۴۲. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک هر دسته از چندجمله‌ای‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $۲y(x+y) \quad , \quad x(x+y)$ ب) $۲x^۲-۲x-۸۴ \quad , \quad ۳۶-x^۲$

ج) $۳a(۹a^۲-۱) \quad , \quad ۲۷a^۳-۱$ د) $۵(x^۲-۹) \quad , \quad x(x+۳) \quad , \quad x^۲+۶x+۹$

۴۳. عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\dfrac{x^۲-۶x+۸}{۳x^۲-۶x} \div \dfrac{x^۲-۳x-۴}{x^۳+x^۲}$ ب) $\dfrac{a+b}{۲a-۲b}-\dfrac{a-b}{۲a+۲b}+\dfrac{۲b^۲}{a^۲-b^۲}$

۴۴. چه عبارتی را با $\dfrac{۴x+۱}{x^۳-۸}$ جمع کنیم تا حاصل برابر با $\dfrac{۵}{x^۲+۲x+۴}$ شود؟

۴۵. ۱۴۴ لیتر آب میوه، ۴۵ لیتر شیر و ۶۳ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها را بیابید. (گنجایش شیشه‌ها را برحسب لیتر، عدد طبیعی فرض کنید.) (نهایی- خرداد ۹۱)

۴۶. حاج علی در مغازه‌ی خود بین ۴۵۰ تا ۵۰۰ بسته دستمال برای فروش دارد. هر بار که شاگردش بسته‌های دستمال را در دسته‌های ۴، ۶ و ۱۸ تایی در قفسه‌ها می‌چیند، ۳ بسته اضافه می‌ماند. تعداد بسته‌های دستمال چه‌قدر است؟

۴۷. می‌خواهیم سقف اتاقی را با قطعات مربعی شکل پلیمری ضد صدا، عایق صوتی کنیم. اگر سقف، مستطیلی به ابعاد ۴۸ و ۳۶ متر باشد؛

الف) اندازه‌ی ضلع قطعات عایق چه اعدادی می‌تواند باشد؟

ب) اگر بخواهیم کم‌ترین تعداد عایق را استفاده کنیم، ضلع مربع‌های پلیمری باید چه اندازه‌ای باشد؟ (اندازه‌ی ضلع مربع‌ها عددی طبیعی است.)

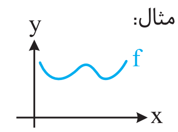
درسنامه ۶

صفرهای تابع درجه‌ی دوم

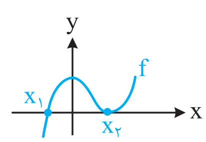
صفرهای تابع $y=f(x)$ (ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ یا محل تلاقی منحنی f با محور x ها)

تابع دلخواه $y=f(x)$ را درنظر می‌گیریم. برای یافتن طول محل(های) تلاقی منحنی تابع f با محور x ها، لازم است معادله‌ی تلاقی منحنی و محور x ها (یعنی معادله‌ی $f(x)=۰$) را حل و ریشه‌های آن را مشخص کنیم. **ریشه‌های ساده‌ی** معادله‌ی $f(x)=۰$ محل‌های **تقاطع** منحنی f با محور x ها و **ریشه‌های مضاعف**، محل‌های **تماس** منحنی تابع f با محور x ها می‌باشند. در صورتی‌که معادله‌ی مذکور فاقد ریشه باشد، منحنی f با محور x ها هیچ‌گونه نقطه‌ی تقاطع یا تماس نخواهد داشت.

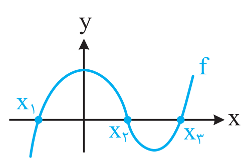
به طور مثال:



معادله‌ی $f(x)=۰$ فاقد ریشه است.



معادله‌ی $f(x)=۰$ یک ریشه‌ی ساده (یک نقطه‌ی تقاطع) $x=x_۱$ و یک ریشه‌ی مضاعف (یک نقطه‌ی تماس) $x=x_۲$ دارد.



معادله‌ی $f(x)=۰$ دارای سه ریشه‌ی ساده (سه نقطه‌ی تقاطع) به طول‌های $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ می‌باشد.

صفرهای تابع درجه‌ی دوم: براساس آن‌چه در فوق به آن اشاره شد، صفرهای تابع درجه‌ی دوم، ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می‌باشند. این معادله می‌تواند دارای دو ریشه، یک ریشه یا فاقد ریشه به صورت زیر باشد:

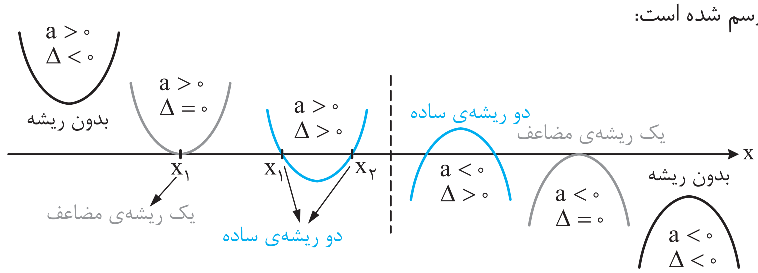
در سال‌های گذشته دیدیم یک معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ که $\Delta=b^۲-۴ac>۰$ دارای دو جواب به صورت زیر است:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

در حالت $\Delta=۰$ داریم $x'=x''=-\dfrac{b}{۲a}$. در این حالت معادله فقط یک جواب دارد و می‌توان تعبیر کرد که معادله دو جواب مساوی دارد. به همین خاطر در این حالت گوییم معادله یک جواب مضاعف (تکراری) دارد. در حالت $\Delta<۰$ معادله فاقد ریشه‌ی حقیقی است.

درسنامه

در شکل زیر در دو حالت کلی مربوط به منحنی تابع درجه‌ی دوم ($a>0$ یا $a<0$) و براساس تعداد ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$، شکل کلی منحنی تابع رسم شده است:



نکته *اگر x_1 و x_2 دو عدد دلخواه و $S=x_1+x_2$ و $P=x_1\cdot x_2$ باشد، آن‌گاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $(x-x_1)(x-x_2)=0$ یا $x^2-Sx+P=0$ هستند.*

مثال ۲۵

معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن ۲ و ۴- باشد.

☑ پاسخ: روش اول:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=2-4=-2 \\ P=x_1.x_2=2\times(-4)=-8 \end{cases} \Rightarrow x^2+2x-8=0$$

روش دوم: دو عبارت درجه‌ی اول با ریشه‌های مطلوب، $(x-2)$ و $(x+4)$ می‌باشند. پس معادله از حاصل‌ضرب این دو عبارت تشکیل شده است:

$$(x-2)(x+4)=x^2+2x-8=0$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$

اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی فوق در نظر گرفته شوند(با فرض $\Delta\geq 0$) با استفاده از عملیات جبری، مانند آن‌چه در فوق دیدیم، داریم:

۱) $\alpha+\beta=S=-\dfrac{b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها)

۲) $\alpha\beta=P=\dfrac{c}{a}$ (حاصل‌ضرب ریشه‌ها)

۳) $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ (قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها)

۴) $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$ (مجموع مربعات ریشه‌ها)

۵) $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$ (مجموع مکعبات ریشه‌ها)

۶) $\alpha^4+\beta^4=(S^2-2P)^2-2P^2$

۷) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{S}{P}$ (مجموع معکوس ریشه‌ها)

۸) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{S^2-2P}{P^2}$ (مجموع معکوس مربعات ریشه‌ها)

۹) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$ (مجموع جذر ریشه‌ها)

۱۰) $\left|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$ (تفاضل جذر ریشه‌ها)

مثال ۲۶

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x-4=0$ باشند، مقدار $\alpha^2+\beta^2$ را تعیین کنید.

☑ پاسخ: اگر $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ باشد داریم:

$$S=2\ ,\ P=-4\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=4+8=12$$

درسنامه

نکته در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ هنگامی که $a\neq ۰$ و معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مانند α و β باشد، با استفاده از علامت S و P، بدون حل معادله، می‌توان علامت ریشه‌ها و وضعیت عددی آن‌ها را نسبت به هم مشخص نمود. دقت کنید:

$ax^۲+bx+c=۰ \xrightarrow[a\neq۰]{\Delta>۰}$

- $P>۰$، پس دو ریشه هم‌علامت هستند.
  - $S>۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه مثبت می‌باشند.
  - $S<۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی می‌باشند.
- $P<۰$، پس دو ریشه مختلف‌العلامه هستند.
  - $S>۰ \Rightarrow$ ریشه‌ی مثبت، بزرگ‌تر از قدرمطلق ریشه‌ی منفی است.
  - $S=۰ \Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی قرینه‌ی هم دارد.
  - $S<۰ \Rightarrow$ قدرمطلق ریشه‌ی منفی، بزرگ‌تر از ریشه‌ی مثبت است.
- $P=۰$، پس یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر مخالف صفر
  - $x_۱=۰$
  - $x_۲=\frac{-b}{a}$
    - $\frac{b}{a}<۰$ ریشه‌ی غیرصفر، مثبت است.
    - $\frac{b}{a}>۰$ ریشه‌ی غیرصفر، منفی است.

نتیجه در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$؛

الف) اگر $b=۰$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد.
ب) اگر $a=c$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی معکوس دارد.

ج) اگر $a=-c$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی معکوس قرینه‌ی هم دارد.

د) اگر $a+b+c=۰$، آن‌گاه همواره یک ریشه‌ی معادله $\alpha=۱$ و ریشه‌ی دیگر $\beta=\frac{c}{a}$ می‌باشد. به عنوان مثال معادله‌ی $y=-۳x^۲-۲۳x+۲۶$ دارای دو ریشه‌ی $\alpha=۱$ و $\beta=\frac{۲۶}{-۳}$ می‌باشد.

هـ) اگر $a+c=b$، آن‌گاه همواره یک ریشه‌ی معادله $\alpha=-۱$ و ریشه‌ی دیگر $\beta=-\frac{c}{a}$ می‌باشد. به عنوان مثال معادله‌ی $y=x^۲+۷x+۶$ دو ریشه‌ی $\alpha=-۱$ و $\beta=-۶$ را دارد.

مثال ۲۷

بدون حل معادله و با استفاده از S، P و Δ در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $۵x^۲-۷x-۵=۰$ بحث کنید.

☑ **پاسخ:** معادله دارای دو ریشه‌ی α و β است. $\Leftarrow$ $۵x^۲-۷x-۵=۰ \Rightarrow a=۵\ ,\ b=-۷\ ,\ c=-۵ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۴۹+۱۰۰>۰ \Rightarrow$

$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۷)}{۵}=\frac{۷}{۵}\ ,\quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۵}{۵}=-۱\Rightarrow$ دو ریشه مختلف‌العلامه هستند.

$S>۰\Rightarrow$ ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر از قدرمطلق ریشه‌ی منفی است.

مثال ۲۸

حدود m برای آن‌که معادله‌ی $(m-۱)x^۲+mx+m-۳=۰$ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه داشته باشد، چیست؟

☑ **پاسخ:** با توجه به نکته‌ی گفته شده، چون معادله‌ی $(m-۱)x^۲+mx+m-۳=۰$ دو ریشه‌ی مختلف العلامه دارد، پس حاصل‌ضرب ریشه‌هایش کوچک‌تر از صفر است، یعنی:

$$P=\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\frac{m-۳}{m-۱}<۰\Rightarrow ۱<m<۳$$

توجه کنید که وقتی $\frac{c}{a}<۰$ باشد حتماً $\Delta>۰$ بوده و معادله دارای دو ریشه (مختلف‌العلامه) است.

مثال ۲۹

مقدار m را برای آن‌که معادله‌ی $mx^۲+(m^۲-۴)x+m-۳=۰$ دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد، به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** معادله دارای دو ریشه قرینه است، پس مجموع ریشه‌های آن برابر صفر می‌باشد، یعنی:

$$S=\frac{-b}{a}=۰\Rightarrow b=۰\Rightarrow m^۲-۴=۰\Rightarrow\begin{cases} m=۲\Rightarrow ۲x^۲+۲-۳=۰\Rightarrow ۲x^۲=۱\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \text{دو ریشه‌ی قرینه دارد.}\\ m=-۲\Rightarrow -۲x^۲-۲-۳=۰\Rightarrow -۲x^۲-۵=۰ & \text{ریشه ندارد.}\end{cases}$$

پس فقط $m=۲$ قابل قبول است.

۴۸. یک قالی در اتاقی به ابعاد ۶ متر و ۴ متر قرار دارد، به‌طوری که فاصله‌ی هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ متر مربع باشد، فاصله‌ی هر طرف قالی را تا دیوار حساب کنید.

۴۹. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۳mx+۴=۰$ باشند، m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $\alpha\beta^{۲}+۴=۰$ (نهایی- ۸۹)

۵۰. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=۲x^{۲}-۴x-۸$ باشند، بدون حل معادله، مقدار عبارت $\alpha^{۳}\beta+\beta^{۳}\alpha$ را به‌دست آورید.

۵۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۳x-۵=۰$ باشند، بدون محاسبه‌ی ریشه‌های معادله، حاصل عبارت $\frac{۱}{\beta+۱}+\frac{۱}{\alpha+۱}$ را بیابید. (نهایی- ۸۸)

۵۲. a را چنان بیابید که رابطه‌ی $\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{\beta+۱}+\frac{۱}{\alpha+۱}$ میان ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-(a+۲)x+a+۱=۰$ برقرار باشد. (نهایی- ۸۷)

۵۳. α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-\sqrt{۲}x-۳=۰$ می‌باشند. بدون حل معادله، مقدار عددی عبارت $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}$ را محاسبه کنید. (نهایی- ۸۵)

۵۴. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}-۵x-۶=۰$ باشند، مقدار عددی عبارت $(\alpha-\beta)^{۲}$ را محاسبه کنید. (نهایی- ۸۵)

۵۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۲x-۴=۰$ باشند، مقدار $\alpha^{۳}+\beta^{۳}$ را تعیین کنید.

۵۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۴x^{۲}-۱۲x+۱=۰$ باشند، مقدار $\frac{۱}{\sqrt{\beta}}+\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ چه‌قدر است؟

۵۷. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $۴x^{۲}-۱۶x+m=۰$ یکی از ریشه‌ها دو واحد بیش‌تر از ریشه‌ی دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه‌ی معادله را بیابید. (نهایی- ۸۷)

۵۸. m را طوری پیدا کنید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی $mx^{۲}-۴x+۱=۰$ سه برابر ریشه‌ی دیگر باشد. $(m\neq ۰)$

درسنامه ۷

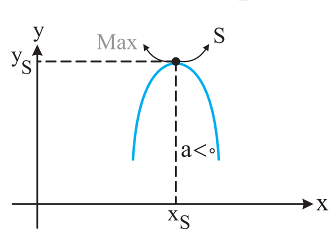
ماکزیمم و مینیمم تابع درجه‌ی دوم

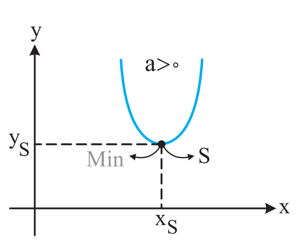
هر تابع به فرم کلی $y=ax^{۲}+bx+c$ (با شرط $a\neq ۰$) یک **تابع درجه‌ی دوم** نامیده می‌شود. منحنی این تابع یک **سهمی قائم** می‌باشد. با مربع کامل کردن سهمی داریم:

$$y=ax^{۲}+bx+c=a(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a((x+\frac{b}{۲a})^{۲}+\frac{c}{a}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}})=a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}+\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$$

از آن‌جا که $(x+\frac{b}{۲a})^{۲}\geq ۰$ است، اگر $a>۰$ باشد، آن‌گاه $y\geq\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ و سهمی دارای مقدار مینیمم $\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ می‌باشد.

اگر $a<۰$ باشد، آن‌گاه $y\leq\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ و سهمی دارای مقدار ماکزیمم $\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ می‌باشد. بنابراین مختصات رأس سهمی (محل ماکزیمم یا مینیمم آن) به صورت $S=\begin{bmatrix}\frac{-b}{۲a}\\ \frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{-\Delta}{۴a}\end{bmatrix}$ خواهد بود. شکل منحنی این توابع در دو حالت کلی فوق، در زیر نمایش داده شده است:





۴۶ در واقع تعداد بسته‌های دستمال به صورت $۴k_۱+۳$ یا $۶k_۲+۳$ یا $۱۸k_۳+۳$ است. بنابراین ابتدا باید ک.م.م اعداد ۴، ۶ و ۱۸ را به‌دست آوریم. داریم:

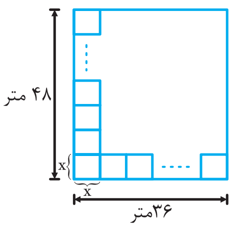
$$۴=۲^۲\ ,\ ۶=۲\times۳\ ,\ ۱۸=۲\times۳^۲\Rightarrow \text{ک.م.م}=۲^۲\times۳^۲=۳۶$$

حال باید مضربی از ۳۶ را در نظر بگیریم که وقتی با عدد ۳ جمع می‌کنیم، حاصل بین دو عدد ۴۵۰ و ۵۰۰ باشد، تا تعداد بسته‌های دستمال را به‌دست آوریم. بنابراین:

$$۴۵۰<۳۶k+۳<۵۰۰\Rightarrow k=۱۳\Rightarrow \text{تعداد بسته‌های دستمال}=۳۶\times۱۳+۳=۴۷۱$$

---

۴۷ الف) از آنجا که قطعات پلیمری مربع شکل هستند، اگر طول ضلع قطعات را x در نظر بگیریم، ابعاد سالن باید بر x بخش‌پذیر باشند، یعنی x باید مقسوم علیه مشترک ۴۸ و ۳۶ باشد، پس اول مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های هر دو عدد را می‌نویسیم:



$$\text{مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۴۸}=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۱۶,۲۴,۴۸\}$$

$$\text{مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۳۶}=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸,۳۶\}$$

$$\text{مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های مشترک ۳۶ و ۴۸}=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$$

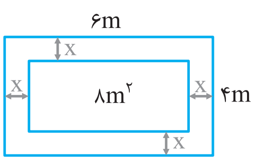
یعنی قطعات می‌توانند به‌صورت مربع‌هایی به اضلاع ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۶ یا ۱۲ باشند.

ب) حال چون می‌خواهیم کم‌ترین تعداد عایق را استفاده کنیم باید x، ب.م.م. دو عدد ۳۶ و ۴۸ باشد، یعنی $x=۱۲$.

در این صورت سقف با ۴ ردیف ۳ تایی (۱۲ قطعه‌ی پلیمری) که مساحت هر کدام ۱۴۴ متر مربع است، پوشانده می‌شود.

---

۴۸ فاصله‌ی هر طرف قالی را تا دیوارهای اتاق مستطیل شکل برابر با x فرض می‌کنیم (طبق شکل). داریم:



$$\begin{cases}\text{مساحت قالی}=۸m^۲\\ \text{طول قالی}=۶-۲x \quad \text{و} \quad \text{عرض قالی}=۴-۲x\end{cases}\Rightarrow(۶-۲x)(۴-۲x)=۸$$

$$\Rightarrow ۲۴+۴x^۲-۲۰x=۸\Rightarrow ۴x^۲-۲۰x+۱۶=۰\Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰\Rightarrow(x-۴)(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۴=۰\Rightarrow x=۴ \ \times\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱ \ \checkmark\end{cases}$$

مقدار ۴ برای x قابل قبول نیست، زیرا عرض اتاق ۴m است.

۴۹

$$\begin{cases}\alpha\beta^۲+۴=(\alpha\beta)\beta+۴=P\beta+۴=۰\\ P=\dfrac{c}{a}=۴\end{cases}\Rightarrow\beta=-۱\xrightarrow{\beta=-۱\ \text{ریشه‌ی معادله است.}}۱+۳m+۴=۰\Rightarrow m=\dfrac{-۵}{۳}$$

۵۰

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=۲\\ P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=-۴\end{cases}\Rightarrow\alpha^۳\beta+\beta^۳\alpha=\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)=\alpha\beta((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)=P(S^۲-۲P)=-۴(۴+۸)=-۴۸$$

۵۱

$$\xrightarrow{S=\alpha+\beta=۳\ ,\ P=\alpha\beta=-۵}\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{\alpha+\beta+۲}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}=\frac{S+۲}{P+S+۱}=\frac{۳+۲}{-۵+۳+۱}=-۵$$

---

۵۲ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی داده شده باشند:

$$\left.\begin{matrix}S=a+۲\\ P=a+۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta+۲}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow\frac{S+۲}{P+S+۱}=\frac{۵}{۶}$$

$$\Rightarrow\frac{a+۲+۲}{a+۱+a+۲+۱}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow\frac{a+۴}{۲a+۴}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow ۶a+۲۴=۱۰a+۲۰\Rightarrow ۴a=۴\Rightarrow a=۱$$

۵۳

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\sqrt{۲}\\ P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=-۳\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha^۲+\beta^۲}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}=\frac{S}{S^۲-۲P}=\frac{\sqrt{۲}}{(\sqrt{۲})^۲-۲(-۳)}=\frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

۵۴

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۵}{۲}=\frac{۵}{۲} \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۶}{۲}=-۳\end{cases} \Rightarrow (\alpha-\beta)^۲=(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta=S^۲-۴P=\frac{۲۵}{۴}+۱۲=\frac{۷۳}{۴}$$

۵۵

$$S=-\frac{b}{a}\ ,\ P=-۴\ ,\ \alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS=(۲)^۳-۳(-۴)(۲)=۳۲$$

۵۶ از معادله داریم:

$$۴x^۲-۱۲x+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۳\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

حال تغییراتی در عبارت خواسته شده ایجاد می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} \xlongequal{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲}} \frac{\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}=\frac{\sqrt{۳+۱}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

۵۷ اگر α و β دو ریشه‌ی معادله‌ی مذکور باشند، داریم:

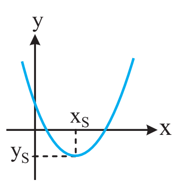
$$\begin{cases}\alpha=\beta+۲\\ \alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۴\end{cases}\Rightarrow \alpha=۳\ ,\ \beta=۱ \xrightarrow{\alpha\beta=\frac{m}{۴}} ۳\times۱=\frac{m}{۴}\Rightarrow m=۱۲$$

۵۸ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر باشند، داریم:

$$\alpha=۳\beta\Rightarrow\alpha+\beta=۴\beta \xrightarrow{S=\frac{۴}{m}} \frac{۴}{m}=۴\beta\Rightarrow\beta=\frac{۱}{m} \xrightarrow{\beta\text{ ریشه‌ی معادله است.}} m(\frac{۱}{m})^۲-۴(\frac{۱}{m})+۱=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{m}-\frac{۴}{m}=-۱\Rightarrow m=۳$$

۵۹ **نکته** سهمی $y=ax^۲+bx+c$ همواره محور عرض‌ها را در نقطه‌ی $\binom{۰}{c}$ قطع می‌کند. (در معادله، $x=۰$ را جایگذاری می‌کنیم.)



اولاً: چون سهمی دارای می‌نیمم است، یعنی دهانه‌ی آن رو به بالا است، لذا $a>۰$ می‌باشد.

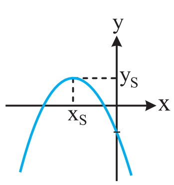
ثانیاً: چون محل تلاقی سهمی با محور yها دارای عرض مثبت است، لذا $f(۰)=c>۰$.

ثالثاً: از آن‌جا که رأس یا نقطه‌ی می‌نیمم سهمی در سمت راست محور yها واقع شده است، لذا $x_S>۰$ و داریم:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a>۰} -b>۰\Rightarrow b<۰$$

در ضمن مطابق شکل نمودار سهمی در دو نقطه محور xها را قطع کرده است، لذا معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشه می‌باشد.

۶۰ اولاً: نمودار سهمی داده شده دارای ماکزیمم است، لذا $a<۰$.



ثانیاً: طول رأس سهمی منفی است، بنابراین:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}<۰ \xrightarrow{a<۰} -b>۰\Rightarrow b<۰$$

ثالثاً: عرض محل تلاقی نمودار با محور yها منفی است، بنابراین:

$$P(۰)<۰\Rightarrow c<۰$$

از طرفی نمودار تابع محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند، در نتیجه معادله دو جواب دارد.