۴

گروه خون، کیفی اسمی است! این هم سراسری ۹۰.

۲۳- گزینه‌ی ۱

۲۴- گزینه‌ی ۳

مثلاً گاهی تخم‌مرغ را براساس تعداد می‌خریم. بعضی چیزها را براساس وزن می‌خریم. خوب تعداد، متغیر گسسته است.

۲۵- گزینه‌ی ۳

شدت زلزله، میزان آلودگی هوا و هزینه بیمه پیوسته‌اند. چون اندازه‌گیری می‌شوند. اما درصد ادبیات کنکور را با شمارش تعداد درست‌ها و غلط‌ها به دست می‌آوریم.



اگر همه‌ی تست‌ها را درست بزنی، درصد ادبیات می‌شود ۱۰۰. حالا اگر یک زده داشته باشی، درصدتان می‌شود ۹۶. بین ۹۶ تا ۱۰۰، هیچ مقداری وجود ندارد. یعنی هیچ کس نمی‌تواند در ادبیات (که ۲۵ سؤال دارد) ۹۷ درصد یا ۹۸ درصد بزند! پس گسسته است.



تصور غلطی وجود دارد که هر داده‌ای که اعشار داشته باشد، پیوسته است. این طور نیست! مثلاً تعداد طبقات ساختمان می‌تواند ۲/۵ هم باشد ولی داده‌ی گسسته است. هم چنین درصد کنکور یا نمره‌های امتحانی شما، با این که اعشاری هم هست، ولی داده‌ی گسسته است.

۲۶- گزینه‌ی ۲

ماشین حساب، در جواب RAN، عدد تصادفی (a) بین صفر و ۱ می‌دهد که پیوسته است. ما این عدد را در اندازه‌ی جامعه ضرب می‌کردیم و اعشارش را حذف می‌کردیم. پس حاصل b گسسته است.

۲۷- گزینه‌ی ۱

۲۸- گزینه‌ی ۲

الف درسته. چون دامنه‌ی تغییرات جامعه، بیشتر یا مساوی نمونه است. مثلاً اگر از کلاس شما ۴ نفر را انتخاب کنیم، اختلاف قد بلندترین و کوتاه‌ترین آن‌ها ۲۴ سانتی‌متر است. در کل کلاس، اختلاف بلندترین و کوتاه‌ترین نفر، نمی‌تواند کم‌تر از ۲۴ سانتی‌متر باشد. (چون همین ۴ نفر هم توی کلاس‌اند) **ب** هم درسته. وقتی بین ۴ نفر از کلاس شما، ۵/۰ متر اختلاف قد هست، خوب در کل کلاس هم حداقل نیم متر اختلاف هست. اما **ج** غلطه، وقتی بین چند نفر انتخابی، دامنه‌ی تغییرات قدها کم است نمی‌شود گفت در بین کل کلاس هم کم است. شاید آدم‌های بلندتر و کوتاه‌تری در افراد کلاس باشند که توی نمونه نیستند.

۲۹- گزینه‌ی ۴

دامنه‌ی تغییرات، اختلاف بیشترین و کم‌ترین بود. الان بیشترین ۱۲۱ و کم‌ترین ۹۹ است. پس داریم: $R = 121 - 99 = 22$

۳۰- گزینه‌ی ۴

وقتی به هر داده سه واحد اضافه می‌کنیم، همه ۳ واحد زیاد می‌شوند.

پس بیشترین و کم‌ترین داده هم ۳ تا زیاد می‌شوند. مثل این که همه برون روی یک سکوی ۳ سانتی! اختلاف بیشترین قد و کم‌ترین قد که فرقی نمی‌کند. به هر کس ۳ تا اضافه کنیم $R = \max - \min$ ببینید:

$$R' = (\max + 3) - (\min + 3) = \max - \min = R$$

پس اضافه کردن عدد ثابتی به همه‌ی داده‌ها (یا کم کردن عدد ثابتی از همه‌ی داده‌ها) اثری روی دامنه‌ی تغییرات نمی‌گذارد. یعنی R تغییر نمی‌کند!

۳۱- گزینه ۴

گفتیم که $C = \frac{R}{k}$ ، یعنی:

$$\text{دامنه‌ی تغییرات} = \frac{\text{طول دسته}}{\text{تعداد دسته}}$$

حالا در این مسئله، $C = 5$ و $k = 10$ است. پس داریم:
 $\Delta = \frac{R}{10}$
 $\Rightarrow R = 50$

بنابراین دامنه‌ی تغییرات برابر است با:

۳۲- گزینه ۲

شش دسته با طول ۵ داریم.

پس $C = 5$ و $k = 6$ ، می‌توانیم R را پیدا کنیم:

$$C = \frac{R}{k} \Rightarrow 5 = \frac{R}{6} \Rightarrow R = 30$$

یعنی دامنه‌ی تغییرات ۳۰ است. سؤال گفته بیشترین داده ۵۰ بوده است؛ پس

$$R = \max - \min \xrightarrow[\max = 50]{R = 30} 30 = 50 - \min \Rightarrow \min = 20$$

بنابراین کم‌ترین داده ۲۰ بوده.

۳۳- گزینه ۳

۹ طبقه به طول دسته‌ی ۴ یعنی دامنه‌ی

تغییرات $R = kC = 9 \times 4 = 36$ بوده است.

حالا گفته ۸ داده بین ماکسیمم و مینیمم اضافه می‌کنیم. پس دامنه‌ی

تغییرات فرقی نمی‌کند (چون جدیدها بین ماکسیمم و مینیمم هستند، تغییری نداریم):

$$\min \xrightarrow[\text{داده‌های جدید}]{\max} \max$$

اما یک واحد از طول دسته کم می‌کنیم. یعنی:

$$C' = C - 1 = 4 - 1 = 3$$

حالا چندتا دسته داریم؟ خوب ۱۲ تا، ببین:

۳۴- گزینه ۲

دامنه‌ی تغییرات می‌شود:

$$C = \frac{R}{k} = \frac{40}{5} = 8$$

حالا ۵ تا دسته داریم، پس طول هر دسته برابر است با:



پس دسته‌ی دوم، $[40, 48]$ است و کران پایینی می‌شود ۴۰.

۳۵- گزینه ۳

دسته‌ی آخر ۹۲-۸۶ است. پس طول دسته‌ها

$C = 6$ بوده (از ۸۶ تا ۹۲، شش تا فاصله دارد) سؤال گفته ۸ تا دسته داریم.

پس می‌توانیم دامنه‌ی تغییرات را پیدا کنیم:

$$C = \frac{R}{k} \xrightarrow[k=8]{C=6} 6 = \frac{R}{8} \Rightarrow R = 48$$

از طرفی دامنه‌ی تغییرات، اختلاف بیشترین و کم‌ترین بود. الان بیشترین داده (حد بالای دسته‌ی آخر) ۹۲ است.

$$R = \max - \min \Rightarrow 48 = 92 - \min \Rightarrow \min = 44$$

یعنی داده‌ی مینیمم ۴۴ بوده.

محور را می‌بینیم:



ما باید از دسته‌ی هشتم، به دسته‌ی اول بیاوریم. طول هر دسته هم ۶-۸۶=۹۲-۸۶=۶

$$\min = 92 - \frac{48}{6} = 92 - 8 = 84$$

۳۶- گزینه ۲

این حدود دسته چی میگن؟ دوتا چیز:

اولاً وقتی دسته‌ی اول $[45, 51]$ است، داده‌ی مینیمم ۴۵ بوده.

ثانیاً طول دسته‌ها $6 = 51 - 45 = 57 - 51 = 6$ بوده.

طول دسته‌ها همان اختلاف حد بالا و پایین دسته، اختلاف حدهای

بالای دو دسته‌ی متوالی یا اختلاف حدهای پایین آنها است.

دامنه‌ی تغییرات را هم داریم: $R = 30$

پس تعداد دسته‌ها را می‌شود پیدا کرد:

$$C = \frac{R}{k} \xrightarrow[C=6]{R=30} 6 = \frac{30}{k} \Rightarrow k = 5$$

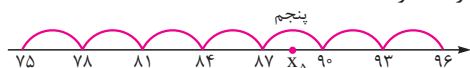
یعنی ۵ تا دسته داریم.

۳۷- گزینه ۴

دامنه‌ی تغییرات می‌شود $R = 96 - 75 = 21$ ؛ تعداد

دسته‌ها هم ۷ است. (سؤال گفته) پس طول هر دسته می‌شود $C = \frac{R}{k} = \frac{21}{7} = 3$

بنابراین دسته‌ها عبارت‌اند از:



ما مرکز دسته‌ی پنجم را می‌خواستیم:

$x_5 = 87 + 1/5 = 88.2$

۳۸- گزینه ۱

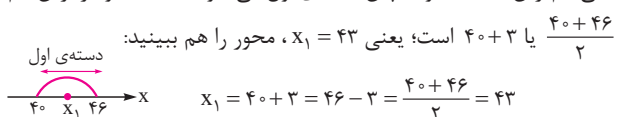
طول دسته‌ها $C = 6$ و تعداد دسته‌ها $k = 5$

است. پس دامنه‌ی تغییرات می‌شود:

دامنه‌ی تغییرات برابر اختلاف ماکسیمم و مینیمم بود:

$$R = \max - \min \xrightarrow[\max = 70]{R = 30} 30 = 70 - \min \Rightarrow \min = 40$$

یعنی کم‌ترین داده ۴۰ بوده. پس دسته‌ی اول می‌شود $[40, 46]$ و مرکزش هم



۳۹- گزینه ۳

این تمرین کتاب در صفحه‌ی ۶۱ جالب بود! طول

دسته‌ها $4 = 11 - 7$ است. پس جدول کامل این بود:

مرکز	حدود
۹	۷-۱۱
$13 \leftarrow c$	۱۱-۱۵
۱۷	۱۵-۱۹
$21 \leftarrow k$	۱۹-۲۳
۲۵	۲۳-۲۷

یعنی بین گزینه‌ها، $m = 27$ درست نیست.

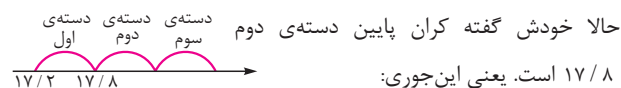
۴۰- گزینه ۳

وقتی کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده را می‌دهند،

فقط یک کار می‌شود کرد: چه کاری؟

خب دامنه‌ی تغییرات را حساب می‌کنیم:

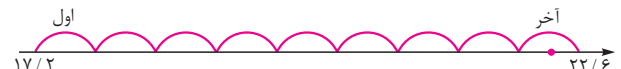
$$R = \max - \min = 22/6 - 17/2 = 5/4$$



حالا خودش گفته کران پایین دسته‌ی دوم $C = 0/6$ بوده $(17/8 - 17/2 = 0/6)$.

پس طول دسته هم $k = \frac{R}{C} = \frac{5/4}{0/6} = 9$

بیا باید تعداد دسته‌ها را حساب کنیم:



حالا مرکز دسته‌ی آخر را می‌خواهد. یعنی از $22/6$ ، نصف طول دسته به عقب

$$b_9 = x_9 = \frac{C}{k} = \frac{0/6}{9} = 22/3$$

بیاوریم:

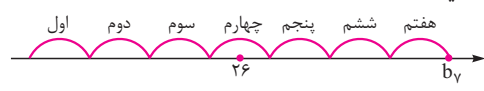
گزینه‌ی ۲ - ۴۱

تعداد دسته‌ها را داده، اختلاف بیشترین و کم‌ترین داده هم که R است. (یعنی همون دامنه‌ی تغییرات).

پس می‌دانیم $k=7$ و $R=28$ و می‌توانیم طول دسته را پیدا کنیم:

$$C = \frac{R}{k} = \frac{28}{7} = 4$$

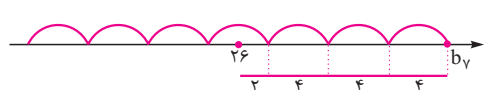
حالا به محور نگاه کنید:



بین ۷ تا دسته، دسته‌ی چهارم وسط است. سؤال گفته نشان دسته‌ی وسط، $x_4 = 26$ است. ما دنبال حد بالای دسته‌ی آخر هستیم. یعنی b_7 را می‌خواهیم. دوباره به محور نگاه کنید ... از ۲۶ تا b_7 چه قدر فاصله است؟ چندتا دسته؟ خوب سه تا دسته‌ی کامل و یک نصفه. یعنی داریم:

$$b_7 = 26 + 3C + \frac{C}{2} = 26 + 3 \times 4 + \frac{4}{2} = 26 + 12 + 2 = 40$$

روی محور هم بد نیست:



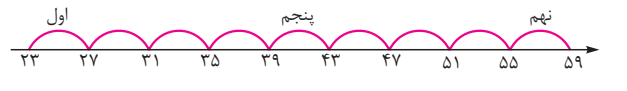
گزینه‌ی ۲ - ۴۲

چون حدود دسته‌ی اول (۲۳، ۲۶) است، طول دسته $C=3$ بوده ($26-23=3$) پس دامنه‌ی تغییرات $R=kC=12 \times 3=36$ است.

حالا گفته این داده‌ها را در ۹ طبقه دسته‌بندی می‌کنیم. دامنه‌ی تغییرات فرقی نکرده، یعنی همون ۳۶ است. طول دسته‌های جدید برابر است با:

$$C' = \frac{R}{k'} = \frac{36}{9} = 4$$

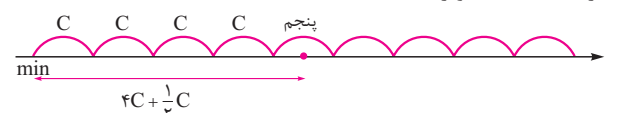
حالا مرکز دسته‌ی وسط را می‌خواهد. از داده‌ی مینیمم یعنی ۲۳ شروع می‌کنیم و دسته‌ها را می‌نویسیم:



پس دسته‌ی وسط یعنی دسته‌ی پنجم به صورت (۳۹، ۴۳) است و مرکزش می‌شود:

$$x_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{39 + 43}{2} = 41$$

مرکز دسته‌ی وسط (یعنی مرکز دسته‌ی پنجم)، از داده‌ی مینیمم به اندازه‌ی $C=4/5$ جلوتر است.



$$x_5 = \min + 4/5 C = 23 + 4/5 (4) = 23 + 16/5 = 23 + 3.2 = 26.2$$

گزینه‌ی ۳ - ۴۳

طول دسته‌ها می‌شود:

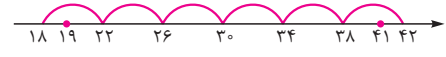
$$C = \frac{R}{k} \xrightarrow{R=26, k=6} C = \frac{26}{6} \approx 4.33$$

اما سؤال گفته دسته به طول صحیح، پس مجبوریم $C=5$ بگیریم.

$C=4$ کافی نیست. به قول کتاب درسی‌تان: ۶ دسته به طول ۴، فاصله‌ی ۲۶ واحدی را نمی‌پوشاند. حالا مجموع طول دسته‌ها را می‌خواهیم. ۶ تا دسته بود و طولشان را هم ۵ گرفتیم. مجموع طول‌ها می‌شود $6 \times 5 = 30$.

گزینه‌ی ۳ - ۴۴

دامنه‌ی تغییرات این داده‌ها می‌شود $R=41-19=22$ ، برای ۶ تا دسته، باید طول دسته $C=\frac{R}{k}=\frac{22}{6} \approx 3.67$ باشد. چون سؤال طول دسته صحیح خواسته باید $C=4$ بگیریم. حالا ۶ دسته به طول ۴ داریم که ۲۴ واحد می‌شود. اما دامنه‌ی تغییرات ما ۲۲ است. پس دو واحد اضافه داریم که قرار شد در سرورته بگذاریم. (هر طرف یک واحد) پس دسته‌ها به این صورت است:



بنابراین حدود دسته‌ی دوم (۲۲، ۲۶) است.

گزینه‌ی ۲ - ۴۵

چیزی که سؤال گفته یعنی جدول این‌شکلی بوده:

f	۱۲	۹	۹	۵	۵	۵	۱	۱
---	----	---	---	---	---	---	---	---

ما تعداد داده‌ها را می‌خواهیم. پس باید فراوانی‌ها را با هم جمع کنیم:

$$n = f_1 + f_2 + \dots = 12 + 9 + 9 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 = 47$$

گزینه‌ی ۱ - ۴۶

جمع فراوانی‌ها = تعداد کل

گزینه‌ی ۱ - ۴۷

خوب گفتیم فراوانی نسبی یعنی فراوانی تقسیم بر

تعداد کل. اول تعداد کل را پیدا کنیم:

$$n = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 6 + 8 + 4 + 12 = 30$$

$$\frac{f_3}{n} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

حالا فراوانی نسبی دسته‌ی سوم:

گزینه‌ی ۲ - ۴۸

فراوانی نسبی چی بود؟ فراوانی تقسیم بر کل!

سؤال گفته فراوانی نسبی ۵/۸۰ و تعداد $n=80$ است. پس داریم:

$$\frac{f_1}{n} = \frac{f_1}{80} \xrightarrow{\text{طرفین و وسطین}} f_1 = \frac{5}{100} \times 80 = \frac{400}{100} = 4$$

یعنی فراوانی مطلق این طبقه، ۴ است.

گزینه‌ی ۳ - ۴۹

فراوانی نسبی $\frac{f_1}{n}$ بود. پس داریم:

$$\frac{f_1}{n} = \frac{12}{15} \xrightarrow{\text{طرفین و وسطین}} \frac{f_1}{15n} = \frac{12}{15} \Rightarrow n = \frac{12}{15} \times \frac{15}{4} = 4 \times 20 = 80$$

آهان، تعداد کل داده‌ها ۸۰ تا بوده.

حال پرسیده فراوانی نسبی دسته‌ای با ۱۰ داده چه قدر است؟ خوب کاری نداره:

$$\frac{f}{n} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8}$$

می‌توانیم مستقیماً از تناسب برویم:

فراوانی نسبی	فراوانی
$0/15$	۱۲
x	۱۰

$$x = \frac{10 \times 0/15}{12} = \frac{1/5}{12} = \frac{1}{60}$$

$$x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

اگر به جای ۱/۵ بنویسیم ۳/۴ کار تمام است:

گزینه‌ی ۳ - ۵۰

فراوانی نسبی دسته‌ی وسط می‌شود:

توی ۷ طبقه، دسته‌ی وسط طبقه‌ی چهارم است!

سؤال گفته ۲۰ تا داده‌ی جدید اضافه می‌کنیم، پس n می‌شود: $80 + 20 = 100$ ولی نمی‌دانیم چندتا از این ۲۰ داده‌ی جدید، توی دسته‌ی چهارم می‌روند.

فرض کنیم x تا به دسته‌ی چهارم اضافه بشوند. فراوانی نسبی دسته‌ی چهارم

$$\frac{f_4 + x}{n} = \frac{f_4 + x}{100}$$

می‌شود:

اما صورت سؤال می گوید فراوانی نسبی دسته ی چهارم تغییر نمی کند. یعنی این دوتا با هم مساوی اند:

$$\frac{f_4}{80} = \frac{f_4 + x}{100} \xrightarrow{\text{طرفین و وسطین}} 100f_4 = 80(f_4 + x)$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } 20} 5f_4 = 4(f_4 + x) = 4f_4 + 4x \Rightarrow f_4 = 4x$$

از ما پرسیده «نسبت افزایش داده های مذکور به فراوانی مطلق قبلی کدام است؟»
 افزایش داده ها x بود، فراوانی قبلی هم f_4 بود، پس $\frac{x}{f_4}$ را می خواهیم که می شود:

گزینه ۴ - ۵۱ در سه طبقه ی اول روی هم $4+5+7=16$ تا داده وجود دارد. کل داده ها $4+5+7+4=20$ تا هستند.

نسبت هم یعنی فراوانی نسبی. پس نسبت داده های سه طبقه ی اول می شود:

$$\frac{f}{n} = \frac{16}{20} = 0.8$$

گزینه ۳ - ۵۲ این عددها ۱۶ تا هستند، پس $n=16$.
 ما دنبال مضرب های ۳ هستیم، یعنی ۶، ۳ و ۹ را می خواهیم. ۶ تا از داده ها مضرب ۳ هستند. پس درصد فراوانی نسبی مضارب ۳ می شود:

$$P = \frac{f}{n} \times 100 = \frac{f=6}{n=16} \rightarrow P = \frac{6}{16} \times 100 = \frac{3}{8} \times \frac{25}{1} = \frac{75}{2} = 37.5$$

گزینه ۴ - ۵۳ اول بیایید جدول را کامل کنیم، یعنی x را پیدا کنیم. جمع درصد های فراوانی باید ۱۰۰ باشد، یعنی جمع همه ی اعداد سطر دوم می شود ۱۰۰:

$$10+15+18+x+20+12=75+x=100$$

پس: $x=25$

یعنی درصد فراوانی دسته ی چهارم ۲۵ است. فرمول درصد فراوانی را ببینید:

$$P = \frac{f}{n} \times 100$$

تعداد کل داده ها (یعنی دانش آموزان) هم $n=120$ است. پس می توانیم f را پیدا کنیم:

$$\frac{P=25}{n=120} \rightarrow \frac{1}{24} = \frac{f}{120} \times \frac{1}{100} \Rightarrow 4f = 120 \Rightarrow f = 30$$

رسیدیم به این که درصد فراوانی دسته ی چهارم ۲۵ درصد است.

تعداد کل هم که ۱۲۰ بود. پس در این دسته ۲۵ درصد (یعنی $\frac{1}{4}$) از ۱۲۰ نفر داریم که می شود ۳۰ تا.

گزینه ۴ - ۵۴ تعداد کل خانواده ها برابر است با جمع کل فراوانی ها:

$$n = F_1 + F_2 + \dots = 9 + 18 + 22 + 26 + 5 = 80$$

ما خانواده های ۳ یا ۴ نفری را می خواهیم. پس روی هم $22+26$ یعنی ۴۸ تا خانواده مورد نظر ما هستند. درصدشان می شود:

$$P = \frac{f}{n} \times 100 = \frac{48}{80} \times 100 = 60$$

گزینه ۴ - ۵۵ وزن های کم تر از ۵۰ (مگس وزن!) در چهار دسته ی اول هستند.

فراوانی این ها روی هم می شود:

$$f = 8 + 9 + 12 + 15 = 44$$

تعداد کل داده هم برابر مجموع فراوانی ها است:

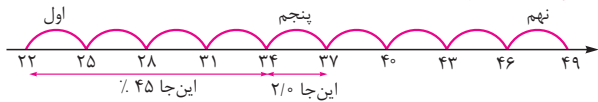
$$n = 8 + 9 + 12 + 15 + 6 + 5 = 55$$

پس درصد این ها می شود:

$$P = \frac{f}{n} \times 100 = \frac{44}{55} \times 100 = 80$$

گزینه ۲ - ۵۶

اول یک نگاه به محور کنیم:



بین ۹ تا دسته، دسته ی پنجم وسط است. سؤال گفته فراوانی نسبی دسته ی وسط 20% است و ۴۵ درصد داده ها کم تر از ۳۴ هستند.

خب بالاخره تصمیم بگیرید! یا فراوانی نسبی یا درصد فراوانی. نمی شود در یک قسمت بگوییم ۴۵ درصد و در قسمت بعدی بگوییم 20% . پس به جای 20% هم می گوییم ۲۰ درصد. روی هم از ۲۲ تا ۳۷ می شود $45+20$ یعنی ۶۵ درصد. ما تعداد داده های (یعنی فراوانی مطلق) کم تر از ۳۷ را می خواهیم:

$$\frac{\text{فراوانی}}{\text{کل}} \times 100 = \text{درصد}$$

$$65 = \frac{f}{\frac{f}{100}} \times \frac{5}{100} \xrightarrow{\text{طرفین و وسطین}} 65f = 6 \times \frac{13}{100} = 78$$

گزینه ۲ - ۵۷

کوچک ترین و بزرگ ترین داده را گفته که R را پیدا کنیم:

$$R = 47/8 - 27 = 20/8$$

حالا ۷ طبقه داریم. پس می توانیم طول دسته ها را پیدا کنیم:

$$C = \frac{R}{k} = \frac{20/8}{7} \xrightarrow{\text{گرد کنیم}} C = 3$$

باز برویم سراغ محور جادویی خودمان:



توی هفت تا دسته، دسته ی وسط چهارمی است.

به محور نگاه کنید، سهم دسته ی وسط (چهارم) می شود $40-28=12$ درصد. تعداد کل داده ها $n=75$ است. پس فراوانی مطلق دسته ی وسط را می توانیم حساب کنیم:

$$P = \frac{f}{n} \times 100$$

$$\frac{P=12}{n=75} \rightarrow 12 = \frac{f}{75} \times \frac{4}{100} \xrightarrow{\text{طرفین و وسطین}} 4f = 36 \Rightarrow f = 9$$

گزینه ۴ - ۵۸

فراوانی تجمعی دسته ی چهارم می شود جمع فراوانی های دسته ی اول تا چهارم:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 2 + 8 + 5 + 3 = 18$$

گزینه ۴ - ۵۹ اول بریم سراغ آخر کار!! سؤال از ما فراوانی

تجمعی دسته ی دوم را خواسته، یعنی جمع فراوانی های اول و دوم؛ یا به زبان خودمان $f_1 + f_2$ را می خواهیم.

حالا چی به ما داده؟ فراوانی نسبی داده.

فراوانی نسبی چی بود؟ فراوانی تقسیم بر کل. آهان! معلوم شد:

$$\frac{f_1}{n} = \frac{f_1}{60} \Rightarrow 0.3 = \frac{f_1}{60} \Rightarrow f_1 = 60 \times 0.3 = 18$$

$$\frac{f_2}{n} = \frac{f_2}{60} \Rightarrow 0.15 = \frac{f_2}{60} \Rightarrow f_2 = 60 \times 0.15 = 9$$

بنابراین جواب سؤال یعنی $f_1 + f_2$ می شود $18+9=27$.

گزینه ۳ - ۶۰

فاصله ی $(18/5, 21/5)$ یعنی همان دسته به

مرکز ۲۰ (وسط $21/5$ و $18/5$ می شود ۲۰). پس دسته ی سوم مورد نظر سؤال است. از فراوانی های تجمعی جدول دوتا چیز می فهمیم:

اولاً تعداد کل داده‌ها $n = 40$ است. (آخرین فراوانی تجمعی)
ثانیاً فراوانی دسته‌ی سوم، $12 = 13 - 25$ است.

درصد داده‌های دسته‌ی سوم می‌شود: $P_3 = \frac{f_3}{n} \times 100 = \frac{12}{40} \times 100 = 30\%$

۶۱- **گزینه‌ی ۲**
جدول فراوانی می‌گوید تعداد کل داده‌ها $n = 50$ است. (فراوانی تجمعی آخری) و فراوانی مطلق دسته‌ی وسط (یعنی دسته‌ی سوم)، $a - 14$ است. (فراوانی تجمعی را منهای قبلی‌اش می‌کنیم)، حال درصد فراوانی نسبی دسته‌ی وسط می‌شود:

$$P_3 = \frac{f_3}{n} \times 100 \Rightarrow 24 = \frac{a - 14}{50} \times 100 \Rightarrow 12 = a - 14 \Rightarrow a = 26$$

سؤال فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم را می‌خواهد. قرار بود تجمعی را منهای قبلی‌اش می‌کنیم:

۶۲- **گزینه‌ی ۴**
 $x_3 = 4$ یعنی دسته‌ی سوم. فراوانی تجمعی این دسته برابر است با: $5 + 7 + 8 = 20$. ما درصد فراوانی تجمعی را می‌خواهیم.

تعداد کل داده‌ها $5 + 7 + 8 + 5 + 5 = 30$ است و درصد موردنظر ما می‌شود:

$$P = \frac{20}{30} \times 100 = \frac{2}{3} \times 100 = 66\frac{2}{3}\%$$

می‌شود $66\frac{2}{3}\%$ همین

۶۳- **گزینه‌ی ۳**
نمودار می‌گوید داده‌ها از $5/1$ تا $8/7$ دقیقه هستند. پس داریم:

۶۴- **گزینه‌ی ۳**
کار ساده‌ای است! تعداد داده‌ها یعنی همان تعداد برگ‌ها. در سطر اول ۴ تا، در سطر دوم ۶ تا و در سطر سوم ۱ برگ داریم. پس روی هم ۱۱ داده داریم.

۶۵- **گزینه‌ی ۳**
قرارمان این شد که جلوی هر ساقه، برگهایش را بنویسیم. اما از کم به زیاد (یعنی صعودی)؛ پس باید در سطر اول، عدد توی مربع بین ۲ و ۵ باشد. یعنی ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌تواند باشد.

اما صبر کنید! توی سطر سوم هم مربع گذاشته، این مربع بعد از ۴ است. پس می‌تواند ۴، ۵، ۶ و ... باشد. حالا برای این‌که هر دوتا شرط تأمین بشود، اشتراک می‌گیریم. پس در مربع‌ها می‌توانیم فقط ۴ یا ۵ بنویسیم. یعنی فقط دوتا عدد.

۶۶- **گزینه‌ی ۲**
سؤال می‌گوید جلوی ۱۴، این برگ‌ها نوشته شده: ۰۳۵۵۵۵۶۸۸۹ یعنی چهارتا داده ۱۴/۵ بودند. حالا پرسیده چند درصد از داده‌ها ۱۴/۵ بودند؟ ما کلاً ۵۰ داده داریم، چهارتا از ۵۰ تا می‌شود چند درصد؟ اگر گفتی ...

احتیاجی به فکر نیست! فرمول درصد فراوانی را به یاد بیاورید:

$$P = \frac{f}{n} \times 100 = \frac{4}{50} \times 100 = 8\%$$

۶۷- **گزینه‌ی ۴**
ناکم‌تر از ۴۰ یعنی بیشتر یا مساوی ۴۰، پس داده‌های سطر دوم $\{40, 41, 43, 44, 44, 45, 47, 47\}$ را می‌خواهد. (۸ تا هستند) تعداد کل برگ‌ها را بشماریم: (۹ تا در سطر اول، ۸ تا سطر دوم و ۸ تا سطر سوم) $n = 9 + 8 + 8 = 25$

پس کلاً ۲۵ تا داده داریم. سؤال پرسیده چند درصدشان توی سطر دوم‌اند؟ فرمول درصد فراوانی را ببینید:

$$P = \frac{f}{n} \times 100 = \frac{8}{25} \times 100 = 32\%$$

۶۸- **گزینه‌ی ۴**

۲۵ نفر O هستند، ۵ نفر AB، ۱۰ نفر B و ۱۵ نفر A، پس روی هم $15 + 10 + 5 + 25 = 55$ دانش‌آموز داریم.

۶۹- **گزینه‌ی ۴**

این نمودار می‌گوید از ۰ تا ۲۰ سه نفر، از ۲۰ تا ۴۰ چهار نفر و از ۴۰ تا ۶۰ هفت نفر داریم.

پس تعداد نمره‌های کم‌تر از ۶۰ (یعنی فراوانی تجمعی دسته‌ی سوم) می‌شود:

$$3 + 4 + 7 = 14 \text{ نفر}$$

تعداد کل نفرات کلاس، مجموع طول همه‌ی ستون‌ها است؛ یعنی:

$$n = 3 + 4 + 7 + 9 + 5 = 28$$

۷۰- **گزینه‌ی ۴**
قرار شد در نمودار مستطیلی، مساحت مستطیل‌ها را مقایسه کنیم.

حالا اگر طول مستطیل‌ها با هم برابر بشوند (یعنی طول دسته‌ها مساوی باشند)، ارتفاع مستطیل‌ها (یعنی فراوانی‌ها) را با هم مقایسه می‌کنیم.

۷۱- **گزینه‌ی ۳**
گفتیم در نمودار مستطیلی، سطح مستطیل‌ها مقایسه می‌شوند. پس باید سطح‌ها را حساب کنیم.

$$S_1 = (4 - 1) \times 5 = 15$$

$$S_2 = (9 - 4) \times 3 = 15$$

$$S_3 = (17 - 9) \times 2 = 16$$

$$S_4 = (19 - 17) \times 7 = 14$$

پس دسته‌ی سوم بیشترین مساحت، یعنی بیشترین فراوانی را دارد.

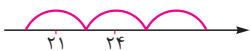
۷۲- **گزینه‌ی ۲**

۷۳- **گزینه‌ی ۳**
هزینه، داده‌ی کمی پیوسته است. گفتیم چندبر فراوانی نسبی برای داده‌های پیوسته از همه مناسب‌تر است.

۷۴- **گزینه‌ی ۴**
در نمودار چندبر، طول نقاط، مرکز دسته است و عرض نقاط فراوانی است.

پس این نقطه‌ها می‌گویند مراکز دسته به صورت $5/11, 5/14, 5/17$ و $5/20$ بوده. یعنی ۴ تا دسته با طول ۳ داریم. فراوانی‌ها هم به ترتیب ۳، ۶، ۷ و ۴ بوده، پس: $n = 4 + 7 + 6 + 3 = 20$ و فراوانی تجمعی دسته‌ی دوم، $3 + 6 = 9$ است.

۷۵- **گزینه‌ی ۴**
طول نقطه‌ها، مرکز دسته بود. پس الان مرکز دو دسته‌ی متوالی ۲۴، ۲۴ است:



این یعنی طول دسته، ۳ بوده و مرکز دسته‌ی بعدی $24 + 3 = 27$ می‌شود. ما حدود دسته‌ی بعدی را می‌خواهیم. پس از ۲۷، نصف طول دسته را زیاد و کم می‌کنیم:

$$[27 - 1/5, 27 + 1/5] = [27/5, 28/5]$$

۷۶- **گزینه‌ی ۲**
نقطه‌های نمودار چندبر (x_i, f_i) هستند. طولشان مرکز دسته است و عرضشان فراوانی. پس دنبال مرکز دسته و فراوانی دسته‌ی وسط هستیم: (دسته‌ی وسط، دسته‌ی سوم است!)

$$x_3 = \frac{26 + 29}{2} = 27/5$$

$$\Rightarrow (27/5, 6) = \text{نقطه‌ی نمودار}$$

$$f_3 = 25 - 19 = 6$$

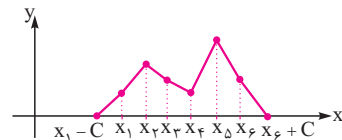
وقتی فراوانی تجمعی داریم، هر فراوانی تجمعی را منهای قبلی‌اش می‌کنیم تا به فراوانی [مطلق] برسیم.

۷۷- گزینه ۳

سؤال گفته دو سر نمودار چندبر روی محور x است. پس خودشان چندبر را تکمیل کرده‌اند. یعنی مساحت زیر چندبر و مستطیلی مساوی شده: $S=S'$ و بنابراین $\frac{S}{S'}=1$ است.

۷۹- گزینه ۲

می‌دونید چرا روی محور x ها ۸ تا نقطه و روی محور y ها ۶ تا نقطه است؟
خب معلومه، چون ۲ تا دسته با فراوانی صفر در سروته اضافه کردیم. پس در واقع ۶ تا دسته داریم و ۲ تا x روی محور افقی مال ما نیستند:



۸۰- گزینه ۳

دسته ۱ اول به ما می‌گوید طول دسته $C=15-9=6$ است و مرکز دسته ۱ اول هم $x_1=\frac{9+15}{2}=12$ است. برای تکمیل چندبر، باید یک دسته جدید با مرکز $x_1-C=12-6=6$ اضافه کنیم. پس طول اولین نقطه از چندبر، $x_1-C=12-6=6$ است و دومین نقطه هم خود x_1 است. یعنی طول نقاط اول و دوم ۶ و ۱۲ می‌شود.

۸۱- گزینه ۴

از کم‌ترین و بیشترین داده، دامنه‌ی تغییرات را حساب می‌کنیم:
 $R = \max - \min = 18 - 6 = 12$

حالا می‌توانیم طول دسته را هم حساب کنیم:
 $C = \frac{R}{k} = \frac{12}{4} = 3$

حالا حدود دسته‌ها را روی محور می‌آوریم:
پس مرکز دسته ۵ آخر $\frac{15+18}{2}=16.5$ است و طول نقطه‌ی آخر نمودار چندبر، $x_k+C=16.5+3=19.5$ خواهد بود.

۸۲- گزینه ۴

نمودار دایره‌ای، آن هم بدون ترتیب نواحی، برای داده‌های کیفی اسمی مناسب‌تر است.

۸۳- گزینه ۲

زاویه‌ی هر طبقه در نمودار دایره‌ای $\theta = \frac{f}{n} \times 360^\circ$ بود. پس داریم:
 $\frac{f=20}{n=180} \rightarrow \theta = \frac{20}{180} \times 360^\circ = 20 \times 2^\circ = 40^\circ$

۸۴- گزینه ۴

کلاس انسانی ۵۰ نفرند و کل دانش‌آموزان سال چهارم روی هم $50+60+70=180$ نفر.
زاویه‌ی متناظر با گروه انسانی برابر است با:

$$\theta = \frac{f}{n} \times 360^\circ = \frac{50}{180} \times 360^\circ = 100^\circ$$

۸۵- گزینه ۲

به فرمول یک نگاه بیندازید:
توی این سؤال $\theta = 45^\circ$ و $n = 48$ است. پس داریم:
 $45^\circ = \frac{f}{48} \times 360^\circ \rightarrow \frac{48 \times 45^\circ}{360^\circ} = f$
 $\Rightarrow f = \frac{48}{8} = 6$ تعداد کارمندان با مدرک کارشناسی برابر است با:

۸۶- گزینه ۴

هر جا در زندگی فراوانی تجمعی دیدیم، آن را منهای قبلی‌اش می‌کنیم تا به فراوانی غیرتجمعی برسیم.

الان فراوانی تجمعی نسبتی دسته ۴ چهارم و پنجم را داریم. پس فراوانی نسبی دسته ۴ پنجم برابر است با:

دقت کنید! فراوانی تجمعی دسته ۱ اول همان فراوانی معمولی‌اش است. حالا فراوانی تجمعی دسته ۲ دوم را منهای تجمعی دسته ۱ اول می‌کنیم و فراوانی دسته ۲ دوم به دست می‌آید. همین‌طور الی آخر. یعنی فراوانی دسته ۴ چهارم برابر است با فراوانی تجمعی دسته ۴ چهارم منهای فراوانی تجمعی دسته ۳ سوم سؤال زاویه‌ی مربوط به دسته ۴ پنجم را می‌خواست: $36^\circ \times \text{فراوانی نسبی} = \text{زاویه}$

$$\theta_4 = \frac{f_4}{n} \times 36^\circ = \frac{12}{100} \times 36^\circ = \frac{12}{100} \times 36^\circ = 43.2^\circ$$

نگران حاصل ضربش نباشید! رقم یکان 12×36 می‌شود ۲. پس رقم آخر سمت راست جواب باید ۲ بشود و این فقط در ۴ برقرار است.

۸۷- گزینه ۳

نمودار میله‌ای می‌گوید فراوانی دسته‌ها به ترتیب ۶، ۸، ۹، ۴ است. پس تعداد کل می‌شود: $n = 6+8+9+4 = 27$. ما زاویه‌ی دسته D را می‌خواهیم:

$$\theta_D = \frac{f_D}{n} \times 36^\circ$$

$$\frac{f_D=6}{n=27} \rightarrow \theta_D = \frac{6}{27} \times 36^\circ = \frac{2}{9} \times 36^\circ = 2 \times 4^\circ = 8^\circ$$

۸۸- گزینه ۴

زاویه‌ی دسته B می‌شود: $\theta_B = \frac{f_B}{n} \times 36^\circ$
فقط باید تعداد کل داده‌ها (تعداد کل افراد) را پیدا کنیم. خب اگر تعداد افراد A برابر x باشد، تعداد افراد B ، C و D به ترتیب $2x$ ، $3x$ و $6x$ است. پس داریم:

$$n = x + 2x + 3x + 6x = 12x$$

$$\theta_B = \frac{2x}{12x} \times 36^\circ = \frac{1}{6} \times 36^\circ = 6^\circ$$

۸۹- گزینه ۲

جمع همه‌ی زاویه‌ها باید 360° باشد. پس زاویه‌ی گروه سنی x را می‌توانیم حساب کنیم:
 $90^\circ + 110^\circ + 100^\circ + \theta_x = 360^\circ \Rightarrow \theta_x = 60^\circ$

حالا فراوانی گروه x را می‌خواهیم. به فرمول نگاه کنید:
 $\frac{\theta_x=60^\circ}{n=180} \rightarrow 60^\circ = \frac{f}{180} \times 360^\circ \rightarrow \frac{f}{180} = \frac{1}{3} \rightarrow f = \frac{180}{3} = 60$
یعنی 250° نفر در گروه سنی x هستند.

۹۰- گزینه ۱

جمع زاویه‌ها باید 360° بشود:
 $27^\circ + 45^\circ + 99^\circ + \alpha + 54^\circ + 18^\circ = 360^\circ + \alpha = 243^\circ + \alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 117^\circ$
۱۸ و ۲۷ روی هم می‌شود ۴۵؛ با اون یکی ۴۵ می‌شود ۹۰؛ با ۵۴ می‌شود ۱۴۴؛ با ۹۹ می‌شود ۲۴۳. حالا در فرمول زاویه می‌گذاریم:

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ \rightarrow \frac{\alpha=117^\circ}{n=160} \rightarrow 117^\circ = \frac{f}{160} \times 360^\circ$$

$$\text{طرفین و وسطین} \rightarrow f = \frac{117 \times 160}{360} = \frac{117 \times 16}{36} = \frac{117}{3} \times 4 = 13 \times 4 = 52$$

پس تعداد کارکنان با کد ۴ می‌شود ۵۲ تا.