

فصل ششم



اندازه‌گیری سطح و حجم

اندازه‌گیری سطح و حجم



سطح



برای پیدا کردن مساحت شکل‌های هندسی از اندازه‌هایی که برای طول، عرض، ارتفاع، قاعده و ... داده می‌شود استفاده می‌کنیم. در غیر این صورت اگر اندازه‌ای نداشته باشیم می‌توانیم از صفحه‌های شطرنجی استفاده کنیم.

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}$$

$$\text{مساحت مربع} = \text{ضلع} \times \text{ضلع}$$

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ}}{2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{عرض} \times \text{طول}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2}$$

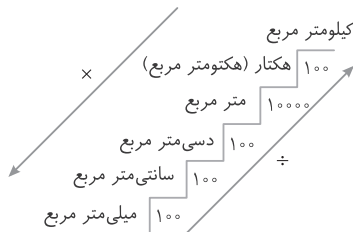
$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$\text{مساحت چهارضلعی‌هایی که دو قطر عمود برهم دارند} = \frac{\text{قطر} \times \text{قطر}}{2}$$

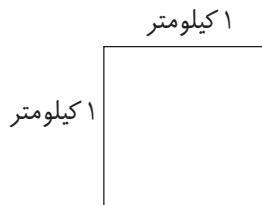
$$\text{مساحت دایره} = \frac{3}{14} \times \text{شعاع} \times \text{شعاع}$$

مهم‌ترین واحدهای اندازه‌گیری مساحت شامل کیلومتر مربع برای مساحت کشورها، شهرها و ...، متر مربع جهت اندازه‌گیری مساحت کف اتاق، هکتومتر مربع (هکتار) برای اندازه‌گیری مساحت باغ‌ها، جنگل‌ها و ...، سانتی‌متر مربع و میلی‌متر مربع برای اندازه‌گیری سطح‌های کوچک‌تر است.

برای تبدیل واحدهای اندازه‌گیری مساحت به الگوی پله‌ای مقابل توجه کنید:

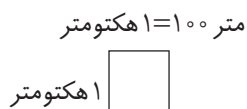


* **کیلومتر مربع:** مساحت مربعی را گویند که اندازه‌ی هر ضلع آن ۱ کیلومتر باشد.



کیلومتر مربع ۱ = ۱ کیلومتر × ۱ کیلومتر

* **هکتار:** مساحت مربعی را گویند که اندازه‌ی هر ضلع آن ۱ هکتومتر (۱۰۰ متر) باشد.



$$\begin{aligned} & \text{1 هکتومتر مربع} = \text{1 هکتومتر} \times \text{1 هکتومتر} \\ & \text{1 هکتار} \leftarrow \text{1 متر مربع} = 10000 \text{ متر} \times 100 \text{ متر} \end{aligned}$$

$$\text{1 هکتار} = 10000 \text{ متر مربع}$$

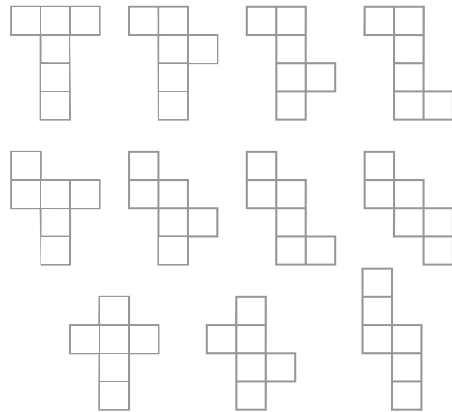
$$\text{1 هکتار} = \frac{1}{100} \text{ کیلومتر مربع}$$

- * اگر اضلاع مربعی را n برابر کنیم مساحتش $n \times n$ برابر می‌شود ولی محیطش n برابر می‌شود.
- * اگر شعاع دایره‌ای را n برابر کنیم مساحتش $n \times n$ برابر می‌شود ولی محیطش n برابر می‌شود.
- * اگر ارتفاع و قاعده‌ی مثلثی را n برابر کنیم مساحتش $n \times n$ برابر می‌شود.

حجم

شکل فضایی: شکل فضایی به شکلی گفته می‌شود که فضا را اشغال کرده و معمولاً دارای گنجایش باشد. شکل‌های فضایی، شکل‌های سه بعدی می‌باشند.

مکعب: مکعب که در واقع همان مکعب مربع است یک شکل با شش وجه منتظم می‌باشد، که تمام وجوه آن مربع‌های مساوی باشد. مکعب از ۸ رأس، ۲۴ زاویه هر زاویه 90° درجه و ۱۲ یال (ضلع) تشکیل شده است. مجموع زاویه‌های یک مکعب 2160° درجه است و ۱۱ گسترده دارد (مطابق شکل روبه‌رو) که محیط هر گسترده‌ی آن از ۱۴ ضلع برابر تشکیل شده است.



حالت‌های مختلف وجه‌های مکعب →

* حجم مکعب از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\text{حجم} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}$$

$$\text{حجم مکعب} = \text{ضلع} \times \text{ضلع} \times \text{ضلع}$$

← از آن‌جا که اندازه‌ی اضلاع برابر است

مساحت جانبی مکعب یا همان مساحت چهار وجه عمودی مکعب از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\text{مساحت جانبی مکعب} = 4 \times \text{مساحت یک وجه}$$

$$\text{مساحت جانبی مکعب} = 4 \times (\text{ضلع} \times \text{ضلع})$$

مکعب مستطیل: مکعب مستطیل از شش وجه که وجه‌های مقابل دوه‌دو با هم مساوی هستند، تشکیل شده است.

وجوه یک مکعب مستطیل یا از ۴ مستطیل و ۲ مربع و یا از ۶ مستطیل تشکیل شده است.

مکعب مستطیل دارای ۸ رأس، ۱۲ یال (ضلع)، ۲۴ زاویه و هر زاویه 90° درجه و مجموع زاویه‌های آن 2160° می‌باشد.

* حجم یک مکعب مستطیل از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\text{حجم مکعب مستطیل} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}$$

$$\text{حجم مکعب مستطیل} = \text{ارتفاع} \times \text{طول} \times \text{عرض}$$

* رابطه‌ی زیر جهت محاسبه‌ی مساحت جانبی مکعب مستطیل است:

$$\text{مساحت جانبی} = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده}$$

* رابطه‌ی زیر جهت محاسبه‌ی مساحت کل مکعب مستطیل است:

$$\text{مساحت کل مکعب مستطیل} = \text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی}$$

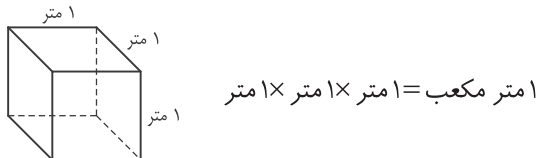
* **چهاروجهی منتظم**: یک چهاروجهی منتظم چهار رأس و ۶ یال (ضلع) دارد، از چهار مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است،

دارای دو گسترده به صورت \triangle و \triangle می‌باشد.

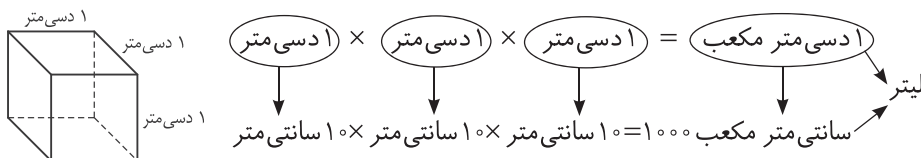
* از انواع شکل‌های فضایی دیگر می‌توان به کره، منشور، هرم، مخروط، استوانه و ... اشاره کرد.

واحدهای اندازه‌گیری حجم و گنجایش

متر مکعب: گنجایش مکعبی توخالی است که اندازه‌ی هر بُعد آن ۱ متر می‌باشد. از واحد متر مکعب برای اندازه‌گیری آب سدها، اندازه‌گیری مقدار مصرف گاز و آب خانگی و ... استفاده می‌شود.



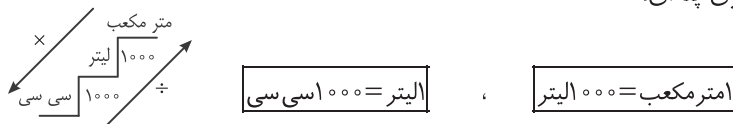
دسی‌متر مکعب (لیتر): دسی‌متر مکعب گنجایش مکعبی توخالی است که اندازه‌ی هر بُعد آن ۱ دسی‌متر (۱۰ سانتی‌متر) باشد. واحد دسی‌متر مکعب یا همان لیتر برای خرید بنزین، نفت و ... کاربرد دارد.



سانتی‌متر مکعب (سی‌سی): سانتی‌متر مکعب گنجایش مکعبی تو خالی است که اندازه‌ی هر بُعد آن ۱ سانتی‌متر است.

قطره: تقریباً هر ۲۵ قطره معادل ۱ سی‌سی است که در محاسبات ریاضی معمولاً آن را ۳۰ در نظر می‌گیرند.

نمایش واحدهای اندازه‌گیری حجم و گنجایش روی الگوی پله‌ای:



* برای محاسبه‌ی حجم شکل‌های هندسی، همه‌ی اضلاع باید دارای واحد یکسانی باشند.

* برای به دست آوردن حجم اجسامی مانند مکعب، استوانه و ... کافیست مساحت قاعده در ارتفاع ضرب شود.

* برای اندازه‌گیری حجم اجسامی که شکل هندسی مشخصی ندارند (مثل یک تکه سنگ) آن‌ها را داخل ظرف آبی می‌اندازند، مقدار آبی که از ظرف بالا می‌آید، برابر با حجم جسم مورد نظر است.

* اگر از روش بالا برای اندازه‌گیری حجم سنگ و یا شیئی که شکل مشخصی ندارد، استفاده کنیم می‌توانیم از رابطه‌ی زیر کمک بگیریم:

$$\text{حجم جسم} = \text{ارتفاعی که آب ظرف بالا آمده} \times \text{مساحت قاعده‌ی ظرف}$$


* هرگاه یک تکه از گوشه‌ی یک مکعب برداریم، مساحت کلی آن مکعب تغییر نمی‌کند.

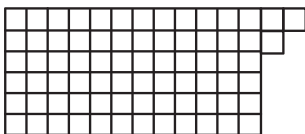
* اگر اضلاع مکعبی را n برابر کنیم حجم آن $n \times n \times n$ ولی مساحت جانبی و مساحت کل آن $n \times n$ برابر خواهد شد.

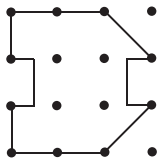




مقایسه و اندازه‌گیری سطح

- ۱- برای مقایسه‌ی سطوح مختلف به یک واحد اندازه‌گیری نیاز داریم که این واحد اندازه‌گیری:
 - (۱) حتماً باید بر اساس یک واحد استاندارد باشد.
 - (۲) هر سطحی می‌تواند به عنوان واحد اندازه‌گیری انتخاب شود.
 - (۳) بهتر است ابتدا از واحدهای شناخته شده و از کوچک به بزرگ استفاده کنیم.
 - (۴) گزینه‌های (۱) و (۳) درست هستند.
- ۲- کدام یک از واحدهای زیر اندازه‌گیری را دقیق‌تر نشان می‌دهد؟
 - (۱) میلی‌متر مربع
 - (۲) سانتی‌متر مربع
 - (۳) دسی‌متر مربع
 - (۴) متر مربع
- ۳- کدام گزینه به درستی یک متر مربع را برای ما تعریف می‌کند؟
 - (۱) ۱۰۰ دسی‌متر مربع
 - (۲) ۱۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع
 - (۳) ۱۰۰۰۰۰۰ میلی‌متر مربع
 - (۴) هر سه گزینه درست هستند.
- ۴- $\frac{9}{13}$ متر مربع چند دسی‌متر مربع است؟
 - (۱) ۹۱۳
 - (۲) $\frac{91}{3}$
 - (۳) $\frac{9}{13}$
 - (۴) $\frac{913}{10}$
- ۵- ۴۰۸ سانتی‌متر مربع چند متر مربع است؟
 - (۱) $\frac{408}{100}$
 - (۲) ۴۰۸۰۰۰
 - (۳) $\frac{4}{108}$
 - (۴) $\frac{4}{408}$
- ۶- $\frac{3}{5}$ از $\frac{4}{5}$ دسی‌متر مربع چند متر مربع است؟
 - (۱) $\frac{2}{7}$
 - (۲) $\frac{2}{27}$
 - (۳) $\frac{2}{27}$
 - (۴) $\frac{2}{27}$
- ۷- داخل مربعی به ضلع یک کیلومتر چند مربع به ضلع یک سانتی‌متر می‌توانیم جای‌گذاری کنیم تا پر شود؟
 - (۱) یک میلیارد
 - (۲) یک میلیون
 - (۳) ده میلیارد
 - (۴) صد میلیارد
- ۸- زمینی به شکل مربع داریم که طور هر ضلع آن ۱۱۰۵ متر است. مساحت آن چند کیلومتر مربع است؟
 - (۱) $\frac{1}{221025}$
 - (۲) $\frac{122}{1025}$
 - (۳) $\frac{12210}{25}$
 - (۴) $\frac{12}{21025}$
- ۹- مساحت دریاچه‌ی ارومیه تقریباً ۶۰۰۰ کیلومتر مربع می‌باشد. این مساحت چند هکتار است؟
 - (۱) ۶۰۰۰۰۰
 - (۲) ۶۰۰۰۰
 - (۳) ۶۰۰۰۰۰۰
 - (۴) ۶۰۰۰۰۰۰۰
- ۱۰- کدام یک از زمین‌های زیر بزرگ‌تر است؟
 - (۱) زمینی به مساحت یک هکتار
 - (۲) زمینی مربع شکل به اضلاع ۱۰۰ متر
 - (۳) زمینی مربع شکل به اضلاع یک کیلومتر
 - (۴) زمینی مستطیل شکل به طول و عرض ۲۰۰ متر و ۱۰۰ متر
- ۱۱- می‌دانید که مساحت خشکی‌های کشور عزیزمان جمهوری اسلامی ایران حدود ۱۶۴۸۰۰۰ کیلومتر مربع است. اگر مساحت آب‌های کشور یعنی خلیج فارس و دریای خزر به آن اضافه شود حدود ۱۷۴۸۰۰۰ کیلومتر مربع می‌شود. مساحت آب‌های کشور چند متر مربع است؟
 - (۱) هزار میلیارد
 - (۲) ده هزار میلیارد
 - (۳) صد هزار میلیارد
 - (۴) صد میلیارد
- ۱۲- زمینی به شکل زیر به مساحت ۱۰۰ متر مربع با موزاییک‌هایی به شکل  پوشیده شده است. مساحت هر موزاییک چقدر است؟
 - (۱) ۳ متر مربع
 - (۲) $\frac{4}{3}$ متر مربع
 - (۳) ۴ متر مربع
 - (۴) $\frac{3}{4}$ متر مربع





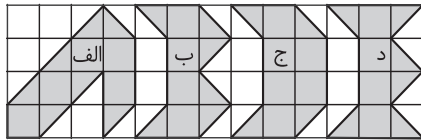
۱۳- در شکل روبه‌رو فاصله‌ی همه‌ی نقاط به صورت افقی و عمودی دو واحد می‌باشد. مساحت شکل رسم شده کدام است؟

(۲) ۳۰

(۱) ۲۸

(۴) ۷

(۳) ۱۴



۱۴- کدام سطح سایه‌دار در شکل داده شده از همه بزرگ‌تر است؟

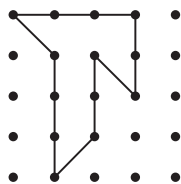
(۱) الف

(۲) ب

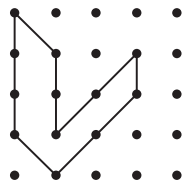
(۳) ج

(۴) د

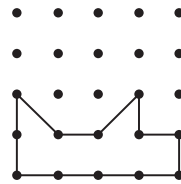
۱۵- کدام یک از شکل‌های زیر مساحت بیش‌تری دارد؟



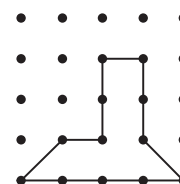
(د)



(ج)



(ب)



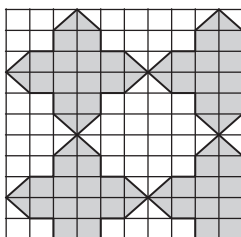
(الف)

(۴) د

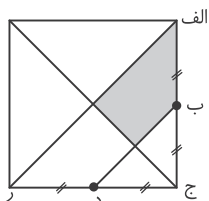
(۳) ج

(۲) ب

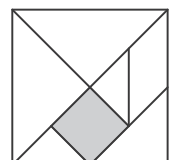
(۱) الف



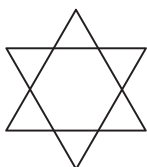
۱۶- شکل مقابل گوشه‌ی یک طبقه را نشان می‌دهد. اگر تمام گوشه‌های طبقه به صورت مقابل باشد و کل طبقه با همین نوع کاشی، کاشی‌کاری شده باشد، نسبت مساحت ناحیه‌ی طوسی به مساحت کل چقدر است؟

(۲) $\frac{4}{9}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{1}{2}$ 

۱۷- مربعی به شکل روبه‌رو قسمت‌بندی شده است و نقطه‌های «ب» و «د» وسط اضلاع مربع می‌باشند. نسبت مساحت قسمت سایه خورده به مساحت کل چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{8}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{3}{16}$ 

۱۸- نسبت مساحت مربع سایه‌خورده به مساحت مربع بزرگ چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{7}$ (۱) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{8}$ 

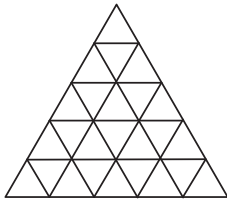
۱۹- همان‌گونه که در شکل نشان داده شده است، یک «هگزاگرام واحد» از یک شش ضلعی منتظم به طول اضلاع ۱ و شش مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. نسبت مجموع مساحت مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به مساحت شش ضلعی چقدر است؟

(۲) ۵ به ۶

(۱) ۱ به ۱

(۴) ۱ به ۲

(۳) ۲ به ۳



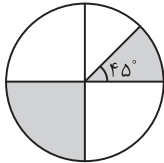
۲۰- رادین می‌خواهد مساحت مثلث شکل مقابل را به دست بیاورد، ولی واحد اندازه‌گیری مساحت او شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۱ است. او مساحت مثلث را چقدر به دست می‌آورد؟

$$\frac{1}{6} (2)$$

$$4 (1)$$

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$\frac{1}{3} (3)$$



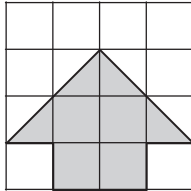
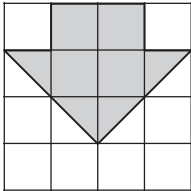
۲۱- اگر مساحت دایره‌ی مقابل ۱۲ سانتی‌متر مربع باشد، مساحت قسمت سایه‌خورده چقدر است؟

$$\frac{9}{4} (2)$$

$$\frac{15}{4} (1)$$

$$\frac{9}{2} (4)$$

$$\frac{15}{2} (3)$$



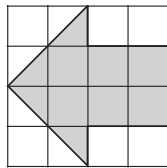
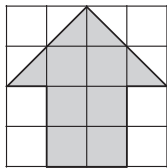
۲۲- در دو مربع 4×4 روبه‌رو، دو فلش جهت شمال و جنوب را نشان می‌دهند. اگر دو مربع را روی هم قرار دهیم به‌طوری که جهت فلش‌ها تغییر نکند، چه مساحتی از مربع دو بار پوشانده می‌شود؟

$$6 (2)$$

$$2 (1)$$

$$10 (4)$$

$$4 (3)$$



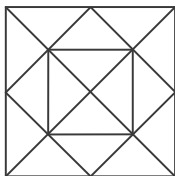
۲۳- شکل روبه‌رو دو مربع 4×4 را نشان می‌دهد که دو فلش یکسان، یکی در جهت شمال و یکی در جهت غرب در آن‌ها دیده می‌شود. اگر هر دو فلش را درون یک مربع 4×4 رسم کنیم، چه مساحتی از مربع توسط هر دو فلش با هم پوشیده خواهد شد؟

$$6 (4)$$

$$5/5 (3)$$

$$5 (2)$$

$$4/5 (1)$$



۲۴- در شکل روبه‌رو ضلع مربع بزرگ یک سانتی‌متر است. چند مثلث وجود دارد که مساحت هر یک از آن‌ها $\frac{1}{8}$ سانتی‌متر مربع است؟

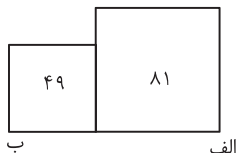
$$8 (2)$$

$$4 (1)$$

$$12 (4)$$

$$16 (3)$$

محیط و مساحت مربع و مستطیل



۲۵- در شکل روبه‌رو دو مربع با مساحت آن‌ها نشان داده شده است. طول ضلع «الف» چقدر است؟

$$15 (2)$$

$$2 (1)$$

$$16 (4)$$

$$32 (3)$$

۲۶- قطر مربعی ۲ سانتی‌متر است. مساحت آن چند سانتی‌متر مربع است؟

$$3 (3)$$

$$2 (2)$$

$$1 (1)$$

$$4 (4)$$

۲۷- علی توپ فوتبالی داشت که آسیب دیده بود. برای پیدا کردن مساحت رویه‌ی توپ آن را باز کرد و با کنار هم قرار دادن قطعه‌ها، مربعی به ضلع تقریباً ۳۵ سانتی‌متر به‌دست آورد. مساحت تقریبی رویه‌ی توپ او کدام گزینه است؟ (تیزهوشان - ۹۲)

$$1/225 \text{ متر مربع} (2)$$

$$1/1225 \text{ میلی‌متر مربع} (1)$$

$$12/25 \text{ دسی‌متر مربع} (4)$$

$$122/5 \text{ دسی‌متر مربع} (3)$$

۲۸- مساحت یک زمین مربعی شکل ۲۲۵ متر مربع می‌باشد. اگر بخواهیم دور این زمین را ۳ ردیف سیم خاردار بکشیم به چند متر سیم خاردار نیاز داریم؟

(تیزهوشان - ۹۲)

(۱) ۷۵ متر (۲) ۱۸۰ متر (۳) ۰/۷۵ متر (۴) ۲۷۰۰ متر

۲۹- محیط و مساحت یک اتاق به شکل مربع را محاسبه کرده‌ایم. هر دو یک عدد به دست آمده است (محیط برحسب متر و مساحت متر مربع). مساحت اتاق برابر با سانتی‌متر مربع است.

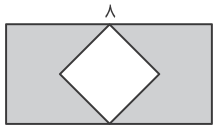
(۱) ۴۰۰۰۰ (۲) ۴۰۰۰۰۰ (۳) ۱۶۰۰۰۰ (۴) ۸۰۰۰۰

۳۰- ضلع یک مربع یک متر می‌باشد. اگر به اندازه‌ی ضلع، یک میلی‌متر اضافه کنیم، مساحت آن چند میلی‌متر مربع اضافه می‌شود؟

(۱) ۱۰۰۰ (۲) ۱۰۰۱ (۳) ۲۰۰۰ (۴) ۲۰۰۱

۳۱- کف اتاقی به شکل مربع با موزاییک‌های مربع شکل فرش شده است. اگر مساحت هر موزاییک ۰/۲ متر مربع و تعداد موزاییک‌ها ۱۸۰ باشد، محیط کف اتاق چند متر است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۱۶ (۴) ۴۴



۳۲- در شکل روبه‌رو مساحت قسمت سایه‌دار چند است؟

(۱) ۲۶ (۲) ۳۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴



۳۳- در یک حیاط مانند شکل روبه‌رو حوضی به طول ۳ متر و عرض ۱/۵ متر وجود دارد. فاصله‌ی حوض از هر یک از سه ضلع ۱ متر و از ضلع چهارم ۴/۵ متر است. مساحت قسمت سایه‌دار چند متر مربع است؟

(۱) ۳۰/۵ (۲) ۳۱ (۳) ۳۱/۵ (۴) ۳۲

۳۴- نسبت طول به عرض مستطیلی $\frac{7}{4}$ و محیط آن ۴۴ میلی‌متر می‌باشد. مساحت این مستطیل چند سانتی‌متر مربع می‌باشد؟

(تیزهوشان - ۹۲)

(۱) ۱/۱۲ (۲) ۱۱/۲ (۳) ۴۴۸ (۴) ۴/۴۸

۳۵- علی می‌خواهد مساحت یک فرش مستطیلی را اندازه بگیرد، ولی او خط‌کش ندارد. او برای این کار از یک کفش استفاده می‌کند به طوری که طول فرش به اندازه‌ی ۱۵ کفش و عرض فرش به اندازه‌ی ۱۰ کفش است. او بعداً متوجه می‌شود که طول کفش ۲۸ سانتی‌متر است. مساحت فرش چند سانتی‌متر مربع است؟

(۱) ۴۲۰۰ (۲) ۲۲۵۰۰ (۳) ۶۳۰۰۰۰ (۴) ۱۱۷۶۰۰

۳۶- برای این که یک کیلومتر پیاده‌روی کنیم، می‌توانیم ۲۵ بار طول یک زمین مستطیلی را طی کنیم یا محیط آن را ۱۰ دور بپیماییم. مساحت این زمین مستطیلی چقدر است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۵۰۰

۳۷- مساحت مربعی ۲۵ سانتی‌متر مربع است و مستطیلی عرضی برابر با اضلاع مربع دارد و طول مستطیل ۲ برابر عرض آن است. مساحت مستطیل کدام است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۱۰۰ (۴) ۵۰

۳۸- محیط یک مربع ۲۴ سانتی‌متر است. مستطیلی که مساحتش با مساحت مربع یکسان است، عرضی به اندازه‌ی ۴ سانتی‌متر دارد. محیط مستطیل چند سانتی‌متر است؟

(۱) ۲۶ (۲) ۳۶ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۳۹- دور یک باغ مستطیلی شکل که دارای طول ۵۰ متر و عرض ۱۰ متر است، حصار می‌کشیم. اگر همین مقدار حصار را دور یک باغ مربعی بکشیم، مساحت باغ مربعی چند متر مربع بیش‌تر از مساحت باغ مستطیلی است؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۴۰۰

۴۰- یک چهارم از $\frac{2}{3}$ محیط مستطیلی با ۴۰٪ محیط مربعی به ضلع ۳۰ متر برابر است. در صورتی که طول مستطیل ۹۵ متر

(نمونه دولتی تهران - ۹۳)

باشد، مساحت مستطیل در کدام گزینه صحیح است؟

(۱) ۲۸۸ (۲) ۴۶۵۵ (۳) ۲۳۲۷/۵ (۴) ۸۴۵۵