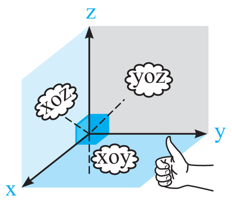
جزوه‌ی ۱ آشنایی با فضای $\mathbb{R}^۳$

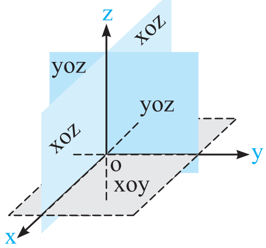
این جزوه شامل مقدمات فصل اول است که تاکنون به‌طور مستقیم در کنکور مورد سؤال قرار نگرفته، بلکه ابزاری است که تا پایان فصل دوم مورد نیاز است.

فضای $\mathbb{R}^۳$

برای نمایش دستگاه مختصات سه‌بعدی در فضای $\mathbb{R}^۳$، از سه محور مختصات دوبه‌دو عمود برهم به نام‌های ox ، oy و oz استفاده می‌شود و نحوه‌ی قرارگیری آن‌ها به‌گونه‌ای است که کنج $o-xyz$ یک کنج راستگرد است. بدین معنی که اگر کف دست راست را در جهت محور ox باز کنیم و در جهت محور oy ببندیم، انگشت شست، در جهت محور oz قرار می‌گیرد. نگاه کنید:



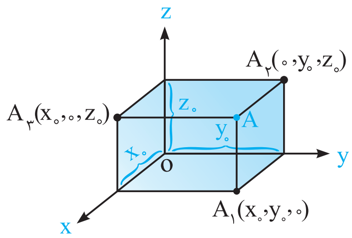
همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید در فضای $\mathbb{R}^۳$ علاوه بر سه محور مختصات که دوبه‌دو عمود برهم هستند، سه صفحه‌ی مختصات دوبه‌دو عمود برهم به نام‌های xoy ، xoz و yoz وجود دارد که فضای $\mathbb{R}^۳$ توسط آن‌ها به **۸ ناحیه** تقسیم می‌شود.



اما چون نمایش فضای سه‌بعدی روی صفحه‌ی کاغذ قدری مشکل است، از این ۸ ناحیه فقط یک ناحیه به نمایش درمی‌آید که آن را **کنج مثبت** دستگاه قائم می‌نامند.

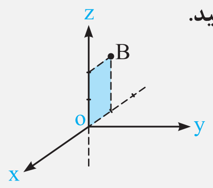
نمایش نقطه در دستگاه محورهای مختصات سه بعدی

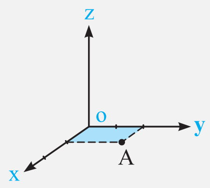
برای مشخص‌کردن موقعیت نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰, z_۰)$ در دستگاه محورهای مختصات سه‌بعدی، اندازه‌ی $x_۰$ ، $y_۰$ و $z_۰$ را روی محورهای خودشان و از مبدأ و با توجه به علامت آن‌ها جدا کرده و مکعب مستطیلی می‌سازیم که این سه طول، سه یال هم‌رأس آن باشند. رأسی از مکعب مستطیل که با مبدأ مختصات دو سر قطر اصلی مکعب مستطیل باشند، موقعیت نقطه را در فضا مشخص می‌کند:



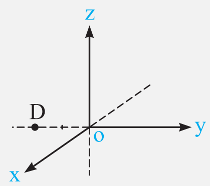
تذکر: اگر نقطه‌ای روی یکی از محورها یا صفحات مختصات یا مبدأ مختصات (مکان‌های نام‌دار در فضا) قرار گیرد، هر مؤلفه‌ی **غیر هم‌نام** با نام آن‌ها در مختصات نقطه، **صفر** است.

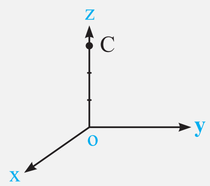
تمرین ۱: به شکل‌های زیر نگاه کنید و مختصات نقاط A، B، C و D را بنویسید.





حل: $B(-۱, ۰, ۲)$ روی xoz ، $A(۱, ۲, ۰)$ روی xoy





حل: $D(۰, -۲, ۰)$ روی oy ، $C(۰, ۰, ۳)$ روی oz

فاصله‌ی دو نقطه

اگر $A(x_۱, y_۱, z_۱)$ و $B(x_۲, y_۲, z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند، فاصله‌ی آن‌ها از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$|AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲ + (z_۲ - z_۱)^۲}$$

ویژگی‌های طول

در کتاب درسی آمده است که با توجه به حقایق هندسی، سه ویژگی برای طول پاره‌خط بین دو نقطه‌ی A و B در $\mathbb{R}^۳$ برقرار است:

۱) اگر $|AB| = ۰$ باشد، آن‌گاه $A = B$ (منطبق برهم) خواهد بود و برعکس.

۲) همواره $|AB| = |BA|$ می‌باشد.

۳) به ازای هر نقطه‌ی دلخواه C در $\mathbb{R}^۳$ همواره نامساوی زیر برقرار است (نامساوی مثلثی):

$$||AC| - |BC|| \le |AB| \le |AC| + |BC|$$

تمرین ۲: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(-۱, ۲, ۳)$ و $B(-۴, -۱, ۲)$ برابر چند است؟

حل:

$$|AB| = \sqrt{(-۴ - (-۱))^۲ + (-۱ - ۲)^۲ + (۲ - ۳)^۲}$$

$$= \sqrt{۹ + ۹ + ۱} = \sqrt{۱۹}$$

تصویر کردن روی محورها و صفحات مختصات

برای تصویر کردن هر نقطه [یا بردار و ...] روی محورها و صفحات مختصات، کافی است هر مؤلفه‌ی **غیر هم‌نام** با اسم محور یا صفحه را در مؤلفه‌های نقطه، **صفر** کنیم. مثلاً:

$$A(۱, ۲, ۳) \xrightarrow{\text{تصویر روی } oy} A'(۰, ۲, ۰)$$

قرینه کردن نسبت به محورها و صفحات مختصات

برای قرینه کردن هر چیزی [نقطه، بردار، خط و ...] نسبت به محورها، صفحات یا مبدأ مختصات، کافی است هر مؤلفه‌ی **غیر هم‌نام** با اسم آن‌ها را در آن چیز **قرینه** کنیم. مثلاً:

$$A(۱,۲,۳) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } oz} A'(-۱,-۲,۳)$$

$$A(۱,۲,۳) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} A'(-۱,-۲,-۳)$$

تمرین ۳: نقطه‌ی $A(۱,-۲,۳)$ مفروض است. هر یک از موارد زیر را پیدا کنید:

الف) تصویر A روی محور oz ب) تصویر A روی xoz

ج) قرینه‌ی A نسبت به oy د) قرینه‌ی A نسبت به yoz

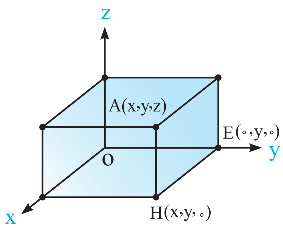
حل:

الف) $A_۱(۰,۰,۳)$ ب) $A_۲(۱,۰,۳)$

ج) $A_۳(-۱,-۲,-۳)$ د) $A_۴(-۱,-۲,۳)$

فاصله‌ی نقطه از محورها و صفحات مختصات

برای به‌دست آوردن فاصله‌ی یک نقطه از محورها و صفحات مختصات، یکی از راه‌ها این است که نقطه را روی محور یا صفحه‌ی مذکور تصویر کرده و فاصله‌ی آن را تا تصویرش پیدا کنیم. مثلاً با توجه به شکل مقابل داریم:



فاصله‌ی A از صفحه‌ی xoy $AH=\sqrt{۰^۲+۰^۲+z^۲}$

فاصله‌ی A از محور oy $AE=\sqrt{x^۲+۰^۲+z^۲}$

بنابراین به نتیجه‌ی جالب توجه دیگری دست پیدا کردیم که کامل کننده‌ی مطالب قبلی درباره‌ی محورها و صفحات مختصات است:

برای پیدا کردن فاصله‌ی یک نقطه از محورها و صفحات مختصات باز هم به مؤلفه‌های غیرهم‌نام با اسم محور یا صفحه توجه می‌کنیم و این بار مجموع مربعات آن‌ها را در زیر رادیکال می‌نویسیم. یعنی:

$$\text{فاصله‌ی نقطه از محورها، صفحات و مبدأ مختصات} = \sqrt{\text{مجموع مربعات مؤلفه‌های غیر هم‌نام با اسم آن‌ها}}$$

تمرین ۴: نقطه‌ی $A(۱,-۲,-۳)$ مفروض است:

الف) فاصله‌ی A از محور oz را پیدا کنید.

حل: $\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$

ب) فاصله‌ی A از صفحه‌ی xoz را به دست آورید.

حل: $\sqrt{y_A^۲}=\sqrt{(-۲)^۲}=۲$

مختصات وسط پاره‌خط

اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند، آن‌گاه مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$M=\frac{A+B}{۲}=\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲}\right)$$

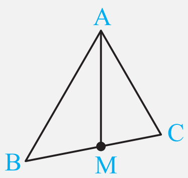
تمرین ۵: اگر $A(۱,۲,-۳)$، $B(-۵,۶,۱)$ مفروض باشند، مختصات وسط پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

حل: $M=\frac{A+B}{۲}=\left(\frac{۱-۵}{۲},\frac{۲+۶}{۲},\frac{-۳+۱}{۲}\right)=(-۲,۴,-۱)$

تمرین ۶: اگر نقاط $A(۱,۲,۱)$، $B(۳,۰,۱)$ و $C(-۱,۲,۳)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانه‌ی AM کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

حل: **گزینه (۴)** ابتدا نقطه‌ی M وسط ضلع BC را پیدا می‌کنیم:

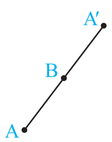


$$M=\frac{B+C}{۲}=(۱,۱,۲)$$

$$\Rightarrow |AM|=\sqrt{۰^۲+(-۱)^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$$

قرینه‌ی نقطه نسبت به نقطه

وقتی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی B قرینه می‌شود، نقطه‌ی دیگری مانند A' حاصل می‌شود به‌طوری که نقطه‌ی B، دقیقاً وسط پاره‌خط AA' قرار می‌گیرد، یعنی:



$$B=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A'=۲B-A$$

این مسأله بسیار پرکاربرد و مهم است و در فصل بعدی هم بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. پس سعی کنید با تأمل و دقت، آن را به خوبی درک کنید.

تمرین ۷: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ نسبت به $B(۴,۳,۰)$ چه‌قدر است؟

حل: $A'=۲B-A=(۸,۶,۰)-(۱,۲,۳)=(۷,۴,-۳)$

مقدمات فضای $\mathbb{R}^۳$

تست‌های مطرح شده در این بخش معمولاً به طور مستقیم در کنکور مورد سوال قرار نمی‌گیرد ولی به طور ضمنی در لابه‌لای سوالات این فصل و فصل بعدی مطرح می‌شود.

۱- کدام‌یک از نقطه‌های زیر روی محور oy قرار دارد؟ *تمرین ۱ ص ۱۳ کتاب درسی*

۱) $A(۲,۰,۳)$ ۲) $B(۰,۳,۰)$ ۳) $C(۰,۰,۴)$ ۴) $D(۰,۲,۳)$

۲- اگر نقطه‌ی $A(a+b,b+۲,a+۱)$ روی محور oz قرار داشته باشد، a کدام است؟ *تمرین ۱ ص ۱۳ کتاب درسی*

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۱

۳- تصویر نقطه‌ی $A(-۲,۱,۳)$، روی محور yها کدام است؟ *تمرین ۳ ص ۱۳ کتاب درسی*

۱) $(-۲,-۱,۳)$ ۲) $(-۲,۰,۳)$ ۳) $(۰,۱,۰)$ ۴) $(۰,-۱,۰)$

۴- تصویر نقطه‌ی $A(۱,۲,-۳)$ روی صفحه‌ی xoz کدام است؟ *تمرین ۳ ص ۱۳ کتاب درسی*

۱) $(۱,۰,-۳)$ ۲) $(۰,۲,۰)$ ۳) $(۰,۲,-۳)$ ۴) $(۱,-۲,-۳)$

۵- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ نسبت به محور oy کدام است؟ *تمرین ۳ ص ۱۳ کتاب درسی*

۱) $(۱,-۲,۳)$ ۲) $(-۱,۲,-۳)$ ۳) $(۰,۲,۰)$ ۴) $(۱,۰,۳)$

۶- طول تصویر پاره‌خط AB که در آن $A(۱,۲,۳)$ و $B(۵,۵,۱)$ است، بر صفحه‌ی xoy کدام است؟ *تمرین ۳ ص ۱۳ کتاب درسی*

۱) ۵ ۲) $\sqrt{۲۹}$ ۳) ۷ ۴) ۹

۷- فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۳,-۴,۱)$ از محور oz کدام است؟ *مشابه داخل ۸۰*

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $\sqrt{۱۷}$

۸- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی xoz و محور oz به‌ترتیب ۲ و ۴ باشد فاصله‌ی آن از صفحه‌ی yoz کدام است؟ *مشابه داخل ۸۰*

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۹- اگر مجموع مربعات فواصل نقطه‌ی M از محورهای مختصات برابر ۷۲ باشد، فاصله‌ی M از مبدأ مختصات چه‌قدر است؟ *مشابه داخل ۸۰*

۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۱۰- نقاط $A(۱,۲,۲)$، $B(-۱,۲,۳)$ و $C(۳,۰,۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانه‌ی AM کدام است؟ *تمرین ۷ ص ۱۳ کتاب درسی*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱- نقاط $A(۱,۲,۱)$ و $B(۳,۰,-۳)$ دو رأس متقابل یک مربع هستند. فاصله‌ی مرکز مربع از مبدأ مختصات چه‌قدر است؟ *تمرین ۶ ص ۱۳ کتاب درسی*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۲}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۱۲- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۲,۳,۴)$ نسبت به $B(۱,۲,۱)$ نقطه‌ای است واقع بر: *مشابه داخل ۹۲*

۱) محور ox ۲) صفحه‌ی yoz ۳) محور oz ۴) صفحه‌ی xoy

۱۳- اگر نقاط $A(-۱,۰,۰)$، $B(۲,۰,\sqrt{۷})$ و $C(۳,\sqrt{۲},\sqrt{۷})$ سه رأس مثلث ABC باشند، محیط مثلث کدام است؟ *تمرین ۵ ص ۱۳ کتاب درسی*

۱) $۹+\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۳}+۷$ ۳) ۱۲ ۴) $۹+\sqrt{۳}$

۱۴- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ را نسبت به محور ox، نقطه‌ی B می‌نامیم. تصویر نقطه‌ی B روی صفحه‌ی xoz کدام است؟ *مشابه داخل ۹۲*

۱) $(-۱,۰,۳)$ ۲) $(۱,۰,۳)$ ۳) $(-۱,۰,-۳)$ ۴) $(۱,۰,-۳)$

۱۵- نقاط $A(۲,۰,۰)$، $B(۰,۲,۰)$ و $C(۰,۰,۲)$ و مبدأ مختصات رئوس یک مکعب هستند، مختصات قرینه‌ی مرکز مکعب نسبت به محور oy کدام است؟ *تمرین ۲ و ۳ صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی*

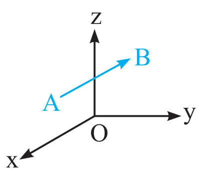
۱) $(-۱,۱,-۱)$ ۲) $(۱,-۱,۱)$ ۳) $(۱,-۱,-۱)$ ۴) $(-۱,-۱,۱)$

یادداشت

جزوه‌ی ۲ همه چیز درباره‌ی یک بردار

مسائل مربوط به بردارها را به ۳ بخش تقسیم کردیم؛ بخش اول مسائل مربوط به یک بردار است، یعنی در تمام مسائل و مفاهیم مطرح شده در این جزوه تنها یک بردار دخالت دارد. این مسائل به ندرت به‌طور مستقیم در کنکور مورد سؤال قرار می‌گیرد اما ردپای آن‌ها در تمامی مسائل این فصل و فصل بعدی به چشم می‌خورد.

پیکان و بردار



پیکان: پاره‌خط جهت‌داری است که دارای ابتدا و انتهای مشخص می‌باشد، مانند پیکان $\overrightarrow{AB}$ در شکل مقابل:

پیکان‌های هم‌ارز: دو پیکان را هم‌ارز می‌نامند، هرگاه موازی، هم‌جهت و هم‌اندازه باشد.

بردار: در یک مجموعه پیکان هم‌ارز، تنها یک پیکان وجود دارد که ابتدای آن مبدأ مختصات است که از این به بعد، این پیکان را بردار می‌نامیم. هر بُردار در فضای $\mathbb{R}^3$ با یک سه‌تایی مرتب مانند $v=(a,b,c)$ مشخص می‌شود که نقطه‌ی $A(a,b,c)$ نقطه‌ی انتهایی بُردار است.

تذکر: اگر A و B دو نقطه در فضا باشند، مؤلفه‌های بُردار هم‌ارز با پیکان $\overrightarrow{AB}$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AB}=B-A$$

در ادامه با مفاهیمی که در مورد یک بردار مانند $a=(x,y,z)$ باید بدانیم، آشنا می‌شویم:

اندازه‌ی بردار

اندازه‌ی بُردار a را با نماد $|a|$ نشان می‌دهند و برابر است با:

$$|a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

تصویر و قرینه نسبت به محورها و صفحات مختصات

قانون تصویر کردن و قرینه کردن یک بردار نسبت به محورها و صفحات مختصات، همانند نقطه است، یعنی در تصویر کردن مؤلفه‌های غیرهم‌نام با نام محور یا صفحه را تبدیل به صفر می‌کنیم و در قرینه کردن، آن مؤلفه‌ها را قرینه می‌کنیم. مثلاً:

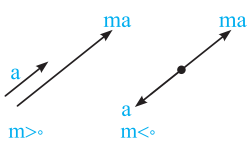
$$a=(2,3,-1)\begin{cases}\xrightarrow[oy]{\text{تصویر روی}} a'=(0,3,0)\\ \xrightarrow[oy]{\text{قرینه نسبت به}} a''=(-2,3,1)\end{cases}$$

ضرب عدد در بردار

اگر m یک عدد حقیقی و $a=(x,y,z)$ یک بردار باشد، آن‌گاه ضرب عدد m در بردار a را به‌صورت ma نشان می‌دهند و داریم:

$$ma=(mx,my,mz)$$

تذکر: اگر $m>0$ باشد، بردار ma موازی و هم‌جهت با بردار a است و اگر $m<0$ باشد، بردار ma موازی و در خلاف جهت a می‌باشد.

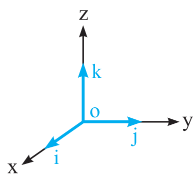


بردار یکه (بردار جهت)

برداری است به طول یک در راستا و جهت a که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$e_a=\frac{1}{|a|}a=\left(\frac{x}{|a|},\frac{y}{|a|},\frac{z}{|a|}\right)$$

تذکر: بردارهای یکه‌ی راستای محورهای مختصات را با i، j و k نشان می‌دهند که $i=(1,0,0)$، $j=(0,1,0)$ و $k=(0,0,1)$ می‌باشند.



در ضمن هر بردار دلخواه را می‌توان برحسب ترکیب خطی از i، j و k به‌صورت زیر نوشت:

$$a=(x,y,z)\Leftrightarrow a=xi+yj+zk$$

زاویه‌ی بردار با محورهای مختصات

اگر زاویه‌ی بردار را با جهت مثبت محورهای ox، oy و oz به‌ترتیب α، β و γ بنامیم در این صورت:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|a|}\quad,\quad\cos\beta=\frac{y}{|a|}\quad,\quad\cos\gamma=\frac{z}{|a|}$$

تذکر: $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را کسینوس‌های هادی بُردار a می‌نامند.

رابطه‌ی بین کسینوس‌های هادی

۱) رابطه‌ی بین کسینوس‌های هادی به‌صورت زیر است:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

۲) بردار یکه‌ی هر بردار مانند a را می‌توان برحسب کسینوس‌های هادی نوشت:

$$e_a=\left(\frac{x}{|a|},\frac{y}{|a|},\frac{z}{|a|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

تمرین ۱: بردار $a=(\sqrt{2},1,-1)$ مفروض است:

الف) اندازه‌ی بردار a چه‌قدر است؟

حل: $|a|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2+(-1)^2}=2$

ب) بردار جهت a را پیدا کنید.

حل: منظور از بردار جهت همان بردار یکه است، پس:

$$e_a=\frac{a}{|a|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$$

ج) زاویه‌ی بردار a را با جهت مثبت محورهای مختصات پیدا کنید.

حل: $\cos\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\alpha=۴۵^\circ$ ، $\cos\beta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\beta=۶۰^\circ$

$\cos\gamma=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow\gamma=۱۲۰^\circ$

د) اندازه‌ی تصویر a بر صفحه‌ی xoz را به دست آورید.

حل: $a'=(\sqrt{۲},۰,-۱)\Rightarrow|a'|=\sqrt{۲+۱}=\sqrt{۳}$

ه) قرینه‌ی بردار a نسبت به محور oz را به دست آورید.

حل: $a''=(-\sqrt{۲},-۱,-۱)$

۶) اگر بردار $\overrightarrow{AB}$ که $A(۲\sqrt{۲},۱,۴)$، هم‌راز با بردار a باشد، مختصات نقطه‌ی B را به دست آورید.

حل: $\overrightarrow{AB}=B-A\Rightarrow(\sqrt{۲},۱,-۱)=B-(۲\sqrt{۲},۱,۴)$

$\Rightarrow B=(۳\sqrt{۲},۲,۳)$

تمرین ۲: اگر زاویه‌ی بردار a با جهت مثبت محورهای ox و oy به‌ترتیب ۳۰° و ۱۲۰° باشد، بردار جهت a را پیدا کنید.

حل: $\cos^۲ ۳۰^\circ+\cos^۲ ۱۲۰^\circ+\cos^۲\gamma=۱$

$\Rightarrow(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲+(-\frac{۱}{۲})^۲+\cos^۲\gamma=۱\Rightarrow\cos\gamma=۰$

$\Rightarrow e_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{\sqrt{۳}}{۲},-\frac{۱}{۲},۰)$

تمرین ۳: اگر زاویه‌ی بردار $a=(m,-۱,۱)$ با محور oz برابر ۶۰° باشد، کسینوس زاویه‌ی آن با محور oy را پیدا کنید.

حل: $\cos\gamma=\frac{۱}{\sqrt{m^۲+۱+۱}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{m^۲+۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow m^۲=۲$

$\Rightarrow m=\pm\sqrt{۲}$

$\cos\beta=\frac{y}{|a|}=\frac{-۱}{\sqrt{۲+۱+۱}}=-\frac{۱}{۲}$

درباره‌ی یک بردار

از یک بردار، تنها یک بار از سال ۸۰ به بعد در کنکور سراسری سؤال مطرح شده است و به نظر می‌رسد با تیپ‌های جدید سؤالات کنکور، کم‌تر به طور مستقیم مورد توجه قرار گیرد، اما به طور غیرمستقیم و باترکیب با مفاهیم دیگر می‌تواند در کنکور ظاهر شود ...

۱۶- در مجموعه‌ی پیکان‌های هم‌ارز با بُردار $v=(۲,۱,۳)$ پیکانی را در نظر می‌گیریم که ابتدای آن $A(۰,۳,۱)$ باشد. انتهای این پیکان کدام است؟ *تمرین ۹ ص ۱۴ کتاب درسی*

۱) $(۲,۴,۲)$ ۲) $(۱,۳,۱)$ ۳) $(۲,۳,۲)$ ۴) $(۲,۴,۴)$

۱۷- اندازه‌ی تصویر بردار $V=(۳,۱,۲)$ بر صفحه‌ی yoz کدام است؟ *داخل دهی ۷۰*

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$

۱۸- بردار $a=(۳,-۲,۱)$ را نسبت به محور oz و سپس بردار حاصل را نسبت به صفحه‌ی yoz قرینه می‌کنیم. بردار نهایی کدام است؟ *تمرین ۳ ص ۲۴ کتاب درسی*

۱) $(۳,-۲,۱)$ ۲) $(-۳,۲,-۱)$ ۳) $(۰,-۲,۱)$ ۴) $(-۳,۲,۱)$

۱۹- حاصل $|i-۲j|+|j-۲k|+|k-۲i|$ کدام است؟ *تمرین ۱۱ ص ۱۴ کتاب درسی*

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) ۹

۲۰- اگر $A(۳,-۱,۰)$ و $B(۱,۱,-۱)$ باشد، بردار جهت $\overrightarrow{AB}$ کدام است؟ *تمرین ۱۲ ص ۱۴ کتاب درسی*

۱) $(\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳})$ ۲) $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۳) $(\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳})$ ۴) $(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳})$

۲۱- اگر بردار جهت بردار a به‌صورت $(\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ باشد، زاویه‌ی بردار a با جهت مثبت محور oy کدام است؟ *مشابه خارج ۸۵*

۱) ۶۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۵۰° ۴) ۳۰°

۲۲- اگر بردار $a=(۱,-۱,m)$ با محور z ها زاویه‌ی ۴۵ درجه بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور x ها کدام است؟ *خارج ۸۵*

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۳- کدام‌یک از بردارهای زیر بر محور oy عمود است و با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی منفرجه می‌سازد؟ *مشابه خارج ۸۵*

۱) $a=(۱,۰,۲)$ ۲) $b=(-۱,۰,۲)$ ۳) $c=(۰,-۲,۰)$ ۴) $d=(۱,۰,-۲)$

۲۴- زاویه‌ی بردار $a=(-۳,-۴,۱)$ با کدام محور مختصات بیش تر است؟ *مشابه خارج ۸۵*

۱) محور x ها ۲) محور y ها

۳) محور z ها ۴) با هر سه محور یکسان است.

۲۵- بردار $a=(1,m,m^2)$ با محورهای ox، oy و oz زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد. مقدار این زاویه کدام است؟ تمرین ۶ ص ۲۴ کتاب درسی

۱) 30° ۲) $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$ ۳) 60° ۴) $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$

۲۶- اگر زاویه‌ی یک بردار با محور oy برابر $\frac{3\pi}{4}$ و زاویه‌اش با محورهای ox و oz یکسان باشد، حداکثر مقدار مجمـوع زاویـه‌های آن بـا محورهای مختصات کدام است؟ مثال ۷ ص ۲۳ کتاب درسی

۱) 240° ۲) 270° ۳) 360° ۴) 375°

۲۷- کدام گزینه می‌تواند زاویه‌های بردار a با محورهای ox و oy و oz در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد؟ مثال ۷ ص ۲۳ کتاب درسی

۱) $45^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ ۲) $150^\circ, 135^\circ, 90^\circ$ ۳) $90^\circ, 135^\circ, 45^\circ$ ۴) $60^\circ, 135^\circ, 30^\circ$

۲۸- اگر بردار a با محورهای ox و oz زوایای $\cos^{-1}(\frac{2\sqrt{2}}{5})$ و $\cos^{-1}(\frac{3}{5})$ بسازد و اندازه‌ی بردار ۵ باشد، تصاویر بردار a در صورتی که زاویه‌ی بردار با محور oy منفرجه باشد، کدام است؟ مثال ۷ ص ۲۳ کتاب درسی

۱) $2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}j+3k$ ۲) $-2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}j-3k$

۳) $-2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}j+3k$ ۴) $2\sqrt{2}i-2\sqrt{2}j+3k$

۲۹- بردارهای $a=(2,-3,1)$، $b=(1,2,4)$ و $c=(2,1,-1)$ یال‌های یک مکعب مستطیل هستند، حجم مکعب کدام است؟ مشابه خارج ۹۰

۱) ۲۱ ۲) $21\sqrt{3}$ ۳) ۴۲ ۴) $2\sqrt{126}$

۳۰- بردارهای $a=(2,1,1)$، $b=(-1,1,1)$ و $c=(0,-3,3)$ یال‌های یک مکعب مستطیل هستند، اندازه‌ی قطر این مکعب مستطیل کدام است؟ مشابه خارج ۹۰

۱) $\sqrt{18}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{45}$

یادداشت

جزوه‌ی ۳ همه‌چیز درباره‌ی دو بردار

این جزوه مهم‌ترین جزوه در این فصل محسوب می‌شود و حاوی مطالب مهمی در مورد دو بردار نظیر جمع، تفریق، ضرب داخلی و خارجی و کاربردهای آن‌ها است به‌طوری که بیش از ۲۰ بار از سال ۱۳۸۰ به بعد در کنکورهای سراسری داخل و خارج به آن توجه شده است و اکثر سؤالات مطرح شده در این چند سال مربوط به این بخش از جزوه است.

تساوی و توازی دو بردار

دو بردار $a=(x,y,z)$ و $b=(x',y',z')$ را در نظر می‌گیریم آن‌گاه:

۱ **تساوی دو بردار:** شرط آن‌که دو بردار a و b مساوی باشند آن است که:

$$x=x' \ , \ y=y' \ , \ z=z'$$

۲ **توازی دو بردار:** شرط آن‌که دو بردار a و b موازی باشند آن است که:

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$$

تذکر: اگر مؤلفه‌ای در یکی از دو بردار موازی، صفر باشد، مؤلفه‌ی نظیر در بُردار دیگر هم باید صفر باشد.

جمع و تفریق دو بردار

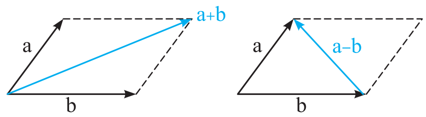
۱ **جمع و تفریق جبری:**

مجموع و تفاضل دو بردار a و b به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a\pm b=(x\pm x',y\pm y',z\pm z')$$

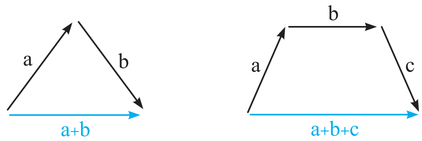
۲ **تعبیر هندسی جمع و تفریق دو بردار:** برای درک مفهوم هندسی جمع و تفریق به شکل‌های زیر دقت کنید.

الف) روش متوازی‌الاضلاع



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $a+b$ و $a-b$ قطرهای متوازی‌الاضلاع بنا شده، بر روی دو بردار a و b هستند.

ب) روش مثلث (چندضلعی)



تمرین ۱: اگر $a=(m,-1,2)$، $b=(1,n,-1)$ و $c=(2,1,1)$ باشد و بردارهای $a+b$ و c موازی باشند، مقدار $m+n$ چه‌قدر است؟

حل:

$$\begin{cases}a+b=(m+1,n-1,1)\\ c=(2,1,1)\end{cases}\Rightarrow \overbrace{\frac{m+1}{2}=\underbrace{\frac{n-1}{1}=\frac{1}{1}}_{n=2}}^{m=1}$$

ضرب بردارها

۱ **ضرب داخلی دو بردار**

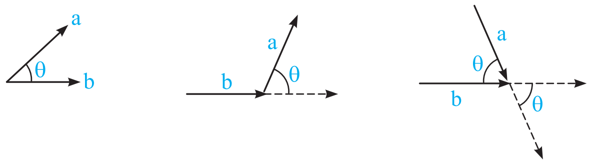
تعریف: اگر $a=(x,y,z)$ و $b=(x',y',z')$ دو بردار باشند، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a.b=xx'+yy'+zz'$$

قضیه: ضرب داخلی دو بردار a و b که زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد از رابطه‌ی زیر نیز قابل محاسبه است:

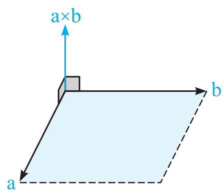
$$a.b=|a||b|\cos\theta$$

دقت کنید: زاویه‌ی دو بردار، زاویه‌ای است که دو بردار هم ابتدا با هم می‌سازد، به شکل‌های زیر دقت کنید:



۲ **ضرب خارجی دو بردار**

تعریف: اگر $a=(x,y,z)$ و $b=(x',y',z')$ دو بردار باشند، آن‌گاه حاصل ضرب خارجی آن‌ها یک بردار است که عمود بر هر دو بردار a و b (و در واقع عمود بر صفحه‌ی شامل a و b) می‌باشد و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

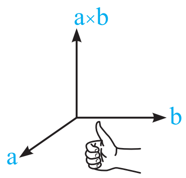


$$\begin{matrix}a=(x,y,z)\\ b=(x',y',z')\end{matrix}\Rightarrow a\times b=\left(\begin{vmatrix}y & z\\ y' & z'\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x & z\\ x' & z'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\right)$$

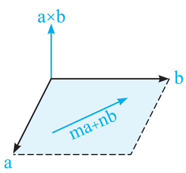
برای محاسبه‌ی ضرب خارجی، دو بردار را زیر هم می‌نویسیم. برای به‌دست آوردن مؤلفه‌ی x، مؤلفه‌های x دو بردار را نادیده می‌گیریم و دترمینان ماتریس ۲ × ۲ یِ باقی‌مانده را به‌دست می‌آوریم و ...

فقط در محاسبه‌ی مؤلفه‌ی y، جون هرکی دوست داری منفی یادت نره.

جهت ضرب خارجی



جهت بردار ضرب خارجی هم بر اساس قانون دست راست به‌دست می‌آید. یعنی اگر کف دست راست را در جهت a باز کرده و در جهت b ببندیم، انگشت شست جهت $a\times b$ را نشان می‌دهد.



تذکر: اگر برداری بر یک صفحه عمود باشد، بر تمام بردارهای آن صفحه عمود است. حال اگر بردارهای سازنده‌ی صفحه، a و b باشند، بردارهای درون آن صفحه به شکل $ma+nb$ هستند، بنابراین $a\times b$ بر همه‌ی آن‌ها عمود است.

اندازه‌ی ضرب خارجی

قضیه: اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر θ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی ضرب خارجی آن‌ها از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

تمرین ۲: اگر $a=(۱,۲,۳)$ و $b=(-۱,۲,۱)$ باشد.

الف) مقدار حاصل ضرب داخلی دو بردار را به‌دست آورید.

حل:

$a.b=-۱+۴+۳=۶$

ب) حاصل ضرب خارجی این دو بردار را به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases}a=(۱,۲,۳)\\ b=(-۱,۲,۱)\end{cases}\Rightarrow a\times b=(-۴,-۴,۴)$$

تمرین ۳: اگر $a=(۱,m,۱)$، $b=(۰,۱,-۱)$ و اندازه‌ی بردار عمود بر آن‌ها برابر $\sqrt{۱۱}$ باشد، حداقل مقدار برای حاصل ضرب داخلی این دو بردار کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۳

حل: گزینه‌ی (۱) $a\times b$ بر هر دو بردار a و b عمود است:

$$\begin{cases}a=(۱,m,۱)\\ b=(۰,۱,-۱)\end{cases}\Rightarrow a\times b=(-m-۱,۱,۱)$$

$$\Rightarrow |a\times b|=\sqrt{(m+۱)^۲+۱+۱}=\sqrt{۱۱}$$

$$\Rightarrow (m+۱)^۲+۲=۱۱\Rightarrow m+۱=\pm۳ \begin{cases} m=۲ \Rightarrow a.b=۱\\ m=-۴ \Rightarrow a.b=-۵\end{cases}$$

تمرین ۴: بردارهای a و b مفروض‌اند. اگر $|a|=۳$، $|b|=۲۶$ و $|a\times b|=۷۲$ باشد، حاصل $a.b$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) -۳۰ ۳) ±۳۰ ۴) ±۱۵

حل: گزینه‌ی (۳)

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta\Rightarrow ۷۲=۳\times۲۶\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\Rightarrow\cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta=۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}=\frac{۲۵}{۱۶۹}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{۵}{۱۳}$$

$$\Rightarrow a.b=|a||b|\cos\theta=۳\times۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳})=\pm۳۰$$

تمرین ۵: اگر $a=(۱,۲,۳)$ و $b=(۳,-۱,۴)$ دو بردار در فضا باشند، حاصل $(۲a-۳b).(a\times b)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) صفر

حل: گزینه‌ی (۴) بردار $۲a-۳b$ برداری واقع در صفحه‌ی شامل a و b است و بردار $a\times b$ بر این صفحه عمود می‌باشد، بنابراین ضرب داخلی این دو بردار صفر است.

ویژگی‌های ضرب خارجی و مقایسه با ضرب داخلی

۱ $a\times a=\vec{0}$	$a.a=\|a\|^۲$
۲ $a\times b=-b\times a$	$a.b=b.a$
۳ $a\times(b\pm c)=a\times b\pm a\times c$	$a.(b\pm c)=a.b\pm a.c$
۴ $a\parallel b\Rightarrow a\times b=\vec{0}$	$a\perp b\Rightarrow a.b=۰$

تمرین ۶: زاویه‌ی بین دو بردار a و b در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ است و اگر $|a|=۳$، $|b|=۵$ و $|a\times(a-b)|=۹$ باشد، حاصل $a.(a+b)$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۹ ۳) -۳ ۴) ۱۲

حل: گزینه‌ی (۳)

$$|a\times(a-b)|=|\underbrace{a\times a}_{\vec{0}}-a\times b|=|-a\times b|=|b\times a|=|a\times b|$$

$$=|a||b|\sin\theta\Rightarrow ۹=۳\times۵\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow\cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\theta=\begin{cases}\frac{۴}{۵} & (\text{چون } \theta>۹۰^\circ \text{ غ ق ق})\\ -\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a.(a+b)=a.a+a.b=|a|^۲+|a||b|\cos\theta$$

$$=۳^۲+۳\times۵\times(-\frac{۴}{۵})=-۳$$

کاربردهای ضرب داخلی

۱ اتحادهای اصلی

تمام اتحادهای جبری که دارای توان ۲ هستند، برای بُردارها برقرارند، با این تفاوت که ضرب‌ها به ضرب داخلی تبدیل می‌شوند و هرجا توان ۲ داریم به جای پرانتز، اندازه می‌گذاریم یعنی داریم:

۱ اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$|a\pm b|^۲=|a|^۲+|b|^۲\pm\underbrace{۲a.b}_{۲|a||b|\cos\theta}$$

۲ اتحاد مربع سه‌جمله‌ای:

$$|a+b+c|^۲=|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+۲(a.b+a.c+b.c)$$

۳ اتحادمزدوج:

$$(a+b).(a-b)=|a|^۲-|b|^۲$$

۲ اتحادهای فرعی

دو اتحاد فرعی زیر که یکی از آن‌ها در تمرینات کتاب درسی آمده است از اتحادهای مربع دو جمله‌ای به‌دست می‌آیند:

$$|a+b|^۲+|a-b|^۲=۲(|a|^۲+|b|^۲)$$

$$|a+b|^۲-|a-b|^۲=۴a.b$$

تمرین ۷: اگر a و b دو بردار با اندازه‌های ۳ و ۲ و زاویه‌ی بین آن‌ها ۶۰° باشد، حاصل هر یک از عبارات زیر را پیدا کنید.

الف) $|a+b|$

حل: $|a+b|^۲=|a|^۲+|b|^۲+۲|a||b|\cos\theta$

$$=۹+۴+۲(۲\times۳\times\frac{۱}{۲})=۱۹\Rightarrow|a+b|=\sqrt{۱۹}$$

ب) $|a-b|$

حل: $|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲|a||b|\cos\theta$

$=۹+۴-۲(۲\times۳\times\frac{۱}{۲})=۷\Rightarrow|a-b|=\sqrt{۷}$

ج) $(a+b).(a-b)$

حل: $(a+b).(a-b)=|a|^۲-|b|^۲=۹-۴=۵$

د) $|۲a-۳b|$

حل: $|۲a-۳b|^۲=۴|a|^۲+۹|b|^۲-۱۲|a||b|\cos\theta$

$=۳۶+۳۶-۱۲\times(۲\times۳\times\frac{۱}{۲})=۳۶\Rightarrow|۲a-۳b|=۶$

هـ) $|e_a+۲e_b|$

حل: $|e_a+۲e_b|^۲=|e_a|^۲+۴|e_b|^۲+۴|e_a||e_b|\cos\theta$

$=۱+۴+۴\times۱\times۱\times\frac{۱}{۲}=۷\Rightarrow|e_a+۲e_b|=\sqrt{۷}$

۳ زاویه‌ی بین دو بردار

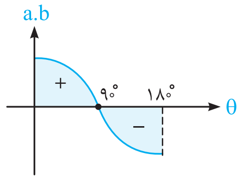
اگر a و b دو بردار باشند و زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد، آن‌گاه همیشه θ زاویه‌ای است در بازه‌ی $[۰,\pi]$، که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}$$

۴ شرط عمود بودن:
شرط لازم و کافی برای عمود بودن دو بردار غیرصفر a و b آن است که:

$$a.b=۰$$

توجه: از رابطه‌ی $a.b=|a||b|\cos\theta$ می‌توان فهمید که با افزایش زاویه‌ی دو بردار، ضرب داخلی مرتباً کاهش می‌یابد. به نمودار زیر کمی خیره شوید!!!



تمرین ۸: اگر دو بردار $a=(۲,m,-۱)$ و $b=(۱,۱,۱)$ بر هم عمود باشند، کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $a-b$ و b چه‌قدر است؟

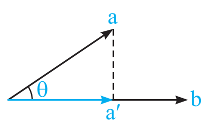
حل:

$a.b=۲+m-۱=۰\Rightarrow m=-۱$

$\Rightarrow\begin{cases}a=(۲,-۱,-۱)\\b=(۱,۱,۱)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a-b=(۱,-۲,-۲)\\b=(۱,۱,۱)\end{cases}$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{x.b}{|x||b|}=\frac{۱-۲-۲}{\sqrt{۹}\times\sqrt{۳}}=\frac{-۳}{۳\sqrt{۳}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۵ تصویر قائم بردار a بر بردار b



اگر a' تصویر قائم بردار a بر بردار b باشد، آن‌گاه a' همیشه مضربی از b به شکل مقابل است:

$$a'=\left(\frac{a.b}{|b|^۲}\right)b$$

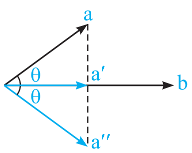
← زاویه‌ی a و a'

اگر زاویه‌ی بین a و b برابر θ و θ حاده باشد، زاویه‌ی بین a و a' نیز همان θ است ولی اگر θ منفرجه باشد، زاویه‌ی بین a و a' برابر $\pi-\theta$ است.

به شکل‌های زیر نگاه کنید.

تذکر: همان‌طور که متوجه شدید، زاویه‌ی a و a' همواره حاده است.

۶ قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار b

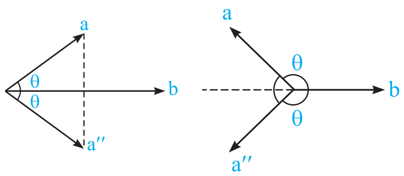


اگر a'' قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار b باشد و a' تصویر a بر بردار b، در این‌صورت برای پیدا کردن a'' ابتدا باید a' را پیدا کرد و سپس:

$$a''=۲a'-a$$

← زاویه‌ی a و a''

اگر زاویه‌ی a و b حاده باشد، زاویه‌ی بین a و a'' برابر است با ۲θ که θ زاویه‌ی بین a و b است. اما اگر زاویه‌ی a و b منفرجه باشد ۲θ را از ۳۶۰° کم می‌کنیم.



توجه: زاویه‌ی بین هر دو برداری همواره از ۱۸۰° کم‌تر است. اصلاً آقا زاویه‌ی بالای ۱۸۰° توی بردار نداریم.

تمرین ۹: اگر $a=(۱,-۳,۴)$، $b=(۳,-۴,۲)$ و $c=(-۱,۱,۴)$ سه بردار باشند، تصویر قائم a بر امتداد $b+c$ کدام است؟

۱) $۵(۲,-۳,۶)$ ۲) $\frac{۵}{۷}(۲,-۳,۶)$

۳) $۷(۲,-۳,۶)$ ۴) $\frac{۱}{۷}(۲,-۳,۶)$

حل: گزینه‌ی (۲)

$\begin{cases}a=(۱,-۳,۴)\\x=b+c=(۲,-۳,۶)\end{cases}\Rightarrow a'=\left(\frac{a.x}{|x|^۲}\right)x$

$=\left(\frac{۲+۹+۲۴}{۴+۹+۳۶}\right)x=\frac{۳۵}{۴۹}x=\frac{۵}{۷}x\Rightarrow$ گزینه‌ی (۲)

تمرین ۱۰: قرینه‌ی بردار $a=j+۳k$ نسبت به راستای $b=i-k$ کدام است؟

۱) $-i+۳k$ ۲) $-۳i-j$ ۳) $۲i-j+k$ ۴) $۳i+j$

حل: گزینه‌ی (۲)

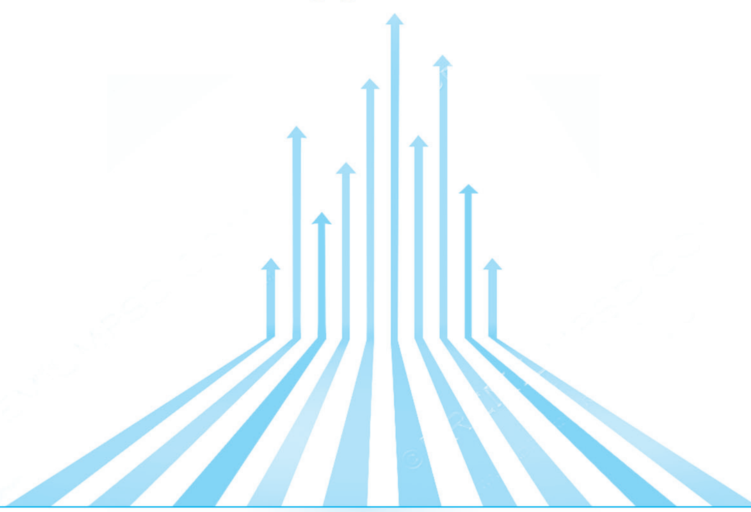
$a'=\left(\frac{a.b}{|b|^۲}\right)b=\left(\frac{۰+۰-۳}{۱+۱}\right)b=-\frac{۳}{۲}(i-k)$

$\Rightarrow a''=۲a'-a=-۳(i-k)-(j+۳k)=-۳i-j$

ANALYTIC GEOMETRY

فصل اول

بردارها



CHAPTER ONE : VECTORS