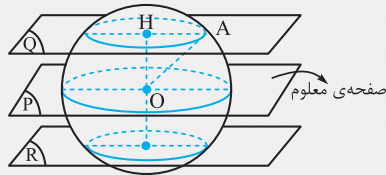


مثال ۵۹: مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از یک صفحه‌ی معلوم به فاصله‌ی $3\sqrt{2}$ و از نقطه‌ی ثابتی از آن صفحه به فاصله‌ی $3\sqrt{3}$ قرار دارند، کدام است؟

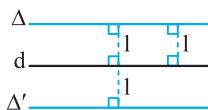
- (۱) دو دایره به محیط 18π (۲) دو دایره به محیط 6π (۳) دو نقطه (۴) چنین مکانی وجود ندارد.



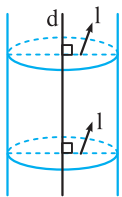
پاسخ: مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی $3\sqrt{2}$ قرار دارد، دو صفحه‌ی Q و R موازی صفحه‌ی P و به فاصله‌ی $3\sqrt{3}$ از آن می‌باشند. از طرفی مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی O در صفحه‌ی P به فاصله‌ی $3\sqrt{3}$ هستند، کره‌ای به مرکز O و شعاع $3\sqrt{3}$ است. این دو مکان متقاطع‌اند و محل برخوردشان دو دایره است که محیط آن‌ها به شرح زیر به دست می‌آید:

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = (3\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 27 - 18 = 9 \Rightarrow AH = 3$$

گزینه‌ی (۲) صحیح است. $\Rightarrow 2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$ محیط هر یک از دایره‌ها



(۳) مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه که از خط مفروض d به فاصله‌ی معین l قرار دارد، دو خط موازی d است که با فاصله‌ی l در دو طرف آن رسم می‌شوند.

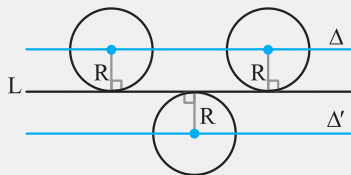


(۴) مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از خط مفروض d به فاصله‌ی معین l است، سطحی استوانه‌ای و نامحدود است که محور آن خط d و شعاع مقطع قائم آن مساوی l است. (تمرین ۶ کتاب درسی - صفحه‌ی ۳۷)

مثال ۶۰: مکان هندسی مرکز دایره‌ای به شعاع معلوم، مماس بر یک خط مفروض، کدام است؟

- (۱) یک خط (۲) دو خط

- (۳) یک دایره (۴) یک نیم‌خط

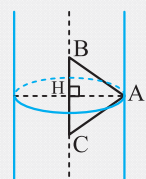


پاسخ: فرض کنیم شعاع دایره R باشد که بر خط معلوم L مماس است. در این صورت فاصله‌ی مرکز دایره از خط L مقدار ثابت R است، پس مکان هندسی مرکز دایره دو خط موازی L و به فاصله‌ی R از آن است. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۶۱: مثلث ABC در فضا مفروض است. ضلع BC را ثابت نگه می‌داریم و رأس A را طوری تغییر می‌دهیم که مثلث‌های حاصل دارای مساحتی

برابر مساحت ABC باشد. مکان هندسی نقطه‌ی A کدام است؟

- (۱) یک خط (۲) دو خط (۳) کره (۴) سطح استوانه‌ای



$$S(ABC) = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2S(ABC)}{BC}$$

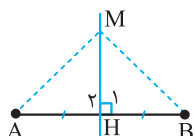
پاسخ:

چون مقادیر S(ABC) و BC ثابت‌اند، پس مقدار AH معلوم است. لذا فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط شامل امتداد BC برابر مقدار ثابت $\frac{2S(ABC)}{BC}$ است. پس مکان هندسی آن سطح استوانه‌ای است که محور آن، خط شامل BC است. پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

(۵) مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

اثبات:

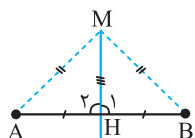
(آ) ثابت می‌کنیم هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB از دو سر آن به یک فاصله است.



$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \Delta AMH \cong \Delta BMH \Rightarrow MA = MB$$

(ب) ثابت می‌کنیم هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف AB قرار دارد. به همین جهت نقطه‌ی M را با

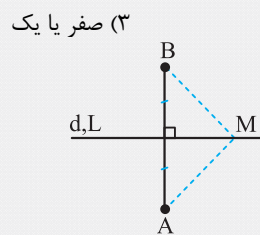
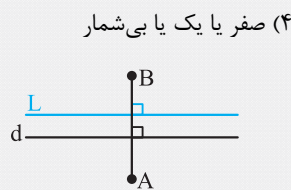
فرض $MA = MB$ به وسط AB وصل می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \\ AH = BH \\ MA = MB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \Delta AMH \cong \Delta BMH \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

چون $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ ، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ و این یعنی MH عمودمنصف پاره‌خط AB است.

مثال ۶۲: خط d و دو نقطه A و B در یک صفحه داده شده‌اند. اگر خط شامل AB بر خط d عمود باشد، چند نقطه روی d وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله است؟

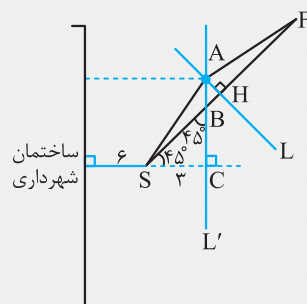
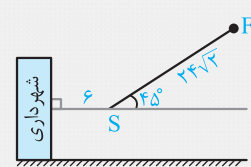


(۲) صفر یا بی‌شمار

(۱) یک یا بی‌شمار

پاسخ:

اگر عمود منصف AB یعنی خط L بر خط d منطبق شود (شکل بالا سمت راست)، هر نقطه روی خط d از A و B به یک فاصله است و مسئله بی‌شمار جواب دارد و اگر L و d بر هم منطبق نباشند، موازی هستند (شکل بالا سمت چپ) و مسئله جواب ندارد. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.



می‌خواهیم میله‌ی پرچمی را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متر باشد. فاصله‌ی محل نصب پرچم تا مجسمه و فواره کدام است؟

(۲) $15\sqrt{2}$

(۱) $16\sqrt{2}$

(۴) ۱۵

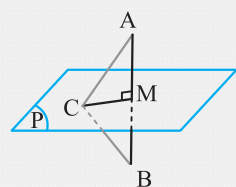
(۳) ۱۶

پاسخ: خط L' مکان نقطه‌ای است که از ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متر قرار دارند و خط L ، عمود منصف پاره‌خط SF ، مکان هندسی نقاطی است که از دو نقطه‌ی S و F به یک فاصله‌اند. محل تلاقی این دو مکان، نقطه‌ی A ، جای پرچم است و فاصله‌ی آن از S و F به شرح زیر به دست می‌آید:

$$SB = 3\sqrt{2}, \quad SH = \frac{SF}{2} = 12\sqrt{2} \Rightarrow BH = SH - SB = 9\sqrt{2}$$

چون زوایای مثلث ABH برابر 90° ، 45° و 45° است پس $AH = BH = 9\sqrt{2}$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ASH داریم: $SA^2 = SH^2 + AH^2 \Rightarrow SA^2 = (12\sqrt{2})^2 + (9\sqrt{2})^2 = 2 \times 15^2 \Rightarrow SA = 15\sqrt{2}$ بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

(تمرین ۳ کتاب درسی - صفحه‌ی ۳۷)



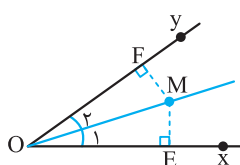
مثال ۶۴: مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است را تعیین کنید.

پاسخ: چون یک پاره‌خط در فضا بی‌شمار عمود منصف دارد، پس مطابق شکل، مکان هندسی مطلوب، صفحه‌ای است که از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد و بر آن عمود است. بنابه قرارداد این صفحه را، صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB می‌نامند.

(۶) مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه‌ی یک زاویه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله می‌باشد، نیمساز آن زاویه است.

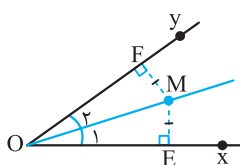
اثبات:

(آ) ثابت می‌کنیم هر نقطه مانند M روی نیمساز از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است:



$$\left. \begin{array}{l} OM = OM \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle OME \cong \triangle OMF \Rightarrow ME = MF$$

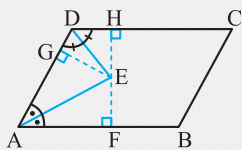
(ب) ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. با فرض $ME = MF$ ، نقطه‌ی M را به O وصل می‌کنیم. داریم:



$$\left. \begin{array}{l} ME = MF \\ OM = OM \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OME \cong \triangle OMF \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

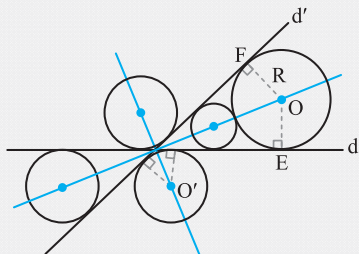
یعنی OM نیمساز زاویه‌ی $\hat{O}$ است.

مثال ۶۵: ثابت کنید که نیمسازهای دو زاویه‌ی مجاور یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که از اضلاع روبه‌رو به یک فاصله است.



پاسخ: چون E روی نیمساز $\hat{A}$ است پس $EF = EG$ ، هم‌چنین E روی نیمساز $\hat{B}$ است پس $EF = EH$ ، بنابراین $EG = EH$

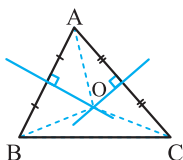
مثال ۶۶: مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط متقاطع مماس‌اند، کدام است؟



(۱) دو خط عمود بر هم
(۲) یک دایره
(۳) یک خط
(۴) دو خط موازی
پاسخ: مرکز دایره‌های مماس بر دو خط متقاطع d و d' از این دو خط به یک فاصله‌اند. پس مرکز دایره‌ها روی نیمسازهای زوایای بین دو خط d و d' قرار دارند و می‌دانیم نیمسازهای زوایای مجانب بر هم عمود هستند. بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

نقاط هم‌رسی مثلث به مثابه یک مکان هندسی

(۱) سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث هم‌رسند.

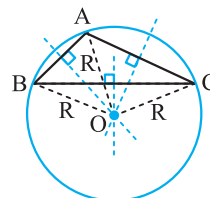
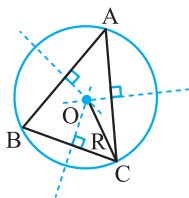
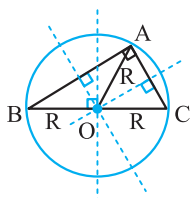


اثبات: عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC را رسم می‌کنیم. محل تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم و O را به رأس‌های مثلث رسم می‌کنیم. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} O \text{ روی عمودمنصف } AB \Rightarrow OA = OB \\ O \text{ روی عمودمنصف } AC \Rightarrow OA = OC \end{array} \right\} \Rightarrow OB = OC$$

پس نقطه‌ی O از دو سر پاره‌خط BC به یک فاصله است. لذا روی عمودمنصف BC قرار دارد و این یعنی سه عمودمنصف اضلاع مثلث در نقطه‌ی O هم‌رسند.

تذکر: نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC مرکز دایره‌ای است که از سه رأس مثلث ABC می‌گذرد و آن را دایره‌ی محیطی مثلث می‌نامند و معمولاً شعاع آن را با R نمایش می‌دهند ($OA = OB = OC = R$).



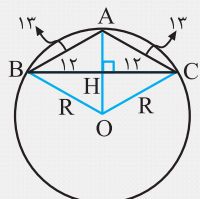
نتیجه ۱: نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های هر مثلث، مکان هندسی نقطه‌ای است در صفحه‌ی آن مثلث، که از سه رأس آن به یک فاصله است.

نتیجه ۲: از هر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط یک و تنها یک دایره می‌گذرد.

مثال ۶۷: اگر دو رأس مثلثی ثابت باشند و رأس سوم در صفحه‌ی مثلث تغییر کند، مکان هندسی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث کدام است؟

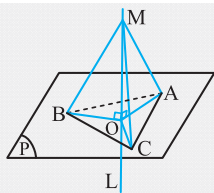
(۱) خطی عمود بر ضلع ثابت
(۲) خطی موازی با ضلع ثابت
(۳) دایره‌ای به قطر ضلع ثابت
(۴) دایره‌ای به شعاع ضلع ثابت
پاسخ: با توجه به شکل‌های تذکر قبل، چون BC ثابت است، عمودمنصف آن معلوم است و نقطه‌ی O، مرکز دایره محیطی مثلث ABC، روی این خط قرار دارد. پس با تغییر A در صفحه، نقطه‌ی O روی این خط تغییر می‌کند. بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۶۸: در مثلث به اضلاع ۱۳، ۱۳ و ۲۴ نقطه‌ای از سه رأس آن به یک فاصله است. فاصله‌ی این نقطه از بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟



(۱) ۹/۶ (۲) ۱۴/۴ (۳) ۱۱/۹ (۴) ۱۰/۸
پاسخ: چون $24^2 > 13^2 + 13^2$ پس مثلث منفرجه‌الزاویه است.
 $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow AH = 5$
 $OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow R^2 = (R - 5)^2 + 12^2 \Rightarrow 10R = 169 \Rightarrow R = 16/9$
 $OH = OA - AH = 16/9 - 5 = 11/9$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

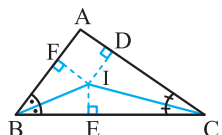


مثال ۶۹: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است را تعیین کنید.

پاسخ: این مکان هندسی، خطی است عمود بر صفحه‌ی مثلث ABC که از مرکز دایره‌ی محیطی آن می‌گذرد و با توجه به $OA = OB = OC$ ، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی MOA، MOB، MOC و همنهشت هستند لذا $MA = MB = MC$. ضمناً این خط فصل مشترک صفحات عمودمنصف اضلاع مثلث ABC است.

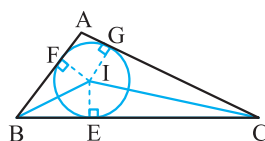
(۲) نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌رسند.

اثبات: نیمسازهای زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی تلاقی آن‌ها را I می‌نامیم و از این نقطه بر اضلاع مثلث عمود رسم می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \text{ روی نیمساز زاویه } I \Rightarrow IE = IF \\ \hat{C} \text{ روی نیمساز زاویه } I \Rightarrow IE = ID \end{array} \right\} \Rightarrow IF = ID$$


یعنی I از دو ضلع زاویه‌ی $\hat{A}$ به یک فاصله است. پس روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد در نتیجه سه نیمساز زوایای داخلی مثلث ABC در نقطه‌ی I هم‌رسند.

تذکر: این نقطه مرکز دایره‌ای است که بر سه ضلع مثلث مماس است و آن را دایره‌ی محاطی داخلی مثلث می‌نامند و شعاع آن را با r نمایش می‌دهند. ($IE = IF = IG = r$)



نتیجه: نقطه‌ی هم‌رسي نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه‌ی آن مثلث است که از اضلاع آن مثلث به یک فاصله است.

مثال ۷۰: مثلث به اضلاع ۱۰، ۱۰ و ۱۲ مفروض است. دایره‌ای بر اضلاع مثلث مماس است. فاصله‌ی مرکز این دایره از نزدیک‌ترین رأس آن کدام است؟

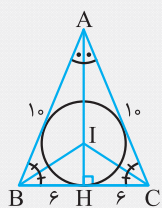
۵/۵ (۴)

$4\sqrt{2}$ (۳)

$3\sqrt{5}$ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: ۲



$$CI \Rightarrow \frac{IH}{IA} = \frac{CH}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} IH = 3k \\ IA = 5k \end{cases}$$

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2 \Rightarrow AH = 8$$

$$AH = IA + IH \Rightarrow 8 = 8k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \begin{cases} IH = 3 \\ IA = 5 \end{cases}$$

$$IC = IB = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}, \quad \min\{IA, IB, IC\} = IA = 5$$

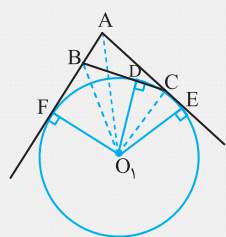
بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۷۱: ثابت کنید نیمساز هر زاویه‌ی درونی مثلث با نیمسازهای دو زاویه‌ی خارجی دیگر هم‌رس‌اند.

پاسخ: نیمسازهای زوایای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی تلاقی آن‌ها را O_1 می‌نامیم. از O_1 بر ضلع BC و امتداد ضلع‌های AC و AB عمود رسم می‌کنیم، داریم:

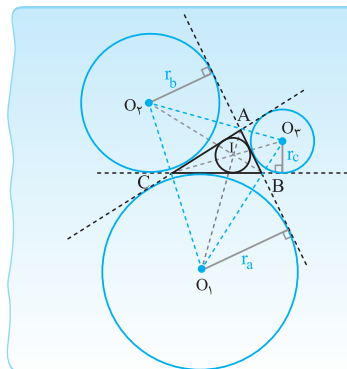
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \text{ روی نیمساز زاویه } O_1 \Rightarrow O_1F = O_1D \\ \hat{C} \text{ روی نیمساز زاویه } O_1 \Rightarrow O_1D = O_1E \end{array} \right\} \Rightarrow O_1F = O_1E$$

یعنی نقطه‌ی O_1 از دو ضلع زاویه‌ی $\hat{A}$ به یک فاصله است. پس O_1 روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد.

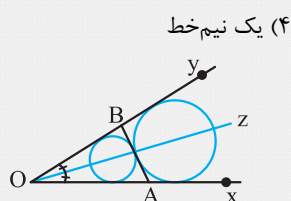


تذکر: نقطه‌ی O_1 مرکز دایره‌ای است که بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس است. بنابه قرارداد، آن را دایره‌ی محاطی خارجی مثلث می‌نامند. هر مثلث دارای سه دایره‌ی محاطی خارجی است.

نکته: نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC، ارتفاع‌های مثلث $O_1O_2O_3$ می‌باشند.



مثال ۷۲: زاویه‌ی ثابت xOy مفروض است. اگر A و B دو نقطه‌ی متغیر به ترتیب روی نیم‌خط‌های Ox و Oy باشند، مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو نیم‌خط Ox و Oy و پاره‌خط AB مماس‌اند، کدام است؟

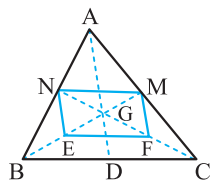


- (۱) خطی موازی با Ox (۲) خطی موازی AB (۳) خطی موازی Oy (۴) یک نیم‌خط
- پاسخ:** مطابق شکل، دایره‌های مطلوب، دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث OAB هستند که مرکز آن‌ها روی نیم‌خط ثابت OZ که نیمساز زاویه‌ی معلوم xOy است، قرار دارد.

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

(۳) سه میانه‌ی هر مثلث هم‌مرس‌اند.

اثبات: دو میانه‌ی BM و CN را رسم می‌کنیم. محل تلاقی آن‌ها را G می‌نامیم. ثابت می‌کنیم G دو میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند. به همین جهت M را به N وصل می‌کنیم و وسط‌های CG و BE را F و E می‌نامیم و داریم:



$$\begin{cases} \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel BC, & MN = \frac{BC}{2} \\ \frac{GE}{BG} = \frac{GF}{GC} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF \parallel BC, & EF = \frac{BC}{2} \end{cases} \Rightarrow MN \parallel EF, \quad MN = EF$$

بنابراین چهارضلعی $MNEF$ متوازی‌الاضلاع است. پس قطرها‌ی یکدیگر را نصف می‌کنند، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} GM = GE = BE \\ GN = GF = CF \end{cases} \Rightarrow \frac{BG}{GM} = \frac{CG}{GN} = 2$$

با استدلال مشابه نتیجه می‌شود دو میانه‌ی AD و CN نیز یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. پس میانه‌ی AD هم از نقطه‌ی G می‌گذرد.

مثال ۷۳: با توجه به شکل فوق، در چه صورت متوازی‌الاضلاع $MNEF$ ، لوزی، مستطیل یا مربع است؟

پاسخ: با توجه به شکل فوق داریم:

$$\text{مثلث } BGC \text{ قائم‌الزاویه است.} \Rightarrow GD = BD = CD \Rightarrow \frac{AG}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow AG = BC \Rightarrow NE = EF \Rightarrow MNEF \text{ لوزی}$$

دو میانه‌ی BM و CN بر هم عمود هستند. $\Rightarrow$

$$\text{مثلث } ABC \text{ متساوی‌الساقین است.} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow BM = CN \Rightarrow \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}CN \Rightarrow ME = NF \Rightarrow MNEF \text{ مستطیل}$$

چهارضلعی $MNEF$ وقتی مربع است که مثلث، متساوی‌الساقین و میانه‌های نظیر ساق‌ها عمود باشند.

تذکر: می‌دانیم نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌ها، مثلث مفروض را به سه مثلث هم‌مساحت (معادل) تقسیم می‌کند. پس می‌توان گفت نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌ها، مکان هندسی نقطه‌ای داخل مثلث است که اگر آن را به ۳ رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث معادل ایجاد می‌شود.

مثال ۷۴: دو خط موازی L و L' به فاصله‌ی ۱۵ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. مکان هندسی نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌های همه‌ی مثلث‌هایی که رأس‌های آن‌ها روی L و L' قرار دارند، کدام است؟

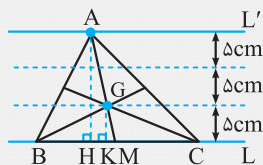
(۱) دو خط موازی L و L' و به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از آن‌ها.

(۲) یک خط متساوی‌الفاصله از L و L'

(۳) دو خط موازی L و L' به فاصله‌ی ۹ سانتی‌متر از یکدیگر

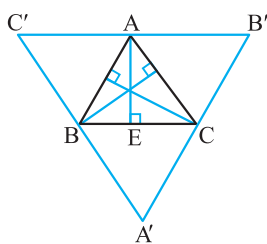
(۴) یک خط موازی L و L' و به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از L و به فاصله‌ی ۱۰ سانتی‌متر از L'

پاسخ: فرض کنیم ABC یکی از مثلث‌ها باشد، داریم:



$$\Delta AMH \sim \Delta GKM \Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{GK}{AH} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{GK}{15} \Rightarrow GK = 5$$

یعنی مکان هندسی G ، نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC ، خطی موازی L و L' و به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از L است. اگر B و C روی L' و A روی L باشد، مکان هندسی G خطی موازی L و L' و به فاصله‌ی ۵ از L' است. بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

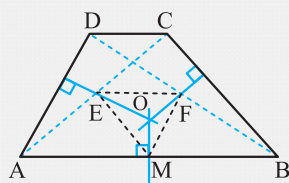


۴) ارتفاع‌های هر مثلث هم‌رسند.
اثبات: از سه رأس مثلث ABC مطابق شکل خط‌هایی موازی اضلاع مقابل رسم می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ پدید می‌آید. چهارضلعی‌های $ABCB'$ و $ACBC'$ متوازی‌الاضلاع‌اند. پس $AB' = BC = AC'$ ، یعنی A وسط $B'C'$ است. از طرفی داریم: $BC \parallel B'C' \Rightarrow AE \perp BC \Rightarrow AE \perp B'C'$ بنابراین AE عمودمنصف $B'C'$ است.
 با استدلال مشابه دو ارتفاع دیگر مثلث ABC ، عمودمنصف‌های $A'B'$ و $A'C'$ می‌باشند. اما ثابت کردیم عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث مانند $A'B'C'$ هم‌رسند. پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز هم‌رسند.

نتیجه ۱: نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث ABC ، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه‌ی مثلث ABC است که از رأس‌های مثلث $A'B'C'$ به یک فاصله است.

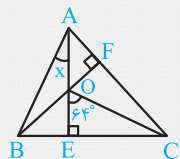
نتیجه ۲: نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های هر مثلث، همان نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث میانگین آن می‌باشد.

مثال ۷۵: دوزنقه‌ی $ABCD$ با قاعده‌ی بزرگ AB مفروض است. اگر E و F به ترتیب وسط‌های قطرهای AC و BD باشند، ثابت کنید عمودهایی که از E و F به ترتیب بر ساق‌های AD و BC وارد می‌شوند، روی عمودمنصف AB متقاطع‌اند.



پاسخ: وسط قاعده‌ی بزرگ را M می‌نامیم. در مثلث ABD ، MF پاره‌خط میانگین است، پس $MF \parallel AD$ است. لذا عمودی که از E بر ساق AD وارد می‌شود بر MF نیز عمود است. با استدلال مشابه عمودی که از F بر ساق BC وارد می‌شود بر ME نیز عمود است، پس O نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث EMF است، پس OM نیز بر ضلع EF عمود است. از طرفی پاره‌خطی که وسط‌های دو قطر یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند با قاعده‌ها موازی است ($EF \parallel AB$)، پس OM بر AB عمود است، یعنی OM عمودمنصف AB است.

مثال ۷۶: در شکل مقابل مقدار x چند درجه است؟



۲۶ (۲)

۲۴ (۱)

۲۲ (۴)

۲۸ (۳)

پاسخ: OC ارتفاع سوم مثلث است، پس بر AB عمود است. در نتیجه: $x = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$ بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

ترسیم با خط‌کش و پرگار اقلیدسی

ترسیم‌های هندسی به کمک دو ابزار پرگار و خط‌کش صورت می‌گیرد و محدودیت‌های آن‌ها به شرح زیر است:
آ) خط‌کش مدرج نیست و با آن صرفاً می‌توان خط مستقیم رسم کرد که از دو نقطه‌ی معلوم می‌گذرد و با این خط‌کش نمی‌توان فاصله‌ی بین دو نقطه را اندازه گرفت یا این‌که به‌وسیله‌ی آن نمی‌توان ادعا کرد دو پاره‌خط متساوی‌اند.
ب) پرگاری که فقط می‌توان به کمک آن دایره‌ای رسم کرد که مرکز آن نقطه‌ای معلوم مانند A باشد و از نقطه‌ی معلوم دیگری مانند B می‌گذرد.

نکته: در ترسیمات هندسی همواره اندازه‌ی طول پاره‌خط‌ها و اندازه‌ی زوایا مفروض هستند. ضمناً کتاب درسی هندسه (۲) محدودیتی برای خط‌کش قائل نیست و خط‌کش مدرج می‌باشد.

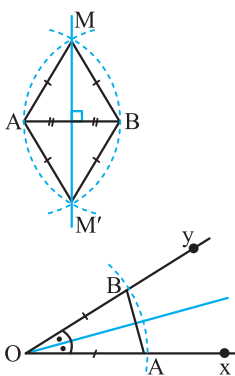
ترسیم‌های مقدماتی

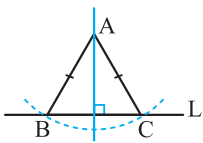
۱) رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

به مرکزهای A و B و شعاع AB دو کمان رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن‌ها را M و M' می‌نامیم. خط شامل MM' عمودمنصف پاره‌خط AB است، زیرا M و M' از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله هستند.

۲) رسم نیمساز یک زاویه

نقطه‌ی دلخواه A را روی Ox در نظر گرفته، به مرکز O و شعاع OA کمانی می‌زنیم تا Oy را در B قطع کند. مثلث OAB متساوی‌الساقین است. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، این خط از O می‌گذرد و نیمساز زاویه‌ی xOy است.



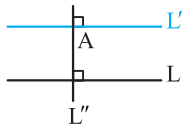
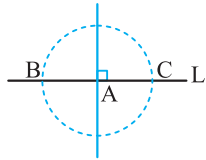


۳) رسم یک خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن

نقطه‌ی دلخواه B را روی L در نظر می‌گیریم. اگر خط شامل AB بر L عمود باشد، جواب است در غیر این صورت به مرکز A و شعاع AB کمائی رسم می‌کنیم که L را در نقطه‌ی دیگری مانند C قطع می‌کند. عمود منصف پاره‌خط BC، خطی است که از A می‌گذرد و بر L عمود است.

۴) رسم یک خط عمود بر خط داده شده از یک نقطه روی آن

نقطه‌ی دلخواه B غیر از A روی L در نظر می‌گیریم. به مرکز A و شعاع AB کمائی می‌زنیم که خط L را در نقطه‌ی دیگری مانند C قطع می‌کند. عمود منصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم که از A می‌گذرد و بر L عمود است.

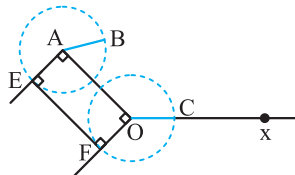


۵) رسم خطی موازی یک خط از یک نقطه خارج از آن خط

از نقطه‌ی A خط L' را عمود بر خط L رسم می‌کنیم. سپس در نقطه‌ی A روی L'، خط L'' را عمود بر خط L' رسم می‌کنیم. چون L و L' عمود هستند، پس موازی هستند.

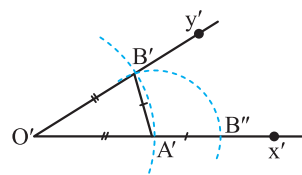
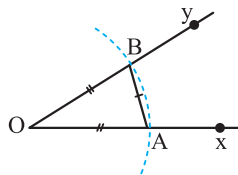
۶) رسم یک طول معلوم بر روی یک نیم‌خط مفروض (کاری که به کمک خط کش مدرج انجام می‌گیرد).

پاره‌خط AB با طول معلوم و نیم‌خط Ox را در نظر بگیرید. در A و O دو عمود بر OA رسم می‌کنیم. به مرکز A و شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمود در A را در نقطه‌ی E قطع کند. از نقطه‌ی E عمودی بر AE رسم می‌کنیم تا مستطیل OAEF ساخته شود. به مرکز O و شعاع OF یک دایره می‌زنیم، پاره‌خط OC همان طول مورد نظر می‌باشد، $OC = AB$.



(تمرین ۹ کتاب درسی - صفحه‌ی ۱۴۳)

۷) رسم یک زاویه‌ی معلوم بر روی یک نیم‌خط مفروض

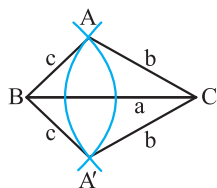


زاویه‌ی معلوم $\widehat{Oxy}$ و نیم‌خط Ox' مفروض هستند. نقطه‌ی دلخواه A را روی نیم‌خط Ox در نظر می‌گیریم به مرکز O و شعاع OA کمائی رسم می‌کنیم تا Oy را در B قطع کند. داریم: $OA = OB$.

حال به مرکز O' و شعاع OA کمائی رسم می‌کنیم تا Ox' را در A' قطع کند (رسم شماره‌ی ۶). سپس به مرکز A' و شعاع AB کمائی دیگر رسم می‌کنیم (رسم شماره‌ی ۶). نقطه‌ی تلاقی دو کمان اخیر را B' می‌نامیم. O' را به B' وصل کرده و امتداد می‌دهیم. داریم: $\widehat{x'O'y'} = \widehat{Oxy}$. زیرا دو مثلث AOB و A'O'B' به حالت (ضضض) همنهشت هستند.

۸) رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است (بسیاری از ترسیم‌های هندسی به کمک این ترسیم حل می‌شوند).

فرض کنید $AB = c$ و $BC = a$ و $AC = b$ اندازه‌ی اضلاع مثلث ABC باشند. ابتدا یکی از ضلع‌ها مثلاً ضلع بزرگ‌تر $BC = a$ را رسم می‌کنیم. حال به مرکز C و شعاع b و سپس به مرکز B و شعاع c دو کمان رسم می‌کنیم. محل تلاقی دو کمان یعنی نقاط A و A' رأس سوم مثلث است و با فرض $c + b > a > |b - c|$ ، مسأله یک جواب (دو جواب همنهشت) دارد.



مثال ۷۷: مثلث ABC با معلوم بودن دو میانه‌ی $m_a = ۹$ و $m_b = ۱۵$ و ضلع a قابل رسم است. اندازه‌ی ضلع a کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱۸ (۴)

۱۰ (۳)

۱۳ (۲)

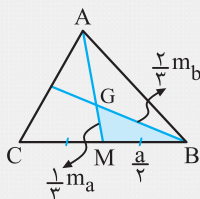
۲۷ (۱)

۱۲) پاسخ: مثلث MGB مطابق شکل با معلوم بودن سه ضلع $MB = \frac{a}{۳}$ ، $GB = \frac{۲}{۳}m_b$ و

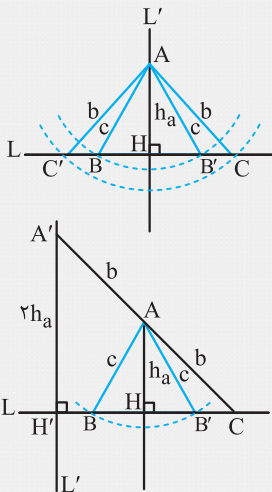
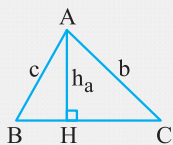
$GM = \frac{m_a}{۳}$ قابل رسم است. با امتداد MB به اندازه‌ی خودش، رأس C و با امتداد MG به اندازه‌ی دو برابرش، رأس A به دست می‌آید و مثلث ABC ساخته می‌شود و مسأله وقتی جواب دارد که مثلث MGB ساخته شود:

$$\left| \frac{2m_b}{3} - \frac{m_a}{3} \right| < \frac{a}{3} < \frac{2m_b}{3} + \frac{m_a}{3} \Rightarrow \left| \frac{2}{3} \times 15 - \frac{9}{3} \right| < \frac{a}{3} < \frac{2}{3} \times 15 + \frac{9}{3} \Rightarrow 14 < a < 26$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.



(تمرین ۴ کتاب درسی - صفحه ۱۴۲)



مثال ۷۸: مثلثی رسم کنید که اندازه‌ی دو ضلع و ارتفاع نظیر ضلع سوم آن معلوم باشد. (h_a, c, b)

پاسخ: فرض کنیم ABC مثلث مطلوب باشد، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH با معلوم بودن وتر و یک ضلع قابل رسم‌اند. لذا طریقه‌ی رسم به شرح زیر است:

روش اول: ابتدا دو خط عمود بر هم L و L' را رسم می‌کنیم. سپس مطابق شکل، $AH = h_a$ را روی L' جدا می‌کنیم. به مرکز A و شعاع‌های b و c دو کمان رسم می‌کنیم. در صورت تقاطع آن‌ها با خط L مثلث‌های $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$ و $\triangle ABC \cong \triangle AB'C'$ جواب هستند و مسأله وقتی جواب دارد که $b > h_a$ و $c > h_a$ باشد (دو جواب متمایز). اگر $h_a = b$ یا $h_a = c$ باشد، مسأله یک جواب دارد که مثلث قائم‌الزاویه است و اگر $b < h_a$ یا $c < h_a$ ، مسأله جواب ندارد.

روش دوم: دو خط عمود بر هم L و L' را رسم می‌کنیم. روی L' به اندازه‌ی h_a از A جدا می‌کنیم. به مرکز A' و شعاع $2b$ کمانی رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطه‌ی C قطع کند. به مرکز A وسط $A'C$ کمانی به شعاع c رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاط تلاقی این کمان با خط L جای رأس B است و مسأله حداکثر دارای دو جواب متمایز ABC و $AB'C$ است.

(۹) رسم مثلثی با معلوم بودن دو زاویه و ضلع بین آن‌ها $(\hat{B}, a, \hat{C})$

رسم روی شکل مشخص است و شرط جواب $\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$ است.

(۱۰) رسم مثلثی با معلوم بودن اندازه‌ی دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها $(a, b, \hat{C})$

با رسم زاویه‌ی $\hat{C}$ در x و y ، مثلث ABC به دست می‌آید. $AC = b$ و $BC = a$.

(۱۱) رسم مثلثی با معلوم بودن اندازه‌ی دو ضلع و زاویه‌ی روبه‌رو به یکی از اضلاع

(آ) فرض کنید اندازه‌ی زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر معلوم باشد $(\hat{A}, a > b)$. ابتدا ضلعی که زاویه‌ی روبه‌رو به آن داده نشده را رسم می‌کنیم، یعنی $AC = b$. سپس نیم‌خط Ax را چنان رسم می‌کنیم که زاویه‌ای به اندازه‌ی $\hat{A}$ ایجاد شود. به مرکز C و شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم. چون $b < a$ است، این دایره نیم‌خط Ax را دقیقاً در یک نقطه مانند B قطع می‌کند و مسأله همواره یک جواب دارد.

(ب) فرض کنید اندازه‌ی زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر معلوم باشد $(\hat{A}, a < b)$.

مانند ترسیم (آ) عمل می‌کنیم و با توجه به این که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACH داریم $CH = b \sin \hat{A}$ ، سه حالت پیش می‌آید:

$CH < a \Rightarrow b \sin \hat{A} < a \Rightarrow$ مسأله دو جواب دارد.

$CH = a \Rightarrow b \sin \hat{A} = a \Rightarrow$ مسأله یک جواب قائم‌الزاویه دارد.

$CH > a \Rightarrow b \sin \hat{A} > a \Rightarrow$ مسأله جواب ندارد. $\Rightarrow$ کمان به مرکز C و شعاع a نیم‌خط Ax را قطع نمی‌کند.

نکته: در حالتی که مسأله دو جواب دارد، دو زاویه‌ی B و B' در مثلث‌های ABC و $AB'C$ مکمل یکدیگر هستند.

مثال ۷۹: چند مثلث با معلومات $a = 4$ ، $\hat{C} = 30^\circ$ و $m_a = 3$ می‌توان رسم کرد؟

(۲) ۲

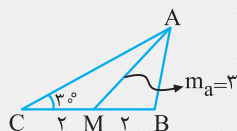
(۱) ۱

(۳) بیش‌تر از دو مثلث

(۴) نمی‌توان رسم کرد.

پاسخ: فرض کنیم ABC مثلث مطلوب باشد، مثلث AMC با معلومات دو ضلع و زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر قابل رسم است. (یک جواب) و با امتداد CM به اندازه‌ی خودش، رأس B و مثلث ABC رسم می‌شود.

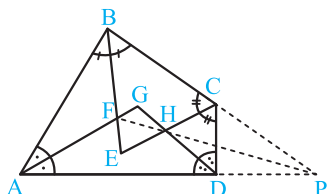
بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.





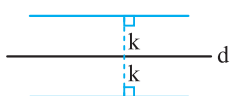
پرسش‌های جلسه چهارم

- ۴۲ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از یک خط داده شده‌ی d به فاصله‌ی معلوم k باشد. ($k > 0$) (نهایی- فراداد ۸۷)
- ۴۳ ابتدا مکان هندسی را تعریف کنید سپس مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از یک خط داده شده‌ی d به فاصله‌ی $\frac{1}{3}$ باشد. (نهایی- دی ۹۰)
- ۴۴ مکان هندسی مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌غلتد را با رسم شکل بیابید. (تمرین ۱ کتاب درسی- صفحه‌ی ۳۷- نهایی- شهریور ۸۹)
- ۴۵ دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. مسأله چند جواب دارد؟ (بحث کنید). (تمرین ۲ کتاب درسی- صفحه‌ی ۴۲- نهایی- شهریور ۹۰)
- ۴۶ خط d و نقطه‌ی A غیرواقع بر آن، داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد. با توجه به اندازه‌ی R روی تعداد جواب‌های مسأله بحث کنید. (تمرین ۱ کتاب درسی- صفحه‌ی ۴۲- نهایی- دی ۹۲ و ۸۶- فراداد ۹۱)
- ۴۷ زاویه‌ی XOY داده شده است. با استفاده از خط‌کش و پرگار روی نیم‌خط $O'X'$ زاویه‌ای به رأس O' و مساوی زاویه‌ی XOY رسم کنید. (تمرین ۹ کتاب درسی- صفحه‌ی ۴۳- نهایی- فراداد ۹۳)
- ۴۸ در هر یک از موارد زیر مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را به‌دست آورده و شکل مربوط به آن را رسم کنید. (نهایی- شهریور ۹۱)
- (آ) مکان هندسی مرکز دایره‌ای که در خارج یک دایره‌ی داده شده واقع است و روی محیط آن می‌غلتد.
- (ب) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطه‌ی مشخص بر یک خط داده شده مماس باشد.
- ۴۹ مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد (روش رسم را توضیح دهید). (تمرین ۸ کتاب درسی- صفحه‌ی ۴۳- نهایی- شهریور ۹۳ و ۸۷ و دی ۸۹)
- ۵۰ سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را روی صفحه‌ی مربع شکلی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آن‌جا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع شود. (تمرین ۸ کتاب درسی- صفحه‌ی ۳۷- نهایی- شهریور ۸۵)
- ۵۱ مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های ضلع $BC = a$ و میانه‌های $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$ رسم کنید. (تمرین ۵ کتاب درسی- صفحه‌ی ۴۲- نهایی- فراداد ۸۸- شهریور ۸۴)
- ۵۲ از مثلث ABC اندازه‌های $AB = c$ ، $AC = b$ و طول ارتفاع $AH = h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید (روش رسم را توضیح دهید). (تمرین ۴ کتاب درسی- صفحه‌ی ۴۲- نهایی- فراداد ۸۹- دی ۸۵ و ۸۴)
- ۵۳ پاره‌خطی به طول $\sqrt{7}$ رسم کنید.
- ۵۴ پاره‌خط معلوم AB را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنید.
- ۵۵ مکان هندسی نقطه‌ای که از یک پاره‌خط ۴ سانتی‌متری به فاصله‌ی ۱ سانتی‌متر و از وسط این پاره‌خط به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر است را تعیین کنید.
- ۵۶ مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که مجموع فواصل‌شان از دو خط متوازی به فاصله‌ی ۴ از هم، ۶ باشد.
- ۵۷ دو خط متوازی به فاصله‌ی ۷ از یکدیگر قرار دارند، مکان هندسی نقاطی که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از این دو خط ۳ باشد، را تعیین کنید.
- ۵۸ نقطه‌ی A داخل زاویه‌ی xOy داده شده است. پاره‌خطی رسم کنید که دو انتهای آن، روی دو ضلع زاویه و نقطه‌ی A ، وسط آن باشد.
- ۵۹ مکان هندسی نقاطی از صفحه را تعیین کنید که مجموع فواصل آن‌ها از دو خط متقاطع مقدار ثابت $k > 0$ باشد.
- ۶۰ مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فاصله‌ی آن‌ها از دو خط متقاطع مقدار ثابت $k > 0$ است را تعیین کنید.
- ۶۱ سه میانه‌ی مثلثی معلوم است. مثلث را رسم کنید (m_a, m_b, m_c).
- ۶۲ چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. مطابق شکل، از برخورد نیم‌سازهای زوایای آن چهارضلعی $EFGH$ ایجاد شده است. ثابت کنید خط‌های شامل BC ، FH و AD در نقطه‌ی P هم‌رس‌اند.



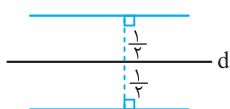
پاسخ پرسش‌های جلسه چهارم

۴۲



همه‌ی نقاطی که از خط معلوم d به فاصله‌ی k قرار دارند، روی دو خط موازی d و به فاصله‌ی k از آن واقع‌اند.

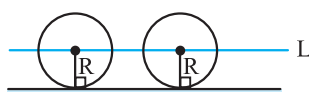
۴۳



مکان هندسی، مجموعه‌ی همه‌ی نقطه‌های صفحه یا فضا است که دارای ویژگی مشترکی هستند یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای آن ویژگی است و هر نقطه که آن ویژگی را دارد عضو این مجموعه می‌باشد.

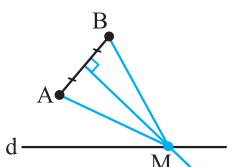
مکان هندسی مطلوب، دو خط راست به موازات خط d و به فاصله $\frac{1}{4}$ از آن می‌باشد.

۴۴



مکان هندسی مطلوب، خطی است موازی خط L با فاصله‌ای برابر با شعاع توپ از آن.

۴۵



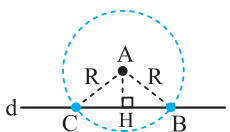
ابتدا دو نقطه‌ی A و B را به هم وصل کرده، سپس عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. محل تقاطع عمودمنصف پاره‌خط AB با خط d جواب مسأله است.

(آ) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB با خط d متقاطع باشد محل تقاطع آن‌ها جواب مسأله است و مسأله یک جواب دارد.

(ب) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d منطبق شود مسأله بی‌شمار جواب دارد.

(پ) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB با خط d موازی و غیرمنطبق بر d باشد، مسأله جواب ندارد.

۴۶



دایره‌ای به شعاع R و مرکز A را رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d جواب مسأله است.

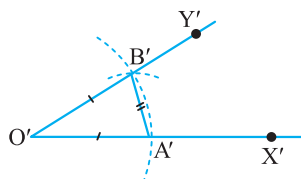
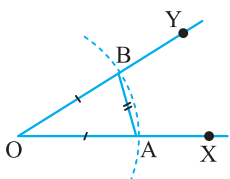
اگر $AH > R$ مسأله جواب ندارد.

اگر $AH = R$ مسأله یک جواب دارد.

اگر $AH < R$ مسأله دو جواب دارد.

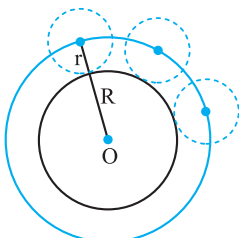
۴۷

زاویه‌ی XOY داده شده است. به مرکز O و شعاع دلخواه کمائی می‌زنیم تا OX و OY را در نقاط A و B قطع کند. نیم‌خط $O'X'$ را رسم و به همان شعاع و به مرکز O' کمان دوم را می‌زنیم تا $O'X'$ را در A' قطع کند. سپس به مرکز A' و شعاعی به طول AB کمان دیگری می‌زنیم تا کمان دوم را در نقطه‌ی B' قطع کند. O' را به B' وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط $O'Y'$ حاصل شود. زاویه‌ی $X'O'Y'$ جواب مسأله است.

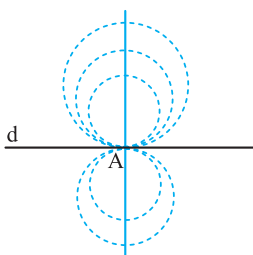


۴۸

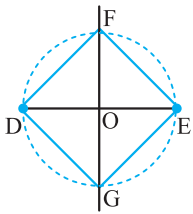
(آ) با توجه به شکل مکان هندسی موردنظر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R+r$ است.



(ب) با توجه به شکل مکان هندسی موردنظر خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.

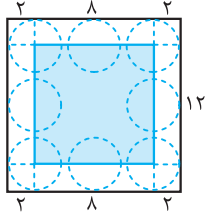


۴۹



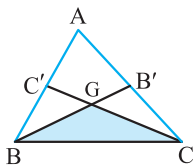
ابتدا عمودمنصف پاره خط DE را رسم می کنیم. از نقطه ی O وسط DE دایره ای به مرکز O و شعاع OD می زنیم. این کمان عمودمنصف را در دو نقطه ی F و G قطع می کند. چهارضلعی DFEG مربع است.

۵۰



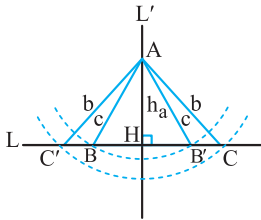
مکان هندسی مطلوب سطح مربعی به ضلع $12 - 4 = 8$ است.

۵۱



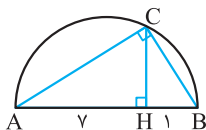
مثلث BGC را با معلوم بودن سه ضلع $BC = a$ ، $BG = \frac{2}{3}m_b$ و $CG = \frac{2}{3}m_c$ رسم می کنیم. از نقطه ی G، GB را به اندازه ی $\frac{1}{3}m_b$ و GC را به اندازه ی $\frac{1}{3}m_c$ امتداد می دهیم تا نقاط B' و C' به دست آید سپس از B به C' و از C به B' وصل کرده و امتداد می دهیم تا یکدیگر را در نقطه ی A قطع کنند.

۵۲



دو خط عمود بر هم L' و L را رسم می کنیم. سپس مطابق شکل $AH = h_a$ را روی L' جدا می کنیم. به مرکز A و شعاع های b و c دو کمان رسم می کنیم. در صورت تقاطع آن ها با خط L مثلث های $ABC \cong AB'C'$ و $ABC' \cong AB'C$ جواب اند.

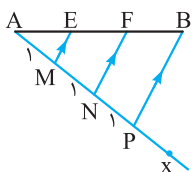
۵۳



با توجه به $\sqrt{h} = \sqrt{h \times 1}$ ، ابتدا نیم دایره ای به قطر ۸ رسم می کنیم و قطر آن را به دو پاره خط به طول های ۱ و ۷ تقسیم می کنیم. در این نقطه یعنی H، عمودی بر AB رسم می کنیم تا نیم دایره را در نقطه ی C قطع کند. در مثلث قائم الزاویه ی ACB داریم:

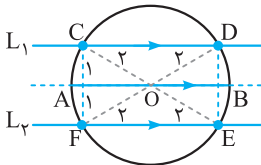
$$CH^2 = AH \times BH \Rightarrow CH = \sqrt{h \times 1} = \sqrt{h}$$

۵۴



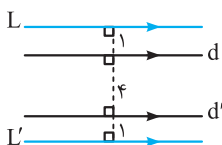
نیم خط AX را رسم و روی آن سه واحد جدا می کنیم. P را به B وصل کرده و از M و N، موازی PB رسم می کنیم تا نقاط E و F به دست آیند. بنابه قضیه ی تالس داریم $AE = EF = BF$

۵۵



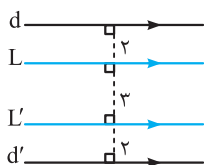
مکان مطلوب، مطابق شکل، چهار نقطه ی C، D، E، F، یعنی محل برخورد دو مکان هندسی، یکی دایره و دیگری دو خط L_1 و L_2 می باشند.

۵۶



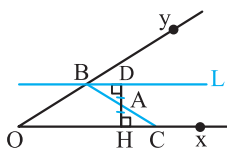
مطابق شکل، دو خط L و L' به فاصله ی ۱ سانتی متر از d و d' مکان مطلوب اند. زیرا هر نقطه روی آن ها، مجموع فواصلش تا خط های d و d' برابر ۶ است.

۵۷



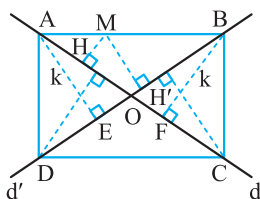
مطابق شکل، دو خط L و L' بین d و d' و به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از آن‌ها مکان مطلوب‌اند. زیرا هر نقطه روی آن‌ها قدرمطلق تفاضل فواصلش از d و d' برابر ۳ می‌باشد.

۵۸



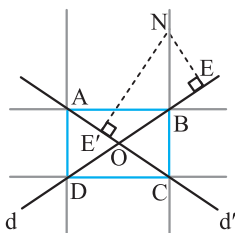
AH، فاصله‌ی نقطه‌ی A تا نیم‌خط Ox را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی D به‌دست آید. در این نقطه خط L را عمود بر DH رسم می‌کنیم و نقطه‌ی تلاقی آن را با نیم‌خط Oy، نقطه‌ی B می‌نامیم. B را به A وصل کرده امتداد می‌دهیم تا Ox را در نقطه‌ی C قطع کند. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADB و AHC همنهشت‌اند، پس $AB = AC$.

۵۹



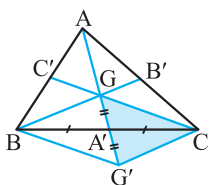
اگر نقطه، روی یکی از دو خط متقاطع باشد، فاصله‌ی آن تا یکی از دو خط، صفر و تا دیگری k است پس چهار نقطه‌ی A، B، C و D مطابق شکل به مکان هندسی موردنظر تعلق دارند. (اگر خط‌هایی موازی d و d' و به فاصله‌ی k از آن‌ها رسم کنیم از تقاطع آن‌ها با d و d' نقاط A، B، C و D به‌دست می‌آیند.) داریم $OA = OB = OC = OD$ زیرا چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی مشترک در رأس O به حالت یک ضلع و زاویه‌ی حاده‌ی مقابل آن همنهشت‌اند. پس چهارضلعی ABCD، مستطیل است اما هر نقطه روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین، مجموع فواصلش از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است. پس مکان مطلوب، مستطیلی است که مرکز آن، محل تلاقی دو خط است و قطرهای آن بر خطوط مفروض منطبق است و فاصله‌ی هر رأس تا قطر مقابل آن، k است ($MH + MH' = k$)

۶۰



مانند پرسش قبل، چهار نقطه‌ی A، B، C و D به مکان تعلق دارند و از طرفی می‌دانیم قدرمطلق تفاضل فاصله‌ی هر نقطه روی امتداد قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق، برابر ارتفاع وارد بر ساق است ($NE' - NE = k$). (به مثلث‌های متساوی‌الساقین AOB، BOC، COD و AOD توجه شود.) پس مکان هندسی مطلوب، امتداد اضلاع مستطیل ABCD است. یعنی مکان هندسی موردنظر ۸ نیم‌خط می‌باشد.

۶۱



با توجه به شکل، اگر GA' را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم، چهارضلعی $BG'CG$ متوازی‌الاضلاع می‌شود (قطرهايش منصف یکدیگرند) در نتیجه مثلث $GG'C$ ، با معلوم بودن اندازه‌های سه ضلع $GG' = \frac{2}{3}m_a$ ، $CG = \frac{2}{3}m_c$ ، $CG' = \frac{2}{3}m_b$ قابل رسم است. با رسم این مثلث، CA' و GG' را به اندازه‌ی خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط A و B به‌دست آید. مثلث مطلوب است و مسأله وقتی جواب دارد که:

$$|CG' - CG| < GG' < CG' + CG \Rightarrow \left| \frac{2}{3}m_b - \frac{2}{3}m_c \right| < \frac{2}{3}m_a < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c \Rightarrow |m_b - m_c| < m_a < m_b + m_c$$

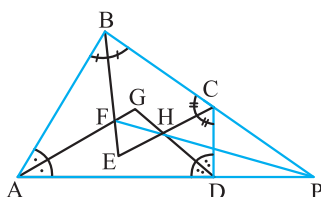
یعنی، باید با اعداد m_a ، m_b و m_c بتوان یک مثلث ساخت.

نکته: اگر مساحت مثلثی که اضلاع آن m_a ، m_b و m_c باشد را S_m نشان دهیم، چون $GG'C$ با این مثلث متشابه است داریم:

$$\frac{S_m}{S(GG'C)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_m}{S(BGC)} = \frac{9}{4} \Rightarrow S_m = \frac{9}{4} \times \frac{1}{3} \times S(ABC) \Rightarrow S_m = \frac{3}{4} S(ABC)$$

یعنی، مساحت مثلثی که با میانه‌های مثلث مفروض ساخته می‌شود، همواره $\frac{3}{4}$ مساحت مثلث مفروض است.

۶۲



در مثلث ABP، نقطه‌ی F، محل برخورد دو نیمساز زاویه‌های داخلی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ است. پس PF نیز نیمساز زاویه‌ی P است، از طرفی در مثلث PDC، CH و DH، نیمسازهای زوایای خارجی‌اند، پس نیمساز داخلی زاویه‌ی P نیز از نقطه‌ی H می‌گذرد و این یعنی PH و PF بر هم منطبق‌اند. در نتیجه امتدادهای BC، AD و FH در نقطه‌ی P هم‌رس‌اند.

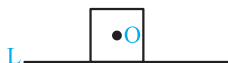


تست‌های جلسه چهارم

۷۲

فصل اول | استدلال در هندسه

۹۱. مکان هندسی مرکز دایره‌ای که از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرد، کدام است؟
 (۱) دایره‌ای به قطر AB (۲) یک خط موازی AB (۳) یک خط عمود بر AB (۴) دو خط موازی
۹۲. چند نقطه در صفحه‌ی یک مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارد که مجموع فواصل آن از سه ضلعش مقدار ثابتی باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار
۹۳. دو خط غیر موازی d و d' در یک صفحه مفروضند. تعداد نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۲ و از خط d' به فاصله‌ی ۳ هستند، کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) بی‌شمار
۹۴. مربع $ABCD$ به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی مربع $ABCD$ وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC ، برابر $\frac{\pi}{4}$ است؟
 (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر
۹۵. دو نقطه‌ی A و B مفروض‌اند. قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به همه‌ی خط‌های گذرنده از نقطه‌ی B به دست می‌آوریم. مکان هندسی این نقاط، کدام است؟
 (۱) دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB (۲) خطی عمود بر AB (۳) دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB (۴) خطی موازی AB
۹۶. سه نقطه‌ی A ، B و C روی یک خط نیستند. چند خط در صفحه‌ی مثلث ABC وجود دارد که این سه نقطه از آن‌ها به یک فاصله باشند؟
 (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه
۹۷. حداکثر چند نقطه روی دایره‌ی (C) به شعاع ۶ وجود دارد که از خط Δ به فاصله‌ی ۳ باشند؟
 (۱) دو نقطه (۲) سه نقطه (۳) یک نقطه (۴) چهار نقطه
۹۸. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ۲ سانتی‌متر که از نقطه‌ی معلوم A می‌گذرند، کدام است؟
 (۱) دایره‌ای به قطر ۴ سانتی‌متر (۲) دایره‌ای به قطر ۲ سانتی‌متر (۳) دو خط موازی به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر (۴) دو خط موازی به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر
۹۹. دو خط موازی به فاصله‌ی معلوم d و نقطه‌ی ثابت A بین آن‌ها مفروض‌اند. حداکثر چند دایره می‌توان رسم کرد که از نقطه‌ی A بگذرد و بر دو خط مماس باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار
۱۰۰. سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را بر روی صفحه‌ی مربع شکلی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع که اگر مرکز سکه در آن‌جا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می‌شود را در نظر می‌گیریم. بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط مکان تا نقاط مربع کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) ۶
۱۰۱. مکان هندسی مرکز کره‌هایی که به دو صفحه‌ی موازی مفروض مماس‌اند کدام است؟
 (۱) یک خط (۲) یک دایره (۳) یک صفحه (۴) دو خط موازی
۱۰۲. حداکثر چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره‌ی (C) مماس باشد و با خط d زاویه‌ی 30° بسازد؟
 (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۱۰ (۴) بی‌شمار
۱۰۳. در شکل زیر، مربع به ضلع $\sqrt{2}$ روی خط L ، سه بار به سمت راست بدون لغزش می‌غلتد، طول مسیری که مرکز مربع طی می‌کند کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $\pi\sqrt{2}$
۱۰۴. خط L و دایره‌ی $C(O, R)$ مفروض‌اند. حداکثر چند دایره به شعاع معلوم r می‌توان رسم کرد که بر خط L و دایره‌ی C مماس باشد؟
 (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) بی‌شمار
۱۰۵. مکان هندسی رأس‌های مثلث‌هایی در صفحه که قاعده‌ی آن‌ها به طول ۳ سانتی‌متر و مساحت آن‌ها برابر ۶ سانتی‌متر مربع است، کدام است؟
 (۱) دو خط موازی به فاصله‌ی ۸ سانتی‌متر (۲) دو خط موازی به فاصله‌ی ۶ سانتی‌متر (۳) دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر (۴) دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر



۱۰۶. دو خط متقاطع L و L' مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه روی خط معلوم D می‌توان یافت که از دو خط L و L' به یک فاصله باشند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۱۰۷. مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله‌های آن‌ها از دو خط عمود بر هم d و d' ، مساوی ۲ است، کدام است؟
 (۱) دو خط موازی (۲) دو خط عمود بر هم (۳) دو خط متقاطع (۴) محیط یک مستطیل

۱۰۸. اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو خط متقاطع 45° است. مکان هندسی نقاطی در صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو خط مفروض $6\sqrt{2}$ است را در نظر می‌گیریم. دورترین فاصله‌ی نقاط این مکان کدام است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۴

۱۰۹. مکان هندسی نقاطی در صفحه که مجموع فواصل‌شان از دو خط عمود بر هم d و d' برابر ۲۴ سانتی‌متر است، کدام است؟
 (۱) دایره‌ای به قطر ۱۲ سانتی‌متر (۲) مربعی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر (۳) دایره‌ای به قطر ۲۴ سانتی‌متر (۴) مربعی به قطر ۴۸ سانتی‌متر

۱۱۰. مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فاصله‌ی آن‌ها از دو خط عمود بر هم، برابر ۴ می‌باشد، کدام است؟
 (۱) ۴ خط (۲) ۴ نیم‌خط (۳) ۸ خط (۴) ۸ نیم‌خط

۱۱۱. مثلی که اندازه‌ی یک ضلع آن ۱۲ و فاصله‌ی وسط این ضلع از رأس‌ها برابر است را در نظر می‌گیریم. مکان هندسی نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های آن، کدام است؟
 (۱) دایره‌ای به قطر ۱۲ (۲) عمودمنصف ضلع مفروض (۳) دایره‌ای به قطر ۶ (۴) خطی موازی ضلع مفروض و به فاصله‌ی ۶ از آن

۱۱۲. مثلث ABC مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ی M در صفحه‌ی مثلث ABC که دو مثلث AMC و BMC معادل (هم‌مساحت) باشند، کدام است؟
 (۱) دو خط موازی (۲) دو خط متقاطع (۳) یک خط (۴) دو خط عمود بر هم

۱۱۳. مثلث ABC مفروض است. چند نقطه‌ی M در صفحه‌ی مثلث ABC ، وجود دارد که مساحت مثلث‌های MBC ، MAC و MAB برابر باشند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۴. مثلث ABC مفروض است. وسط‌های اضلاع آن را M ، N و P می‌نامیم، نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های ΔMNP :
 (۱) از سه ضلع آن به یک فاصله است. (۲) از سه رأس آن به یک فاصله است.
 (۳) از سه ضلع مثلث ABC ، به یک فاصله است. (۴) از سه رأس مثلث ABC ، به یک فاصله است.

۱۱۵. مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با معلوم بودن وتر $a = 16$ و میانه‌ی m_b ، قابل رسم است. اندازه‌ی m_b ، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟
 (۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۹

۱۱۶. مثلث ABC ، با معلوم بودن دو میانه‌ی $m_b = 6$ و $m_c = 15$ و ضلع a قابل رسم است. حداکثر مساحت مثلث ABC کدام است؟
 (۱) ۱۲۰ (۲) ۶۰ (۳) ۳۰ (۴) ۲۰

۱۱۷. اندازه‌ی دو ضلع مثلثی $3\sqrt{3}$ و ۲ و مساحت آن $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ است. بیش‌ترین مقدار ضلع سوم مثلث کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) ۷ (۴) $5\sqrt{3}$

۱۱۸. کدام‌یک از معلومات زیر، لزوماً یک مثلث را مشخص نمی‌کند؟
 (۱) طول سه میانه (۲) طول سه ارتفاع (۳) دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم (۴) قاعده و ارتفاع وارد بر ساق در مثلث متساوی‌الساقین

۱۱۹. چند مثلث با اطلاعات $h_a = 2$ ، $b = 3$ و $c = 1$ می‌توان رسم کرد؟
 (۱) ۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۲۰. در مثلث ABC ، طول ارتفاع $h_a = 8$ ، $b = 17$ و $c = 10$ می‌باشد. مساحت این مثلث کدام است؟
 (۱) فقط ۸۴ (۲) فقط ۳۶ (۳) ۸۴ و ۴۲ (۴) ۸۴ و ۳۶

۱۲۱. با معلوم بودن $h_a = 1$ ، $m_b = 3$ و $m_c = 6$ چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۱۲۲. چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن ۳ و ۵ و یکی از ارتفاع‌ها برابر ۴ باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۶

۱۲۳. در مثلث ABC طول BC برابر ۵ و طول میانه‌های وارد بر دو ضلع دیگر ۶ و $\frac{9}{4}$ است. طول ارتفاع AH کدام است؟
 (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{4}{8}$ (۳) $\frac{3}{6}$ (۴) $\frac{2}{4}$

۱۲۴. در مثلثی $a = 6$ ، $b = 10$ و $m_c = 4$ است. مثلث:
 (۱) حاده‌الزاویه است. (۲) قائم‌الزاویه است. (۳) منفرجه‌الزاویه است. (۴) وجود ندارد.

۱۲۵. مساحت مثلث ABC که در آن $BC = \sqrt{6}$ و $AC = 2$ و میانه‌ی CM برابر $\frac{\sqrt{10}}{2}$ است، چه قدر است؟
 (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{60}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) $2\sqrt{6}$

۱۲۶. در کدام گزینه مساحت مثلثی که با معلومات دو ضلع و طول میانه‌ی وارد بر ضلع سوم رسم شده، بزرگ‌تر است؟
 (۱) $a = 3$ ، $b = 4$ و $m_c = 2/5$ (۲) $a = 3$ ، $b = 5$ و $m_c = 2$ (۳) $a = 3$ ، $b = 3$ و $m_c = 2$ (۴) $a = 4$ ، $b = 4$ و $m_c = 3$

۱۲۷. در رسم مثلث ABC ، با معلوم بودن دو ضلع $a = \frac{9}{4}$ ، $b = 5$ و $\hat{A} = 60^\circ$ ، با خط‌کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟
 (۱) فاقد جواب (۲) دو جواب متمایز با دو زاویه‌ی متمم
 (۳) جواب منحصر به فرد (۴) دو جواب متمایز با دو زاویه‌ی مکمل

۱۲۸. در مثلث ABC ، $BC = \sqrt{2}$ ، $AC = 2$ و $\hat{A} = 30^\circ$ ، بیش‌ترین مقدار زاویه‌ی C ، چند برابر کم‌ترین مقدار آن است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۱۲۹. با معلومات $a = 12$ ، $\hat{B} = 30^\circ$ و b ، دقیقاً دو مثلث متمایز می‌توان رسم کرد. مقدار b ، چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟
 (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۳

۱۳۰. تفاضل مساحت مثلث‌های متمایز ABC که در آن‌ها $BC = 5$ ، $AC = 8$ و $\hat{A} = 30^\circ$ است، کدام است؟
 (۱) $8\sqrt{3}$ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) $12\sqrt{3}$

۱۳۱. در مثلث ABC ، $AB = 17$ و اندازه‌ی میانه‌ی نظیر ضلع AB برابر ۸ است. حداکثر مساحت مثلث کدام است؟
 (۱) ۶۸ (۲) ۳۴ (۳) ۱۳۶ (۴) ۱۰۲

۱۳۲. در مثلثی، $h_a = 8$ ، $m_a = 10$ و $c = 17$ ، ضلع a کدام می‌تواند باشد؟
 (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۱۳۳. در مثلث ABC ، $a = 20$ ، $m_a = 17$ و $h_b = 16$ ، مقدار b کدام است؟
 (۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۱۳۴. در یک مثلث، $a = 6$ ، $m_a = 3$ ، $h_a = 2\sqrt{2}$. اندازه‌ی کوچک‌ترین ضلع کدام است؟
 (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۳۵. در مثلث ABC ، $h_c = 7$ و $h_b = 4$ و $\hat{A} = 30^\circ$. مساحت مثلث کدام است؟
 (۱) ۱۴ (۲) ۴۲ (۳) ۷ (۴) ۲۸

۱۳۶. مساحت مثلث ABC که طول سه میانه‌ی آن ۶، ۸ و ۱۰ است، چه قدر است؟
 (۱) ۷۲ (۲) ۶۴ (۳) ۳۲ (۴) ۱۶۲

۱۳۷. مساحت مثلث ABC که طول سه میانه‌ی آن ۵، ۵ و ۸ است، چه قدر است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۲۶ (۴) ۱۶

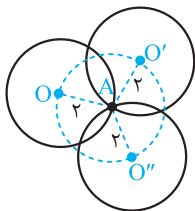
۱۳۸. مثلثی با سه ارتفاع به طول‌های ۳، ۴ و ۵، چگونه است؟
 (۱) حاده‌الزاویه (۲) قائم‌الزاویه (۳) منفرجه‌الزاویه (۴) وجود ندارد.

۱۳۹. مساحت مثلثی که ارتفاع‌های آن ۱۲، ۱۲ و ۱۰ است، کدام است؟
 (۱) ۶۴ (۲) ۸۵ (۳) ۷۵ (۴) ۶۰

پاسخ تست‌های جلسه چهارم

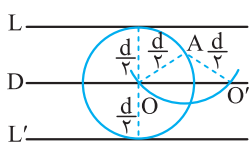


۹۸ (۴ ۳ ۲ ۱)



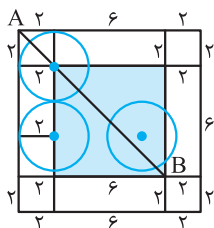
مطابق شکل، مرکز همه‌ی دایره‌های گذرنده از نقطه‌ی ثابت A و به شعاع ۲، به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از A قرار دارند. پس مکان هندسی مرکز همه‌ی این دایره‌ها، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است.

۹۹ (۴ ۳ ۲ ۱)



فرض کنیم O مرکز دایره‌ای باشد که از نقطه‌ی ثابت A می‌گذرد و بر دو خط موازی و معلوم L و L' که فاصله‌ی آن‌ها d است مماس می‌باشد. بنابراین یک مکان نقطه‌ی O خط D موازی L و L' و به فاصله‌ی $\frac{d}{2}$ از آن‌هاست و مکان دیگر O دایره‌ای به مرکز A و شعاع $\frac{d}{2}$ است پس محل تلاقی این دو مکان یعنی نقاط O و O' جواب هستند.

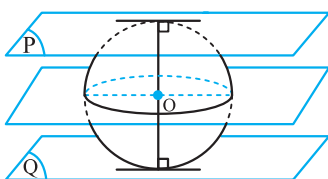
۱۰۰ (۴ ۳ ۲ ۱)



اگر مرکز سکه، رو یا داخل مربع به ضلع ۶ سانتی‌متر قرار گیرد، سکه همواره داخل مربع به ضلع ۱۰ واقع می‌شود و دورترین نقاط مکان تا نقاط مربع مفروض، برابر است با:

$$AB = 8\sqrt{2}$$

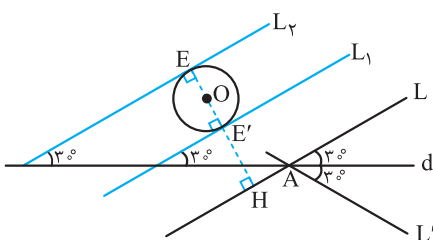
۱۰۱ (۴ ۳ ۲ ۱)



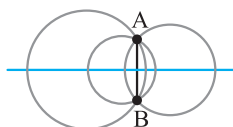
مرکز همه‌ی کره‌های مماس بر دو صفحه‌ی P و Q، از این دو صفحه، به فاصله‌ی مساوی هستند لذا مکان مرکز این کره‌ها، صفحه‌ای موازی و متساوی‌الفاصله از دو صفحه‌ی P و Q است.

۱۰۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

نقطه‌ی A را روی d در نظر می‌گیریم، خط L را چنان رسم می‌کنیم که با d زاویه‌ی 30° بسازد، سپس از مرکز دایره، OH را عمود بر L رسم می‌کنیم تا نقاط E و E' به‌دست آیند. از E و E' خطوطی موازی L رسم می‌کنیم. خطوط L و L' بر دایره مماسند و با خط d زاویه‌ی 30° می‌سازند. چون در نقطه‌ی A، می‌توان خط دیگری مانند L' رسم کرد که با d زاویه‌ی 30° بسازد، لذا مسأله دو جواب دیگر خواهد داشت و مسأله حداکثر ۴ جواب دارد.



۹۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

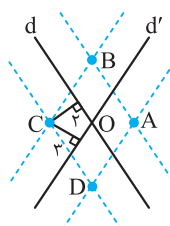


این مکان، عمودمنصف پاره‌خط AB است. زیرا مرکز دایره‌ها از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند. (شعاع دایره‌ها)

۹۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

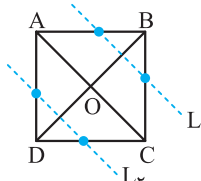
مجموع فواصل هر نقطه، داخل مثلث متساوی‌الاضلاع معلوم، برابر ارتفاع مثلث است. پس بی‌شمار نقطه، در داخل این مثلث، جواب است. لازم به ذکر است که نقاط روی اضلاع مثلث هم قابل قبول هستند.

۹۳ (۴ ۳ ۲ ۱)



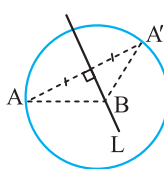
مطابق شکل، چهار رأس متوازی‌الاضلاع ABCD نقطه‌ای هستند که از خط d به فاصله‌ی ۲ و از خط d' به فاصله‌ی ۳ هستند.

۹۴ (۴ ۳ ۲ ۱)



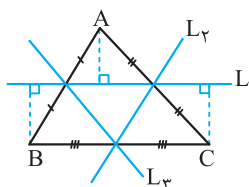
مکان هندسی نقطه‌ای که از قطر AC به فاصله $\frac{\pi}{2} \approx 1/57$ قرار دارند، دو خط L_۱ و L_۲ موازی AC و به فاصله‌ی $\frac{\pi}{2}$ از آن هستند. چون $OB = \frac{BD}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > \frac{\pi}{2}$ ، اضلاع مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند که به فاصله‌ی $\frac{\pi}{2}$ از قطر AC قرار دارند.

۹۵ (۴ ۳ ۲ ۱)



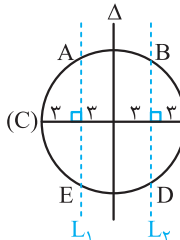
بنابراین فرض طول پاره‌خط AB ثابت است، خط L گذرنده از B را در نظر می‌گیریم. قرینه‌ی A را نسبت به خط L، A' می‌نامیم. عمودمنصف AA' است، یعنی A'B = AB. پس مکان A' با تغییر خط L در نقطه‌ی B، دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB است.

۹۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

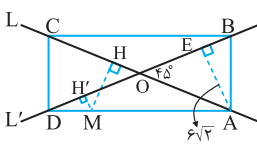


نقاط A، B، و C، از خطی که وسط‌های هر دو ضلع را به هم وصل می‌کند، به یک فاصله‌اند. لذا سه خط L_۱، L_۲ و L_۳ جواب‌اند.

۹۷ (۴ ۳ ۲ ۱)



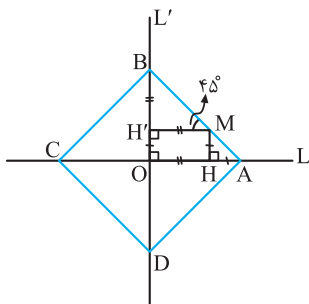
مکان هندسی نقطه‌ای که از Δ به فاصله‌ی ۳ هستند، دو خط موازی Δ در دو طرف آن و به فاصله ۳ از آن هستند (L_۱ و L_۲). اگر خط Δ از مرکز دایره بگذرد چون شعاع دایره ۶ است دو خط L_۱ و L_۲ دایره را در ۴ نقطه قطع می‌کنند. البته L_۱ و L_۲ می‌توانند دایره را در یک، دو، سه یا هیچ نقطه قطع کنند. (این به وضعیت Δ و دایره‌ی C بستگی دارد.)



این مکان هندسی مستطیل ABCD است که فاصله‌ی هر رأس آن تا خط‌های L و L' برابر $6\sqrt{2}$ است و مجموع فواصل هر نقطه روی این مستطیل

از L و L' برابر $6\sqrt{2}$ است. (MH + MH' = AE = $6\sqrt{2}$) دورترین فاصله‌ی نقاط این مکان، طول قطرهای AC و BD است. در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین AOE داریم پس: $OA = \sqrt{2}AE = \sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 12$

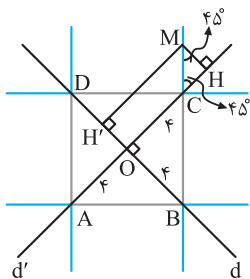
$$AC = BD = 2OA = 2 \times 12 = 24$$



اگر نقطه، روی یکی از دو خط L و L' باشد فاصله‌ی آن تا یکی از دو خط صفر و تا دیگری ۲۴ سانتی‌متر است، لذا $OA = OB = OC = OD = 24$ مطابق شکل ABCD مربع است و برای هر نقطه روی این مربع، داریم:

$$MH + MH' = OH' + BH' = OB = 24$$

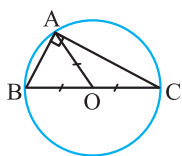
یعنی تمام نقاط مربع ABCD، مکان مطلوب‌اند و قطر مربع، برابر ۴۸ است.



برای هر نقطه، روی نیم‌خط‌های رنگی داریم:

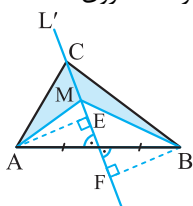
$$MH' - MH = OH - CH = OC = 4$$

پس مکان هندسی مطلوب، امتدادهای اضلاع مربعی به قطر ۸ می‌باشد.

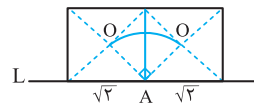


چون فاصله‌ی نقطه‌ی وسط ضلع ۱۲، از رأس‌ها برابر است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های آن، یعنی نقطه‌ی A، روی دایره به قطر ۱۲ قرار دارد.

هر نقطه روی خط شامل میانه‌ی نظیر ضلع AB چنان است که مساحت دو مثلث AMC و BMC برابرند. (زیرا قاعده‌ی CM در آن‌ها مشترک و ارتفاعشان برابر است $AE = BF$) هم‌چنین هر نقطه روی خط L موازی AB، این ویژگی را دارد.



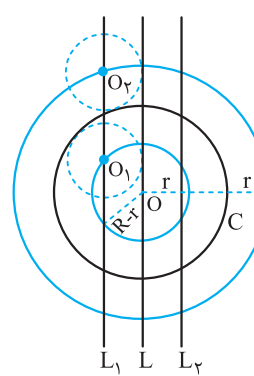
پس مکان مطلوب، دو خط متقاطع L و L' است.



مطابق شکل، در غلتیدن اول، مرکز مربع کمائی از یک دایره به مرکز A و شعاع OA (نصف قطر مربع) را طی می‌کند. این کمان $\frac{1}{4}$ محیط دایره‌ی مذکور

است. بعد از سه بار غلتیدن، مرکز مربع، مسیری به طول $\frac{3}{4}$ محیط دایره مذکور را می‌پیماید:

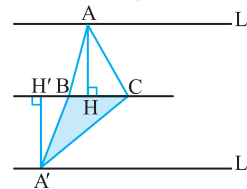
$$\text{طول مسیر مرکز مربع} = \frac{3}{4}(2\pi \times OA) = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{2}$$



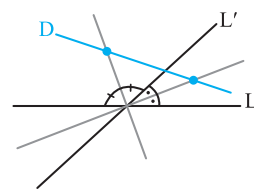
فرض کنیم خط L از مرکز دایره‌ی C(O, R) بگذرد، مکان هندسی نقاطی که از خط L به فاصله‌ی r می‌باشند دو خط L_1 و L_2 موازی L و به فاصله‌ی r از آن هستند. هم‌چنین مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع r که بر دایره‌ی C(O, R) مماس‌اند، دو دایره به مرکز O و شعاع‌های $R + r$ و $R - r$ می‌باشند. محل برخورد این دو مکان مرکز دایره‌هایی است که بر L و C مماس‌اند و شعاعشان r است. لذا مسأله حداقل ۸ جواب دارد.

ارتفاع همه مثلث‌هایی به قاعده‌ی $BC = 3 \text{ cm}$ و مساحت 6 cm^2 برابر است با:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times AH \times 3 \Rightarrow AH = 4 \text{ cm}$$

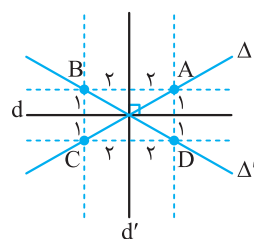


بنابراین رأس A، روی دو خط موازی با ضلع BC و به فاصله‌ی ۴ cm از آن قرار دارد و فاصله‌ی دو خط L و L' برابر ۸ cm است.



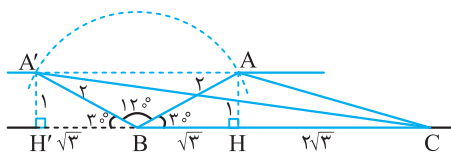
مکان هندسی نقاطی که از دو خط L و L' به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زوایای بین دو خط است. نقطه یا نقاط تلاقی خط D با این نیمسازها، جواب است.

اگر D، موازی یکی از این نیمسازها ولی غیر منطبق بر آن باشد، مسأله یک جواب و اگر D بر یکی از نیمسازها منطبق شود مسأله بی‌شمار جواب دارد، در غیر این صورت مسأله دو جواب دارد.



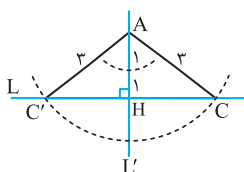
مطابق شکل، نسبت فاصله‌ی چهار نقطه‌ی A, B, C, D از دو خط d و d' برابر ۲ است و هر نقطه روی دو خط Δ و Δ' ، دارای این خاصیت است.

$$\begin{cases} AC^2 = AH^2 + CH^2 = 1 + (2\sqrt{3})^2 = 13 \Rightarrow AC = \sqrt{13} \\ A'C^2 = A'H^2 + CH^2 = 1 + (4\sqrt{3})^2 = 1 + 48 = 49 \Rightarrow A'C = 7 \end{cases}$$

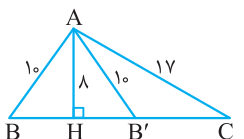


۷۷

رسم مثلی با معلومات دو ضلع و ارتفاع نظیر ضلع سوم، حداکثر دو جواب متمایز دارد. سایر گزینه‌ها حداکثر یک جواب دارند.



رسم مثلی با معلوم بودن دو ضلع و ارتفاع نظیر ضلع سوم $b=3$ و $c=1$ و $h_a=2$ می‌باشد. چون $c < h_a$ است مسأله جواب ندارد.



با معلومات $b=17$ ، $c=10$ و $h_a=8$ دو مثلث متمایز ABC و $AB'C$ رسم می‌شود. با توجه به اعداد فیثاغورسی داریم:

$$BH = B'H = 6, \quad CH = 15 \Rightarrow \begin{cases} BC = BH + CH = 21 \\ B'C = CH - B'H = 9 \end{cases}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 8 \times 21 = 84$$

$$S(AB'C) = \frac{1}{2} \times AH \times B'C = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 = 36$$

فرض کنیم ABC مثلث مطلوب باشد. در این صورت داریم:

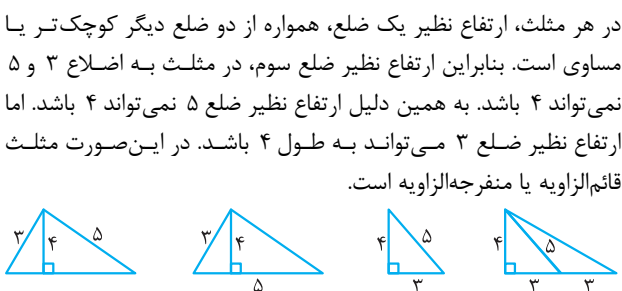
$$GC = \frac{2}{3} CC' = \frac{2}{3} m_c = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$GB = \frac{2}{3} BB' = \frac{2}{3} m_b = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

$$GE = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \times h_a = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

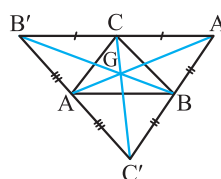
پس مثلث BGC، با معلوم بودن دو ضلع و ارتفاع نظیر ضلع سوم آن، قابل رسم است و چون $GC > GE$ و $BG > GE$ برای مثلث BGC و در نتیجه مثلث ABC، دو جواب متمایز وجود دارد.

در هر مثلث، ارتفاع نظیر یک ضلع، همواره از دو ضلع دیگر کوچک‌تر یا مساوی است. بنابراین ارتفاع نظیر ضلع سوم، در مثلث به اضلاع 3 و 5 نمی‌تواند 4 باشد. به همین دلیل ارتفاع نظیر ضلع 5 نمی‌تواند 4 باشد. اما ارتفاع نظیر ضلع 3 می‌تواند به طول 4 باشد. در این صورت مثلث قائم‌الزاویه یا منفرجه‌الزاویه است.



(این دو حالت امکان‌پذیر نیست.)

۱۱۳

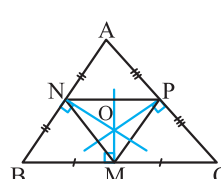


اگر نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌های مثلث را به سه رأس مثلث وصل کنیم، ۳ مثلث معادل (هم‌مساحت) ایجاد می‌شود:

$$S(AGB) = S(AGC) = S(BGC)$$

اگر از سه رأس مثلث ABC، خط‌هایی به موازات اضلاع مقابل رسم کنیم مثلث $A'B'C'$ پدید می‌آید. چهارضلعی $A'BAC'$ متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه $S(A'AB) = S(A'AC) = S(A'BC)$. یعنی نقاط B' و C' جواب‌اند. پس ۴ نقطه در صفحه‌ی مثلث ABC وجود دارد که اگر آن‌ها را به رأس‌های مثلث ABC، وصل کنیم سه مثلث معادل ایجاد می‌شود.

۱۱۴



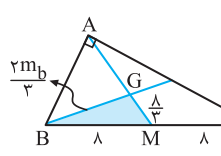
اضلاع مثلث MNP، با اضلاع مثلث ABC، موازی است. پس عمودمنصف‌های

اضلاع ABC بر اضلاع MNP عمودند.

یعنی نقطه‌ی O، نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های

مثلث MNP و نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC است. پس از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است.

۱۱۵



در مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی نظیر وتر،

نصف وتر است پس $m_a = \frac{a}{2} = 8$ و با

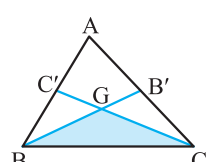
معلوم بودن m_b ، مثلث قائم‌الزاویه‌ی

BGM قابل رسم است و از آن‌جا مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC رسم می‌شود و داریم:

$$BM - GM < BG < BM + GM \Rightarrow 8 - \frac{a}{3} < \frac{2m_b}{3} < 8 + \frac{a}{3} \Rightarrow 16 < 2m_b < 32 \Rightarrow 8 < m_b < 16$$

و m_b ، نمی‌تواند عدد ۸ باشد.

۱۱۶



مثلث BGC، با معلوم بودن سه

ضلع $BG = \frac{2}{3} m_b = \frac{2 \times 6}{3} = 4$ ،

$BC = a$ و $CG = \frac{2m_c}{3} = \frac{2 \times 15}{3} = 10$.

قابل رسم است و از روی آن مثلث ABC رسم می‌شود. مساحت مثلث ABC، وقتی حداکثر است که مساحت مثلث BGC حداکثر باشد و این هنگامی ممکن است که $\widehat{BGC} = 90^\circ$ باشد.

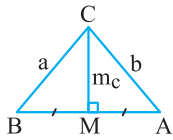
$$S(ABC) = 3S(BGC) = 3 \times \frac{1}{2} \times BG \times CG = \frac{3}{2} \times 4 \times 10 = 60$$

۱۱۷

فرض کنیم $AB = 2$ ، $BC = 3\sqrt{3}$ و $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ، داریم:

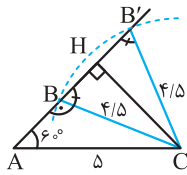
$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times AH \times 3\sqrt{3} \Rightarrow AH = 1$$

پس رأس سوم روی دو خط موازی BC و به فاصله یک از آن قرار دارد. از طرفی روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ قرار دارد. پس محل تلاقی این دو مکان جای A است و مسأله دو جواب دارد و داریم:



پس مساحت مثلث با اطلاعات $a = b = 4$ و $m_c = 3$ بیشترین است.

۱۲۷ (۴ ۳ ۲ ۱)



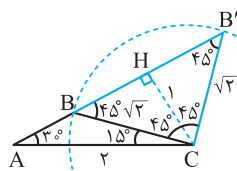
در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه 60° وتر است پس $CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و داریم $BC = 4/5$ پس $CH < BC$ و دو مثلث ABC و $AB'C$ جواباند که دو زاویه ABC و $AB'C$ در آن‌ها مکمل‌اند.

۱۲۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

با شرایط $BC = \sqrt{2}$ ، $AC = 2$ و $\hat{A} = 30^\circ$ دو مثلث متمایز ABC و $AB'C$ قابل رسم‌اند. داریم:

$$BH = B'H = \sqrt{2-1} = 1 \Rightarrow \hat{B}' = \hat{B}'\hat{B}\hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \hat{B}\hat{C}\hat{B}' = 90^\circ$$

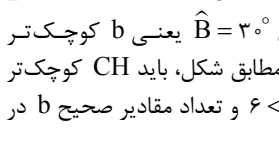
پس کم‌ترین اندازه‌ی زاویه‌ی C برابر 15° و بیش‌ترین مقدار آن 105° است. لذا $\frac{105}{15} = 7$ است.



تذکره: این پرسش به کمک قضیه‌ی سینوس‌ها هم قابل حل است.

۱۲۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

این پرسش رسم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و زاویه‌ی روبه‌رو به یکی از آن‌ها می‌باشد. ($\hat{B} = 30^\circ$ ، $a = 12$) و برای این که جواب، دو مثلث متمایز باشد، باید ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی $\hat{B}$ یعنی b کوچک‌تر از $a = 12$ باشد، پس $b < 12$. همچنین مطابق شکل، باید CH کوچک‌تر از b باشد، یعنی $b < 6$ بنابراین $6 < b < 12$ و تعداد مقادیر صحیح b در این فاصله ۵ است.



۱۳۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

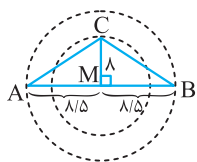
با توجه به $BC = 5$ ، $AC = 8$ و $\hat{A} = 30^\circ$ (دو ضلع و زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر) مطابق شکل، دو مثلث متمایز وجود دارد.

$$BH = B'H = 3 \Rightarrow BB' = 6$$

$$S(AB'C) - S(ABC) = \frac{CH \times AB'}{2} - \frac{CH \times AB}{2} = \frac{CH \times BB'}{2}$$

$$= \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

۱۳۱ (۴ ۳ ۲ ۱)



چون میانه‌ی AB نظیر ضلع AB ، کوچک‌تر از نصف ضلع AB است ($CM = 8$ ، $AB = 17$)، پس مثلث در رأس C منفرجه‌الزاویه است و رأس C روی دایره‌ای به مرکز M وسط AB و به شعاع ۸ قرار دارد. بنابراین مساحت مثلث وقتی ماکزیمم است که میانه‌ی CM بر ضلع AB عمود شود (زیرا ارتفاع وارد بر قاعده‌ی AB ماکزیمم می‌شود) و مقدار آن برابر است با:

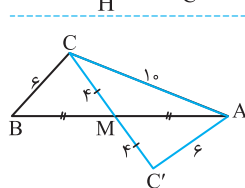
$$S = \frac{1}{2} CM \times AB = \frac{1}{2} \times 8 \times 17 = 4 \times 17 = 68$$

۱۲۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

چون $BC = 5$ ، $BG = \frac{2 \times 9}{5} = 3$ و $CG = \frac{2m_c}{3} = \frac{2 \times 6}{3} = 4$ پس مثلث BGC قائم‌الزاویه است. در نتیجه:

$$S(ABC) = 3S(BGC) = 3 \times \frac{4 \times 3}{2} = 18$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow AH = \frac{2 \times 18}{5} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$$



۱۲۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

فرض کنیم ABC ، مثلث با معلومات $a = 6$ ، $b = 10$ ، $m_c = 4$ باشد. مطابق شکل، مثلث ACC' با معلوم بودن سه ضلع $(a, b, 2m_c)$ قابل رسم است و از آن‌جا مثلث ABC رسم می‌شود و مسأله حداکثر یک جواب دارد. شرط جواب مسأله $\frac{a-b}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$ است. در این‌جا مثلث ACC' در رأس C' قائم‌الزاویه است. پس $\hat{B}\hat{C}\hat{M} = \hat{C}\hat{C}'\hat{A} = 90^\circ$ و این یعنی زاویه‌ی C در مثلث ABC منفرجه است.

۱۲۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$CC' = 2CM = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{6}$$

$$BC' = 2$$

$$\Rightarrow CC'^2 = BC^2 + BC'^2 \Rightarrow ((\sqrt{10})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2^2)$$

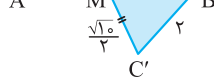
$$\Rightarrow \hat{B}\hat{C}\hat{C}' = 90^\circ$$

$$S(BCC') = \frac{BC \times BC'}{2} = \frac{\sqrt{6} \times 2}{2} = \sqrt{6}$$

$$S(ABC) = S(ACM) + S(BCM)$$

$$= S(BC'M) + S(BCM)$$

$$= S(BCC') = \sqrt{6}$$



۱۲۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

میانه‌ی CM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی C' به‌دست آید. $\triangle BMC \cong \triangle AMC'$ (ض.ض.)، پس مساحت مثلث ABC ، با مساحت مثلث ACC' برابر است و مساحت آن برابر است با:

$$a = 3, b = 4, m_c = 2/5 \Rightarrow a = 3, b = 4, 2m_c = 5$$

$$\Rightarrow S = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$a = 3, b = 5, m_c = 2 \Rightarrow a = 3, b = 5, 2m_c = 4$$

$$\Rightarrow S = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

و برای گزینه‌های (۳) و (۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین است و مساحت آن به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$a = 3, b = 3, m_c = 2 \Rightarrow BM = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

$$S = \frac{AB \times CM}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times 2}{2} = 2\sqrt{5}$$

$$a = 4, b = 4, m_c = 3 \Rightarrow BM = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$

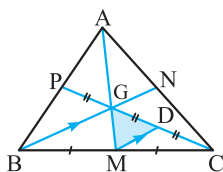
$$S = \frac{AB \times CM}{2} = \frac{2\sqrt{7} \times 3}{2} = 3\sqrt{7}$$

می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب است و مطابق شکل داریم:

$$CH = \frac{AC}{2} \Rightarrow h_c = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2h_c = 14$$

$$S(ABC) = \frac{BE \times AC}{2} = \frac{h_b \times b}{2} = \frac{4 \times 14}{2} = 28$$

۱۳۶ (۴ ۳ ۲ ۱)



روش اول: بنابه فرض، $m_b = 8$ ، $m_a = 6$ و $m_c = 10$ است. از M موازی BG رسم می‌کنیم، داریم:

$$MD = \frac{BG}{2} = \frac{m_b}{3} = \frac{8}{3}, \quad GM = \frac{m_a}{3} = \frac{6}{3}, \quad GD = \frac{CP}{3} = \frac{10}{3}$$

این اعداد فیثاغورسی‌اند و داریم:

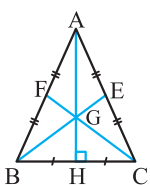
$$S(ABC) = 6S(GMC) = 6 \times 2 \times S(GMD)$$

$$= 12 \times \frac{1}{2} \times GM \times MD = 6 \times \frac{6}{3} \times \frac{8}{3} = 32$$

روش دوم: مساحت مثلثی که با میانه‌های m_a ، m_b و m_c ساخته می‌شود را S_m می‌نامیم. با توجه به اعداد داده شده، این مثلث قائم‌الزاویه است و داریم:

$$S_m = \frac{3}{4}S(ABC) \Rightarrow S(ABC) = \frac{4}{3} \times \frac{1 \times 6}{2} = 32$$

۱۳۷ (۴ ۳ ۲ ۱)



چون دو میانه‌ی BE و CF برابرند، مثلث متساوی‌الساقین است ($AB = AC$) و میانه‌ی سوم، ارتفاع، عمودمنصف و نیمساز هم می‌باشد، داریم:

$$CF = BE = 5 \Rightarrow BG = CG = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3}, \quad GH = \frac{AH}{3} = \frac{1}{3}$$

$$CH^2 = BH^2 = CG^2 - GH^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow CH = BH = 2$$

$$S(ABC) = 2S(BGC) = 2 \times \frac{1}{2} \times GH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times (2+2) = 16$$

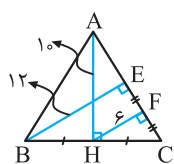
۱۳۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

بنابه فرض، $h_c = 5$ و $h_b = 4$ ، $h_a = 3$ و داریم:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \Rightarrow 3a = 4b = 5c \Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$$

یعنی مثلث مفروض با مثلث به اضلاع ۱۲، ۱۵ و ۲۰ متشابه است. این مثلث منفرجه‌الزاویه است، زیرا $20^2 > 15^2 + 12^2$. در نتیجه مثلث مفروض هم منفرجه‌الزاویه است. (در دو مثلث متشابه زوایای نظیر برابرند).

۱۳۹ (۴ ۳ ۲ ۱)



بنابه فرض، $h_a = 10$ و $h_b = h_c = 12$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است. از H موازی BE رسم می‌کنیم، بنابه قضیه‌ی تالس $HF = \frac{BE}{2} = 6$ و داریم:

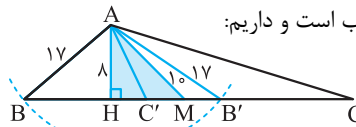
$$AF^2 = AH^2 - HF^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2 \Rightarrow AF = 8$$

$$HF^2 = AF \times CF \Rightarrow CF = \frac{6^2}{8} = \frac{9}{2}$$

$$S(ABC) = 2S(AHC) = 2 \times \frac{HF \times AC}{2} = 6 \times \left(8 + \frac{9}{2}\right) = 75$$

۱۳۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHM را با معلومات $AH = h_a = 8$ و $AM = m_a = 10$ رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و شعاع ۱۷ کمانی رسم می‌کنیم، محل تلاقی آن را با امتداد MH نقاط B و B' می‌نامیم. BM را به‌اندازه‌ی خودش از سمت M امتداد می‌دهیم نقطه‌ی C به‌دست می‌آید و مثلث ABC جواب است. هم‌چنین B'M را از سمت M به‌اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم، نقطه‌ی C' به‌دست می‌آید و مثلث AB'C' نیز جواب است و داریم:



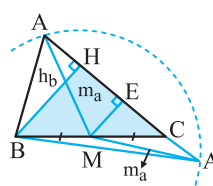
$$BC = 2BM = 2(BH + MH)$$

$$\frac{BH = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15}{MH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6} \rightarrow BC = 2(15 + 6) = 42$$

$$B'C' = 2B'M = 2(B'H - MH) = \frac{B'H = 15}{MH = 6} \rightarrow B'C' = 2(15 - 6) = 18$$

۱۳۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ی BHC را با معلومات $BC = a = 20$ و $BH = h_b = 16$ رسم می‌کنیم. سپس به مرکز M وسط BC و شعاع $m_a = 17$ کمانی رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن را با امتداد CH را A و A' می‌نامیم. مثلث‌های ABC و A'BC جواب‌اند، پس با معلومات $a = 20$ ، $m_a = 17$ و $h_b = 16$ حداکثر دو مثلث می‌توان رسم کرد و داریم:



$$CH^2 = a^2 - h_b^2 = 20^2 - 16^2 = 12^2$$

$$\Rightarrow CH = 12$$

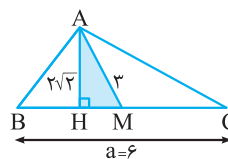
$$AE^2 = AM^2 - ME^2 = m_a^2 - \left(\frac{h_b}{2}\right)^2$$

$$= 17^2 - 8^2 = 15^2 \Rightarrow AE = 15$$

$$CE^2 = CM^2 - ME^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_b}{2}\right)^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2 \Rightarrow CE = 6$$

$$\begin{cases} AC = AE + CE = 15 + 6 = 21 \\ A'C = A'E - CE = AE - CE = 15 - 6 = 9 \end{cases}$$

۱۳۴ (۴ ۳ ۲ ۱)



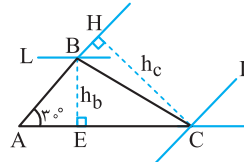
ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ی AMH را با معلومات $AM = m_a = 3$ و $AH = h_a = 2\sqrt{2}$ رسم می‌کنیم. سپس MH را از نقطه‌ی M به‌اندازه‌ی $\frac{a}{2} = 3$ جواب است و داریم:

$$MH^2 = m_a^2 - h_a^2 = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 1 \Rightarrow MH = 1$$

$$BH = BM - MH = 3 - 1 = 2$$

$$AB^2 = BH \cdot BC = 2 \times 6 = 4 \times 3 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

۱۳۵ (۴ ۳ ۲ ۱)



ابتدا زاویه‌ی $\hat{A} = 30^\circ$ را رسم می‌کنیم سپس خط‌های L و L' را به‌ترتیب به موازات اضلاع زاویه و به فاصله‌های $h_b = 4$ و $h_c = 7$ از آن‌ها رسم