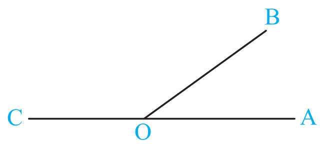
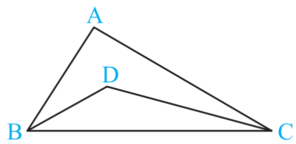
۱۲. دو زاویه را مجانب می‌گوییم هرگاه در رأس مشترک بوده و مجموع آن‌ها تشکیل یک زاویه‌ی نیم‌صفحه بدهد. (مانند دو زاویه‌ی AOB و COB در شکل) ثابت کنید نیمسازهای دو زاویه‌ی مجانب بر هم عمودند.



۱۳☆. با توجه به شکل، ثابت کنید اگر نیمسازهای داخلی زوایای B و C از مثلث ABC همدیگر را در D قطع کنند، آن‌گاه: $B\widehat{D}C = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\widehat{A}$ *(راهنمای حل)*



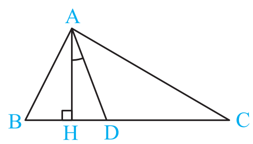
۱۴☆. ثابت کنید در مثلث دلخواه ABC زاویه‌ی بین نیمساز داخلی رأس A و نیمساز خارجی رأس B برابر است با $\frac{۱}{۲}\widehat{C}$. *(راهنمای حل)*

۱۵☆. الف) ثابت کنید در هر مثلث، نیمسازهای داخلی و خارجی یک زاویه بر هم عمودند.

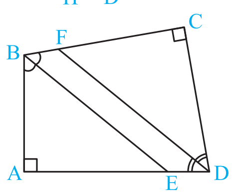
ب) اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $\widehat{B} - \widehat{C} = \beta$، اندازه‌ی زاویه‌ای را که نیمساز خارجی زاویه‌ی A با BC می‌سازد، برحسب β بیابید.

۱۶☆. در مثلث ABC، AH و AD به‌ترتیب ارتفاع و نیمساز نظیر رأس A هستند.

ثابت کنید: $H\widehat{A}D = \frac{۱}{۲}|\widehat{B} - \widehat{C}|$ *(راهنمای حل)*



۱۷. مطابق شکل، زوایای A و C از چهارضلعی ABCD قائمه‌اند. ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌های B و D با هم موازیند.



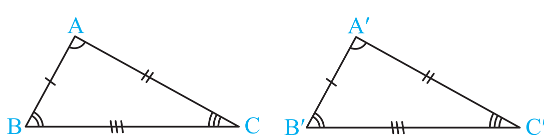
درسنامه ۲

همنهشتی

دو شکل را **همنهشت** می‌گوییم، هرگاه کاملاً بتوان آن‌ها را بر هم منطبق کرد.

تعریف دو n ضلعی را **همنهشت** می‌گوییم هرگاه تناظر یک‌به‌یک بین رأس‌های آن‌ها برقرار باشد، به‌طوری که اضلاع متناظر با هم و زاویه‌های متناظر نیز با هم برابر باشند.

تعریف دو مثلث ABC و A′B′C′ را همنهشت می‌گوییم و می‌نویسیم: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$، هرگاه شش شرط زیر برقرار باشند:



$$\widehat{A} = \widehat{A'}\ ,\ \widehat{B} = \widehat{B'}\ ,\ \widehat{C} = \widehat{C'}$$

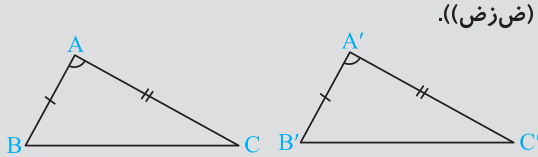
$$AB = A'B'\ ,\ AC = A'C'\ ,\ BC = B'C'$$

توجه در طرفین نماد همنهشتی، ترتیب نوشتن رئوس مثلث‌ها دارای اهمیت است. زیرا وقتی می‌نویسیم $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ به معنای آن است که رأس A با A′، رأس B با B′ و رأس C با C′ در تناظر قرار دارد.

مثلث‌های همنهشت

دو مثلث ABC و A′B′C′ به حالت‌های زیر ممکن است با هم همنهشت باشند:

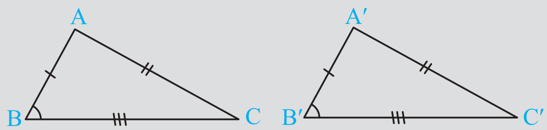
حالت (ض‌زض): اگر دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند (ملاک همنهشتی برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین (ض‌زض)).



$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

درسنامه

حالت (ض‌ض‌ض): هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشد، آن دو مثلث همنهشت‌اند (ملاک همنهشتی برابری سه ضلع (ض‌ض‌ض)).

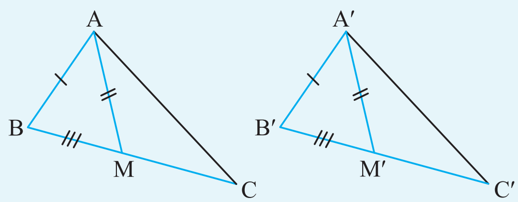


$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مثال ۳

ثابت کنید اگر دو ضلع و میانه‌ی نظیر یکی از آن دو ضلع در دو مثلث نظیر به نظیر مساوی باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند.

☑ پاسخ: فرض کنید در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته باشیم: $AB = A'B'$ و $BC = B'C'$ و طول میانه‌های نظیر BC و $B'C'$ هم برابر باشند، یعنی: $AM = A'M'$. چون $BC = B'C'$ و BM و $B'M'$ هم هر کدام نصف BC و $B'C'$ هستند؛ پس: $BM = B'M'$، در نتیجه دو مثلث ABM و $A'B'M'$ به حالت برابری سه ضلع همنهشت‌اند؛ بنابراین: $\hat{B} = \hat{B'}$ پس می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها همنهشت‌اند.



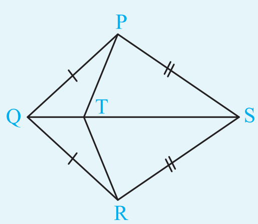
توجه در دو مثلث همنهشت، علاوه بر اضلاع و زوایا، تمام اجزای خطی متناظر، با هم برابرند، مانند میانه های نظیر، ارتفاع‌های نظیر، نیمسازهای نظیر. هم‌چنین محیط و مساحت‌های دو مثلث همنهشت با هم برابر هستند.

مثال ۴

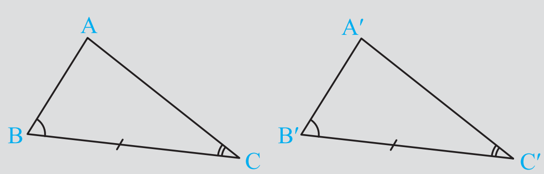
در چهارضلعی $PQRS$، $PQ = RQ$ و $PS = RS$. اگر T نقطه‌ی دلخواهی روی قطر QS باشد، ثابت کنید $PT = RT$

(تمرین کتاب درسی ـ صفحه‌ی ۲۴)

☑ پاسخ: دو مثلث PQS و RQS به حالت برابری سه ضلع همنهشت‌اند؛ زیرا $PQ = RQ$ و $PS = RS$ و $QS = QS$. در نتیجه: $P\hat{S}T = R\hat{S}T$. بنابراین دو مثلث PST و RST به حالت برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها همنهشت‌اند و در نتیجه: $PT = RT$



حالت (زض‌ز): هرگاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند (ملاک همنهشتی، دو زاویه و ضلع بین (زض‌ز)).

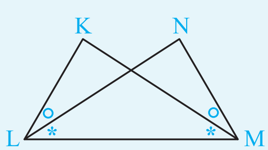


$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B'} \\ \hat{C} = \hat{C'} \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مثال ۵

در شکل مقابل ثابت کنید: $KL = NM$

(تمرین کتاب درسی ـ صفحه‌ی ۲۴)



☑ پاسخ: طبق فرض داریم: $K\hat{M}L = N\hat{L}M$ (۱) و $N\hat{M}K = K\hat{L}N$ (۲)

از جمع نظیر به نظیر طرفین برابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$K\hat{M}L + N\hat{M}K = N\hat{L}M + K\hat{L}N \Rightarrow N\hat{M}L = K\hat{L}M$$

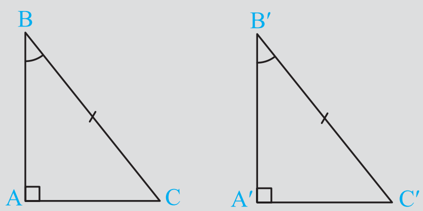
بنابراین در دو مثلث KLM و NML داریم: $ML = ML$ و $K\hat{L}M = N\hat{M}L$ و $K\hat{M}L = N\hat{L}M$

در نتیجه به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین آن‌ها: $\overset{\Delta}{KLM} \cong \overset{\Delta}{NML}$، در نتیجه $KL = NM$

درسنامه

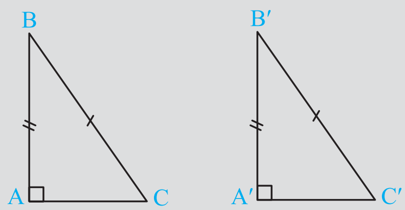
حالت‌های همنهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه

قضیه: اگر وتر و یک زاویه‌ی حاده از مثلث قائم الزاویه‌ای، با وتر و یک زاویه‌ی حاده از مثلث قائم الزاویه‌ی دیگر مساوی باشد آن دو مثلث همنهشت‌اند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A'}=۹۰^\circ \\ BC=B'C' \\ \hat{B}=\hat{B'}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

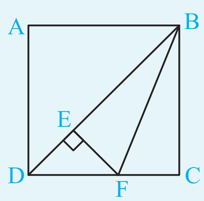
قضیه: اگر وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگر مساوی باشد، آن دو مثلث همنهشت‌اند.



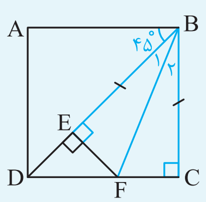
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A'}=۹۰^\circ \\ BC=B'C' \\ AB=A'B'\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مثال ۶

بر روی قطر BD از مربع ABCD نقطه‌ی E را طوری انتخاب کرده‌ایم که $BE = BC$ و از نقطه‌ی E عمودی بر BD رسم کرده‌ایم که DC را در F قطع کرده است. اندازه‌ی $A\hat{B}F$ چند درجه است؟



☑ پاسخ: دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BEF و BCF وتر مشترک دارند و یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن‌ها نیز با هم برابر است $(BE = BC)$. بنابراین: $\overset{\Delta}{BEF} \cong \overset{\Delta}{BCF}$، در نتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$، امّا چون BD قطر مربع است $\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۴۵^\circ$، در نتیجه اندازه‌ی هر کدام از زوایای $B_۱$ و $B_۲$ برابر $۲۲/۵^\circ$ است. داریم:

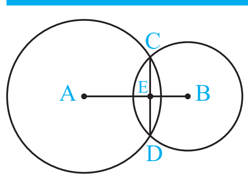


$$A\hat{B}F = A\hat{B}D + D\hat{B}F = A\hat{B}D + \hat{B}_۱ = ۴۵^\circ + ۲۲/۵^\circ = ۶۷/۵^\circ$$

۱۸.☆ دو دایره به مرکزهای A و B یک‌دیگر را در C و D قطع کرده‌اند.

الف) ثابت کنید: $A\hat{C}B = A\hat{D}B$

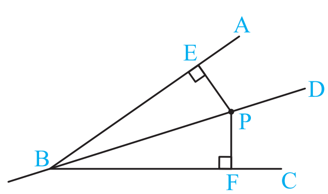
ب) ثابت کنید که AB عمودمنصف CD است. (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۶)



(تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۶)

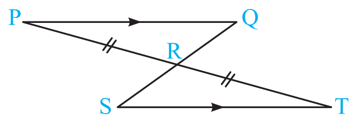
۱۹.☆ در چهارضلعی PQRS، $PQ = QR$ و قطر QS زاویه‌ی Q را نصف می‌کند. ثابت کنید: $PS = RS$

۲۰.☆ نشان دهید هر نقطه مانند P که در صفحه‌ی زاویه‌ی ABC روی نیمساز این زاویه واقع باشد از دو ضلع زاویه یعنی AB و BC به یک فاصله است و برعکس اگر نقطه‌ای از دو ضلع زاویه یعنی AB و BC به یک فاصله باشد، روی نیمساز $A\hat{B}C$ واقع است.



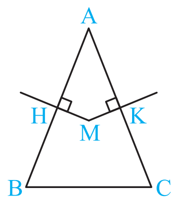
(تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۷ با تغییر)

۲۱. در مثلث ABC از رأس B عمودی بر نیمساز زاویه‌ی A رسم می‌کنیم. اگر امتداد این خط عمود، ضلع AC یا امتداد آن را در C' قطع کند، ثابت کنید مثلث ABC' متساوی‌الساقین است.

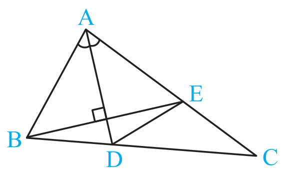


☆۲۲. اگر $PQ \parallel ST$ و R وسط PT باشد، ثابت کنید R وسط QS نیز هست.

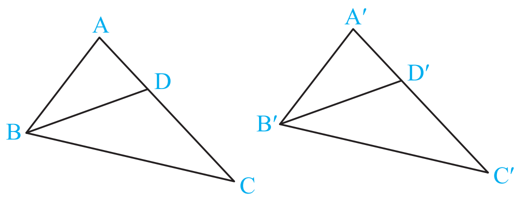
(تمرین کتاب درسی ـ صفحه‌ی ۲۴)



۲۳. در شکل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است $(AB = AC)$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث همدیگر را در نقطه‌ی M قطع کرده‌اند. ابتدا ثابت کنید $MH = MK$، سپس با فرض آن که $\widehat{A} = 30^\circ$، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه‌ی پنج‌ضلعی $BHMKC$ را بیابید. *(راهنمای حل)*

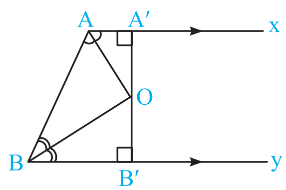


۲۴. در مثلث ABC داریم: $\widehat{A} = 80^\circ$ و $\widehat{C} = 40^\circ$. از رأس B عمودی بر نیمساز زاویه A، AD، رسم کرده و این عمود را امتداد می‌دهیم تا AC را در E قطع کند. اندازه‌ی $B\widehat{E}D$ چند درجه است؟

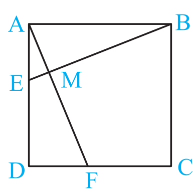


☆۲۵. هرگاه یک ضلع و یک زاویه‌ی مجاور به آن ضلع و نیمساز داخلی آن زاویه از مثلثی با همین اجزا از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، ثابت کنید آن دو مثلث همنهشت‌اند.

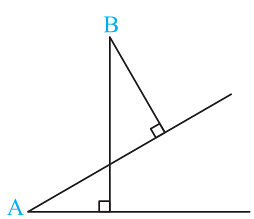
$$(AB = A'B' \text{ و } \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ و } BD = B'D' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'})$$



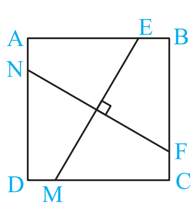
۲۶. دو نیم‌خط موازی Ax و By مفروض‌اند. نیمسازهای زوایای xAB و yBA در O یکدیگر را قطع کرده‌اند. از O عمودی بر Ax و By رسم می‌کنیم تا آن‌ها را به‌ترتیب در A' و B' قطع کند. ثابت کنید: $AA' + BB' = AB$ *(راهنمای حل)*



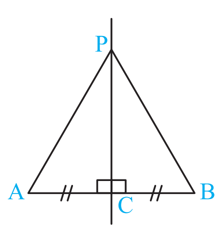
☆۲۷. نقاط E و F بر روی اضلاع AD و DC از مربع $ABCD$ طوری قرار گرفته‌اند که $AE = DF$. ثابت کنید: $A\widehat{M}B = 90^\circ$



۲۸. الف) مطابق شکل، اضلاع دو زاویه‌ی A و B نظیر به نظیر بر هم عمود هستند. ثابت کنید این دو زاویه با هم برابرند.

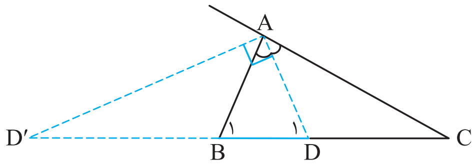


ب) مطابق شکل، دو خط عمود بر هم، اضلاع مربع $ABCD$ را در نقاط E، M، F و N قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $EM = FN$ *(راهنمای حل)*



☆۲۹. ثابت کنید هر نقطه‌ی P روی عمودمنصف پاره‌خط AB، از نقاط A و B به یک فاصله است.

(تمرین کتاب درسی ـ صفحه‌ی ۲۷)



ب) ابتدا نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A، در مثلث ABC را رسم می‌کنیم. محل برخورد نیمساز خارجی رأس A و امتداد ضلع BC را D' می‌نامیم. طبق قسمت (الف) دو خط AD و AD' بر هم عمودند.

$\hat{D}_1$ زاویه‌ی خارجی مثلث ADC است، در نتیجه:

$$\hat{D}_1 = \frac{1}{2}B\hat{A}C + \hat{C} \quad (1)$$

هم‌چنین در مثلث ADB داریم: $\hat{D}_1 + \hat{B}_1 + \frac{1}{2}B\hat{A}C = 180^\circ$ یا به‌طور معادل: $\hat{D}_1 = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \frac{1}{2}B\hat{A}C) \quad (2)$

از جمع طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

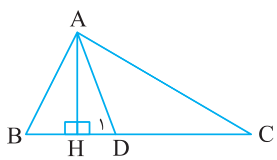
$$2\hat{D}_1 = 180^\circ - (\hat{B}_1 - \hat{C}) = 180^\circ - \beta \Rightarrow \hat{D}_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta \quad (3)$$

حال با استفاده‌ی مجدد از قضیه‌ی مجموع اندازه‌ی زاویه‌های داخلی مثلث، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADD' داریم:

$$\hat{D'} + \hat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{D'} = 90^\circ - \hat{D}_1 \xrightarrow{(3)} \hat{D'} = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\beta) = \frac{1}{2}\beta$$

---

۱۶ فرض کنیم در مثلث ABC، $\hat{B} > \hat{C}$. طبق قضیه‌ی مجموع زاویه‌های داخلی مثلث داریم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHD}: H\hat{A}D + \hat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow H\hat{A}D = 90^\circ - \hat{D}_1 \quad (1) \\ \overset{\Delta}{ABH}: B\hat{A}H + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow B\hat{A}H = 90^\circ - \hat{B} \quad (2) \end{cases}$$

ضمناً $\hat{D}_1$ زاویه‌ی خارجی مثلث ADC است، در نتیجه: $\hat{D}_1 = D\hat{A}C + \hat{C} \quad (3)$. با استفاده از روابط (۱) و (۳) می‌توان نوشت:

$$H\hat{A}D = 90^\circ - (D\hat{A}C + \hat{C}) \xrightarrow{D\hat{A}C = D\hat{A}B} H\hat{A}D = 90^\circ - (D\hat{A}B + \hat{C})$$

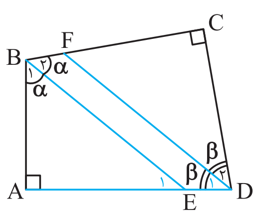
$$\Rightarrow H\hat{A}D = 90^\circ - D\hat{A}B - \hat{C} \Rightarrow H\hat{A}D = 90^\circ - (H\hat{A}D + B\hat{A}H) - \hat{C}$$

$$2H\hat{A}D = (90^\circ - B\hat{A}H) - \hat{C} \xrightarrow{\text{طبق}(2)} 2H\hat{A}D = \hat{B} - \hat{C} \Rightarrow H\hat{A}D = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$$

اگر $\hat{C} > \hat{B}$ به‌همین ترتیب ثابت می‌شود: $H\hat{A}D = \frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{B})$، بنابراین در حالت کلی: $H\hat{A}D = \frac{1}{2}|\hat{B} - \hat{C}|$

---

۱۷ در سؤال ۸، ثابت کردیم که مجموع اندازه زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است، بنابراین در چهارضلعی ABCD داریم:



$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \quad (1)$$

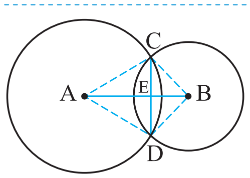
همچنین طبق قضیه‌ی مجموع اندازه‌ی زاویه‌های داخلی مثلث، در مثلث قائم‌الزاویه ABE داریم:

$$\hat{E}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{E}_1 = 90^\circ - \alpha \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $\hat{E}_1 = \beta = \hat{D}_1$. در نتیجه طبق قضیه‌ی خطوط موازی: $BE \parallel DF$

---

۱۸ الف) در دو مثلث ACB و ADB داریم:



AB = AB و شعاع دایره‌ی کوچک‌تر = BC = BD و شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر = AC = AD؛

بنابراین دو مثلث ACB و ADB به حالت برابری سه ضلع همنهشت‌اند، در نتیجه:

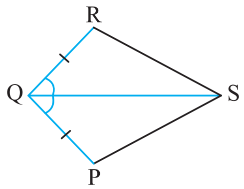
$$A\hat{C}B = A\hat{D}B$$

ب) از همنهشتی قسمت (الف) همچنین نتیجه می‌شود: $C\hat{A}E = D\hat{A}E$، پس در دو مثلث ACE و ADE هم داریم:

AC = AD و $C\hat{A}E = D\hat{A}E$ و AE = AE

پس دو مثلث ACE و ADE به حالت برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها همنهشت‌اند و در نتیجه: CE = DE (۱) و $A\hat{E}C = A\hat{E}D$ و چون $A\hat{E}C + A\hat{E}D = 180^\circ$ پس: $A\hat{E}C = A\hat{E}D = 90^\circ \quad (2)$. از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که AB عمودمنصف CD است.

۱۹ در دو مثلث QRS و QPS داریم:

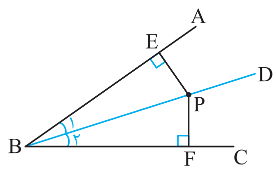


$$QR = QP \text{ و } R\hat{Q}S = P\hat{Q}S \text{ و } QS = QS$$

در نتیجه دو مثلث QRS و QPS به حالت برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها همنهشت‌اند، پس: $PS = RS$

---

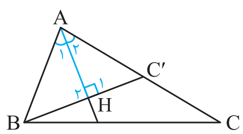
۲۰ ابتدا ثابت می‌کنیم اگر P روی نیمساز زاویه ABC واقع باشد، آن‌گاه از اضلاع AB و BC به یک فاصله است. فرض کنیم BD نیمساز زاویه‌ی ABC و P روی BD باشد، در این‌صورت دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی EBP و FBP به حالت برابری وتر و یک زاویه‌ی حاده همنهشت هستند، در نتیجه: $PE = PF$؛ یعنی نقطه‌ی P از اضلاع زاویه‌ی ABC به یک فاصله است. حال باید عکس گزاره‌ی فوق را نیز اثبات کنیم، یعنی نشان دهیم اگر نقطه‌ی P از اضلاع زاویه‌ی ABC به فاصله‌ی مساوی قرار داشته باشد $(PE = PF)$، آن‌گاه P روی نیمساز $A\hat{B}C$ است. در این حالت دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی EBP و FBP وتر مشترک داشته و یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن‌ها نیز مساوی است،

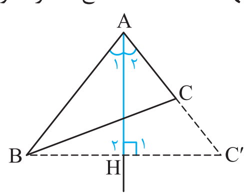


بنابراین: $\overset{\Delta}{FBP} \cong \overset{\Delta}{EBP}$ و در نتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$؛ یعنی PB نیمساز زاویه‌ی ABC است.

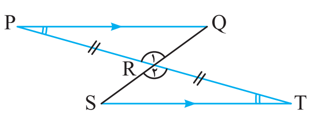
---

۲۱ مطابق شکل از رأس B عمود BH را بر نیمساز زاویه‌ی A رسم می‌کنیم. در هر دو حالت (چه امتداد این عمود خود ضلع AC و چه امتداد آن را قطع کند)، دو مثلث ABH و $AC'H$ به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین آن‌ها همنهشت‌اند (AH ضلع مشترک و $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$)،
در نتیجه: $AB = AC'$؛ یعنی مثلث ABC' متساوی‌الساقین است.





۲۲

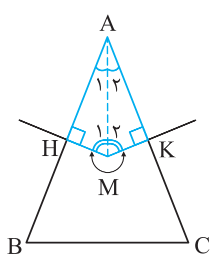


$$\left.\begin{array}{l} PQ \parallel ST \xrightarrow{\text{قضیه‌ی خطوط موازی}} \hat{P} = \hat{T} \\ \text{است } PT \text{ وسط } R \Rightarrow RP = RT \\ \text{متقابل به رأس‌اند } \hat{R}_۲, \hat{R}_۱ \Rightarrow \hat{R}_۱ = \hat{R}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{PQR} \cong \overset{\Delta}{TSR} \ (\text{زض}) \Rightarrow RQ = RS$$

پس R وسط QS است.

---

۲۳ **روش اول:** چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است طول ساق‌های آن با هم برابر است $(AB = AC)$. پس AH و AK نیز که هر کدام از آن‌ها نصف ساق مثلث ABC هستند با هم مساوی‌اند. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHM و AKM وتر مشترک داشته و طول یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن‌ها نیز با هم برابر است، پس: $\overset{\Delta}{AHM} \cong \overset{\Delta}{AKM}$
و در نتیجه $MH = MK$ و همچنین $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$. با توجه به فرض مسأله $(\hat{A} = ۳۰^\circ)$، پس داریم: $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۵^\circ$ و $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ - ۱۵^\circ = ۷۵^\circ$



بنابراین اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه‌ی پنج‌ضلعی $BHMKC$ برابر است با: $H\hat{M}K = ۳۶۰^\circ - (۲ \times ۷۵^\circ) = ۲۱۰^\circ$

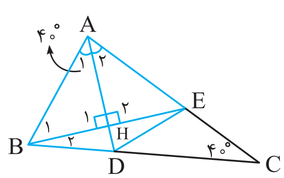
روش دوم: مجموع زوایای چهارضلعی $AHMK$، ۳۶۰° است، بنابراین:

$$\hat{A} + \hat{H} + \hat{K} + \hat{M} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳۰^\circ + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + \hat{M} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{M} = ۱۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow BHMKC \text{ بزرگ‌ترین زاویه‌ی پنج‌ضلعی } = ۳۶۰^\circ - \hat{M} = ۳۶۰^\circ - ۱۵۰^\circ = ۲۱۰^\circ$$

---

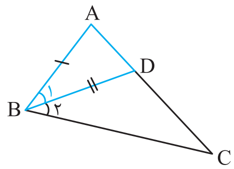
۲۴ اولاً طبق قضیه‌ی مجموع زاویه‌های داخلی در مثلث ABC داریم: $A\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۴۰^\circ) = ۶۰^\circ$

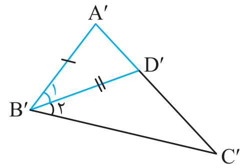


در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BAH اندازه‌ی $\hat{B}_۱$ برابر است با: $\hat{B}_۱ = ۹۰^\circ - \hat{A}_۱ = ۹۰^\circ - ۴۰^\circ = ۵۰^\circ$ و
با توجه به این‌که $\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۶۰^\circ$، داریم: $\hat{B}_۲ = ۱۰^\circ$
در دو مثلث ABH و AEH داریم: $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $AH = AH$ و $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$

بنابراین: (زض) $\overset{\Delta}{AEH} \cong \overset{\Delta}{ABH}$، در نتیجه $BH = EH$. پس دو مثلث BHD و EHD هم به حالت برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها همنهشت‌اند (DH ضلع مشترک و $B\hat{H}D = D\hat{H}E = ۹۰^\circ$ و $BH = EH$) و از آن‌جا داریم: $B\hat{E}D = \hat{B}_۲ = ۱۰^\circ$

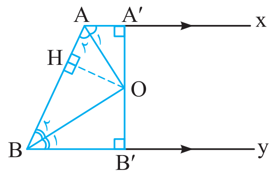
۲۵ چون $\widehat{B}=\widehat{B'}$ و BD و $B'D'$ نیز نیمساز زوایای B و B' هستند داریم: $\widehat{B}_1=\widehat{B'}_1$، بنابراین دو مثلث ABD و $A'B'D'$ به حالت برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها همنهشت‌اند $(\widehat{B}_1=\widehat{B'}_1, AB=A'B', BD=B'D')$، پس: $\widehat{A}=\widehat{A'}$ که از آن‌جا نتیجه می‌شود دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین آن‌ها همنهشت‌اند. $(\widehat{B}=\widehat{B'}\ ,\ AB=A'B'\ ,\ \widehat{A}=\widehat{A'})$





۲۶ از نقطه‌ی O عمود OH را بر AB رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH و OAA' وتر مشترک داشته و یک زاویه‌ی حاده‌ی آن‌ها نیز برابر است $(\widehat{A}_1=\widehat{A}_2)$.

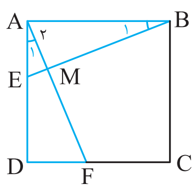
بنابراین: $\overset{\Delta}{OAH}\cong \overset{\Delta}{OAA'}$ و در نتیجه: $AH=AA'$ (۱). به همین ترتیب دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH و OBB' نیز به حالت برابری وتر و یک زاویه‌ی حاده همنهشت‌اند، درنتیجه داریم: $BH=BB'$ (۲). از جمع طرفین برابری‌های (۱) و (۲) داریم: $AH+BH=AA'+BB'\Rightarrow AB=AA'+BB'$



۲۷ در دو مثلث AEB و DFA داریم:

$AE=DF$ و $D\widehat{A}B=A\widehat{D}C=90^\circ$ و $AB=AD=$ طول ضلع مربع

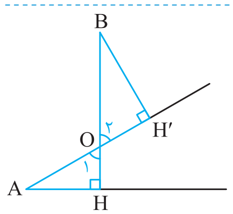
در نتیجه دو مثلث به حالت برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها همنهشت‌اند، پس $\widehat{A}_1=\widehat{B}_1$. ضمناً چون زاویه‌ی $D\widehat{A}B$ قائمه است، داریم: $\widehat{A}_1+\widehat{A}_2=90^\circ$ که با توجه به برابری $\widehat{A}_1$ و $\widehat{B}_1$ می‌توان نوشت: $\widehat{B}_1+\widehat{A}_2=90^\circ$؛ یعنی مجموع اندازه‌ی دو زاویه از مثلث AMB برابر 90° است. در نتیجه با توجه به قضیه‌ی مجموع زاویه‌های داخلی مثلث، زاویه‌ی سوم هم قائمه خواهد بود. یعنی: $A\widehat{M}B=90^\circ$



۲۸ **الف)** در دو مثلث OAH و OBH' با توجه به قضیه‌ی مجموع زاویه‌های داخلی مثلث می‌توان نوشت:

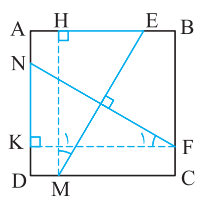
$\widehat{A}+\widehat{O}_1=90^\circ$ و $\widehat{B}+\widehat{O}_2=90^\circ$

که با توجه به برابری زوایای $\widehat{O}_1$ و $\widehat{O}_2$، نتیجه می‌شود: $\widehat{A}=\widehat{B}$



ب) از نقطه‌ی M خطی عمود بر AB رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. هم‌چنین از نقطه‌ی F خطی عمود بر AD رسم می‌کنیم و پای عمود را K می‌نامیم.

اضلاع دو زاویه‌ی F_1 و M_1 نظیر به نظیر بر هم عمودند. پس طبق آن چه در قسمت (الف) ثابت کردیم $\widehat{M}_1=\widehat{F}_1$، در نتیجه دو مثلث EMH و NFK به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین آن‌ها همنهشت‌اند. پس: $EM=NF$



۲۹ در دو مثلث PAC و PBC داریم:

$$\left.\begin{array}{l}AC=BC\\ A\widehat{C}P=B\widehat{C}P=90^\circ\\ PC=PC\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{PAC}\cong\overset{\Delta}{PBC}\ \text{(ض‌ز‌ض)}\Rightarrow PA=PB$$

۳۰ به درسنامه‌ی (۳) رجوع کنید.

۳۱ به درسنامه‌ی (۳) رجوع کنید.

۳۲ $\overset{\Delta}{PST}$ متساوی‌الاضلاع است. $\Rightarrow PT=PS$ (۲) ، $PQRS$ مربع است. $\Rightarrow PQ=PS$ (۱)

(۱) و (۲) $\Rightarrow PQ=PT\Rightarrow$ مثلث PQT متساوی‌الساقین است.