



چاپ چهارم
+ کنکور ۹۱

بانک جامع پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضیات گسسته و جبر و احتمال هندسه تحلیلی و جبر خطی

سوالات کنکورهای سراسری و آزاد تا سال ۹۰ با پاسخ تشریحی
سوالات مهم کنکورهای خارج از کشور با پاسخ تشریحی
سوالات استاندارد در چارچوب مطالب کتابهای درسی
صدها سوال تألیفی همراه با پاسخ تشریحی
نکات مهم درسی در پاسخ‌نامه‌ی هر سوال

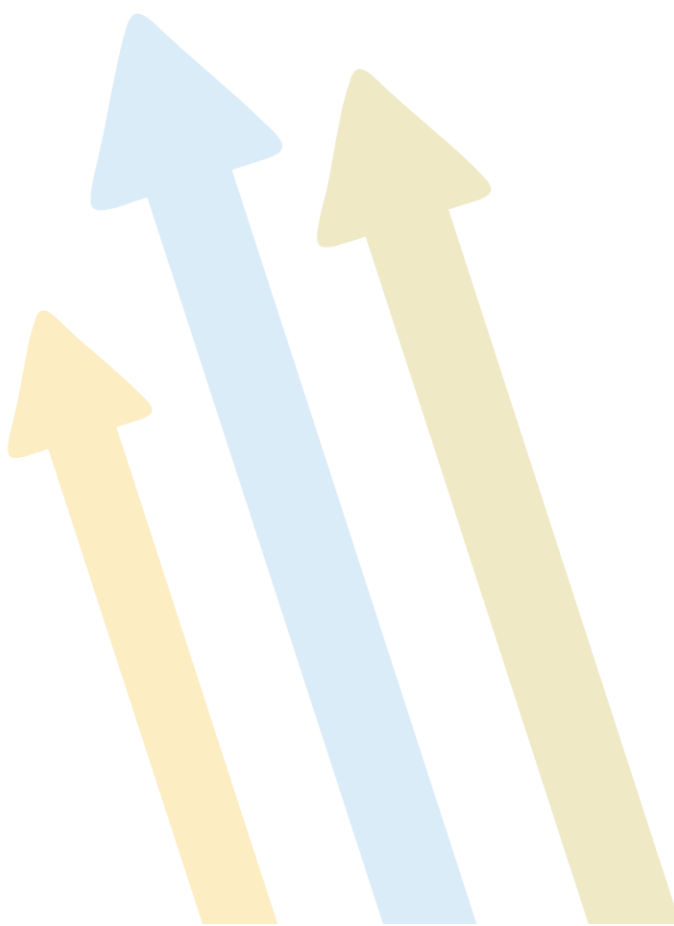
مؤلف:
جواد ترکمن
با همکاری:
بهرام جلالی



بانک جامع پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضیات گسسته و جبر و احتمال هندسه تحلیلی و جبر خطی

مؤلف:
جواد ترکمن
با همکاری:
بهرام جلالی



ریاضیات گسسته و جبر و احتمال

○ گراف



۷

○ نظریه‌ی اعداد



۴۷

○ نظریه‌ی مجموعه



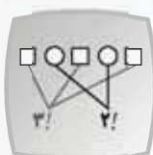
۱۴۵

○ رابطه‌ها



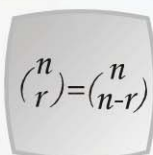
۱۷۳

○ آنالیز ترکیبی



۲۰۱

○ ترکیبات



۲۲۷

○ احتمال



۲۴۱

○ استدلال ریاضی



۳۲۹

هندسه تحلیلی و جبر خطی

○ بردار



۳۳۹

○ معادله‌ی خط و صفحه در فضا



۳۷۷

○ مقاطع مخروطی



۴۱۱

○ ماتریس و دترمینان



۴۸۷

○ دستگاه معادلات خطی



۵۵۱

مقدمه

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

سپاس یکتای بی‌همتا را که زمان، اندیشه و توان پدید آوردن این کتاب را به این ناچیز عطا فرمود.

اهمیت درس‌های «ریاضیات گسسته و جبر و احتمال» و «هندسه تحلیلی و جبر خطی» در کنکور ورودی دانشگاه‌ها بر کسی پوشیده نیست. به‌ویژه در چند سال اخیر، تعداد سؤال‌های این دو درس در کنکور و همچنین تعداد کتاب‌های موجود در این زمینه، که هریک از دید و سلیقه خود به این مهم پرداخته‌اند، گویای این مطلب می‌باشد و از اهمیت و جایگاه دو درس مذکور نزد دانش‌پژوهان سال چهارم رشته ریاضی (دوره‌ی پیش‌دانشگاهی) و داوطلبان کنکور حکایت دارد. لذا صاحب این قلم نیز بر آن شد تا کتابی در زمینه‌ی سؤال‌های چهارگزینه‌ای دو درس مزبور به رشته‌ی تحریر درآورد. لابد

چون صوفیان به حالت و رقصند مقتدا / ما نیز هم به شعبده دستی برآوریم

و صد البته بی‌هیچ ادعایی «این متاعم که همی بینی و کمتر زینم». اصلاً فاش می‌گویم که این کمترین را هیچ ادعایی در هیچ زمینه‌ای نیست؛ آخر در زمانه‌ی پیشرفت‌های خیره‌کننده‌ی دانش و فن‌آوری، جای چه ادعایی باقی می‌ماند؟ «زین دو هزاران من و ما ای صنما من چه منم» بگذریم... اما در باب این کتاب مطالبی چند ارایه می‌گردد:

- در ارایه سؤال‌های چهارگزینه‌ای سعی شده است تمام سؤال‌های کنکورهای سراسری و دانشگاه آزاد، کنکورهای داخل و خارج کشور، در حیطه‌ی مطالب کتاب‌های درسی آورده شود. در کنار آن سؤال‌های دیگر، اعم از سؤال‌های موجود در بعضی آزمون‌های مختلف و یا سؤال‌های برگرفته از کتاب‌ها، جزوات و یا دست نوشته‌های متعدد و احیاناً سؤال‌های تألیفی گنجانده شده است و حتی‌الامکان از ذکر سؤال‌هایی که در چارچوب کتاب‌های درسی و پرسش‌های کنکور نمی‌باشد (و در بعضی موارد باعث انگیزه سوزی و گاه عدم اعتماد به درس معلم در کلاس درس می‌گردد) اجتناب گردیده است.
- در کنار هر سؤال سال و گروه آزمایشی مربوطه، به جهت رعایت امانت ذکر شده است و اگر گروه مربوطه ذکر نشده باشد، منظور آن است که این سؤال مربوط به رشته ریاضی است.
- در پاسخ‌نامه‌ی کتاب سعی شده است پاسخ‌های درست و تا حد امکان بهینه، در حد بضاعت علمی اندک نگارنده، ارایه شود و از ذکر پاسخ‌های نامتعارف و ارایه‌ی درس‌نامه‌های طولانی (و تلاش بی‌دلیل برای ارایه‌ی کلاس درس در پاسخ سؤال!) خودداری شده است و فقط در برخی موارد به ذکر نکته‌ای، که موجب یادآوری مطلب مربوط به سؤال گردد، بسنده گردیده است.
- خواننده‌ی این کتاب، دانش‌پژوه دوره‌ی پیش‌دانشگاهی و داوطلب کنکور را می‌گویم، باید بداند که یادگیری و تسلط مطالب این درس (و هر درسی) به یکباره ممکن نیست و تکرار چرخه مطالعه و تمرین را می‌طلبد «همیشه فاصله‌ای هست، دچار باید بود...» و طالب مروارید غلطان باید ژرفای اقیانوس را جستجو کند و گرنه در سطح آن، جز خس و خاشاک شاید نیابد. پس مطالعه کتاب درسی، مثال‌های حل شده‌ی کتاب و تمرین‌های آن، مطالعه‌ی جزوه‌های کلاس درس و حل مکرر سؤال‌های کنکورهای سال‌های گذشته و سؤال‌های متعارف دیگر و تکرار این مراحل، موجب تثبیت مطالب و در نهایت تسلط بر آن‌ها خواهد شد. بنابراین در هنگام مطالعه‌ی این کتاب سعی نمایید تعدادی سؤال از یک بحث انتخاب کنید و بدون در نظر گرفتن وقت، اقدام به حل آن‌ها نمایید و مراجعه به راه حل‌ها، جهت یافتن اشکال‌های احتمالی را، در مرحله‌ی بعدی قرار دهید. به یاد داشته باشیم «سنگی که طاقت ضربه‌های تیشه را ندارد، هرگز تندبسی زیبا نخواهد شد»
- در پایان هر فصل سؤال‌های مهم و مشکل را مشخص نمایید تا در مرورهای بعدی مورد مطالعه مجدد قرار گیرند.
- در پدید آمدن این کتاب افراد بسیاری سهیم‌اند. مؤلف تنها وظیفه‌ی گردآوری، تدوین و حفظ صحت مطالب کتاب را به عهده دارد، که به دور از هرگونه تواضع تصنعی تردید دارم که از عهده‌ی این امر به خوبی برآمده باشم.
- در ابتدا از زحمات دوست و همکار محترم، جناب آقای بهرام جلالی، به‌عنوان نویسنده همکار و همراه تشکر و قدردانی نمایم.
- دوست خوبم آقای دکتر حامد حامدی در تهیه‌ی منابع سؤال‌ها و همکار ارجمند و دانشورم آقای نوید ضیابری (کارشناس ارشد رشته‌ی ریاضی) در پاسخ برخی سؤال‌ها یار و همراهم بوده‌اند، که زحمات آنان را ارج می‌نهم.
- همچنین شاگردان خوبم، خانم‌ها: سمیرا ترابی، مریم تولیت زواره، به آفرید علی بخشی، نفیسه ذبیحی، مرضیه رحمانی، مریم خان‌آبادی، هاله ملا احمدی و آقایان حامد منزوی، امیر باقر و فرهاد حلاجی، ابوالفضل دزواره، مجید کاسه چی، احمد غلامرضایی، میلاد ساعی، نوید دیناروند، رضا فاضلی ویسری و... در تهیه‌ی منابع سؤال‌ها، مطالعه دست‌نوشته‌ها و یافتن خطاها محبت‌های بسیارشان فراموش نشدنی است. چه دارم جز سپاس، که تقدیم افراد نامبرده می‌نمایم و توفیق روزافزون همگی را از خداوند متعال خواستارم.
- از دقت و توجه خانم‌ها «الهام اسماعیلی» و «ریحانه شریفی‌پیشه» که پیش از چاپ، زحمت ویرایش نمونه‌خوانی نهایی را پذیرفتند، همچنین از سرکار خانم «سمیه جباری» برای صفحه‌آرایی نهایی و آقایان «محسن فرهادی» و «علیرضا پورخمسه» برای طراحی جلد و صفحات آغاز فصول بسیار سپاسگزارم.
- از همه‌ی همکاران ارجمند، دانش‌پژوهان و داوطلبان عزیزی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند، خواهشمندم کاستی‌های این کتاب را، چه در صورت و چه در محتوا، به اینجانب گوشزد نمایند و رأی‌های به‌ترساز خود را بر من آشکار سازند تا راه پویش پایای علمی هموار شود، که به طور حتم محیط پویای علمی نیازمند تغییر و اصلاح است. فروتنانه سپاسگزارم.

گنه زاید ز کیهان دیده پیران
بُرُننده تیغ هم کُندی نماید

خطا آید ز داننده دبیران
دونده باره هم از سر درآید

چه رسد به صاحب این قلم «که هیچ‌ش هنر نبود و خبر نیز هم نداشت»!

- در انتها بر خود لازم می‌دانم از حروف نگار محترم سرکار خانم فریده مرادزاده و همکارانشان، که دستی چیره در این فن دارند، صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم. همچنین از کارکنان انتشارات مهر و ماه، و نیز مدیریت محترم انتشارات، جناب آقای احمد اختیاری، که حمایت‌های خود را از صاحب این قلم دریغ نکرده‌اند، کمال تشکر را دارم.

کتاب را در سهم خود به جوانان این مرز و بوم تقدیم می‌دارم و تمام سعی و تلاشم بر آن بوده است که نیازهای علمی داوطلبان عزیز را برطرف سازد.

«و هر آینه اگر این تلاشم هوده باشد، خوشا...»

جواد ترکمن

تهران: تابستان ۱۳۹۰

تلفن تماس با مولف

۰۹۱۲۱۳۹۵۸۱۸

ریاضیات
گسسته
و جبر و احتمال

گراف



نظریه‌ی اعداد

$$a \equiv b^m$$

نظریه‌ی مجموعه‌ها



رابطه‌ها



آنالیز ترکیبی



ترکیبیات

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

احتمال



استدلال ریاضی



نظریه‌ی اعداد

قضیه‌ی تقسیم

۱. اگر خارج قسمت‌های دو عدد درست a و a' بر عدد درست b برابر باشد و باقی‌مانده‌ها مختلف باشند، تفاضل a و a' (سراسری ۵۰)
 - (۱) بر b بخش‌پذیر است. (۲) مساوی b است. (۳) کوچک‌تر از b است. (۴) بزرگ‌تر از b است.
۲. اگر a مضربی از ۶ و b مضربی از ۱۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر b بر کدام یک از اعداد زیر همواره قابل قسمت است؟ (سراسری ۵)
 - (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶
۳. اگر در تقسیمی از اعداد صحیح مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟ (سراسری ۵)
 - (۱) خارج قسمت بر عدد n بخش‌پذیر است. (۲) باقی‌مانده بر عدد n بخش‌پذیر است. (۳) خارج قسمت و باقی‌مانده هر دو بر عدد n بخش‌پذیرند. (۴) خارج قسمت و باقی‌مانده هیچ یک بر عدد n بخش‌پذیر نیستند.
۴. در هر تقسیم [از اعداد طبیعی] به شرط آن که خارج قسمت مخالف صفر باشد، مقسوم همواره از چند برابر باقی‌مانده بزرگ‌تر است؟ (سراسری ۵۲)
 - (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۴
۵. اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بزرگ‌تر از ۵ و باقی‌مانده تقسیم برابر r باشد، آنگاه:
 - (۱) $a > 5r$ (۲) $a \geq 5r$ (۳) $a > 7r$ (۴) $a \geq 7r$
۶. اگر در تقسیمی ۹۰ واحد به مقسوم و ۴ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند، اما از باقی‌مانده ۲ واحد کم می‌شود. در این تقسیم خارج قسمت برابر است با: (سراسری ۵۳)
 - (۱) ۹ (۲) ۲۳ (۳) ۲۶ (۴) ۳۲
۷. در یک تقسیم اگر به مقسوم ۲۷ واحد اضافه کنیم، از باقی‌مانده ۱۵ واحد کم و به خارج قسمت ۲ واحد اضافه می‌شود. مقسوم‌علیه چقدر است؟ (سراسری ۶۹)
 - (۱) ۲۱ (۲) ۲۳ (۳) ۲۵ (۴) ۲۹
۸. در یک تقسیم به مقسوم، باقی‌مانده و خارج قسمت به ترتیب ۱۰۲، ۲ و ۵ واحد اضافه می‌شود، مقسوم‌علیه بدون تغییر می‌ماند. مقسوم‌علیه کدام است؟
 - (۱) ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۰ (۴) ۵
۹. در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، با افزودن ۲۶ واحد به مقسوم و ۳ واحد به مقسوم‌علیه، خارج قسمت تغییر نکرده و باقی‌مانده به اندازه $\frac{2}{5}$ خارج قسمت کاهش می‌یابد. خارج قسمت این تقسیم کدام است؟
 - (۱) ۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۰ (۴) ۲
۱۰. در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت برابر ۵ و باقی‌مانده ۱۷ است. اگر از a و b هر کدام دو واحد کم کنیم، خارج قسمت تغییر نکرده و باقی‌مانده برابر $\frac{5b}{y}$ می‌شود. مقدار a کدام است؟
 - (۱) ۹۸ (۲) ۱۸۳ (۳) ۱۹۲ (۴) ۱۲۴
۱۱. در تقسیم عدد صحیح a بر ۷ باقی‌مانده برابر ۲ است. اگر ۳۱ واحد به مقسوم اضافه کنیم، آنگاه به خارج قسمت ... واحد اضافه می‌شود.
 - (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) صفر
۱۲. در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کند؟ (آزاد ۸۵ - صبح)
 - (۱) سه واحد کم می‌شود - یک واحد اضافه می‌شود. (۲) سه واحد اضافه می‌شود - یک واحد اضافه می‌شود. (۳) سه واحد اضافه می‌شود - تغییری نمی‌کند. (۴) سه واحد کم می‌شود - دو واحد اضافه می‌شود.
۱۳. در یک تقسیم در اعداد طبیعی، مقسوم‌علیه ۵۷ و باقی‌مانده ۱۸ است. چند واحد باید به مقسوم اضافه کنیم تا خارج قسمت ۲ واحد اضافه شود و باقی‌مانده مساوی ۴۰ گردد؟
 - (۱) ۱۳۴ (۲) ۱۳۵ (۳) ۱۳۶ (۴) ۱۳۷
۱۴. دو عدد صحیح a و b را بر تفاضلشان تقسیم کرده‌ایم. کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟
 - (۱) خارج قسمت‌ها برابرند. (۲) تفاضل خارج قسمت‌ها برابر ۲ است. (۳) خارج قسمت‌ها دو عدد متوالی‌اند. (۴) باقی‌مانده‌ها دو عدد متوالی‌اند.
۱۵. در یک تقسیم، خارج قسمت برابر ۱۳ و مقسوم‌علیه برابر ۹ است. حداقل چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا باقی‌مانده تغییری نکند؟
 - (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۴ (۴) ۱۳
۱۶. در یک تقسیم، مقسوم‌علیه برابر ۵۳ و باقی‌مانده برابر ۱۷ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییری نکند؟
 - (۱) ۳۵ (۲) ۳۶ (۳) ۲۷ (۴) ۱۸
۱۷. در یک تقسیم باقی‌مانده برابر ۲۹ و خارج قسمت برابر ۷ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه این تقسیم افزود تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند؟
 - (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۴
۱۸. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ وجود دارد که در تقسیم آن‌ها بر عدد ۴، باقی‌مانده برابر ۳ باشد؟
 - (۱) ۱۴ (۲) ۲۷ (۳) ۲۵ (۴) ۱۹

۱۹. چند عدد طبیعی کوچک تر از ۵۰۰ وجود دارد که در تقسیم بر عدد طبیعی b ، باقی مانده ۳۹ و خارج قسمت ۱۱ شود؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
۲۰. باقی مانده های تقسیم عدد صحیح a بر اعداد ۶ و ۸ به ترتیب ۳ و ۵ می باشد. باقی مانده تقسیم a بر ۲۴ کدام است؟
 (۱) ۱۵ (۲) ۱۷ (۳) ۲۱ (۴) ۲۳
۲۱. باقی مانده تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر r و خارج قسمت برابر q است. خارج قسمت تقسیم $(-a)$ بر b کدام است؟
 (۱) $-q$ (۲) $-q-1$ (۳) $-q+1$ (۴) $q-1$
۲۲. اگر خارج قسمت تقسیم a بر b برابر ۷ و باقی مانده بیش ترین مقدار خود را داشته باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم a بر ۸ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷
۲۳. در یک تقسیم از اعداد طبیعی مقسوم ۱۲ برابر باقی مانده است و باقی مانده بیش ترین مقدار خود را دارد. خارج قسمت این تقسیم کدام است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳
۲۴. بزرگ ترین عدد صحیح که وقتی بر ۳۴ تقسیم شود، باقی مانده هفت برابر خارج قسمت می باشد، کدام است؟
 (۱) ۸۲ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۶۴ (۴) ۸۱۰
۲۵. باقی مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۵۰، ده برابر مجذور خارج قسمت است. حداکثر مقدار a کدام است؟
 (۱) ۸۴۰ (۲) ۱۱۶۰ (۳) ۲۲۷۰ (۴) ۹۵۰
۲۶. در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی مانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کم تر است. بزرگ ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ (سراسری ۸۴)
 (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶
۲۷. چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی مانده تقسیم هر یک از آن ها بر عدد ۱۰۰ مکعب خارج قسمت این تقسیم باشد؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) بی شمار
۲۸. مجموع ارقام بزرگ ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷ باقی مانده توان دوم خارج قسمت باشد، کدام است؟ (آرد ۸۵ - عصر)
 (۱) ۱۶ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴
۲۹. در تقسیم عدد صحیح a بر ۲۳، باقی مانده برابر $\frac{1}{3}$ خارج قسمت است. بیش ترین مقدار خارج قسمت کدام است؟
 (۱) ۶۹ (۲) ۶۸ (۳) ۶۷ (۴) ۶۶
۳۰. در یک تقسیم مقسوم برابر ۹۰۱۲ و باقی مانده ۱۲ است. اگر خارج قسمت $\frac{1}{3}$ جذر مقسوم علیه باشد، خارج قسمت کدام است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۳۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۴۵
۳۱. در تقسیم اعداد بین ۱۵۰ و ۴۰۰ بر عدد ۲۷، همواره باقی مانده ۱۱ می باشد. بیش ترین و کم ترین مقدار خارج قسمت به ترتیب کدام اند؟
 (۱) ۱۳ و ۵ (۲) ۱۴ و ۶ (۳) ۱۳ و ۶ (۴) ۱۴ و ۵
۳۲. در یک تقسیم مقسوم ۸۲ و باقی مانده ۱۰ است. برای مقسوم علیه چند جواب وجود دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
۳۳. اگر در تقسیمی مقسوم ۷۱۵ و خارج قسمت ۱۲ باشد، آنگاه مقسوم علیه چند مقدار متمایز می تواند داشته باشد؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
۳۴. در تقسیم عدد ۱۰۰ بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت دو برابر مقسوم علیه است. برای باقی مانده این تقسیم چند جواب وجود دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
۳۵. در یک تقسیم از اعداد طبیعی، اگر ۲۵ واحد به مقسوم اضافه کنیم، ۳ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی مانده برابر صفر می شود. برای مقسوم علیه این تقسیم چند مقدار متمایز وجود دارد؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
۳۶. در یک تقسیم از اعداد طبیعی، مقسوم ۲۷ برابر خارج قسمت و مقسوم علیه ۵ واحد بیش تر از باقی مانده است. مقسوم چند مقدار می تواند داشته باشد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
۳۷. اگر در یک تقسیم، مقسوم ۱۰۰۰ واحد بیش از مقسوم علیه و باقی مانده تقسیم ۹۵ باشد، خارج قسمت کدام یک از عددهای زیر می تواند باشد؟ (سراسری ۵۲)
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۳
۳۸. در یک تقسیم از اعداد طبیعی باقی مانده ۵۰ و مقسوم ۲۶۰ واحد بیش تر از مقسوم علیه است. برای مقسوم علیه این تقسیم چند جواب وجود دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
۳۹. در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت مجذور باقی مانده است. چند عدد b می توان یافت؟ (سراسری ۸۷)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
۴۰. در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b باقی مانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ است. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری ۸۸)
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
۴۱. چند عدد صحیح سه رقمی موجود است که بر ۳۱ بخش پذیر باشد؟ (سراسری ۵۷)
 (۱) ۳۰ (۲) ۲۹ (۳) ۳۲ (۴) ۳۱

نظریه ی اعداد

۷- گزینه ی ۱

$$a = bq + r; 0 \leq r < b$$

$$a + 27 = b(q + 2) + (r - 15) \Rightarrow bq + r + 27 = bq + r + 2b - 15$$

پس $2b = 42$ و لذا $b = 21$.

۸- گزینه ی ۱

تقسیم $a = bq + r; 0 \leq r < b$ را در نظر می گیریم. داریم:

$$a + 102 = b(q + 5) + (r + 2) \Rightarrow a + 102 = \underbrace{bq + r}_{a} + 5b + 2$$

پس $102 = 5b + 2$ و لذا $b = 20$.

۹- گزینه ی ۳

حل: تقسیم $a = bq + r; 0 \leq r < b$ را در نظر می گیریم. داریم:

$$a + 26 = (b + 3)q + (r - \frac{2}{5}q) \Rightarrow a + 26 = \underbrace{bq + r}_{a} + \frac{13}{5}q$$

پس $26 = \frac{13}{5}q$ و لذا $q = 10$.

۱۰- گزینه ی ۳

طبق فرض داده شده تقسیم $a = b \times 5 + 17; 17 < b$ را داریم و پس از تغییرات گفته شده خواهیم داشت:

$$a - 2 = (b - 2) \times 5 + \frac{5b}{5} \Rightarrow a - 2 = b \times 5 - 10 + \frac{5b}{5}$$

به جای a عبارت $b \times 5 + 17$ را قرار می دهیم. داریم:

$$b \times 5 + 17 - 2 = b \times 5 - 10 + \frac{5b}{5} \Rightarrow b = 35$$

و لذا $a = 35 \times 5 + 17 = 192$.

۱۱- گزینه ی ۱

$$a = 7q + 2 \Rightarrow a + 31 = 7q + 2 + 31$$

$$\Rightarrow a + 31 = 7q + 28 + 5$$

$$\Rightarrow a + 31 = 7(q + 4) + 5$$

پس به خارج قسمت ۴ واحد اضافه شد.

۱۲- گزینه ی ۱

$$a = 63q + 17 \Rightarrow a + 60 = 63q + (17 + 60)$$

$$\Rightarrow a + 60 = 63q + 63 + 14$$

$$\Rightarrow a + 60 = 63(q + 1) + 14$$

باقی مانده خارج قسمت

۱۳- گزینه ی ۳

فرض می کنیم x واحد باید به مقسوم اضافه کنیم. داریم:

$$a = 57q + 18 \Rightarrow a + x = 57(q + 2) + 40$$

$$\Rightarrow a + x = 57q + 114 + 40$$

$$\Rightarrow a + x = \underbrace{57q + 18}_{a} + 136$$

$$\Rightarrow x = 136$$

۱۴- گزینه ی ۳

قضیه ی تقسیم

۱- گزینه ی ۳

تقسیم های مطرح شده را می نویسیم:

$$\begin{cases} a = bq + r; 0 \leq r < b \\ a' = bq' + r'; 0 \leq r' < b \end{cases}$$

واضح است که $a - a' = r - r'$ از طرفی $|a - a'| < b$ و لذا $|a - a'| < b$.

۲- گزینه ی ۲

تقسیم $a = bq + r; 0 \leq r < b$ را در نظر می گیریم. چون $a = 6k$ و $b = 15k'$ است، لذا $3 = \frac{a}{b} = \frac{6k}{15k'} = \frac{2}{5} \cdot \frac{k}{k'}$ مضربی از ۳ است.

۳- گزینه ی ۲

نکته: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، آنگاه باقی مانده نیز بر عدد n بخش پذیر است، ولی در مورد خارج قسمت چیزی نمی توان گفت.

تقسیم $a = bq + r; 0 \leq r < b$ را در نظر می گیریم. با تقسیم دو طرف بر عدد صحیح n ، داریم: $\frac{a}{n} = \frac{b}{n}q + \frac{r}{n}$. اما چون b, a هر دو بر n بخش پذیرند، لذا $\frac{b}{n}, \frac{a}{n}$ اعدادی صحیح اند (q نیز صحیح است). پس $\frac{r}{n}$ نیز باید عدد صحیح باشد و در نتیجه r بر n بخش پذیر می باشد.

۴- گزینه ی ۳

تقسیم زیرا در نظر می گیریم:

$$a = bq + r; 0 \leq r < b$$

چون a و b طبیعی می باشند و r نامنفی است، لذا q نیز عددی طبیعی است. پس $q \geq 1$ و لذا $bq \geq b$. داریم

$$b > r \xrightarrow{bq \geq b} bq > r \xrightarrow{+r} bq + r > 2r \Rightarrow a > 2r$$

۵- گزینه ی ۳

تقسیم $a = bq + r; 0 \leq r < b$ را در نظر می گیریم. مطابق فرض $q > 5$ است، پس داریم

$$q \geq 6 \Rightarrow bq \geq 6b \Rightarrow bq + r \geq 6b + r \Rightarrow a \geq 6b + r (*)$$

از طرفی $b > r$ و لذا $b \geq r + 1$ است. پس

$$6b \geq 6r + 6 \xrightarrow{+r} 6b + r \geq 7r + 6 \xrightarrow{(*)} a \geq 7r + 6$$

بنابراین $a > 7r$.

۶- گزینه ی ۲

تقسیم $a = bq + r; 0 \leq r < b$ را در نظر می گیریم. تغییرات مطرح شده را اعمال می کنیم. داریم:

$$a + 90 = (b + 4)q + (r - 2) \Rightarrow a + 90 = \underbrace{bq + r}_{a} + 4q - 2$$

پس $90 = 4q - 2$ و لذا $92 = 4q$ و از آن جا $q = 23$.



$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = \underbrace{24(q-q')}_{q'' \in \mathbb{Z}} + \underbrace{(12-15)}_{-3}$$

پس $a = 24q'' + (-3)$. اکنون مقسوم علیه را به طرف راست اضافه و کم می کنیم. داریم:

$$a = \underbrace{24q'' - 24}_{24(q''-1)} + \underbrace{24 + (-3)}_{21} \Rightarrow a = \underbrace{24(q''-1)}_{k \in \mathbb{Z}} + 21$$

پس $a = 24k + 21$.

۲۱- گزینه ی ۲

تقسیم $a = bq + r$; $0 \leq r < b$ را در نظر می گیریم. داریم:

$$-a = b(-q) + (-r)$$

اما چون باقی مانده $-r$ غیر قابل قبول است، لذا b واحد اضافه و کم می کنیم. داریم:

$$-a = b(-q) - b + b - r \Rightarrow -a = b(-q-1) + (b-r)$$

مثبت

پس خارج قسمت $-q-1$ است.

۲۲- گزینه ی ۴

نکته: در تقسیم $a = bq + r$; $0 \leq r < b$ بیشترین مقدار باقی مانده $b-1$ است.

$$a = b \times 7 + (b-1) \Rightarrow a = 8b - 1 \Rightarrow a = 8b - 8 + 8 - 1$$

$$\Rightarrow a = 8(\underbrace{b-1}_q) + 7$$

یعنی باقی مانده تقسیم a بر 8 برابر 7 است.

۲۳- گزینه ی ۲

تقسیم زیر را در نظر می گیریم $(a, b \in \mathbb{N})$

$$a = bq + r; 0 \leq r < b$$

می دانیم بیشترین مقدار r برابر $b-1$ است. از طرفی طبق فرض $a = 12r$ است، پس $a = 12(b-1)$. اکنون تقسیم را بازنویسی می کنیم.

$$12(b-1) = bq + (b-1)$$

$$\Rightarrow 11(b-1) = bq \Rightarrow 11b - 11 - bq = 0$$

پس $11(b-q) = 11$ که $b=11$ و $11-q=1$ قابل قبول است، پس $q=10$ ، $r=10$ و $a=120$ می باشد.

(توجه شود اگر $b=1$ و $11-q=11$ باشد، آنگاه $q=0$ می باشد و از آن جا $a=r$ به دست می آید که با فرض $a=12r$ تناقض دارد)

۲۴- گزینه ی ۳

$$a = 34q + r; r < 34$$

اما طبق فرض داده شده $r=7q$ است و لذا $7q < 34$ و در نتیجه بیشترین مقدار q برابر 4 است. پس بزرگترین مقدار صحیح a برابر است با:

$$a = 34 \times 4 + 7 \times 4 = 166$$

۲۵- گزینه ی ۲

$$a = 250q + 10q^2$$

مطابق فرض داریم:

اما مطابق شرط تقسیم داریم $250 \leq 10q^2 \leq 25$ و لذا $5 \leq q^2 < 25$ و از آن جا $5 \leq q < 5$ ، پس حداکثر q برابر 4 است و حداکثر a عبارت است از:

$$a = 250 \times 4 + 10 \times 4^2 = 1160$$

۲۶- گزینه ی ۴

تقسیم داده شده را مطابق فرض می نویسیم:

اگر $d = a - b$ فرض شود، در این صورت در تقسیم a بر d خواهیم داشت:

$$a = dq + r; 0 \leq r < d$$

از طرفی می توانیم قرار دهیم $a = d + b$ و لذا تقسیم فوق به صورت زیر درمی آید:

$$d + b = dq + r; 0 \leq r < d$$

پس $b = dq - d + r$ و لذا $b = d(q-1) + r$ که $0 \leq r < d$ است. یعنی در تقسیم b بر d خارج قسمت $q-1$ است. پس خارج قسمت ها دو عدد متوالی اند.

۱۵- گزینه ی ۱

نکته: اگر در یک تقسیم، مضرب های مقسوم علیه را به مقسوم اضافه نماییم، باقی مانده تغییری نمی کند، ولی خارج قسمت تغییر می نماید. در بین مضرب های 9 ، کمترین عدد همان 9 می باشد.

۱۶- گزینه ی ۱

مطابق فرض داده شده داریم $a = 53q + 17$. فرض می کنیم x واحد به مقسوم اضافه شده است. پس:

$$a + x = 53q + \underbrace{17+x}_{\text{باقی مانده جدید}}$$

مطابق شرط تقسیم $17+x < 53$ و لذا $x < 36$ ، پس حداکثر x برابر 35 است.

۱۷- گزینه ی ۴

طبق فرض داده شده تقسیم زیر را داریم:

$$a = b \times 7 + 29; 29 < b$$

فرض می کنیم x واحد به مقسوم علیه اضافه کرده ایم. داریم:

$$a = (b+x) \times 7 + \underbrace{29-7x}_{\text{باقی مانده جدید}}$$

(چون به سمت راست تساوی $7x$ اضافه کرده ایم و سمت چپ تغییری نکرده است، پس $7x$ از باقی مانده کم می کنیم!) اما مطابق شرط تقسیم $29-7x \geq 0$ و لذا $x \leq \frac{29}{7}$ ، پس حداکثر x برابر 4 است.

۱۸- گزینه ی ۳

فرض می کنیم $0 < a < 100$ عددی طبیعی است و در شرط سوال صدق می کند. یعنی $a = 4q + 3$. بنابراین

$$4q + 3 < 100 \Rightarrow q < \frac{97}{4}$$

و لذا $q \leq 24$. پس $q = 0, 1, 2, \dots, 24$ و مقدار قابل قبول برای a نتیجه می دهد.

۱۹- گزینه ی ۳

عدد طبیعی $a < 500$ را در نظر می گیریم. تقسیم مزبور عبارت است از:

$$a = b \times 11 + 39; 39 < b$$

از طرفی $a < 500$ ، پس $11b + 39 < 500$ و لذا $b < \frac{461}{11}$ و در نتیجه $b \leq 41$. در ضمن $b > 39$ ، بنابراین $b = 40$ و $b = 41$ و از آن جا $a = 479$ و $a = 490$ قابل قبول است.

۲۰- گزینه ی ۳

$$\begin{cases} a = 6q + 3 \xrightarrow{\times 4} 4a = 24q + 12 \\ a = 8q' + 5 \xrightarrow{\times 3} 3a = 24q' + 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 72 = b \cdot q \xrightarrow{b > 10} 72 = 12 \times 6 = 18 \times 4 = 24 \times 3 = 36 \times 2 = 72 \times 1$$

پس b مقادیر $۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۶$ و ۷۲ را می‌پذیرد.

۳۳- گزینه ۲

مطابق فرض داریم

$$715 = b \times 12 + r ; 0 \leq r < b$$

بنابراین $r = 715 - 12b$ از طرفی

$$\begin{cases} r \geq 0 \Rightarrow 715 - 12b \geq 0 \Rightarrow b \leq \frac{715}{12} \Rightarrow b \leq 59 \\ r < b \Rightarrow 715 - 12b < b \Rightarrow b > \frac{715}{13} \Rightarrow b \geq 55 \end{cases}$$

پس b برابر $۵۵, ۵۷, ۵۸, ۵۹$ می‌باشد.

۳۴- گزینه ۱

مطابق فرض داده شده تقسیم زیر را داریم

$$100 = b(2b) + r ; 0 \leq r < b$$

بنابراین $r = 100 - 2b^2$ از طرفی $r \geq 0$ و لذا داریم

$$100 - 2b^2 \geq 0 \Rightarrow 100 \geq 2b^2 \Rightarrow 50 \geq b^2 \xrightarrow{b \in \mathbb{N}} b \leq 7$$

اکنون بررسی زیر را داریم

$$b = 7 \Rightarrow r = 100 - 2(7^2) = 2$$

$$b = 6 \Rightarrow r = 100 - 2(6^2) = 28 \not< b \quad (\text{غ ق ق})$$

بنابراین برای r فقط یک جواب وجود دارد.

۳۵- گزینه ۳

تقسیم $a = bq + r ; 0 \leq r < b$ را در نظر می‌گیریم. مطابق فرض‌های داده شده داریم:

$$a + 25 = b(q + 3) + 0 \Rightarrow bq + r + 25 = bq + 3b$$

بنابراین $3b = r + 25$. اکنون به r عدد می‌دهیم و باید این اعداد طوری انتخاب شوند که $r + 25$ مضرب ۳ باشد.

$$r = 2 \Rightarrow b = 9$$

$$r = 5 \Rightarrow b = 10$$

$$r = 8 \Rightarrow b = 11$$

$$r = 11 \Rightarrow b = 12$$

۳۶- گزینه ۱

تقسیم $a = bq + r ; 0 \leq r < b$ را در نظر می‌گیریم. طبق فرض‌های داده شده داریم $a = 27q$ و $b = r + 5$ و لذا:

$$27q = (r + 5)q + r \Rightarrow 22q = r.(q + 1)$$

اکنون حالت‌های مختلف زیر امکان‌پذیر است:

$$\begin{cases} (q + 1 = 22, r = q) \Rightarrow (q = 21, r = 21) \\ (q + 1 = 11, r = 2q) \Rightarrow (q = 10, r = 20) \\ (q + 1 = 2, r = 11q) \Rightarrow (q = 1, r = 11) \end{cases}$$

۳۷- گزینه ۳

در تقسیم $a = bq + r ; 0 \leq r < b$ با توجه به فرض‌های داده شده $a = 1000 + b$ و $r = 95$ است. بنابراین

$$b + 1000 = bq + 95 ; 95 < b$$

پس $905 = b.(q - 1)$ و لذا حالت‌های مختلف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} 905 = b.(q - 1) \Rightarrow b = 905, q - 1 = 1 \Rightarrow q = 2 \\ 5 \times 181 = b.(q - 1) \Rightarrow b = 181, q - 1 = 5 \Rightarrow q = 6 \end{cases}$$

۳۸- گزینه ۳

$$a = 37q + \underbrace{(q^2 - 2)}_r$$

از طرفی می‌دانیم $r < 37$ و لذا $q^2 - 2 < 37$ و یا $q^2 < 39$. بنابراین بیش‌ترین مقدار q برابر ۶ است. پس بیش‌ترین مقدار a عبارت است از $a = 37 \times 6 + (6^2 - 2) = 256$ که بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

۲۷- گزینه ۱

اگر a عدد مطلوب باشد، آنگاه: $a = 100q + q^3$.

مطابق شرط تقسیم $0 \leq q^3 < 100$ ، پس $0 \leq q \leq 4$ یعنی $q = 0, 1, 2, 3, 4$. اما $q = 0$ قابل قبول نیست، زیرا $a = 0$ به دست می‌آید که عددی طبیعی نیست و لذا چهار جواب طبیعی برای a وجود دارد.

۲۸- گزینه ۳

مقسوم را a و خارج‌قسمت را q فرض می‌کنیم. داریم:

$$a = 47q + q^2 ; 0 \leq q^2 < 47$$

با توجه به شرط تقسیم $(0 \leq q^2 < 47)$ ، نتیجه می‌گیریم که بیش‌ترین مقدار q برابر ۶ است و لذا بیش‌ترین مقدار a برابر است با:

$$47 \times 6 + 6^2 = 318$$

که مجموع ارقام آن ۱۲ می‌باشد.

۲۹- گزینه ۴

تقسیم $a = 23q + r$ را در نظر می‌گیریم، به طوری که $0 \leq r < 23$. از طرفی مطابق فرض داده شده $r = \frac{q}{3}$ می‌باشد. بنابراین $0 \leq q < 69$ و لذا $0 \leq \frac{q}{3} < 23$ پس بیش‌ترین مقدار q برابر ۶۸ است. اما $r = \frac{q}{3} = \frac{68}{3} \notin \mathbb{Z}$ و لذا حداکثر q باید برابر ۶۶ (قابل قسمت بر ۳) باشد.

۳۰- گزینه ۱

تقسیم $12 < b = 9012 = bq + 12$ را در نظر می‌گیریم. چون

$$q = \frac{1}{3}\sqrt{b}$$

$$9012 = bq + 12 \Rightarrow bq = 9000 \Rightarrow b \times \frac{\sqrt{b}}{3} = 9000 \Rightarrow b = 900$$

بنابراین

$$q = \frac{1}{3}\sqrt{900} = 10$$

۳۱- گزینه ۲

فرض می‌کنیم $150 < a < 400$ و داریم

$$a = 27q + 11 \Rightarrow 150 < 27q + 11 < 400$$

$$\xrightarrow{-11} 139 < 27q < 389$$

$$\xrightarrow{\div 27} \frac{139}{27} < q < \frac{389}{27}$$

$$\Rightarrow 6 \leq q \leq 14$$

۳۲- گزینه ۳

مطابق فرض داده شده داریم

$$82 = bq + 10 ; 10 < b$$

**منتخب کتاب‌های ریاضی
انتشارات مهرماه**



ویژگیهای این کتاب:

- ① مجموعه کامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای ریاضیات گسسته، تیر و احتیال و هندسه تحلیلی و جبر خطی
- ② پاسخنامه تشریحی به همراه دیگر نکات و یادآوری‌ها
- ③ شامل سئوالات کنکورهای سراسری (داخلی و خارج کشور) دانشگاه آزاد و دولتی
- ④ طبقه‌بندی و چیدمان مناسب پرسش‌ها بر اساس سرفصل‌های دروس
- ⑤ استفاده از سئوالات استاندارد در هر جزء مطالب گنگ‌های درسی
- ⑥ مرجع کامل سئوالات کنکورهای سراسری و آزاد تا سال ۹۰ با پاسخ تشریحی

انتشارات مهرماه
۶۶۴۰۸۴۰۰۰۳
www.mehromah.org
sms: 300072120

