

فصل اول:

عددهای صحیح و گویا

قسمت اول: عددهای صحیح

تاریخچه

مفهوم اعداد منفی را هندی‌ها پدید آوردند، یعنی اعداد کم‌تر از هیچ! «ابوالوفای بوزجانی» بزرگ‌ترین ریاضی‌دان قرن سوم برای اولین بار کاربرد اعداد منفی را در جهان اسلام مطرح کرد و از اصطلاح وام یا قرض برای آن استفاده کرد. «خوارزمی» جواب‌های منفی معادلات را «ناقص» و جواب‌های مثبت را «زاید» می‌نامید ولی اروپایی‌ها تا مدت‌ها به جواب‌های منفی بی‌اعتنا بودند و آن‌ها را جواب‌های دروغ و بی‌معنا می‌دانستند.

هندی‌ها برای اعداد منفی علامت دایره را به کار می‌بردند. در سال ۱۴۰۰ میلادی بازرگانان اروپایی از چینی‌ها و هندی‌ها تقلید کردند و برای اعداد مثبت علامت p و برای اعداد منفی علامت m را قبل از عدد قرار می‌دادند (esulp = جمع و sunim = منها). در طول تاریخ این نمادها تغییر کرد تا این‌که استفاده از علامت $(+)$ برای اعداد مثبت و علامت $(-)$ برای اعداد منفی باب شد!

خواص ضرب و جمع اعداد صحیح

$$a \times b = b \times a \quad a + b = b + a$$

$$\text{عمل جمع} : a + a = a$$

$$\text{عمل ضرب} : a \times a = a$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

۴ عضو وارون: عضو وارون در عمل جمع را قرینه‌ی عدد می‌نامیم. قرینه‌ی عدد a برابر است $(-a)$. جمع هر عدد با قرینه‌اش همیشه برابر است با صفر (عضو بی‌اثر).

تذکره: عضو وارون عمل ضرب را معکوس آن می‌نامیم. ضرب هر عدد در معکوس خودش برابر است با عدد ۱ ولی وارون اعداد صحیح معمولاً عدد صحیح نیست؛ مثلاً وارون ۲ برابر است با $\frac{1}{2}$ که عددی صحیح نیست! فقط وارون ۱ و -1 با خودشان برابر است. عدد صفر هم که وارون ندارد!

۵ قرینه‌ی مجموع: مجموع قرینه‌های دو عدد برابر است با قرینه‌ی مجموع دو عدد!

۶ پخشی ضرب به جمع: در واقع خاصیت قرینه‌ی مجموع، حالت خاصی از خاصیت پخشی است! علامت « $-$ » را می‌توان -1 فرض کرد:

$$(-1)(a+b) = (-1) \times a + (-1) \times b$$

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

در نتیجه:

تقدم عملیات‌ها

۱ ضرب و تقسیم همیشه بر جمع و تفریق تقدم دارند، یعنی همواره ابتدا باید ضرب و تقسیم‌ها را انجام داد؛ سپس جمع و تفریق‌ها.

۲ اگر ضرب و تقسیم پشت سر هم باشند، از چپ شروع می‌کنیم:

۳ اگر جمع و تفریق هم پشت سر هم باشند، از چپ شروع می‌کنیم.

مختصرنویسی جمع: در این روش هر عدد را با علامتش می‌نویسیم و علامت‌های جمع و پرانتزها را حذف می‌کنیم:

$$(-7) + (-9) + (+11) = -7 - 9 + 11$$

پرسش‌های ۴ گزینه‌ای



بخش اول: جمع و تفریق اعداد صحیح

۱- قرینه‌ی عدد ۷- نسبت به ۲ کدام است؟

- ۸ (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۲- در جای خالی چه عددی قرار می‌گیرد؟

- ۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۰ (۴)

۳- چندتا از جملات زیر درست هستند؟

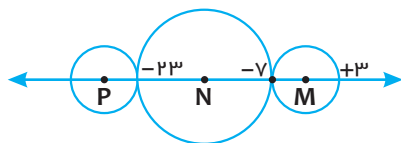
- الف) بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی، عدد ۱- است.
ب) عدد صفر کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت است.
ج) قرینه‌ی هر عدد از خودش کوچک‌تر است.
د) دو برابر هر عدد صحیح از خودش بزرگ‌تر است.

- هیچ کدام (۱) فقط یکی (۲) دوتا (۳) سه تا (۴)

۴- حاصل عبارت $[-(-6-7)-8]-(5-6)-2$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۵- در شکل زیر، فاصله‌ی مرکز دو دایره‌ی کوچک از هم چه قدر است؟ (شعاع‌های دو دایره‌ی کوچک چپ و راست مساوی‌اند).



- ۱۷ (۱) ۱۳ (۲)

- ۲۴ (۳) ۲۶ (۴)

۶- حاصل عبارت در کدام گزینه‌ها با بقیه‌ی گزینه‌ها یکسان نیست؟

(۱) $1-2+3-4+5-6+\dots+99-100$

(۲) $(1+3+5+\dots+99)-(2+4+6+\dots+100)$

(۳) $(13+15+\dots+113)-(14+16+18+\dots+114)$

(۴) $1-(2-(3-(\dots-(99-100)\dots)))$

۷- اگر a ، b و c سه عدد صحیح باشند و $a+b=-11$ ، $a+c=17$ و $b+c=-16$ باشند، عدد c کدام است؟

- ۶ (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴)

۸- مجموع سه عدد صحیح ۱۷- است. اگر میانگین دوتای آن‌ها ۲۱- باشد، عدد سوم کدام است؟

- ۲۵ (۱) ۱۵ (۲) ۵۹ (۳) ۳۰ (۴)

۹- فرض کنید نوع جدیدی از عددنویسی ابداع (!) کرده‌ایم؛ به این صورت که هرگاه علامت - را بالای هر رقم قرار دهیم، مرتبه‌ی

آن رقم را منفی در نظر می‌گیریم، مثلاً عدد $3\bar{5}2$ را به صورت مقابل حساب می‌کنیم:

$$3\bar{5}2 = 300 - 50 + 2 = 252$$

در این صورت حاصل $3\bar{7}2\bar{1} + 3\bar{7}2\bar{1}$ کدام است؟

- ۱۱۱۱ (۱) ۱۰۱۰ (۲) صفر (۳) ۱۰۱ (۴)

۱۰- میانگین اعداد صحیح از ۱۷- تا ۲۰+ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱/۵ (۲) ۱۱/۳۷ (۳) ۱۹/۳ (۴)

۱۱- به اعداد -۷ ، $+۲$ ، $+۹$ ، -۱۷ و ۳ چه عددی اضافه کنیم تا میانگین تغییر نکند؟

-1 (1) $+2$ (2) (3) صفر -2 (4)

۱۲- جدولی را تا سطر چهارم به شکل روبه‌رو نوشته‌ایم. اگر جدول را تا سطر ۱۳۹۳ ادامه دهیم، مجموع

(المیاد ریاضی ایران)

کل اعداد جدول برابر است با:

1393 (F) -695 (M) 695 (Y) 697 (I)

۱۳- دنباله‌ای از اعداد را به شکل روبه‌رو نوشته‌ایم:

در این دنباله هر عدد برابر است با عدد قبلی منهای عدد قبل تر؛ مثلاً $۱-۷=۶$ و $۶-۷=۱$ ، \dots اگر این دنباله را به همین شکل ادامه

دهیم، عدد هزارم کدام است؟

-6 (f)
 6 (g)
 -1 (h)
 1 (i)

۱۴- در دنباله‌ی قبل مجموع هزار جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

13 (f) 1393 (w) 14 (r) -1394 (l)

۱۵- در جدول 3×3 روبه‌رو، مجموع اعداد هر سطر، ستون و قطر با هم برابرند. مقدار $x + y$ کدام است؟

y		
x	-13	-7
λ		4

$-25 (f)$
 $-15 (u)$
 $-18 (v)$
 $-28 (i)$

۱۶- در جدول زیر، مجموع هر سه خانه‌ی متوالی برابر است با ۵، عدد خانه‌ی دوم از سمت چپ کدام است؟

-11									+9
-----	--	--	--	--	--	--	--	--	----

$$-V(\mathbf{r}^c) \qquad V(\mathbf{r}^w) \qquad \mathbf{r}^w(\mathbf{r}^c) \qquad -\mathbf{r}^w(\mathbf{r}^c)$$

۱۷- در شکل روبه‌رو، عدد هر خانه از مجموع اعداد دو خانه‌ی زیر آن به دست می‌آید. به جای * چه

(المیڈار ریاضی آفریقای جنوبی)

عددی قرار دھیم؟

*			
	-11		
10			15

$$+3 \quad (2) \qquad \qquad \qquad -1 \quad (1)$$
$$+1 \text{ } \mu \text{ } (1^c) \qquad \qquad \qquad -1^c \text{ } (1^u)$$

۱۸- تفاضل گل یک تیم یعنی تعداد گل‌های زده منهای تعداد گل‌های خورده. اگر در یک سری مسابقات فوتبال بین شش تیم،

تفاضل گل پنج تیم، -۷ ، $+۳$ ، $+۱$ ، -۲ و $+۴$ باشد، تفاضل گل تیم ششم کدام است؟

$$-1^{\epsilon} (1^{\epsilon} \quad 1^{\omega} (1^{\omega} \quad -1^{\nu} (1^{\nu} \quad 1 (1$$

۱۹- اگر $A = 1 - 2 + 4 - 5 + 7 - 8 - 10 + 11 + 13 - \dots + 1393$ باشد، آن گاه مقدار A :

(۱) کوچک‌تر از ۱- است. (۲) برابر ۱- است.

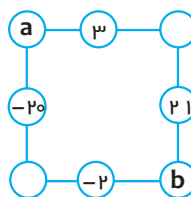
(۳) برابر ۱ است.

۲۰- در شکل زیر میانگین هر دو عددی که روی گوشه‌ها هستند، بین آن‌ها نوشته شده است (روی هر ضلع). در این صورت $a - b$

کدام است؟

۳۶ (۲) -۳۶ (۱)

۴۶ (۴) -۴۶ (۳)



بخش دوم: ضرب و تقسیم اعداد صحیح

۲۱- حاصل عبارت $(1-1393)(2-1393)(3-1393)\dots(2014-1393)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱

(۳) $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2014$ (۴) $-1 \times 2 \times \dots \times 1393$

۲۲- حاصل جمع کدام سه عدد با حاصل ضربشان برابر نیست؟

(۱) ۳، ۲، ۱ (۲) -۳، ۲، ۱

(۳) ۰، -۳، ۳ (۴) -۳، -۲، -۱

۲۳- حاصل عبارت $-1 - (-1-1) \div (-2 \div (-4-4)) - 16 - 16$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۲۴- حاصل عبارت $6 - 6 \left(5 - 5 \left(4 - 4 \left(3 - 3 \left(2 - 2 \left(1 - 1 \right) \right) \right) \right) \right)$ کدام است؟

(۱) -۶ (۲) ۶ (۳) صفر (۴) ۴۵۶

۲۵- اگر a و b اعداد صحیح باشند و $(a-1)(b-2)=6$ باشد، چند جفت مقدار مختلف می توان برای a و b به دست آورد؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۶- اگر $a * b = 2a - 3b - 5$ باشد، حاصل عبارت $((1 * 2) * 3) * (-4)$ برابر است با:

(۱) صفر (۲) -۵۷ (۳) ۵۷ (۴) -۷۵

۲۷- a ، b ، c ، d و e اعداد صحیح متفاوتی هستند و می دانیم $(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-e)=45$ ، در این صورت

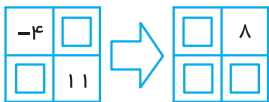
(آزمون TIMSS)

$a+b+c+d+e$ کدام است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۲۹ (۴) ۳۰

بخش سوم: تست های ترکیبی و خلاقیتی

۲۸- اعداد -۵، +۵، -۱، ۹، ۶ و ۱ را در جاهای خالی زیر قرار می دهیم تا ارتباط بین دو جدول برقرار شود، عدد روی فلش



(۱) -۵ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) -۱

۲۹- مجموعه ای اعداد -۳، -۱، -۴، ۵، -۵، صفر و ۹ را در نظر بگیرید. شش عدد از میان این اعداد انتخاب کرده و آن ها را به

۳ دسته ی ۲ تایی تقسیم کرده ایم به طوری که جمع اعداد این جفت ها برابر شوند. چه عددی انتخاب نشده است؟ (مسابقات جهانی ریاضی)

(۱) -۵ (۲) صفر (۳) -۳ (۴) -۴

۳۰- درجه ی حرارت هوا در ساعت ۸ صبح در شهر تبریز -۴ درجه ی سانتی گراد است. اگر با گذشت هر ساعت به گرمای هوا

(تیزهوشان ۸۵)

۲٪ اضافه شود، در ساعت ۱۱ صبح دماسنج چه دمایی را نشان می دهد؟

(۱) -۳ (۲) $-2/1$ (۳) $-2/5$ (۴) -۲

(آزمون TIMSS)

۳۱- A و B هر کدام حاصل جمع هزار عدد صحیح اند. حاصل $B-A$ کدام است؟

$$A = (-1) + (-2) + (-3) + \dots + (-1000)$$

$$B = 0 + (-1) + (-2) + \dots + (-999)$$

(۱) -۱۰۰۰ (۲) ۱۰۰۰ (۳) -۴ (۴) ۴

۳۲- برای هر سه تایی از اعداد مثل (a, b, c) ، سه تایی دیگری از اعداد به صورت $(b+c, c+a, a+b)$ می‌سازیم. این را یک «عمل»

می‌نامیم. ۲۰۰۴ عمل از این نوع را با شروع از $(۱, ۳, ۵)$ انجام می‌دهیم و به سه تایی (x, y, z) می‌رسیم. حاصل $x - y$ کدام است؟

(کنگورو ۲۰۰۴)

۲ (۲)

-۲ (۱)

$(-۲) \times ۲۰۰۴$ (۴)

۴۰۰۸ (۳)

۳۳- اگر $-۳ < a < ۳$ و $-۶ < b < ۶$ و a و b اعداد صحیح و غیر صفر باشند، $\frac{a}{b}$ بین کدام دو عدد است؟

-۱ و ۳ (۴)

-۶ و ۶ (۳)

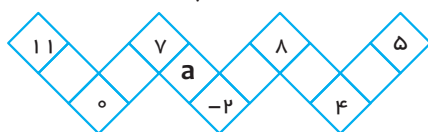
$-\frac{1}{۲}$ و $\frac{1}{۲}$ (۲)

-۳ و ۳ (۱)

۳۴- دانش‌آموزان یک کلاس روی زمین حیاط مدرسه شکل زیر را کشیده‌اند. معلم ریاضی آن‌ها از آن‌ها خواسته است، اعداد -۴،

-۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۸ و ۱۱ را طوری در خانه‌های جدول قرار دهند که حاصل جمع اعداد در هر ضلع سه‌خانه‌ای،

مقداری یکسان شود. البته اعداد واقع در گوشه‌ها را خود نوشته است. عددی که به جای a قرار می‌گیرد کدام است؟



-۳ (۲)

-۱ (۱)

-۴ (۴)

۳ (۳)

۳۵- یک جدول ۳×۳ را در نظر می‌گیریم که در تمام خانه‌های آن اعداد $+۱$ را قرار داده‌ایم. هر بار یک مربع ۲×۲ انتخاب کرده و همه‌ی

اعداد آن را در (-۱) ضرب می‌کنیم. بعد از چند بار انجام این عمل به جدول مقابل می‌رسیم. کدام گزینه می‌تواند تعداد انجام این عمل باشد؟

-۱	+۱	-۱
+۱	+۱	+۱
-۱	+۱	-۱

۱۳۸۷ (۲)

۱۳۸۶ (۱)

۱۳۹۳ (۴)

۱۳۹۲ (۳)

۳۶- جدول روبه‌رو را در نظر بگیرید. جدولی مربعی شکل شامل ۴ خانه از این جدول را انتخاب کرده، به اعداد واقع در هر خانه ۱

-۳	۴	۲
۱	۰	-۱
۳	-۲	۵

واحد اضافه می‌کنیم. با تکرار این عمل به کدام جدول زیر می‌توان رسید؟

۰	۱۲	۶
۶	۹	۷
۵	۴	۶

(۲)

۱۰	۱۲	۷
۶	۵	۱۸
۱۵	۰	۹

(۴)

-۱	۰	۱
۰	۲	۰
۱	-۱	-۱

(۱)

۰	۱۲	۷
۶	۱۴	۸
۵	۴	۹

(۳)

۳۷- شخصی از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. ابتدا یک واحد به چپ می‌رود، سپس ۲ واحد به راست. سپس در حرکت سوم سه

واحد به چپ و ... در حرکت هزار و سیصد و نود و سوم در کدام نقطه ایستاده است؟

-۶۹۷ (۴)

۶۹۶ (۳)

-۶۹۶ (۲)

-۱۳۹۳ (۱)

۳۸- اگر عمل D را به این صورت تعریف کنیم: $a \Delta b = a + b + ۱$ ، در این صورت عضو خنثای این عمل کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۳۹- با توجه به سؤال ۳۸، قرینه‌ی عدد ۳ در عمل D کدام است؟

-۴ (۴)

-۵ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

۴۰- حاصل ضرب ۴ عدد صحیح مثبت از حاصل جمع آن‌ها کوچک‌تر است. اگر مجموع سه عدد ۲۸ باشد، عدد چهارمی کدام است؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

قدیمی‌ترین کسرها در متون مصری یافت شده که برای ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد است (یعنی حدود ۴۰۰۰ سال پیش) مصری‌ها تنها از $\frac{2}{3}$ و کسرهای با صورت ۱ استفاده می‌کردند و بقیه‌ی کسرها را از جمع کسرهای با صورت واحد به دست می‌آوردند، آن‌ها از نمادهای زیر استفاده می‌کردند:



یونانی‌ها نیز از روش مصری‌ها استفاده کردند و گاهی کسرهایی که صورت غیر از ۱ بود نیز به کار می‌بردند. **لئوناردو اهل پیزا** (ایتالیا) در کتاب «حساب» خود (سال ۸۲۲۱) برای اولین بار استفاده از خط کسری را معمول ساخت ولی اعداد مخلوط را طوری دیگری می‌نوشت، مثلاً $2\frac{3}{5}$ را به شکل $\frac{3}{5}2$ می‌نوشت. روش‌های معمولی کنونی از قرن ۵۱ میلادی به بعد رواج یافت.

نکات مهم

۱ هر عددی را که بتوان به شکل کسر علامت‌دار نوشت به طوری که صورت و مخرج اعداد صحیح باشند، عددی گویا می‌نامیم. (مخرج هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر باشد!)

۲ هر عدد گویا را می‌توان به شکل یک کسر نوشت، ولی هر کسری عدد گویا نیست، مثلاً کسر $\frac{\sqrt{2}}{5}$ عدد گویا نیست، چون $\sqrt{2}$ صحیح نیست (گویا هم نیست) ولی کسر $\frac{1/2}{2/5}$ را می‌توان به شکل $\frac{12}{25}$ نیز نوشت که عددی گویاست!

۳ علامت کسر می‌تواند در صورت یا مخرج یا پشت کسر باشد و فرقی هم ندارند:

$$-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$$

$$-3 = \frac{-3}{1}$$

۴ هر عدد صحیح و یا طبیعی عددی گویا محسوب می‌شود، کافی است به آن مخرج ۱ بدهیم:

۵ تمام خواص + و × که در اعداد صحیح به آن‌ها اشاره شد، در این‌جا نیز برقرار است و خاصیت زیر نیز اضافه بر آن وجود دارد.

• عضو وارون: هر عدد گویا به جز صفر وارون دارد (به آن معکوس عدد هم گفته می‌شود)، ضرب هر عدد در وارونش همیشه برابر ۱ است، مثلاً وارون $\frac{2}{3}$ برابر است با $\frac{3}{2}$:
 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$
 وارون ۱ و -۱ با خود عدد برابر است.

۶ بین هر دو عدد گویای مختلف می‌توان عدد گویای دیگری نوشت، این خاصیت در بین اعداد صحیح برقرار نیست. مثلاً بین ۲ و ۳ عدد صحیحی وجود ندارد، ولی مثلاً بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ می‌توان عدد $\frac{5}{12}$ را نوشت.

از این نکته نتیجه می‌شود که: «بین هر دو عدد گویای مختلف بی‌شمار عدد گویا وجود دارد»

۷ روش‌های نوشتن کسر متعارفی بین دو کسر دیگر (عدد گویا بین دو عدد گویای دیگر):

روش اول ◀ محاسبه‌ی میانگین: بین دو عدد را جمع زده بر ۲ تقسیم کنیم. با این روش عددی به دست می‌آید که دقیقاً وسط دو عدد

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

دیگر است! مثلاً بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ می‌خواهیم عددی بنویسیم که از هر دو به یک فاصله باشد:

روش دوم ◀ مخرج مشترک: ابتدا دو عدد را هم‌مخرج می‌کنیم و در صورت لزوم صورت و مخرج‌ها را بزرگ‌تر می‌کنیم.

مثال بین دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ ، ۵ کسر به فاصله‌ی مساوی بنویسید.

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \quad \xrightarrow{\text{همگی در ۶ ضرب شود}} \quad \frac{18}{36} \rightarrow \frac{13}{36}, \frac{14}{36}, \frac{15}{36}, \frac{16}{36}, \frac{17}{36}$$

توضیح اگر فاصله‌ی دو عدد ۱ واحد باشد (مثل ۵ و ۶) هیچ عدد صحیحی نمی‌توان بین آن‌ها نوشت، فاصله ۲ باشد یک عدد، فاصله ۳ باشد ۲ عدد و ... چون می‌خواهیم ۵ کسر بنویسیم باید فاصله بین صورت دو کسر ۶ باشد برای همین در ۶ ضرب کردیم.

روش سوم اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر دلخواه باشند و $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

یعنی صورت دو کسر را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع بزنیم.

مثال بین دو عدد $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{7}$ کسری بنویسید که مخرج آن ۱۳ باشد.

$$\frac{2}{3} \quad \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{2}{3} \quad \frac{9}{13} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{5}{7}$$

۲ مرحله عملیات بالا را انجام می‌دهیم:

۸ کسر $\frac{a}{b}$ را ساده‌نشدنی (تحویل‌ناپذیر) می‌گوییم، هرگاه a و b مقسوم‌علیه مشترکی به جز ۱ نداشته باشند (با هم ساده نشوند).

در این صورت $(a, b) = 1$ یعنی ب.م.م صورت و مخرج ۱ است. مثل $\frac{3}{5}$ یا $\frac{7}{13}$ و ...

۹ اعداد گویا نسبت به هر ۴ عمل (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) بسته‌اند. (به شرطی که تقسیم بر صفر را کنار بگذاریم) یعنی هر

دو عدد گویا را جمع بزنیم حاصل باز هم عددی گویاست، تفریق کنیم باز هم گویاست، ضرب یا تقسیم نیز حاصل عددی گویا به ما می‌دهد!

این خاصیت در مورد اعداد صحیح برقرار نبود. اعداد صحیح نسبت به تقسیم بسته نیستند چون مثلاً $2 \div 3$ حاصل $\frac{2}{3}$ می‌دهد که عدد صحیحی نیست.

• در ساده‌کردن کسرها ۲ نکته‌ی زیر کمک زیادی به ما (و شما!) می‌کند که باید یاد بگیرید!

۱۰ عدد ۱ بر هر کسری تقسیم شود معکوس آن به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

۱۱ قاعده‌ی دور در دور نزدیک در نزدیک:

۱۲ برای ساده‌کردن کسرهای مسلسل معمولاً از آخرین کسر شروع می‌کنیم:

$$1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{4}}} = ?$$

$$3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow 2 - \frac{1}{\frac{11}{4}} = 2 - \frac{4}{11} = \frac{18}{11} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\frac{18}{11}} = 1 - \frac{11}{18} = \frac{7}{18}$$

مثال

۱۳ تبدیل کسر ساده به مسلسل: مثلاً می‌خواهیم کسر $\frac{3}{8}$ را به کسر مسلسل تبدیل کنیم:

صورت آخرین کسر ۱ شود کار خاتمه یافته است!!!

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

۱۴ کسر مسلسل نامتناهی: کسری مشابه کسر روبه‌رو را کسر مسلسل نامتناهی می‌گوییم. متأسفانه (!) این کسرها لزوماً گویا نیستند.

مثلاً کسر روبه‌رو عدد $\sqrt{2}$ را می‌دهد.

$$A = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

از کجا معلوم که $A = \sqrt{2}$ ؟!

برای محاسبه‌ی A به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$A = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

عبارت A در مخرج ساخته شده، پس:

$$A = 1 + \frac{1}{1+A} \xrightarrow{\times(A+1)} A(A+1) = (A+1) + 1$$

داریم:

$$\Rightarrow A^2 + A = A + 2 \Rightarrow A^2 = 2 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{2}}$$

۱۵ کسر تلسکوپی: کسری که صورتش اختلاف دو عدد و مخرج ضرب همان دو عدد باشد، به شکل تفریق دو کسر می‌توان نوشت

به طوری که صورت‌ها ۱ و مخرج‌ها همان دو عدد باشد. به چنین کسرهایی کسر تلسکوپی می‌گوییم.

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4 \times 7} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7}$$

مثال

کاربرد چنین کسرهایی در ساده‌کردن عبارتهایی مثل عبارت زیر است:

$$A = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{3}{3 \times 6} + \frac{4}{6 \times 10} + \frac{5}{10 \times 15} + \frac{6}{15 \times 21} + \frac{7}{21 \times 28}$$

که هر کدام را به تفریق تبدیل می‌کنیم:

$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{28}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{28} = \frac{27}{28}$$

۱۶ نکته‌ی کتابی: برای ساده‌کردن کسرها اگر صورت و مخرج فقط ضرب باشد، ابتدا علامت کل کسر را معلوم می‌کنیم، سپس

$$\frac{(-12) \times (+26)}{(-18) \times (-39)} = -\frac{\cancel{12}^2 \times \cancel{26}^2}{\cancel{18}_3 \times \cancel{39}_3} = -\frac{4}{9}$$

ساده‌کردن‌ها را انجام می‌دهیم، مثال:

۱۷ تبدیل کسر به اعشار: اگر مخرج کسر تحویل‌ناپذیر، فقط عامل ۲ یا ۵ داشته باشد، به راحتی به عددی اعشاری تبدیل می‌شود:

$$\frac{2}{25} = 0.08$$

در این حالت با پیشروی در تقسیم، بالاخره به باقی‌مانده‌ی صفر خواهیم رسید.

۱۸ کسر مولد اعداد اعشاری متناوب: می‌دانیم با تقسیم صورت بر مخرج، کسر متعارفی به عددی اعشاری تبدیل می‌شود، ولی گاهی

اوقات این تقسیم‌ها به باقی‌مانده‌ی صفر ختم نمی‌شود مثل $\frac{5}{11}$ یا $\frac{2}{3}$ یا $\frac{3}{7}$ که اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، خارج‌قسمت‌ها

به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{2}{3} = 0.6666\ldots$$

حالت اول ◀ مخرج عامل ۲ یا ۵ نداشته باشد:

$$\frac{5}{11} = 0.454545\ldots$$

$$\frac{3}{7} = 0.428571428571428571\ldots$$

برای سادگی این عدد را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$$

$$\frac{5}{11} = 0.\overline{45}$$

$$\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

خط تیره روی ارقام تکرارشونده کشیده می‌شود.

حالت دوم \leftarrow مخرج عامل ۲ یا ۵ نیز داشته باشد مثل $\frac{۲۸}{۷۵}$ یا $\frac{۱۷}{۲۲}$

$$\frac{۲۸}{۷۵} = ۰.\overline{۳۷۳۳۳} = ۰.\overline{۳۷۳}$$

$$\frac{۱۷}{۲۲} = ۰.\overline{۷۷۲۷۲۷۲} = ۰.\overline{۷۷۲}$$

۱۹ تبدیل اعداد اعشاری متناوب به عدد گویا:

حالت اول \leftarrow متناوب ساده:

مثال عدد $\frac{۲۸}{۹۹}$ را می‌خواهیم به کسر تبدیل کنیم:

$$A = ۰.\overline{۲۸۲۸۲۸} \Rightarrow ۱۰۰A = ۲۸.\overline{۲۸۲۸۲۸} \Rightarrow ۹۹A = ۲۸ \Rightarrow A = \frac{۲۸}{۹۹}$$

راه‌نیت۱ اگر کل ارقام تکرارشونده باشند، حاصل کسری است که در صورت آن همان ارقام گردشی و در مخرج به تعداد گردشی‌ها ۹ قرار می‌دهیم. به طور مثال داریم:

$$۰.\overline{۳۵۷} = \frac{۳۵۷}{۹۹۹}$$

حالت دوم \leftarrow متناوب مرکب: یعنی اعداد اعشاری که هم رقم تکرارشونده دارند هم رقم ثابت مثل $\frac{۲۷۸}{۹۹}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a = ۰.\overline{۲۷۸۸۸۸} \dots$$

$$\begin{cases} ۱۰۰۰A = ۲۷۸.\overline{۸۸۸} \dots \\ ۱۰۰۰A = ۲۷۸.\overline{۸۸۸} \dots \end{cases} \Rightarrow ۱۰۰۰A - ۱۰۰A = ۲۷۸ - ۲۷ \Rightarrow ۹۰۰A = ۲۵۱ \Rightarrow A = \frac{۲۵۱}{۹۰۰}$$

راه‌نیت۲ صورت کسر = عدد کل ارقام منهای عدد حاصل از ارقام ثابت

مخرج کسر = به تعداد ارقام گردشی ۹ و به تعداد ثابت‌ها صفر قرار می‌دهیم.

$$۰.\overline{۲۵۳} = \frac{۲۵۳-۲}{۹۹۰} \quad ۰.\overline{۲۴۶۷} = \frac{۲۴۶۷-۲۴۶}{۹۰۰۰}, \dots$$

مثال

۲۰ هر عدد که گویا نباشد گنگ می‌نامیم. اعداد گنگ را نمی‌توان به شکل کسر متعارفی نمایش داد. مثل $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ و ... و عدد p که همگی گنگ‌اند.

۲۱ اعداد گنگ نسبت به هیچ عملی بسته نیستند! ممکن است دو عدد گنگ را ضرب، جمع یا تفریق یا تقسیم کنیم حاصل عددی گویا شود، اگر باور ندارید مثال‌های زیر را ببینید:

$$\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۲ \quad (\text{ضرب}) \quad \sqrt{۲} - \sqrt{۲} = ۰ \quad (\text{تفریق}) \quad \sqrt{۲} + (-\sqrt{۲}) = ۰ \quad (\text{جمع}) \quad \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱ \quad (\text{تقسیم})$$

۲۲ اگر a گویا و b گنگ باشد، آن‌گاه $a+b$ حتماً گنگ است.

۲۳ اگر a گویا و غیرصفر و b گنگ باشد، ab حتماً گنگ است.

۲۴ حاصل جمع هر عدد مثبت با معکوسش بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

$$x > ۰ \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq ۲$$

$$x < ۰ \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -۲$$

و حاصل جمع هر عدد منفی با معکوسش کوچک‌تر یا مساوی -۲ است.

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq ۰ \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geq ۰$$

$$\Rightarrow x - 1 + \frac{1}{x} - 1 \geq ۰ \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq ۲$$

اولی را اثبات می‌کنم:

۲۵ اگر چند عدد گویا مساوی باشند، صورت همگی را جمع بزنیم و در صورت کسری بنویسیم و مخرج‌ها را جمع زده در مخرج بنویسیم عدد گویای به دست آمده با آن‌ها مساوی است.

$$A = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots \Rightarrow \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = A$$

۲۶ محاسبه‌ی سری‌های نامتناهی به شکل مقابل، اگر مجموع یک سری اعداد را بخواهیم حساب کنیم با ۲ شرط زیر روش زیر قابل استفاده است:

۱ تعداد جملات نامتناهی باشد.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

۲ عددی ثابت مثل q در عدد قبلی ضرب می‌شود و عدد بعدی به دست می‌آید. این عدد باید بین ۱ و -۱ باشد.

$$(-1 < q < 1)$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$2A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \Rightarrow 2A = 1 + A \Rightarrow \boxed{A=1}$$

مثال



بخش اول: شناخت اعداد گویا، خواص، چهار عمل اصلی و ...

۴۱- اگر x عددی گویا باشد و $\frac{-6}{5} < x \leq \sqrt{5}$ باشد، x کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (المپیاد منطقه ۹ با تغییر)
- (۱) $2/005$ (۲) 5 (۳) $-1/21$ (۴) $-\frac{6}{5}$

۴۲- می‌گوییم مجموعه‌ای نسبت به عمل تفریق بسته است، هرگاه هر دو عضو آن را از هم تفریق کنیم، حاصل به همان مجموعه متعلق باشد. کدام یک نسبت به عمل تفریق بسته نیست؟

- (مقیار ۷۹)
- (۱) \mathbb{R} (۲) \mathbb{Q} (۳) \mathbb{Z} (۴) \mathbb{N}

۴۳- کدام جمله‌ی زیر صحیح نیست؟

- (انرژی اتمی ۸۱)
- (۱) تمام اعداد صحیح، یا زوج هستند یا فرد
(۲) تمام اعداد طبیعی یا زوج هستند یا فرد
(۳) تمام اعداد اول، یا زوج هستند یا فرد
(۴) تمام اعداد گویا، یا زوج هستند یا فرد

۴۴- می‌دانید که مجموع دو عدد گویا، یک عدد گویای دیگر است. اگر این مجموع را نصف کنیم، باز هم گویاست. با توجه به این مطلب، کدام گزینه‌ی زیر صحیح است؟

- (تیزهوشان ۸۴)
- (۱) بین دو عدد گویا، فقط یک عدد گویا وجود دارد.
(۲) بین دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.
(۳) بین دو عدد گویا، فقط دو عدد گویا وجود دارد.
(۴) بین دو عدد گویا، فقط ۴ عدد گویا وجود دارد.

۴۵- چندتا از اعداد مقابل گویا هستند؟

- (علامه طباطبائی ۷۸)
- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5
- $\sqrt{2}, \pi, \sqrt{4}, \frac{2}{3}, 0, \sqrt{(\sqrt{3})^2}$

۴۶- اگر x عددی گنگ و y گویا باشد، کدام عبارت می‌تواند صحیح نباشد؟ ($x, y \neq 0$)

- (۱) $x + y$ گنگ است.
(۲) $\frac{y}{x}$ گنگ است.
(۳) xy^2 گنگ است.
(۴) yx^2 گنگ است.

(تیزهوشان ۸۵)

۴۷- کدام یک از جمله‌های زیر نادرست است؟

(۱) بین دو عدد $\frac{1}{100}$ و $\frac{1}{10}$ تعداد بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

(۲) بین دو عدد $\frac{1}{100}$ و $\frac{1}{10}$ تعداد بی‌شمار عدد صحیح وجود دارد.

(۳) بین دو عدد $\frac{1}{100}$ و $\frac{1}{10}$ هیچ عدد طبیعی وجود ندارد.

(۴) بین دو عدد $\frac{1}{100}$ و $\frac{1}{10}$ فقط یک عدد صحیح وجود دارد.

(پیشرفت تحصیلی تیزهوشان ۹۲)

۴۸- کدام گزاره همواره درست است؟

(۱) حاصل جمع دو عدد گنگ مثبت، گنگ است.

(۳) حاصل جذر یک عدد گنگ مثبت، گنگ است.

۴۹- k چه مقدارهایی می‌تواند باشد تا عدد $\frac{k\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}}$ عددی گویا شود؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۳) $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$

(آزمون سنجه ۹۰)

۵۰- به ازای چند عدد گویای غیر صفر q ، حاصل $q + \frac{1385}{q}$ عددی صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸ (۵) ۱۰

(تیزهوشان ۹۰)

۵۱- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد، کدام رابطه‌ی زیر درست است؟

- (۱) $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c+d}{c-d}$ (۲) $\frac{c+d}{c-d} = \frac{a-b}{a+b}$ (۳) $\frac{2a+3c}{2b+2d} = \frac{c}{d}$ (۴) $\frac{ab}{cd} = \frac{cd}{ab}$

(نمونه دولتی ۹۰)

۵۲- اگر $0 < \frac{a}{b} < 1$ باشد، کدام گزینه همواره بزرگ‌تر از ۱ خواهد بود؟

- (۱) $\frac{a-b}{b-a}$ (۲) $\frac{b}{a}$ (۳) $\frac{a+1}{b+1}$ (۴) $-\frac{b}{a}$

بخش دوم: محاسبات، تقدم عمليات‌ها، مقایسه‌ی اعداد گویا

(کاتگورو ۲۰۰۲)

۵۳- کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟

- (۱) $100 \times 0.01 \times 100$ (۲) $100 \div 0.01$ (۳) $100 \div 0.01$ (۴) $10000 \times 100 \div 10$ (۵) $0.01 \times 0.01 \times 10000$

(المپیاد استرالیا ۲۰۰۷)

۵۴- در بین گزینه‌های زیر کدام کسر بزرگ‌ترین است؟

- (۱) $\frac{7}{15}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{6}{11}$ (۴) $\frac{4}{9}$ (۵) $\frac{1}{2}$

(المپیاد استرالیا ۲۰۰۸)

۵۵- کدام کسر به $\frac{2}{5}$ نزدیک‌تر است؟

- (۱) $\frac{399}{1000}$ (۲) $\frac{199}{500}$ (۳) $\frac{41}{100}$ (۴) $\frac{21}{50}$ (۵) $\frac{39}{100}$

(آزمون سئمه ۹۰)

۵۶- حاصل عبارت $5^{-1} + 1 - \frac{1}{5} \left[3\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) \right]$ برابر است با:

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{10}{17}$ (۴) $-\frac{11}{20}$ (۵) $\frac{3}{4}$

(تیزهوشان ۷۷)

۵۷- حاصل عبارت $\frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}$ برابر است با:

- (۱) $2\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{26}{5}$ (۳) صفر (۴) ۱

(علامه طباطبایی ۹۲)

۵۸- حاصل عبارت $\frac{1}{9} \left[2^3 - 3^3 \left(3^2 - 3^2 (2^3 - 3^2)^{-1} \right)^{-1} \right]$ برابر است با:

- (۱) ۸۶ (۲) ۴ (۳) $\frac{67}{7}$ (۴) $\frac{68}{81}$

(نمونه دولتی ۸۵)

۵۹- حاصل $3 - 3 \left[\frac{3}{4} (1-3)^2 - (24 \div 2) + 6 \right]$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) صفر (۴) ۳۰

(نمونه دولتی ۸۶ - علامه طباطبایی ۷۸)

۶۰- حاصل عبارت $1 + \frac{99}{100} + \dots + \frac{3}{100} + \frac{2}{100} + \frac{1}{100}$ برابر است با:

- (۱) ۵۰ (۲) $50 \div 5$ (۳) ۵۰۵ (۴) ۵۰۵۰

(علامه طباطبایی ۸۶)

۶۱- اگر $1 + \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{k}{55}$ باشد، کدام است؟

- (۱) ۰/۱ (۲) ۱/۱ (۳) ۱/۰۱ (۴) ۰/۰۱

(انرژی اتمی ۸۵)

۶۲- حاصل عبارت $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} \times \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} \times \dots \times \frac{\frac{1}{48} - \frac{1}{49}}{\frac{1}{49} - \frac{1}{50}}$ کدام است؟

- (۱) ۰/۰۴ (۲) ۱ (۳) ۲۵ (۴) ۴۹

(علامه طباطبایی ۹۲)

۶۳- حاصل عبارت $\frac{1/0.1 - \frac{1}{5}}{3\frac{1}{2} - 0/8} \times \frac{3-0/24}{1-0/31}$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $-\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{5}{6}$

(تیزهوشان ۹۰)

۶۴- اگر $\frac{x}{y} \div \frac{e}{f} = 1$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\left(\frac{f}{e} \times \frac{x}{y}\right)^{10000}}{\left(\frac{y}{x} \times \frac{e}{f}\right)^{10000}}$ کدام است؟

- (۱) 10^4 (۲) 10^{-2} (۳) 10^{-4} (۴) 10^2

۶۵- کسر $\frac{1+2+3+\dots+154}{1+2+3+\dots+308}$ مفروض است. اگر در صورت کسر اعداد زوج و در مخرج کسر اعداد فرد را قرینه کنیم، حاصل

(تیزهوشان ۹۲)

کسر جدید کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

(کانونگورو ۲۰۰۳)

۶۶- حاصل $\left(1+\frac{1}{2}\right) \times \left(1+\frac{1}{3}\right) \times \left(1+\frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1+\frac{1}{2003}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۲۰۰۴ (۲) ۲۰۰۳ (۳) ۲۰۰۲ (۴) ۱۰۰۲ (۵) ۱۰۰۱

(کانونگورو ۲۰۱۳)

۶۷- عدد $\frac{1}{1024000}$ چند رقم اعشار دارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴ (۵) ۱۰۲۴۰۰۰

(کانونگورو ۲۰۰۱)

۶۸- عبارت $1 - \frac{999 \dots 9}{999999999}$ (۱۸ رقم) برابر است با:

- (۱) 9^9 (۲) $9^9 - 1$ (۳) 9^{10} (۴) 10^9 (۵) 10^{10}

۶۹- مقدار عبارت $\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \left(1-\frac{1}{4^2}\right) \dots \times \left(1-\frac{1}{2001^2}\right)$ را به صورت کسری تحویل ناپذیر نوشته ایم. حاصل جمع

(کانونگورو ۲۰۰۱)

صورت و مخرج کسر کدام است؟

- (۱) ۲۰۰۱ (۲) ۳۰۰۲ (۳) ۴۰۰۳ (۴) ۵۰۰۲ (۵) ۶۰۰۱

(تیزهوشان کرمان ۸۲)

۷۰- حاصل $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{391} + \frac{1}{6} - 1392$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{393}$ (۲) ۱۳۹۲ (۳) $\frac{5}{6}$ ۱۳۹۲ (۴) ۱۳۹۳

(المپیاد آفریقای جنوبی ۲۰۰۱)

۷۱- حاصل کسر $\frac{10+20+30+\dots+400}{30+60+90+120+\dots+1200}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{30}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۵) $\frac{1}{3}$

(آفریقای جنوبی ۲۰۰۴ مرحله ۳)

۷۲- حاصل جمع زیر کدام است؟

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{99}{100}\right) = ?$$

- (۱) ۲۵۰۰ (۲) ۲۴۷۵ (۳) $\frac{2501}{2}$ (۴) $5050 \frac{1}{2}$ (۵) ۲۵۲۵

(علامه طباطبایی ۸۴)

۷۳- حاصل عبارت $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}\right)$ کدام است؟

(۴) $\frac{199}{100}$

(لیگ علمی پایا)

۷۴- با توجه به اعداد زیر، کدام رابطه صحیح است؟

$A = \frac{1748329.77.13478}{478.9321741.4132}$

$B = \frac{1748329.77.134781387}{478.9321741.41321387}$

$C = \frac{1748329.77.134782.008}{4789321741.41322.008}$

$D = \frac{1748329.77.134782.008}{478.9321741.41321387}$

(۲) $A < B < C < D$

(۱) $A = B = C = D$

(۴) $A > D > B > C$

(۳) $A < C < B < D$

۷۵- اگر a عددی گویا بین صفر و -1 باشد، کوچک‌ترین عدد از بین اعداد $a^1, a^2, a^3, \dots, a^{100}$ کدام است؟

(پیشرفت تحصیلی تیزهوشان ۹۳) (۴) a^{100}

(۳) a^{99}

(۲) a^2

(۱) a

۷۶- اگر $A = 2009 + \frac{1}{2009 + \frac{1}{2009 + \frac{1}{2009}}}$ و $B = 2009 + \frac{1}{2009 + \frac{1}{2009}}$ و $C = 2009 + \frac{1}{2009}$ آن‌گاه کدام رابطه درست است؟

(۴) $B < C < A$

(۳) $C < A < B$

(۲) $C < B < A$

(۱) $A < B < C$

بخش سوم: نوشتن کسر بین دو کسر، کسرها را تسکویی، کسرها را مسلسل معمولی و...

(انرژی اتمی ۷۵)

۷۷- کدام عدد زیر بین اعداد $\frac{1}{100}$ و $\frac{1}{1000}$ قرار ندارد؟

(۴) $1/2 \times 10^{-3}$

(۳) 2×10^{-4}

(۲) $\frac{1}{250}$

(۱) $\frac{2}{\sqrt{1000000}}$

۷۸- بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ کسری می‌نویسیم که مخرج آن ۲۰ باشد، صورت این کسر کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۱۱

(۲) ۹

(۱) ۷

۷۹- بین دو کسر $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ می‌خواهیم ۱۱ کسر بنویسیم که فاصله‌ی متوالی بین هر دو کسر از بین ۱۳ کسر مساوی باشند در این صورت عدد ۳ باید در چند ضرب شود؟

(۴) ۴۵

(۳) ۶۰

(۲) ۵

(۱) ۱۲

(علامه طباطبایی ۸۱)

۸۰- حاصل کسر $2 \div \frac{2 + \frac{2+1}{2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2-1}}}}}{2 - \frac{1}{2-1}}$ برابر است با:

(۴) $\frac{7}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{2}{7}$

(۱) ۷

(ریوکاپ ۸۱)

۸۱- حاصل $A = \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \dots + \frac{1}{998 \times 1000}$ کدام است؟

(۴) $\frac{499}{250}$

(۳) $\frac{499}{2000}$

(۲) $\frac{499}{500}$

(۱) $\frac{499}{1000}$



۸۲- حاصل عبارت $\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} - \dots - \frac{1}{49 \times 50}$ در کدام گزینه‌ی زیر آمده است؟ (آفریقای جنوبی ۲۰۰۶ تیزهوشان)

(۱) صفر $\frac{1}{49}$ (۲) $\frac{1}{49}$ (۳) $\frac{1}{51}$

(۴) $\frac{1}{40}$ (۵) $\frac{1}{50}$

(انرژی اتمی ۷۹)

۸۳- حاصل $\frac{3}{1 \times 4} + \frac{5}{4 \times 9} + \frac{7}{9 \times 16} + \dots + \frac{19}{81 \times 100}$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{100}$ (۲) $\frac{99}{100}$ (۳) $\frac{1}{99}$ (۴) $\frac{98}{99}$



۸۴- حاصل عبارت زیر در کدام گزینه آمده است؟

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+100} = ?$$

(۱) $\frac{100}{101}$ (۲) $\frac{200}{101}$ (۳) $\frac{1}{101}$ (۴) $\frac{50}{101}$



۸۵- کسر $\frac{53}{17}$ می‌تواند به شکل $3 + \frac{1}{x + \frac{1}{y}}$ نیز نوشته شود. اگر x و y اعدادی طبیعی باشند، حاصل عبارت $x+y$ کدام است؟

(آفریقای جنوبی ۲۰۰۳)

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

بخش چهارم : مسئله

۸۶- پدری می‌تواند معادل دو فرزند خود کار کند. اگر یکی از آن‌ها کاری را در ۸ ساعت و دیگری همان کار را در ۶ ساعت انجام دهد. پدر در چند ساعت همان کار را انجام می‌دهد؟ (تیزهوشان ۸۲)

(۱) $3\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{7}{24}$ (۳) ۷ (۴) ۱۴



۸۷- کاری را افشین و محمد در $\frac{4}{5}$ روز، محمد و شهرام با هم در $\frac{2}{3}$ روز و شهرام و افشین با هم در $\frac{4}{7}$ روز می‌توانند انجام دهند.

(مفید ۸۳)

اگر افشین، محمد و شهرام هر سه نفر با هم کار کنند، کار در چه کسری از روز تمام خواهد شد؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{4}{9}$



۸۸- شیرهای A، B، C و D به تنهایی یک استخر خالی را به ترتیب در ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ دقیقه پر می‌کنند، اگر در ابتدا شیرهای

(آزمون سنه ۹۰)

C و D به مدت ۲۰ دقیقه باز شوند، بقیه‌ی استخر در چند دقیقه پر می‌شود؟

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) $5\frac{1}{3}$

۸۹- از مجموع دانش‌آموزان یک کلاس، نصف آن‌ها مشغول مطالعه‌ی ریاضی و یک‌چهارم آن‌ها مشغول مطالعه‌ی فیزیک و یک‌هفتم آن‌ها مشغول مطالعه‌ی شیمی و سه نفر نیز غایب هستند. تعداد کل دانش‌آموزان کلاس بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟ (تیزهوشان ۸۵)

(۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۵



۹۰- زهرا و مریم روی هم ۱۰۴۰۰ تومان پول داشتند. پس از آن‌که زهرا $\frac{1}{4}$ پول خود و مریم $\frac{1}{6}$ پول خود را خرج کردند، پول

(تیزهوشان ۹۰)

زهرا دو برابر پول مریم شد. پول زهرا چه قدر است؟

(۱) ۲۴۰۰ (۲) ۴۵۰۰ (۳) ۸۰۰۰ (۴) ۷۵۰۰

۹۱- در کیسه‌ای ۳۱ آب‌نبات ریخته بودیم. تعداد آب‌نبات‌هایی که مریم در روز اول خورد، $\frac{3}{4}$ تعداد آب‌نبات‌هایی بود که پرهام در همان روز خورده بود. روز بعد آب‌نبات‌هایی که مریم خورد $\frac{2}{3}$ تعداد آب‌نبات‌هایی بود که پرهام در همان روز خورد و آب‌نبات‌ها تمام شد. مریم چندتا آب‌نبات خورده است؟

(کانون گورو ۲۰۰۱)

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴ (۵)

۹۲- یک ویروس کامپیوتری در روز اول $\frac{1}{3}$ حافظه‌ی کامپیوتر را از بین می‌برد. روز دوم $\frac{1}{3}$ حافظه‌ی باقی‌مانده را و روز سوم $\frac{1}{4}$ حافظه‌ی باقی‌مانده را که پس از ۲ روز مانده است و روز چهارم $\frac{1}{5}$ بقیه‌ی حافظه را. پس از ۴ روز چه کسری از حافظه باقی‌مانده است؟

(کانون گورو ۲۰۰۲)

- ۱ (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{12}$ (۵) $\frac{1}{24}$

۹۳- وقتی آب یخ می‌زند، حجمش $\frac{1}{10}$ بیشتر می‌شود، وقتی یخ آب می‌شود، چه کسری از حجمش کم می‌شود؟

(کانون گورو ۲۰۰۲)

- ۱ (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{11}$ (۴) $\frac{1}{13}$ (۵) $\frac{1}{9}$

۹۴- مقداری آب درون ظرفی موجود است. ابتدا ۲۰٪ آب را خالی می‌کنیم، سپس معادل آب باقی‌مانده به آن اضافه می‌کنیم، از نتیجه مقدار خاصی را کم می‌کنیم. اگر $\frac{1}{3}$ آب باقی‌مانده را خارج کنیم، $\frac{76}{8}$ ٪ آب اولیه در ظرف می‌ماند، مقدار خاصی را که در مرحله‌ی سوم کم کرده‌ایم، چند درصد آب موجود در ظرف بوده است؟

(انرژی اتمی ۸۴)

- ۸۹/۶٪ (۱) ۳۲/۲٪ (۲) ۲۲/۴٪ (۳) ۴۴/۸٪ (۴)

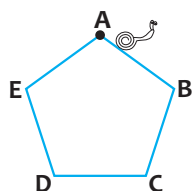
۹۵- حقوق احمد آقا هر سال $\frac{1}{6}$ برابر می‌شود و قیمت هر سکه‌ی طلا هر سال $\frac{1}{2}$ برابر قیمت سال قبلش می‌شود. اگر امسال احمد آقا با همه‌ی حقوقش بتواند ۵۴ سکه‌ی طلا بخرد، چهار سال بعد با همه‌ی حقوقش حداکثر چند سکه‌ی طلا می‌تواند بخرد؟

(تیزهوشان ۸۵)

- ۱۵۰ (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴)

۹۶- حلزون از A آغاز به حرکت کرده است و به صورت ساعت‌گرد در یک ۵ ضلعی منتظم می‌خزد. وقتی $\frac{13}{2}$ محیط را طی کرده باشد، روی کدام ضلع است؟

(المپیاد استرالیا ۲۰۰۴)



- AB (۱) BC (۲) CD (۳) DE (۴) EA (۵)

بخش پنجم: سؤالات ترکیبی، خلاقیتی

(علامه طباطبائی ۹۱)

۹۷- اگر a عددی گویا باشد و $a > 1$ ، کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ (۱) $1 < \frac{a-1}{2a} < a$ (۲) $1 < \frac{a}{a-1} < a$ (۳) $1 < \frac{2a}{a+1} < a$ (۴) $1 < \frac{a+1}{2a} < a$



۹۸- از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ... و ۲۰۰۴، دو عدد D و ∇ را انتخاب کرده‌ایم، بیشترین مقدار $\frac{\Delta + \nabla}{\Delta - \nabla}$ کدام است؟

(المپیاد استرالیا ۲۰۰۵)

(۳) ۲۰۰۵

(۲) ۲۰۰۲

(۱) ۴۰۰۰

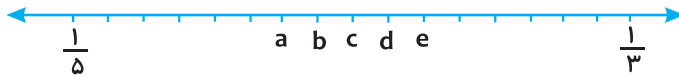
(۵) ۴۰۰۷

(۴) ۴۰۰۸



۹۹- کسرهای $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ را روی محور اعداد نشان داده‌ایم. کدام حرف نمایشگر کسر $\frac{1}{4}$ است؟

(کانگورو ۲۰۰۹)



(۲) b

(۱) a

(۴) d

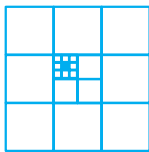
(۳) c

(۵) e

(کانگورو ۲۰۰۸)

۱۰۰- مربع بزرگ که مساحتش ۱ است طبق شکل به مربع‌های کوچک‌تری تقسیم شده است. مساحت

مربع کوچک سیاه چه قدر است؟



(۳) $\frac{1}{162}$

(۲) $\frac{1}{108}$

(۱) $\frac{1}{18}$

(۵) $\frac{1}{1000}$

(۴) $\frac{1}{324}$

* در شکل زیر الگویی برای کشیدن مارپیچ می‌بینید. عدد کنار هر شکل بیانگر نسبت سطح رنگی به سطح سفیدرنگ در آن شکل

(تیزهوشان ۸۶ مرحله‌ی ۲)

است. با توجه به الگو، سؤال ۱۰۱ را پاسخ دهید.



۱۰۱- اگر کشیدن این مارپیچ‌ها را طبق الگو ادامه دهیم، نسبت سطح رنگی به سطح سیاه در شکل بیستم برابر است با:

(۴) $\frac{119}{39}$

(۳) $\frac{125}{41}$

(۲) $\frac{119}{41}$

(۱) $\frac{125}{39}$



۱۰۲- در کسر $\frac{1?1?1}{2?1?1}$ به جای هر علامت سؤال می‌توان علامت تفریق (-) یا ضرب (x) قرار داد. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین

(تیزهوشان ۸۶)

عدد به دست آمده کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$



۱۰۳- اگر b و c اعداد طبیعی باشند، به طوری که $\frac{c}{15}$ و $\frac{c}{b}$ و $\frac{b}{11}$ بین اعداد $\frac{18}{10}$ و $\frac{15}{10}$ باشند، بیشترین مقدار $b + c$ کدام است؟

(آزمون سئو ۹۰)

(۳) ۴۵

(۲) ۴۴

(۱) ۴۳

(۵) ۵۰

(۴) ۴۶

* با توجه به جدول زیر به دو پرسش صفحه‌ی بعد پاسخ دهید.

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
جمله	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$...

۱۰۴ - $\frac{1}{12}$ چندمین کسر است؟

(المپیاد آلمان)

- ۵۳ (۱) ۵۴ (۲) ۵۶ (۳) ۵۵ (۴)

۱۰۵ - سید و پنجاه و ششمین (۳۵۶ امین) کسر کدام است؟

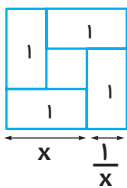
(المپیاد آلمان)

- ۱ (۱) $\frac{1}{28}$ (۲) $\frac{5}{28}$ (۳) $\frac{5}{27}$ (۴)

۱۰۶ - اگر a ، b و c سه عدد طبیعی باشند و $a < b$ باشد، کدام کسر حتماً از $\frac{a}{b}$ بزرگ‌تر است؟ (آزمون پیشرفت تحصیلی تیزهوشان ۹۲)

- ۱ (۱) $\frac{a-c}{b-c}$ (۲) $\frac{a+c}{b+c}$ (۳) $\frac{a+c}{b \times c}$ (۴)

(تیزهوشان ۸۳)



۱۰۷ - با توجه به شکل زیر کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ (۱) حاصل ضرب هر عدد در عکس خودش، مساوی ۱ است.
۲ (۲) حاصل جمع هر عدد با عکس خودش، حداقل ۲ است.
۳ (۳) حاصل ضرب هر عدد در خودش، همیشه کوچک‌تر از ۲ است.
۴ (۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۱۰۸ - بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b برابر ۱ است، می‌دانیم که دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{a+14}{b+35}$ با هم برابرند. در این صورت کدام گزینه درباره‌ی مجموع $a+b$ درست است؟

(تیزهوشان ۸۵)

- ۱ (۱) بر ۷ قابل قسمت است.
۲ (۲) زوج است.
۳ (۳) بر ۳ قابل قسمت است.
۴ (۴) بر ۵ قابل قسمت است.

۱۰۹ - اعداد $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ و $\frac{1}{100}$ را به ترتیب روی تخته نوشته‌ایم. دو عدد ابتدایی را انتخاب کرده a و b می‌نامیم و به جای

دو عدد a و b ، عبارت $a+b+ab$ را می‌نویسیم و این حاصل را با عدد بعدی در نظر گرفته و به جای این‌ها همان عبارت را به دست

آمده را می‌نویسیم. با تکرار این عملیات پس از ۹۹ بار، فقط یک عدد روی تخته می‌ماند، آن عدد کدام است؟ (المپیاد آلمان)

- ۱ (۱) ۱۰۰ ۲ (۲) ۱۰۱ ۳ (۳) $1 - \frac{1}{n!}$ ۴ (۴) نامشخص

۱۱۰ - تعدادی ماهی در یک استخر بزرگ مشغول شنا هستند و تعداد آن‌ها را با x مشخص کرده‌ایم. اگر $\frac{x}{x+1} < \frac{2004}{2005}$ باشد،

(المپیاد ریاضی آمریکا)

تعداد ماهی‌ها حداکثر کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۳) ۵ (۲) ۷ (۴)



۱۱۱ - جفت‌هایی از اعداد صحیح مثبت را در نظر بگیرید که مجموعشان از 10^3 بزرگ‌تر نباشد و حاصل تقسیم‌شان کوچک‌تر از

(کاتگورو ۲۰۰۹)

$\frac{1}{3}$ باشد. بزرگ‌ترین حاصل تقسیم چنین جفتی از اعداد برابر است با:

- ۱ (۱) $\frac{27}{77}$ ۲ (۲) $\frac{26}{77}$ ۳ (۳) $\frac{25}{76}$ ۴ (۴) $\frac{25}{77}$



۱۱۲- دنباله‌ای a_n ($n \geq 0$) با $a_0 = 4$ ، $a_1 = 6$ و $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ (به ازای $n \geq 1$) تعریف شده است. کدام است a_{1999} ؟ (کنگورو ۱۹۹۸)

- (۱) ۴ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۶ (۴) ۲۴ (۵) ۲۹۹۷



۱۱۳- به جای * در $1/1$ چند صفر قرار دهیم که عدد به دست آمده از $\frac{2009}{2008}$ کم‌تر باشد و از $\frac{2009}{2008}$ بیشتر باشد؟ (کنگورو ۲۰۰۹)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۶



۱۱۴- چند سه‌تایی مرتب از اعداد طبیعی مثل (x, y, z) در رابطه‌ی $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ صدق می‌کنند؟ (المپیاد ریاضی بلغارستان)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۰ (۵) بی‌شمار



۱۱۵- اگر x و y از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ۵ و ۱۰ انتخاب شوند، بیشترین مقدار $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ کدام است؟ (کنگورو ۲۰۰۸)

- (۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) $10/1$ (۴) $12/5$ (۵) ۲۰



۱۱۶- حاصل عبارت $\frac{2 \times 4 \times 8 + 4 \times 4 \times 888 + 1776 + 888 \times 1776 + 3552}{8 + 222 \times 444 + 888 + 444 \times 888 + 1776}$ برابر است با: (تیزهوشان قم ۹۲)

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲



۱۱۷- m و n دو عدد طبیعی‌اند و نسبت به هم اول‌اند و $\frac{m}{n} = \frac{707}{909} \times \frac{2020}{1414}$ ، آن‌گاه $m+n$ برابر است با: (المپیاد تهران - روی‌کاپ ۸۸)

- (۱) ۱۹۱۹ (۲) ۱۹ (۳) ۱۱۰۹ (۴) ۳۸



۱۱۸- به ازای کدام عدد طبیعی n تساوی $\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n} = \frac{115}{116}$ برقرار است؟ (المپیاد بلغارستان)

- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۱۶ (۴) ۲۳۱

(۵) هیچ m ی وجود ندارد.



۱۱۹- حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{16}\right) = ?$

- (۱) $\frac{1573}{1680}$ (۲) $\frac{1583}{1680}$ (۳) $\frac{1483}{1680}$ (۴) $\frac{1473}{1680}$

۱۲۰- این اعداد از کوچک به بزرگ مرتب شده‌اند (چپ به راست): $\frac{1}{p}, b, a, \frac{1}{q}$ فاصله‌ی هر دو عدد متوالی مقداری یکسان است.

(آفریقایی جنوبی ۲۰۰۲)

مقدار b کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{7}{18}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{5}{6}$ (۵) $\frac{1}{4}$



۱۲۱- در رابطه‌ی $M = \frac{10n}{1+2n}$ ، n, M عدد صحیح مثبت است. اگر n زیاد شود، M :

- (۱) کاهش می‌یابد. (۲) افزایش می‌یابد. (۳) تغییر نمی‌کند.

- (۴) ابتدا افزایش سپس کاهش می‌یابد. (۵) ابتدا کاهش سپس افزایش می‌یابد.

(آفریقای جنوبی ۲۰۰۷)

۱۲۲- ۴ عدد a, b, c و d را در نظر بگیرید:

• b از a به اندازه $\frac{1}{5}$ بزرگ تر است.

• d از a به اندازه $\frac{1}{3}$ بزرگ تر است.

اگر $a + b + c + d = 9\frac{1}{15}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- | | | |
|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) |
| ۴ (۴) | ۵ (۵) | |

۱۲۳- عددی طبیعی را از صورت کسر $\frac{8}{11}$ کم می کنیم. همان عدد را از مخرج هم کم می کنیم. اگر پاسخ کسر $\frac{2}{3}$ شود، عدد

(آفریقای جنوبی ۲۰۰۳ مرحله ۲)

کم شده کدام است؟

- | | | |
|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) |
| ۴ (۴) | ۵ (۵) | |

(آفریقای جنوبی ۲۰۰۳ مرحله ۲)

۱۲۴- اگر n عددی طبیعی باشد، حداکثر چند مقدار صحیح از نسبت $\frac{100}{2n-1}$ به دست می آید؟

- | | | |
|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) |
| ۳ (۴) | ۵ (۵) | |

(آفریقای جنوبی ۲۰۰۵ مرحله ۲)

۱۲۵- اگر $-6 < x < 10$ ، $-2 < y < -\frac{1}{2}$ و نیز $a < \frac{x}{y} < b$ باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟

- | | | |
|------------|------------|-----------|
| ۱ (۱) صفر | ۲ (۲) -۵۰ | ۳ (۳) -۶۰ |
| ۴ (۴) -۱۲۰ | ۵ (۵) -۲۴۰ | |

۱۲۶- x, y و z سه رقم متفاوت اند که از بین ارقام ۱ تا ۹ انتخاب می شوند و عدد سه رقمی xyz را می سازند. مثلاً ۲، ۶ و ۴ عدد

(آفریقای جنوبی ۲۰۰۳ مرحله ۳)

۲۶۴ را می سازند. کم ترین مقدار عبارت $\frac{xyz}{x+y+z}$ کدام است؟

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------|-------------------------|
| ۱ (۱) $10\frac{1}{2}$ | ۲ (۲) $11\frac{1}{3}$ | ۳ (۳) ۳۷ | ۴ (۴) $\frac{119}{111}$ |
|-----------------------|-----------------------|----------|-------------------------|

$$A = \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \dots + \frac{1}{2.0}$$

(تألیفی)

$$\frac{1}{2} < A < 1 \quad (۲)$$

$$\frac{1}{200} < A < \frac{1}{50} \quad (۴)$$

$$B = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6} + \dots + \frac{61}{60} \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{60}{61} \right)$$

$$30 < B < 90 \quad (۲)$$

$$60 < B < 65 \quad (۴)$$

۱۲۷- در مورد کسر مقابل کدام گزینه درست تر است؟

$$0 < A < \frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$A > 1 \quad (۳)$$

۱۲۸- دقیق ترین عبارت در مورد B کدام است؟

$$60 < B < 120 \quad (۱)$$

$$60 < B < 76 \quad (۳)$$

۱۲۹- حاصل عبارت روبه رو کدام است؟

$$\left(1 + 1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{2}{20} + \frac{1}{400}\right) = ?$$

$$\frac{561}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{441}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{440}{9} \quad (۲)$$

$$10/5 \quad (۱)$$