درســـنامه ۱

بازه‌ها و کاربرد آن‌ها در حل نامعادلات جبری

محور: محور $x'ox$ خط جهت‌داری است که روی آن نقطه‌ای به نام مبدأ (O) در نظر گرفته شده است.

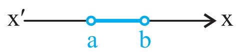
جهت مثبت محور از مبدأ به سمت راست و جهت منفی آن از مبدأ به سمت چپ می‌باشد.

بین نقاط روی محور و مجموعه‌ی اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ تناظر یک‌به‌یک وجود دارد؛ یعنی هر نقطه روی محور، یک عدد حقیقی را نشان می‌دهد و برعکس به هر عدد حقیقی، یک نقطه از محور را می‌توان نسبت داد. همواره مبدأ را نظیر عدد صفر در نظر می‌گیریم.

بازه‌ها (فاصله‌ها): زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی را که روی محور به وسیله‌ی نقاط چسبیده به هم، نشان داده می‌شوند بازه می‌گوییم. به‌طور کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و $a<b$ باشد، آن‌گاه:

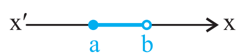
۱) مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از a و کوچک‌تر از b را بازه‌ی باز a و b می‌نامند و به صورت (a,b) نشان می‌دهند.

$$(a,b)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, a<x<b\}$$



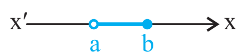
۲) از اجتماع بازه‌ی باز (a,b) و نقطه‌ی a، بازه‌ی نیم‌باز از راست (یا نیم‌بسته از چپ) به‌وجود می‌آید و به صورت $[a,b)$ نشان می‌دهند.

$$[a,b)=(a,b)\cup\{a\}=\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\le x<b\}$$



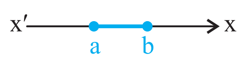
۳) از اجتماع بازه‌ی باز (a,b) و نقطه‌ی b، بازه‌ی نیم‌باز از چپ (یا نیم‌بسته از راست) به‌وجود می‌آید و به صورت $(a,b]$ نشان می‌دهند.

$$(a,b]=(a,b)\cup\{b\}=\{x \mid x\in\mathbb{R}, a<x\le b\}$$



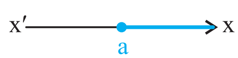
۴) از اجتماع بازه‌ی باز (a,b) و دو نقطه‌ی a و b، بازه‌ی بسته‌ی a و b به‌وجود می‌آید و به صورت $[a,b]$ نشان می‌دهند.

$$[a,b]=(a,b)\cup\{a,b\}=\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\le x\le b\}$$

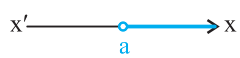


۵) بازه‌های بی‌کران را به شکل زیر تعریف کرده و نمایش می‌دهیم:

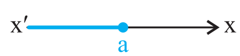
$$[a,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\ge a\}$$



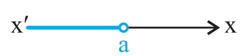
$$(a,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x>a\}$$



$$(-\infty,a]=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\le a\}$$



$$(-\infty,a)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x<a\}$$



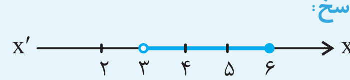
مثال ۱

مجموعه‌های زیر را به وسیله‌ی بازه نمایش داده و روی محور مشخص کنید.

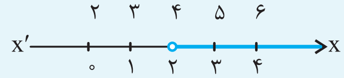
آ) $A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, ۳<x\le ۶\}$ ب) $B=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x>۲\}$

پ) $C=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\le -۱\}$ ت) $D=\{x \mid x\in\mathbb{R}, -۴<x<-۱\}$

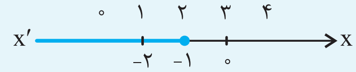
☑ پاسخ:

آ) 

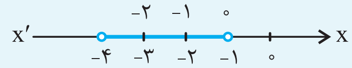
$A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, ۳<x\le ۶\}\Rightarrow A=(۳,۶]$

ب) 

$B=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x>۲\}\Rightarrow B=(۲,+\infty)$

پ) 

$C=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\le -۱\}\Rightarrow C=(-\infty,-۱]$

ت) 

$D=\{x \mid x\in\mathbb{R}, -۴<x<-۱\}\Rightarrow D=(-۴,-۱)$

درسنامه

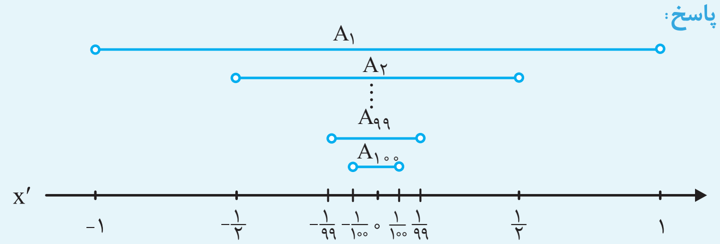
مثال ۲

فرض کنید $A_1=(-1,1), A_2=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\dots,A_{100}=(-\frac{1}{100},\frac{1}{100})$؛

آ) اجتماع بازه‌های A_1، A_2، ... و A_{100} را پیدا کنید.

ب) اشتراک بازه‌های A_1، A_2، ... و A_{100} را پیدا کنید.

☑ پاسخ:



$$\begin{cases}\frac{1}{100}<\frac{1}{99}<\dots<1\\ -\frac{1}{100}>-\frac{1}{99}>\dots>-1\end{cases}$$

$$A_{100}\subset A_{99}\subset\dots\subset A_2\subset A_1$$

آ) $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_{100}=A_1=(-1,1)$

ب) $A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{100}=A_{100}=(-\frac{1}{100},\frac{1}{100})$

توجه $-\infty$ و $+\infty$ عدد نیستند، لذا جای مشخصی روی محورها نداشته و از آن‌ها در نمایش برخی بازه‌های باز یا نیم‌باز استفاده می‌کنیم.

هم‌چنین می‌توان نوشت: $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

به کمک نمایش بازه‌ای می‌توان مجموعه جواب نامعادلات، نتیجه‌ی جدول تعیین علامت عبارات جبری و دامنه‌ی تعریف توابع را به‌طور خلاصه نوشت.

نامعادله

نامساوی با یک یا چند مجهول را نامعادله می‌نامیم. فرم کلی نامعادلات درجه‌ی اول به صورت $ax+b\ge c$ یا $ax+b\le c$ می‌باشد.

هم‌چنین نامعادله به صورت $c'\le ax+b\le c$ را نامعادله‌ی توأم می‌نامند.

برای حل نامعادله‌ی توأم به فرم $c'\le ax+b\le c$، ابتدا به طرفین نامساوی، قرینه‌ی مقدار ثابت b را اضافه می‌کنیم تا به فرم $c'-b\le ax\le c-b$ تبدیل شود. سپس طرفین نامساوی را بر عدد a (ضریب x) تقسیم می‌کنیم. لازم به ذکر است که اگر $a>0$ باشد، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند، اما اگر $a<0$ باشد، جهت نامساوی برعکس می‌شود.

مثال ۳

مجموعه جواب نامعادله‌ی $7\le 1-3x<19$ را تعیین کرده و به صورت بازه نشان دهید.

$7\le 1-3x<19$

(نهایی- خرداد ۸۳)

☑ پاسخ:

به طرفین نامعادله عدد (-1) را اضافه می‌کنیم:

$$7+(-1)\le 1-3x+(-1)<19+(-1)\Rightarrow 6\le -3x<18$$

طرفین نامعادله را بر (-3) یا همان ضریب x تقسیم می‌کنیم. با توجه به این‌که $-3<0$ می‌باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\frac{6}{-3}\ge\frac{-3x}{-3}>\frac{18}{-3}\Rightarrow -2\ge x>-6$$

حال می‌توان مجموعه جواب را به صورت زیر نوشت:

مجموعه جواب : $-6<x\le -2\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-6,-2]$

۱. حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک بازه نشان داده و جواب را روی محور نمایش دهید. (نهایی- خرداد ۸۲)

آ) $(-\infty,۳)\cup(-۱,۳]$

ب) $(-۲,۱]\cap[-۱,۲)$

۲. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}|-۱<x<۳\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>۰\}$ باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cap B$ تعریف شده‌اند مشخص کنید. (نهایی- دی ۸۹)

۳. مجموعه جواب نامعادله‌ی $-۱\leq\frac{۳x-۱}{۴}<۲$ را تعیین و جواب را بر روی محور نمایش دهید. (نهایی- خرداد ۸۶)

۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $-۲\leq\frac{-۳x+۴}{۴}+۳<۱$ را به صورت بازه بنویسید. (نهایی- دی ۸۷)

۵. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲\leq x\leq ۴\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>۲\}$ باشند، $A\cup B$ و $A\cap B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید. (نهایی- دی ۹۰)

۶. اگر $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\,-۲\leq\frac{x}{۲}-۱<۲\}$ و $B=[۰,۷)$ باشد، حاصل $A\cap B$ را روی محور نمایش دهید.

۷. نامعادله‌ی $\frac{|۲x-۱|}{۳}>۱$ را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید. (نهایی- خرداد ۸۷)

۸. اگر $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\,\frac{|x-۲|}{۳}\leq\frac{۱}{۲}\}$ و $B=[۰,۳)$ باشد، حاصل $A\cap B$ را به صورت بازه بنویسید. (نهایی- خرداد ۸۹)

۹. اگر $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\,-۱\leq x<۲\}$، $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\,x\leq ۱\}$ و $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\,x\geq ۰\}$ باشند، حاصل $(A\cap B)\cup C$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید. (نهایی- شهریور ۸۶)

۱۰. اگر $A=(-۳,۲]$، $B=(۰,+\infty)$ و $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,-۴<۲x-۶\leq ۰\}$ باشند، حاصل $(A\cap B)\cup C$ را به صورت بازه بنویسید. (نهایی- شهریور ۸۸)

۱۱. اگر $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},x^۲-۴\leq ۰\}$ و $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},\frac{-۳}{۲}\leq ۱-\frac{x}{۲}<۲\}$ باشد:

آ) A و B را به صورت بازه نمایش دهید.

ب) $A\cap B$ را به صورت بازه و روی محور نشان دهید.

۱۲. اگر $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\,-۱<\frac{x-۱}{۳}<۲\}$ و $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\,|x+۱|\leq ۲\}$ باشد، $A\cap B$ و $A\cup B$ را به صورت بازه بنویسید. (نهایی- خرداد ۸۸)

۱۳. اگر $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},-۳\leq x<۳\}$ و $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},-۱<x\leq ۴\}$ باشد، حاصل $(A'\cup B')'$ را به صورت بازه و روی محور نمایش دهید.

۱۴. نامعادله‌ی $x-۲<x+۱\leq ۲x-۱$ را حل کرده و مجموعه جواب را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

درسنامه ۲

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

کسرهایی را که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامیم. برای مثال عبارت‌های $\frac{۲x}{x+۵}-\frac{x+۲}{x-۱}$، $۳x-\frac{۱}{x+۳}$ و $\frac{۲x^{۲}+x-۱}{x+۲}$ عبارت‌های گویا هستند.

دامنه‌ی عبارت‌های جبری گویا

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی یک عبارت جبری گویا، ابتدا مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم تا با حل یک معادله، ریشه‌های مخرج به‌دست آید، حال اگر از مجموعه‌ی اعداد حقیقی، ریشه‌های مخرج را حذف کنیم، دامنه‌ی عبارت جبری گویا به‌دست می‌آید. یعنی:

$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

مثال ۴

دامنه‌ی عبارت‌های گویای زیر را به دست آورید.

آ) $\frac{۲x^{۲}+۱}{x^{۲}-۳x+۲}$ ب) $\frac{۳}{x-۱}-\frac{۱}{x+۲}$ پ) $\frac{۲x+۱}{x^{۳}+۴x^{۲}+۳x}$ ت) $\frac{۳x^{۲}}{x^{۲}-۴}+\frac{x^{۳}+۲x}{x(x+۱)}$

☑ پاسخ:

آ) $\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^{۲}-۳x+۲=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x-۲=۰\Rightarrow x=۲\end{cases}\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۱,۲\}$

ب) $\text{مخرج‌ها}=۰\Rightarrow\begin{cases}x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۲,۱\}$

پ) $x^{۳}+۴x^{۲}+۳x=۰\Rightarrow x(x^{۲}+۴x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^{۲}+۴x+۳=۰\Rightarrow(x+۱)(x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=-۳\end{cases}\end{cases}$

$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۳,-۱,۰\}$

ت) $\begin{cases}x(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\end{cases}\\ x^{۲}-۴=۰\Rightarrow(x-۲)(x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x=-۲\end{cases}\end{cases}\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۲,-۱,۰,۲\}$

تذکر در پیدا کردن دامنه‌ی عبارت‌های گویا، بدون ساده کردن کسرها دامنه را می‌یابیم. چون در غیر این صورت ممکن است بعضی از ریشه‌های مخرج حذف شوند و در نتیجه آن‌ها را جزء دامنه حساب کنیم.

حل معادلات شامل عبارت‌های گویا

برای حل این معادله‌ها مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب (دامنه‌ی متغیر) معادله را که همان دامنه‌ی عبارت‌های گویای معادله است، به‌دست می‌آوریم.

مرحله‌ی دوم: همه‌ی عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله انتقال می‌دهیم.

مرحله‌ی سوم: با مخرج مشترک گرفتن، معادله را ساده و آن را به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}=۰$ تبدیل می‌کنیم، در این حالت، چون کسر برابر صفر است، پس صورت آن برابر صفر می‌باشد.

مرحله‌ی چهارم: با حل معادله‌ی $P(x)=۰$ ریشه‌های معادله را می‌یابیم. در این حالت ریشه‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی جواب معادله قرار داشته باشند.

درسنامه

یادآوری مخرج مشترک‌گیری بین عبارت‌های جبری گویا را یادآوری می‌کنیم:

* مخرج مشترک بین دو یا چند کسر، همان «کوچک‌ترین مضرب مشترک» بین مخرج‌های آن‌ها است. برای محاسبه‌ی ک.م.م بین مخرج کسرها، ابتدا مخرج هر کسر را در صورت امکان تجزیه می‌کنیم، سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۵

حاصل‌جمع‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\dfrac{۱}{x^۲+۳x+۲}+\dfrac{۴}{x^۲+x}$ ب) $\dfrac{x-۱}{x^۶-۱}+\dfrac{۳}{x^۴-۱}+\dfrac{۲x+۳}{x^۲-۱}$

پاسخ:

آ)
$$\frac{۴}{x^۲+x}+\frac{۱}{x^۲+۳x+۲}=\frac{۴}{x(x+۱)}+\frac{۱}{(x+۱)(x+۲)}\overset{\text{مخرج مشترک}}{=\!=\!=}\frac{۴(x+۲)}{x(x+۱)(x+۲)}+\frac{x}{x(x+۱)(x+۲)}$$
$$=\frac{۴x+۸+x}{x(x+۱)(x+۲)}=\frac{۵x+۸}{x(x+۱)(x+۲)}$$

ب)
$$\frac{۲x+۳}{x^۲-۱}+\frac{۳}{x^۴-۱}+\frac{x-۱}{x^۶-۱}=\frac{۲x+۳}{(x+۱)(x-۱)}+\frac{۳}{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}+\frac{x-۱}{(x^۳-۱)(x^۳+۱)}$$
$$=\frac{۲x+۳}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{۳}{(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)}+\frac{x-۱}{(x-۱)(x^۲+x+۱)(x+۱)(x^۲-x+۱)}$$
$$\overset{\text{مخرج مشترک}}{=\!=\!=}\frac{(۲x+۳)(x^۲+۱)(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)+۳(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)+(x-۱)(x^۲+۱)}{(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)}$$

مثال ۶

هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید.

آ) $\dfrac{x+۱}{x+۳}=\dfrac{x-۲}{x-۴}$

ب) $۵=\dfrac{۲x+۵}{x+۳}+\dfrac{۳x-۲}{x}$ (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۸- شماره‌ی ۳)

پ) $\dfrac{۵}{۵x^۲-x-۲۰}=\dfrac{۳}{۳x^۲-۳x-۲۸}$ (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۸- شماره‌ی ۸)

پاسخ:

آ)
$$\frac{x-۲}{x-۴}=\frac{x+۱}{x+۳}$$

مرحله‌ی اول: تعیین دامنه‌ی متغیر:

$$\begin{cases}x-۴=۰\Rightarrow x=۴\\ x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\end{cases}\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۳,۴\}$$

مرحله‌ی دوم: همه‌ی عبارات جبری را به یک طرف معادله می‌بریم:

$$\frac{x-۲}{x-۴}-\frac{x+۱}{x+۳}=۰$$

مرحله‌ی سوم: مخرج مشترک می‌گیریم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x-۲)(x+۳)-(x+۱)(x-۴)}{(x-۴)(x+۳)}=۰\Rightarrow\frac{\cancel{x^۲}+x-۶-\cancel{x^۲}+۳x+۴}{(x-۴)(x+۳)}=۰\Rightarrow\frac{۴x-۲}{(x-۴)(x+۳)}=۰$$

مرحله‌ی چهارم: یک کسر وقتی برابر صفر است که صورت آن صفر باشد. بنابراین داریم:

$$۴x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\in D\ \text{قابل قبول}$$

درسنامه

ب)

$$\frac{3x-2}{x}+\frac{2x+5}{x+3}=5$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-3,0\}$$

$$\frac{3x-2}{x}+\frac{2x+5}{x+3}-5=0 \Rightarrow \frac{(x+3)(3x-2)+x(2x+5)-5x(x+3)}{x(x+3)}=0 \Rightarrow \frac{3x^2+7x-6+2x^2+5x-5x^2-15x}{x(x+3)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-6}{x(x+3)}=0 \Rightarrow -3x-6=0 \Rightarrow x=-2\in D \ \text{قابل قبول}$$

پ)

$$\frac{3}{3x^2-3x-28}=\frac{5}{5x^2-x-20}$$

$$\begin{cases} 3x^2-3x-28=0 \xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{a=3,b=-3,c=-28} \Delta=345 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{345}}{6} \\ 5x^2-x-20=0 \xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{a=5,b=-1,c=-20} \Delta=401 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{401}}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{\frac{3\pm\sqrt{345}}{6},\frac{1\pm\sqrt{401}}{10}\}$$

$$\frac{3}{3x^2-3x-28}-\frac{5}{5x^2-x-20}=0 \Rightarrow \frac{3(5x^2-x-20)-5(3x^2-3x-28)}{(3x^2-3x-28)(5x^2-x-20)}=0$$

$$\Rightarrow \cancel{15x^2}-3x-60-\cancel{15x^2}+15x+140=0 \Rightarrow 12x+80=0 \Rightarrow x=-\frac{20}{3}\in D \ \text{قابل قبول}$$

ـ در سؤالات ۱۵ و ۱۶ ابتدا دامنه‌ی متغیر معادلات را تعیین و سپس آن‌ها را حل کنید.

۱۵. $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}-\frac{1+x}{x}=\frac{x-1}{x-2}$ (مثال کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۷- شماره‌ی ۲)

۱۶. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=3x(1-\frac{x-1}{x+1})$ (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۸- شماره‌ی ۶)

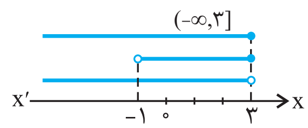
۱۷. معادله‌ی $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{x-2}{x+1}$ را حل کنید. (نهایی- شهریور ۹۱ و ۹۰)

۱۸. به ازای چه مقدار a معادله‌ی $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{x}{a-x}$ دارای جواب $x=2$ است؟ $(a\neq 2)$ (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۸- شماره‌ی ۹)

۱۹. به ازای چه مقدار k معادله‌ی $\frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}=\frac{4-t}{2-2t}$ دارای مجموعه جواب $\{-3\}$ می‌باشد؟ (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۸- شماره‌ی ۱۰)

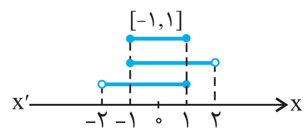
پاسخ پرسش های فصل ۲

۱ آ)



$(-\infty,۳)\cup(-۱,۳]=(-\infty,۳]$

ب)



$(-۲,۱]\cap[-۱,۲)=[-۱,۱]$

---

۲ $A=(-۱,۳), B=(۰,+\infty)\Rightarrow A\cup B=(-۱,+\infty) \quad , \quad A\cap B=(۰,۳)$

---

۳ $-۱\le\frac{۳x-۱}{۴}<۲\xrightarrow{\times ۴}-۴\le ۳x-۱<۸\xrightarrow{+۱}-۳\le ۳x<۹\xrightarrow{\div ۳>۰}-۱\le x<۳$

---

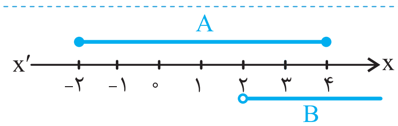
۴ $-۲\le\frac{-۳x+۴}{۴}+۳<۱\xrightarrow{\times ۴}-۸\le -۳x+۴+۱۲<۴\Rightarrow -۸\le -۳x+۱۶<۴$

$\xrightarrow{+(-۱۶)}-۲۴\le -۳x<-۱۲\xrightarrow{\div(-۳)<۰}۸\ge x>۴\Rightarrow x\in(۴,۸]$

---

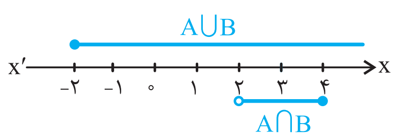
۵ $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\le x\le ۴\}=[-۲,۴]$

$B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۲\}=(۲,+\infty)$



$A\cup B=[-۲,۴]\cup(۲,+\infty)=[-۲,+\infty)$

$A\cap B=[-۲,۴]\cap(۲,+\infty)=(۲,۴]$

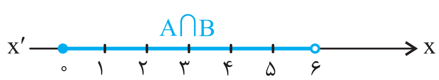


---

۶ $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}\ ,\ -۲\le\frac{x}{۲}-۱<۲\}\ ,\ B=[۰,۷)$

$A:-۲\le\frac{x}{۲}-۱<۲\xrightarrow{\times ۲}-۴\le x-۲<۴\xrightarrow{+۲}-۲\le x<۶\Rightarrow A=[-۲,۶)$

$A\cap B=[-۲,۶)\cap[۰,۷)=[۰,۶)$



---

۷ $\frac{|۲x-۱|}{۳}<۱\xrightarrow{\times ۳}|۲x-۱|<۳\xrightarrow{|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a}-۳<۲x-۱<۳\xrightarrow{+۱}-۲<۲x<۴\xrightarrow{\div ۲>۰}-۱<x<۲$

$\Rightarrow x\in(-۱,۲)$

---

۸ $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}\ ,\ \frac{|x-۲|}{۳}\le\frac{۱}{۲}\}\ ,\ B=[۰,۳)$

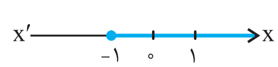
$A:\frac{|x-۲|}{۳}\le\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۳}|x-۲|\le\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{۳}{۲}\le x-۲\le\frac{۳}{۲}\xrightarrow{+۲}۲-\frac{۳}{۲}\le x-\cancel{۲}+\cancel{۲}\le ۲+\frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow\frac{۱}{۲}\le x\le\frac{۷}{۲}\Rightarrow A\cap B=[\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲}]\cap[۰,۳)=[\frac{۱}{۲},۳)$

---

۹ $A=[-۱,۲)\ ,\ B=(-\infty,۱]\ ,\ C=[۰,+\infty)$

$(A\cap B)\cup C=([-۱,۲)\cap(-\infty,۱])\cup[۰,+\infty)=[-۱,۱]\cup[۰,+\infty)=[-۱,+\infty)$



فصل دوم | تابع

۱۰

$C: -۴ < ۲x-۶ \le ۰ \xrightarrow{+۶} ۲ < ۲x \le ۶ \xrightarrow{\div ۲} ۱ < x \le ۳ \Rightarrow C=(۱,۳]$

$A\cap B=(-۳,۲]\cap(۰,+\infty)=(۰,۲]$

$\Rightarrow (A\cap B)\cup C=(۰,۲]\cup(۱,۳]=(۰,۳]$

۱۱

آ) **روش اول:**

$A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x^۲-۴\le ۰\}$

$x^۲-۴\le۰ \xrightarrow[\text{تعیین علامت می‌کنیم.}]{\text{عبارت } x^۲-۴ \text{ را}} x^۲-۴=۰\Rightarrow (x-۲)(x+۲)=۰\Rightarrow x=\pm۲$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$x^۲-۴$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow A=[-۲,۲]$

روش دوم: نکته

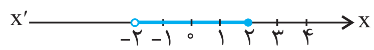
$x^۲\le a^۲ \Leftrightarrow |x|\le a \xleftrightarrow{a>۰} -a\le x\le a$

$x^۲-۴\le۰\Rightarrow x^۲\le۴ \xrightarrow{\text{با توجه به نکته}} |x|\le۲\Rightarrow -۲\le x\le۲\Rightarrow A=[-۲,۲]$

$B=\{x\mid x\in\mathbb{R}, \frac{-۳}{۲}\le ۱-\frac{x}{۲}<۲\}$

$\frac{-۳}{۲}\le ۱-\frac{x}{۲}<۲ \xrightarrow{\times۲>۰} -۳\le ۲-x<۴ \xrightarrow{+(-۲)} -۵\le -x<۲ \xrightarrow{\times(-۱)<۰} ۵\ge x>-۲\Rightarrow B=(-۲,۵]$

ب) $A\cap B=[-۲,۲]\cap(-۲,۵]=(-۲,۲]$

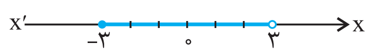


۱۲

$$\begin{cases} A: -۱<\frac{x-۱}{۳}<۲ \xrightarrow{\times۳} -۳<x-۱<۶ \xrightarrow{+۱} -۲<x<۷\Rightarrow A=(-۲,۷) \\ B: |x+۱|\le۲\Rightarrow -۲\le x+۱\le۲ \xrightarrow{+(-۱)} -۳\le x\le۱\Rightarrow B=[-۳,۱] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cap B=(-۲,۱] \\ A\cup B=[-۳,۷) \end{cases}$$

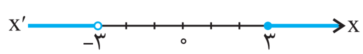
۱۳

مجموعه‌ی A: $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}, -۳\le x<۳\}=[-۳,۳)$

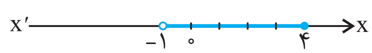


A' مجموعه‌ای است که عضوهای آن در $\mathbb{R}$ هستند امّا در A نیستند، لذا:

مجموعه‌ی A': $A'=(-\infty,-۳)\cup[۳,+\infty)$

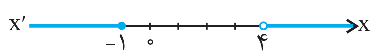


مجموعه‌ی B: $B=\{x\mid x\in\mathbb{R}, -۱<x\le۴\}=(-۱,۴]$



B' مجموعه‌ای است که عضوهای آن در $\mathbb{R}$ هستند امّا در B نیستند، لذا:

مجموعه‌ی B': $B'=(-\infty,-۱]\cup(۴,+\infty)$

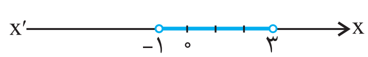


حال که A' و B' مشخص شدند، ابتدا اجتماع آن‌ها را تعیین نموده و سپس متمم آن را می‌یابیم:

$A'\cup B'=(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$

$(A'\cup B')'$ مجموعه‌ای است که عضوهای آن در $\mathbb{R}$ هستند اما در $A'\cup B'$ نیستند. لذا:

$(A'\cup B')'=(-۱,۳)$



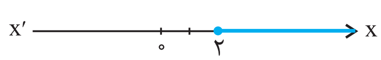
۱۴

$x-۲<x+۱\le۲x-۱$

چون متغیر در هر سه طرف نامساوی‌ها موجود می‌باشد، ابتدا نامعادله را به صورت $\begin{cases} x-۲<x+۱ \\ x+۱\le۲x-۱\end{cases}$ نوشته و مجموعه جواب هر نامعادله را تعیین کرده؛ سپس اشتراک آن‌ها را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x-۲<x+۱\Rightarrow x-x<۱+۲\Rightarrow ۰<۳ \xrightarrow{\text{به ازای هر مقدار } x \text{ نامساوی درست است.}} x\in\mathbb{R} \\ x+۱\le۲x-۱\Rightarrow x-۲x\le-۱-۱\Rightarrow -x\le-۲ \xrightarrow{\div(-۱)<۰} x\ge۲\Rightarrow x\in[۲,+\infty) \end{cases}$$

مجموعه جواب $=\mathbb{R}\cap[۲,+\infty) = [۲,+\infty)$



۱۵

$$\frac{x^{2}-2x+2}{x^{2}-2x}-\frac{1+x}{x}=\frac{x-1}{x-2}$$

$$\begin{cases} x^{2}-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=2 \\ x=0 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{0,2\}$$

$$\frac{x^{2}-2x+2}{x(x-2)}-\frac{1+x}{x}-\frac{x-1}{x-2}=0 \Rightarrow \frac{x^{2}-2x+2-(x-2)(1+x)-x(x-1)}{x(x-2)}=0$$

$$\Rightarrow \cancel{x^{2}}-\cancel{2x}+2-\cancel{x^{2}}+\cancel{x}+2-x^{2}+\cancel{x}=0 \Rightarrow -x^{2}+4=0$$

$$\Rightarrow x^{2}=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \notin D & \text{غیرقابل قبول} \\ x=-2 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

نتیجه تفاوت معادله‌های گویا با معادلات درجه‌ی اول و دوم در آن است که در این معادلات ممکن است جوابی به‌دست آید که در معادله صدق نکند (در دامنه‌ی جواب نباشد) و در نتیجه قابل قبول نباشد. اما در معادلات درجه‌ی اول و دوم هر جواب به‌دست آمده حتماً قابل قبول است.

۱۶

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=3x(1-\frac{x-1}{x+1})$$

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}-3x(1-\frac{x-1}{x+1})=0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}-3x+\frac{3x(x-1)}{x+1}=0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^{2}-(x-1)^{2}-3x(x-1)(x+1)+3x(x-1)^{2}}{(x-1)(x+1)}=0$$

$$\Rightarrow \cancel{x^{2}}+2x+\cancel{1}-\cancel{x^{2}}+2x-\cancel{1}-\cancel{3x^{3}}+3x+\cancel{3x^{3}}-6x^{2}+3x=0$$

$$\Rightarrow 10x-6x^{2}=0 \Rightarrow 2x(5-3x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \in D & \text{قابل قبول} \\ x=\frac{5}{3} \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۱۷

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x^{2}-1}=\frac{x-2}{x+1}$$

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^{2}-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}-\frac{x-2}{x+1}=0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x(x+1)+3-(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^{2}+x+3-x^{2}+3x-2}{(x-1)(x+1)}=0 \Rightarrow x^{2}+x+3-x^{2}+3x-2=0 \Rightarrow 4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{4} \in D \text{ قابل قبول}$$

---

۱۸ چون $x=2$ جواب معادله است، پس کافی است به جای x در معادله عدد ۲ را قرار دهیم، سپس مقدار a را حساب کنیم:

$$\frac{x}{a-x}+\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}$$

$$x=2 \Rightarrow \frac{2}{a-2}+\frac{a-2}{2}=\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2}+\frac{a-2}{2}-\frac{a}{2}=0 \Rightarrow \frac{4+a^{2}-4a+4-a^{2}+2a}{2(a-2)}=0$$

$$\Rightarrow 8-2a=0 \Rightarrow a=4$$

---

۱۹ این معادله دارای دو مجهول k و t است. چون مقدار k را می‌خواهیم، پس t متغیر معادله است و کافی است در معادله به جای t عدد -3 را قرار دهیم:

$$\frac{4-t}{2-2t}=\frac{3t^{2}+k}{(t^{2}+1)^{2}-68}$$

$$t=-3 \Rightarrow \frac{7}{8}=\frac{27+k}{32} \Rightarrow \frac{28-27-k}{32}=0 \Rightarrow \frac{1-k}{32}=0 \Rightarrow 1-k=0 \Rightarrow k=1$$