# بخش اول «معادلات خط در فضا»

۱- معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $A=(3,5,-1)$ و موازی با بردار $u=2i+3j+7k$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=3t+2\\y=5t+3\\z=-t+7\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=2t+3\\y=3t+5\\z=7t-1\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=3t-2\\y=5t-3\\z=-t-7\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=2t-3\\y=3t-5\\z=7t+1\end{cases}$

۲- معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $A=(0,2,5)$ و موازی با بردار $u=-2i+j-3k$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=-2t\\y=t-2\\z=-3t+5\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=-2\\y=t+2\\z=-3t+5\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=4t\\y=-2t+2\\z=6t+5\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=-2\\y=2t+1\\z=5t-3\end{cases}$

۳- معادلات پارامتری خط $d$ به صورت $x=t+3$ ، $y=-2t+1$ و $z=3t-6$ است. فرض کنید $A$ نقطه‌ی تقاطع خط $d$ و صفحه‌ی $xy$ باشد. مجموع مختصات $A$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۴- معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $A=(1,1,2)$ و موازی با بردار $u=i+3k$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=t+3\\y=1\\z=3t+8\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=t+1\\y=t\\z=3t+2\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=2t+3\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=t-1\\y=1\\z=3t-2\end{cases}$

۵- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A=(2,1,4)$ می‌گذرد و با بردار $u=3i-j+2k$ موازی است کدام است؟

۱) $\frac{x-2}{3}=y-1=z-4$ ۲) $\frac{x-2}{3}=1-y=\frac{z-4}{2}$ ۳) $\frac{x-3}{2}=y+1=z-2$ ۴) $\frac{x+2}{3}=-y-1=\frac{z+4}{2}$

۶- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A=(5,0,2)$ می‌گذرد و با بردار $u=2i-k$ موازی است کدام است؟

۱) $y=0,\frac{x-2}{5}=\frac{z+1}{2}$ ۲) $y=0,\frac{x+5}{2}=-z-2$ ۳) $y=0,\frac{x-5}{2}=z-2$ ۴) $y=0,\frac{x-5}{2}=2-z$

۷- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A=(3,7,-1)$ می‌گذرد و با بردار $u=5j$ موازی است کدام است؟

۱) $x=3,z=-1$ ۲) $x=3,y=7$ ۳) $x=3,y=5$ ۴) $z=-1,y=5$

۸- فرض کنید خط $x+2=\frac{y-4}{a}=\frac{z-b}{3}$ از مبدأ مختصات بگذرد. حاصل $a+b$ برابر کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۸

۹- فرض کنید $d$ خطی به معادلات $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+1}{3}$ باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $d$ محور $x$ را قطع می‌کند
۲) $d$ محور $y$ را قطع می‌کند
۳) $d$ محور $z$ را قطع می‌کند
۴) $d$ هیچ‌یک از سه محور را قطع نمی‌کند

۱۰- فرض کنید خطوط $\frac{x-6}{a}=\frac{y-b}{2}=z-3$ و $\frac{x-c}{2}=y+1=\frac{z+2}{4}$ در نقطه‌ای روی محور $y$ یکدیگر را قطع کنند. حاصل $a+b+c$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{11}{2}$ ۲) $\frac{13}{2}$ ۳) $\frac{15}{2}$ ۴) $\frac{17}{2}$

۱۱- کدام خط بر خط $x=2y=3z$ عمود است؟

۱) $x=2y=-3z$ ۲) $3x=2y=z$ ۳) $x=\frac{y}{2}=-\frac{z}{3}$ ۴) $x=\frac{y}{2}=-\frac{z}{6}$

۱۲- فرض کنید $d$ خطی به معادلات $\frac{x+۱}{۴}=y-۲\ \ z=۵$ , باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $d$ با محور $z$ موازی است  ۲) $d$ بر محور $z$ عمود است  ۳) $d$ محور $z$ را قطع می‌کند  ۴) $d$ روی صفحه‌ی $xy$ قرار دارد

۱۳- معادلات خط گذرا از نقاط $A=(۲,-۱,۳)$ و $B=(۱,۴,۲)$ کدام است؟

۱) $x-۲=\frac{y+۱}{۵}=z-۳$  ۲) $x-۱=\frac{y-۴}{-۵}=z-۲$  ۳) $x-۲=\frac{y-۱}{-۵}=z-۳$  ۴) $x-۱=\frac{y-۴}{۵}=z-۲$

۱۴- فرض کنید خط گذرا از نقاط $A=(۲,۴,۵)$ و $B=(۶,۴,-۱)$ صفحه‌ی $yz$ را در نقطه‌ی $C$ قطع کند. مجموع مختصات نقطه‌ی $C$ برابر کدام است؟

۱) ۱۱  ۲) ۱۲  ۳) ۱۳  ۴) ۱۴

۱۵- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A=(۳,۱,۲)$ می‌گذرد و بر خط‌های $x=۱, y+۱=\frac{z+۲}{۳}$ و $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{۵}=z$ عمود است کدام است؟

۱) $\frac{x-۳}{۷}=\frac{y-۱}{۳}=z-۲$  ۲) $\frac{x-۳}{-۱۴}=\frac{y-۱}{۵}=\frac{z-۲}{۳}$  ۳) $\frac{x-۳}{۷}=\frac{y-۱}{-۳}=z-۲$  ۴) $\frac{x-۳}{۱۴}=\frac{y-۱}{۵}=\frac{z-۲}{-۳}$

* ۱۶- فرض کنید $A=(۱,۰,۰)$ ، $B=(۳,۲,۱)$ و $C=(۳,-۴,۴)$. نیمساز داخلی زاویه‌ی $A$ از مثلث $ABC$ صفحه‌ی $yz$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $(۰,۰,۱)$  ۲) $(۰,۰,-۱)$  ۳) $(۰,۱,۱)$  ۴) $(۰,۱,-۱)$

۱۷- فرض کنید $A$ نقطه‌ای از خط $\frac{x-۲}{۲}=y=z-۱$ باشد و فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ از صفحه‌ی $xz$ برابر ۲ باشد. فاصله‌ی $A$ از مبدأ مختصات برابر کدام است؟

۱) ۳  ۲) ۴  ۳) ۵  ۴) ۶

۱۸- فرض کنید نقطه‌ی $A$ روی خط $\frac{x}{۲}=y+۱=۲z$ قرار داشته و از نقاط $(۲,۳,۵)$ و $(۰,-۱,۳)$ به یک فاصله باشد. مجموع مختصات نقطه‌ی $A$ چند است؟

۱) ۲  ۲) ۴  ۳) ۶  ۴) ۸

۱۹- فرض کنید $A$ نقطه‌ای روی خط $\frac{x+۱}{۳}=\frac{y}{۲}=\frac{z+۱}{-۱}$ باشد که فاصله‌ی آن از محور $x$ برابر فاصله‌اش از صفحه‌ی $yz$ است.عرض نقطه‌ی $A$ چند است؟

۱) ۶  ۲) ۴  ۳) ۳  ۴) ۱

۲۰- معادلات خطی که از نقطه‌ی $A=(۱,۱,۲)$ بگذرد، بر بردار $u=۲i+j-k$ عمود باشد و خط $x=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۱}{۳}$ را قطع کند کدام است؟

۱) $x-۱=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z-۲}{۴}$  ۲) $\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z-۲}{۸}$  ۳) $x-۱=y-۱=\frac{z-۲}{۳}$  ۴) $\frac{x-۱}{۳}=۱-y=\frac{z-۲}{۵}$

۲۱- معادلات خط گذرا از نقطه‌ی $A=(۱,۲,۸)$ که بر خط $\frac{x}{۲}=y=\frac{z}{۳}$ عمود بوده و این خط را قطع کند کدام است؟

۱) $\frac{x-۱}{۲}=۲-y=۸-z$  ۲) $\frac{x-۱}{۴}=y-۲=\frac{z-۸}{-۳}$  ۳) $y=۲,\frac{x-۱}{۳}=\frac{z-۸}{-۲}$  ۴) $x-۱=y-۲=۸-z$

* ۲۲- خط $d$ با بردار $u=(۲,۲,۱)$ موازی بوده و هم محور $z$ و هم خط $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۲}{۳}=z$ را قطع می‌کند. کدام نقطه روی $d$ قرار دارد؟

۱) $(۳,۳,۲)$  ۲) $(۳,۳,۱)$  ۳) $(۳,۳,۳)$  ۴) $(۳,۲,۱)$

۲۳- فرض کنید $d$ خطی موازی با محور $z$ باشد و خطوط $x=y=z$ و $\frac{x}{۲}=\frac{y+۱}{۳}=z-۲$ را به ترتیب در نقاط $A$ و $B$ قطع کند. طول پاره‌خط $AB$ برابر کدام است؟

۱) ۱  ۲) ۲  ۳) ۳  ۴) ۴

۲۴- فرض کنید $d$ خطی گذرا از نقطه‌ی $A=(۱,-۱,۲)$ باشد و خطوط $y=۲, z=۱$ و $x=۲, y=z+۱$ را به ترتیب در نقاط $B$ و $C$ قطع کند. نقطه‌ی $B$ کدام است؟

۱) $(۰,۲,۱)$  ۲) $(۱,۲,۱)$  ۳) $(۲,۲,۱)$  ۴) $(۳,۲,۱)$

* ۲۵- مکان هندسی نقاطی از فضا که در معادلات $|x-۱|=y+۱=z$ صدق می‌کنند کدام است؟

۱) یک خط  ۲) یک نیم‌خط  ۳) اجتماع دو خط  ۴) اجتماع دو نیم‌خط

## فاصله‌ی نقطه از خط

۲۶- فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $x=۱, y+z=۲$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۷- فرض کنید $A=(۵,۲,۱)$ و $B$ قرینه‌ی $A$ نسبت به خط $\frac{x+۲}{۳}=\frac{y-۱}{۴}=z$ باشد. طول پاره‌خط $AB$ برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۸- فرض کنید $A=(۳,-۴,۸)$ و $B$ و $C$ دو نقطه به فاصله‌ی $\sqrt{۱۴}$ روی خط $\frac{x+۷}{۴}=\frac{y+۲}{۲}=z-۲$ باشند. مساحت مثلث $ABC$ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۲۹- فاصله‌ی دو خط موازی $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=z$ و $\frac{x-۳}{۲}=\frac{y-۱}{۳}=z-۵$ از یک‌دیگر برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۴}$ ۲) $\sqrt{۲۱}$ ۳) $۲\sqrt{۱۴}$ ۴) $۲\sqrt{۲۱}$

۳۰- مساحت مربعی که دو ضلع مقابل آن روی خطوط $\frac{x+۳}{۲}=\frac{y+۵}{۲}=z$ و $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۲}=z$ قرار دارند چقدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳۸}{۹}$ ۳) $\frac{۴۰}{۹}$ ۴) $\frac{۵۰}{۹}$

## وضعیت نسبی دو خط

۳۱- وضعیت نسبی دو خط زیر چگونه است؟

$$\frac{x+۳}{۵}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z-۲}{۳} \quad , \quad \frac{x-۷}{۱۰}=\frac{y-۵}{۴}=\frac{z-۸}{۶}$$

۱) منطبق ۲) موازی ۳) متقاطع ۴) متنافر

۳۲- وضعیت نسبی دو خط زیر چگونه است؟

$$\frac{x-۳}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z+۱}{۴} \quad , \quad ۴x+۱=۶y=۳z-۲$$

۱) منطبق ۲) موازی ۳) متقاطع ۴) متنافر

۳۳- وضعیت نسبی دو خط زیر چگونه است؟

$$\frac{x+۴}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=z \quad , \quad ۳x-۴=۲y-۸=z$$

۱) منطبق ۲) موازی ۳) متقاطع ۴) متنافر

۳۴- وضعیت نسبی دو خط زیر چگونه است؟

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۳} \quad , \quad \frac{x+۱}{۴}=\frac{y-۲}{۲}=\frac{z-۱}{۳}$$

۱) منطبق ۲) موازی ۳) متقاطع ۴) متنافر

۳۵- فرض کنید خطوط $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{a}=z$ و $\frac{x-۵}{۴}=\frac{y-b}{۶}=\frac{z-c}{d}$ بر یک‌دیگر منطبق باشند. حاصل $a+b+c+d$ برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۳۶- به ازای کدام $m$ دو خط زیر متقاطع‌اند؟

$$x=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z}{۲}, \; x=y+۱=\frac{z-۱}{m}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۷- مجموع مختصات نقطه‌ی تقاطع دو خط زیر برابر کدام است؟

$$x+۱=y-۳=\frac{z}{۲} \quad , \quad \frac{x}{۲}=\frac{y-۱}{۵}=\frac{z-۳}{۳}$$

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۳۸- فرض کنید خط گذرا از نقاط $A=(۲,-۱,۶)$ و $B=(-۱,۸,۰)$ بر خط $\frac{x+۳}{۴}=\frac{y}{m}=z-n$ عمود باشد و این خط را قطع کند. حاصل $m+n$ برابر کدام است؟

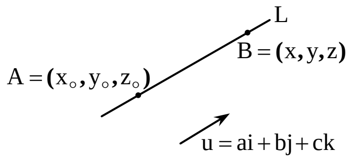
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

# حل تشریحی تست‌های بخش اول

**۱- گزینه‌ی (۲)** A

**معادلات پارامتری خط در فضا:** فرض کنید $A=(x_۰,y_۰,z_۰)$ نقطه‌ای از خط L باشد و $u=ai+bj+ck$ یک بردار موازی خط L باشد (به u و کلاً هر بردار موازی با خط L، بردار هادی خط L می‌گویند).

در این صورت مطابق شکل، نقطه‌ی $B(x,y,z)$ در صورتی روی خط L قرار دارد که بردار $\overrightarrow{AB}$ و بردار u موازی باشند. یعنی عددی حقیقی مانند t وجود داشته باشد که $\overrightarrow{AB}=tu$، و بنابراین:




$$\overrightarrow{AB}=B-A=(x-x_۰\,,\,y-y_۰\,,\,z-z_۰)$$

$$\vec{u}=(a,b,c)\xrightarrow{\overrightarrow{AB}=tu}x=at+x_۰\ ,\ \ y=bt+y_۰\ ,\ z=ct+z_۰$$

به معادلات $\begin{cases}x=at+x_۰\\ y=bt+y_۰\\ z=ct+z_۰\end{cases}$ معادلات پارامتری خط L گفته می‌شود. در واقع به جای t هر عدد حقیقی که قرار دهیم یک نقطه از L به دست می‌آید و بر عکس هر نقطه از L به ازای t ای در معادلات فوق صدق می‌کند و لذا وقتی t کلیه‌ی اعداد حقیقی را بپذیرد معادلات فوق کلیه‌ی نقاط L را به ما می‌دهند.

**تذکر:** واضح است که اگر یکی از مؤلفه‌های بردار u (a، b یا c) صفر باشد، معادله‌ی متناظر آن رابطه مستقل از t خواهد بود (یعنی به صورت $x=x_۰$، $y=y_۰$ یا $z=z_۰$ خواهد شد).

با توجه به نکته‌ی فوق معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $A=(۳,۵,-۱)$ و موازی با بردار $u=۲i+۳j+۷k$ عبارت است از: $\begin{cases}x=۲t+۳\\ y=۳t+۵\\ z=۷t-۱\end{cases}$

**۲- گزینه‌ی (۳)** A

فرض کنید L خط گذرا از نقطه‌ی $A=(۰,۲,۵)$ و موازی با بردار $u=-۲i+j-۳k$ باشد. در این صورت $v=-۲u=۴i-۲j+۶k$ نیز یک بردار هادی L است. پس معادلات پارامتری خط L عبارت است از:

$$\begin{cases}x=۴t\\ y=-۲t+۲\\ z=۶t+۵\end{cases}$$

**۳- گزینه‌ی (۱)** B

چون نقطه‌ی A روی صفحه‌ی xy قرار دارد پس مختصات A به صورت $(x,y,۰)$ است و چون A روی d قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند t، $x=t+۳,\ y=-۲t+۱,\ ۰=۳t-۶$. از معادله‌ی سوم نتیجه می‌گیریم $t=۲$ و با جایگذاری در معادلات اول و دوم به دست می‌آوریم:

$$x=t+۳=۵\,,\,y=-۲t+۱=-۳$$

پس $A=(۵,-۳,۰)$، لذا مجموع مختصات A برابر ۲ است.

**۴- گزینه‌ی (۱)** B

فرض کنید L خط گذرا از نقطه‌ی $A=(۱,۱,۲)$ و موازی با بردار $u=i+۳k$ باشد. در این صورت نقطه‌ی $B=(x,y,z)$ روی خط L قرار دارد اگر و تنها اگر به ازای عددی حقیقی مانند t:

$$x=t+۱\ ,\ \ y=۱\ ,\ z=۳t+۲$$

به ازای $t=۲$ نتیجه می‌گیریم: $x=۳\ ,\ y=۱\ ,\ z=۸$

پس نقطه‌ی $B=(۳,۱,۸)$ روی خط L قرار دارد، لذا معادلات پارامتری L عبارت است از: $\begin{cases}x=t+۳\\ y=۱\\ z=۳t+۸\end{cases}$

**روش دوم:** کافی است در معادله‌ی اولیه، به جای مقدار t، مقدار $t+۲$ را قرار دهیم و به معادله‌ی موردنظر برسیم. با توجه به آن که t هر عدد حقیقی دلخواهی می‌تواند باشد، چنین تغییر متغیری مجاز است.

A ۵- گزینه‌ی (۲)

**معادلات متقارن خط:** فرض کنید $L$ خط گذرا از نقطه‌ی $A=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ و موازی با بـردار $u=ai+bj+ck$ $(a,b,c\neq\circ)$ باشـد. در این صورت نقطه‌ی $B=(x,y,z)$ روی خط $L$ قرار دارد اگر و تنها اگر $x$ ، $y$ و $z$ در معادلات زیر صدق کنند:

$$\frac{x-x_\circ}{a}=\frac{y-y_\circ}{b}=\frac{z-z_\circ}{c}$$

به این معادلات، معادلات متقارن خط $L$ گفته می‌شود. در حالتی که $a=\circ$ و $b,c\neq\circ$، معادلات متقارن خط $L$ به صورت:

$$x=x_\circ\ ,\ \ \frac{y-y_\circ}{b}=\frac{z-z_\circ}{c}$$

و در حالتی که $a=b=\circ$ و $c\neq\circ$ معادلات متقارن خط به صورت $x=x_\circ , y=y_\circ$ نمایش داده می‌شود.
واضح است که معادلات متقارن یک خط، از روی همان معادلات پارامتری آن به دست آمده‌اند:

$$x=at+x_\circ\ ,\ \ y=bt+y_\circ\ ,\ \ z=ct+z_\circ \Rightarrow \frac{x-x_\circ}{a}=\frac{y-y_\circ}{b}=\frac{z-z_\circ}{c}=t$$

با توجه به نکته‌ی فوق معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $A=(۲,۱,۴)$ و موازی با بردار $u=۳i-j+۲k$ عبارت است از:

$$\frac{x-۲}{۳}=\frac{y-۱}{-۱}=\frac{z-۴}{۲}$$

A ۶- گزینه‌ی (۴)

با توجه به نکته‌ای که در راه حل سؤال ۵ گفتیم معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $A=(۵,\circ,۲)$ و موازی با بردار $u=۲i-k$ عبارت است از:

$$y=\circ\ ,\ \ \frac{x-۵}{۲}=\frac{z-۲}{-۱}$$

A ۷- گزینه‌ی (۱)

با توجه به نکته‌ای که در راه حل سؤال ۵ گفتیم معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $A=(۳,۷,-۱)$ و موازی با بردار $u=۵j$ عبارت است از:

$$x=۳\ ,\ \ z=-۱$$

A ۸- گزینه‌ی (۱)

چون خط $x+۲=\frac{y-۴}{a}=\frac{z-b}{۳}$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس نقطه‌ی $O=(\circ,\circ,\circ)$ باید در معادلات این خط صدق کند، لذا:

$$\circ+۲=\frac{\circ-۴}{a}=\frac{\circ-b}{۳}$$

در نتیجه $\frac{-۴}{a}=۲$ و $\frac{-b}{۳}=۲$، لذا $a=-۲$ و $b=-۶$، پس $a+b=-۸$.

B ۹- گزینه‌ی(۳)

اگر $d$ محور $x$ را قطع کند، آن‌گاه باید نقطه‌ای به صورت $(x,\circ,\circ)$ در معادلات $d$ صدق کند، یعنی:

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{\circ-۳}{۶}=\frac{\circ+۱}{۳}$$

ولی این معادلات به ازای هیچ مقداری از $x$ برقرار نیستند. به روش مشابه می‌توان دید که هیچ نقطه‌ای به صورت $(\circ,y,\circ)$ در معادلات $d$ صدق نمی‌کند، پس $d$ محور $y$ را نیز قطع نمی‌کند. حال اگر $d$ محور $z$ را قطع کند، آن‌گاه باید نقطه‌ای به صورت $(\circ,\circ,z)$ در معادلات $d$ صدق کند، یعنی:

$$\frac{\circ-۱}{۲}=\frac{\circ-۳}{۶}=\frac{z+۱}{۳}$$

$z=-\frac{۵}{۲}$ در این معادلات صدق می‌کند، پس $d$ محور $z$ را در نقطه‌ی $(\circ,\circ,-\frac{۵}{۲})$ قطع می‌کند.

B ۱۰- گزینه‌ی (۲)

چون دو خط داده شده در نقطه‌ای روی محور $y$ یک‌دیگر را قطع می‌کنند، پس نقطه‌ای به صورت $(\circ,y,\circ)$ باید در معادلات هر دو خط صدق کند، لذا:

$$\frac{\circ-۶}{a}=\frac{y-b}{۲}=\circ-۳\quad ,\quad \frac{\circ-c}{۲}=y+۱=\frac{\circ+۲}{۴}$$

پس ۴ معادله‌ی زیر را داریم:

$$-\frac{۶}{a}=-۳\ ,\ \ -\frac{c}{۲}=\frac{۲}{۴}\ ,\ \ y+۱=\frac{۲}{۴}\ ,\ \ \frac{y-b}{۲}=-۳$$

در نتیجه:

$$a=۲\ ,\ \ c=-۱\ ,\ \ y=-\frac{۱}{۲}\ ,\ \ b=y+۶=\frac{۱۱}{۲}$$

پس $a+b+c=\frac{۱۳}{۲}$.

**۱۱- گزینه‌ی (۴)** B

در صورتی دو خط بر هم عمودند که بردارهای هادی آن‌ها بر هم عمود باشند. بردار هادی خط $x = 2y = 3z$ برابر $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ است (زیرا فرم استاندارد معادلات این خط به صورت $x = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$ است). بردارهای هادی ۴ خط داده شده به ترتیب عبارتند از:

$$u_1 = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}), u_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1), \quad u_3 = (1, 2, -3), \quad u_4 = (1, 2, -6)$$

در بین این ۴ بردار فقط $u_4$ بر $u$ عمود است زیرا $u.u_4 = 0$ ولی هیچ‌یک از $u.u_1$، $u.u_2$ و $u.u_3$ برابر صفر نیستند.

**۱۲- گزینه‌ی (۳)** B

بردار هادی خط $y - 2 = \frac{x+1}{4}, z = 5$ برابر $u = (4, 1, 0)$ است. چون $u.k = (4, 1, 0).(0, 0, 1) = 0$، پس $u$ بر $k$ عمود است، لذا خط داده شده بر محور $z$ عمود است.

**تذکر:** از نظر مفهومی، شرط $z = 5$ نشان می‌دهد که خط موازی صفحه‌ی $xy$ و عمود بر محور $z$ است، زیرا تمام نقاط آن از ارتفاع ۵ برخوردارند و به یک فاصله‌ی مساوی از صفحه‌ی $xy$ هستند.

**۱۳- گزینه‌ی (۲)** A

فرض کنید $L$ خط گذرا از نقاط $A = (2, -1, 3)$ و $B = (1, 4, 2)$ باشد، در این صورت:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1, -5, 1)$$

یک بردار هادی برای خط $L$ است. چون $L$ از نقطه‌ی $B$ می‌گذرد، پس معادلات متقارن خط $L$ عبارت است از:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-2}{1}$$

**۱۴- گزینه‌ی (۲)** B

فرض کنید $L$ خط گذرا از نقاط $A = (2, 4, 5)$ و $B = (6, 4, -1)$ باشد، در این صورت:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0, -6)$$

یک بردار هادی برای خط $L$ است. چون $L$ از نقطه‌ی $A$ می‌گذرد، پس معادلات متقارن خط $L$ عبارت است از:

$$y = 4 \quad , \quad \frac{x-2}{4} = \frac{z-5}{-6}$$

حال اگر $C$ نقطه‌ی تقاطع $L$ با صفحه‌ی $yz$ باشد، آن‌گاه $C = (0, y, z)$ و نقطه‌ی $C$ باید در معادلات $L$ صدق کند، لذا:

$$y = 4, \frac{0-2}{4} = \frac{z-5}{-6}$$

پس $y = 4$ و $z = 8$، لذا $C = (0, 4, 8)$ و مجموع مختصات $C$ برابر ۱۲ است.

**۱۵- گزینه‌ی (۳)** B

بردارهای هادی دو خط داده شده عبارتند از:

$$u_1 = (0, 1, 3) \quad , \quad u_2 = (2, 5, 1)$$

اگر خطی بر این دو خط عمود باشد، بردار هادی آن باید بر $u_1$ و $u_2$ عمود باشد. چون $u_1 \times u_2$ بر $u_1$ و $u_2$ عمود است، پس $u_1 \times u_2$ یک بردار هادی برای خط مطلوب است.چون:

$$u_1 \times u_2 = (-14, 6, -2)$$

پس $u = -\frac{1}{2} u_1 \times u_2 = (7, -3, 1)$ نیز برداری هادی برای این خط است. حال معادلات متقارن خط گذرا از نقطه‌ی $A = (3, 1, 2)$ و موازی با بردار $u = (7, -3, 1)$ عبارت است از:

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{1}$$

**۱۶- گزینه‌ی (۲)** D

می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2, 1) \quad , \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (2, -4, 4)$$

می‌دانیم بردار:

$$u = e_{AB} + e_{AC} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{3}(2, 2, 1) + \frac{1}{6}(2, -4, 4) = (1, 0, 1)$$

در راستای نیمساز داخلی زاویه‌ی $A$ قرار دارد. چون نقطه‌ی $A = (1, 0, 0)$ روی این نیمساز قرار دارد، پس معادلات این نیمساز عبارت است از:

$$y = 0 \quad , \quad \frac{x-1}{1} = \frac{z-0}{1}$$

حال اگر این خط صفحه‌ی $yz$ را در نقطه‌ی $(0, y, z)$ قطع کند، آن‌گاه:

$$y = 0 \quad , \quad \frac{0-1}{1} = \frac{z-0}{1}$$

پس $y = 0$ و $z = -1$.

**C ۱۷- گزینه‌ی (۱)**

معادلات پارامتری خط داده شده به صورت $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$ است. چون نقطه‌ی $A$ روی این خط قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند $t$، $A = (2t + 2, t, t + 1)$. چون فاصله‌ی $A$ از صفحه‌ی $xz$ برابر ۲ است، پس $|t| = 2$، لذا $t = \mp 2$، در نتیجه $A = (6, 2, 3)$ یا $A = (-2, -2, -1)$. پس فاصله‌ی $A$ از مبدأ مختصات برابر ۷ یا ۳ است.

**C ۱۸- گزینه‌ی (۳)**

معادلات پارامتری خط داده شده به صورت $\begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \\ z = \dfrac{t}{2} \end{cases}$ است. چون نقطه‌ی $A$ روی این خط قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند $t$، $A = (2t, t - 1, \frac{t}{2})$. چون $A$ از نقاط $(2, 3, 5)$ و $(0, -1, 3)$ به یک فاصله است، پس:

$$(2t - 2)^2 + ((t - 1) - 3)^2 + (\frac{t}{2} - 5)^2 = (2t - 0)^2 + ((t - 1) + 1)^2 + (\frac{t}{2} - 3)^2$$

با حل این معادله نتیجه می‌گیریم $t = 2$، لذا $A = (4, 1, 1)$، پس مجموع مختصات $A$ برابر ۶ است.

**C ۱۹- گزینه‌ی (۲)**

معادلات پارامتری خط داده شده به صورت $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t \\ z = -t - 1 \end{cases}$ است. چون نقطه‌ی $A$ روی این خط قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند $t$، $A = (3t - 1, 2t, -t - 1)$. فاصله‌ی $A$ از محور $x$ برابر $\sqrt{(2t)^2 + (-t - 1)^2}$ و فاصله‌ی $A$ از صفحه‌ی $yz$ برابر $|3t - 1|$ است. اگر این دو فاصله برابر باشند، آن‌گاه $(2t)^2 + (-t - 1)^2 = (3t - 1)^2$، لذا $4t^2 - 8t = 0$. پس $t = 0$ یا $t = 2$، لذا $A = (-1, 0, -1)$ یا $A = (5, 4, -3)$. پس عرض نقطه‌ی $A$ برابر صفر یا ۴ است.

**C ۲۰- گزینه‌ی (۱)**

خط مطلوب را $L$ می‌نامیم. فرض کنید خط $L$ خط $x = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$ را در نقطه‌ی $B = (t, 2t - 1, 3t + 1)$ قطع کند. چون $L$ از نقاط $A$ و $B$ می‌گذرد، پس:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (t - 1, 2t - 2, 3t - 1)$$

یک بردار هادی برای خط $L$ است و چون $L$ بر $u$ عمود است، پس $\overrightarrow{AB}$ نیز بر $u$ عمود است، لذا $\overrightarrow{AB}.u = 0$، در نتیجه:

$$2(t - 1) + (2t - 2) - (3t - 1) = 0$$

لذا $t = 3$. پس بردار هادی خط $L$ برابر $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 8)$ است و چون $L$ از نقطه‌ی $A = (1, 1, 2)$ می‌گذرد، پس معادلات خط $L$ عبارت است از:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 2}{8}$$

چنان‌چه هر سه عبارت فوق را در ۲ ضرب کنیم نتیجه می‌گیریم گزینه‌ی (۱) پاسخ سؤال است.

**C ۲۱- گزینه‌ی (۳)**

خط مطلوب را $L$ می‌نامیم. فرض کنید خط $L$ خط $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ را در نقطه‌ی $B = (2t, t, 3t)$ قطع کند. در این صورت:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2t - 1, t - 2, 3t - 8)$$

یک بردار هادی برای خط $L$ است. چون $L$ و $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ متعامدند، پس بردارهای هادی این دو خط نیز متعامدند، لذا $\overrightarrow{AB}.(2, 1, 3) = 0$، پس: $2(2t - 1) + (t - 2) + 3(3t - 8) = 0$، لذا $14t = 28$، پس $t = 2$. در نتیجه بردار هادی خط $L$ برابر $\overrightarrow{AB} = (3, 0, -2)$ است و چون $L$ از نقطه‌ی $A = (1, 2, 8)$ می‌گذرد، پس معادلات متقارن خط $L$ عبارت است از:

$$y = 2, \frac{x - 1}{3} = \frac{z - 8}{-2}$$

**۲۲- گزینه‌ی (۱)** D

فرض کنید $d$ محور $z$ را در نقطه‌ی $A=(۰,۰,z)$ و خط $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۲}{۳}=z$ را در نقطه‌ی $B=(۲t-۱,۳t+۲,t)$ قطع کند. چون نقاط $A$ و $B$ روی $d$ قرار دارند، پس بردار $\overrightarrow{AB}=B-A=(۲t-۱,۳t+۲,t-z)$ با خط $d$ موازی است و چون $d$ با بردار $u=(۲,۲,۱)$ موازی است، پس $\overrightarrow{AB}$ و $u$ موازی‌اند، لذا:

$$\frac{۲t-۱}{۲}=\frac{۳t+۲}{۲}=\frac{t-z}{۱}$$

از معادله‌ی $\frac{۳t+۲}{۲}=\frac{۲t-۱}{۲}$ نتیجه می‌گیریم $t=-۳$، پس $B=(-۷,-۷,-۳)$. چون خط $d$ از نقطه‌ی $B$ می‌گذرد و با بردار $u$ موازی است، پس معادلات متقارن خط $d$ عبارت است از:

$$\frac{x+۷}{۲}=\frac{y+۷}{۲}=\frac{z+۳}{۱}$$

در بین ۴ نقطه‌ی داده شده فقط نقطه‌ی $(۳,۳,۲)$ در معادلات این خط صدق می‌کند.

**۲۳- گزینه‌ی(۱)** C

چون $A$ نقطه‌ای روی خط $x=y=z$ است، پس به ازای عددی حقیقی مانند $t$، $A=(t,t,t)$ و چون $B$ نقطه‌ای روی خط $\frac{x}{۲}=\frac{y+۱}{۳}=z-۲$ است، پس به ازای عددی حقیقی مانند $s$، $B=(۲s,۳s-۱,s+۲)$. چون نقاط $A$ و $B$ روی خط $d$ قرار دارند و $d$ با محور $z$ موازی است، پس بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $k$ موازی‌اند. اما:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(۲s-t,۳s-۱-t,s+۲-t)$$

حال از توازی $\overrightarrow{AB}$ و $k$ نتیجه می‌گیریم:

$$۲s-t=۰ \quad , \quad ۳s-۱-t=۰$$

از حل این دو معادله و دو مجهول نتیجه می‌گیریم $s=۱$ و $t=۲$. در نتیجه $A=(۲,۲,۲)$ و $B=(۲,۲,۳)$. لذا طول پاره‌خط $AB$ برابر ۱ است.

**۲۴- گزینه‌ی(۳)** C

چون نقطه‌ی $B$ روی خط $y=۲,z=۱$ قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند $t$، $B=(t,۲,۱)$ و چون نقطه‌ی $C$ روی خط $x=۲,y=z+۱$ قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند $s$، $C=(۲,s,s-۱)$. حال نقاط $A$، $B$ و $C$ روی خط $d$ قرار دارند، پس بردارهای:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(t-۱,۳,-۱) \quad , \quad \overrightarrow{AC}=C-A=(۱,s+۱,s-۳)$$

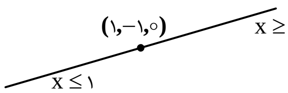
موازی‌اند، لذا:

$$\frac{t-۱}{۱}=\frac{۳}{s+۱}=\frac{-۱}{s-۳}$$

از $\frac{-۱}{s-۳}=\frac{۳}{s+۱}$ نتیجه می‌گیریم $s=۲$ و از $\frac{۳}{s+۱}=\frac{t-۱}{۱}$ نتیجه می‌گیریم $t=۲$، پس $B=(۲,۲,۱)$.

**۲۵- گزینه‌ی(۴)** D

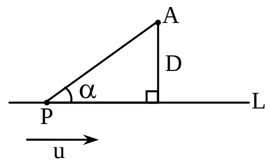
اگر $x\geq ۱$، آن‌گاه معادلات داده شده به صورت $x-۱=y+۱=z$ (۱) و اگر $x\leq ۱$، آن‌گاه معادلات داده شده به صورت $۱-x=y+۱=z$ (۲) در می‌آید. معادلات (۱) معادلات خط گذرا از نقطه‌ی $(۱,-۱,۰)$ موازی با بردار $(۱,۱,۱)$ است. چنان‌چه این خط را از روی نقطه‌ی $(۱,-۱,۰)$ به دو نیم‌خط تقسیم کنیم، در روی یک نیم‌خط $x\geq ۱$ و روی نیم‌خط دیگر $x\leq ۱$.




پس معادلات (۱)، با شرط $x\geq ۱$ نشان دهنده‌ی یک نیم‌خط است و به طور مشابه معادلات (۲) با شرط $x\leq ۱$ نیز نشان دهنده‌ی یک نیم‌خط است.

**B** **۲۶- گزینه‌ی (۲)**

**فاصله‌ی نقطه از خط:** فرض کنید $L$ خط گذرا از نقطه‌ی $P$ و موازی با بردار $u$ باشد. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ از خط $L$ برابر است با:




$$D=\frac{|\overrightarrow{AP}\times u|}{|u|}$$

رابطه‌ی فوق معنی واضحی دارد. به این دقت کنید که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل داریم: $D=|\overrightarrow{AP}|\sin\alpha$ و $\sin\alpha$ در اندازه‌ی بردار حاصل‌ضرب خارجی $|\overrightarrow{AP}\times u|$ حضور دارد.

معادلات خط $x=۱, y+z=۲$ را به فرم استاندارد $x=۱, y=\frac{z-۲}{-۱}$ تبدیل می‌کنیم. پس بردار هادی این خط برابر $u=(۰,۱,-۱)$ است. هم‌چنین نقطه‌ی $P=(۱,۰,۲)$ روی این خط قرار دارد. پس فاصله‌ی نقطه‌ی $O=(۰,۰,۰)$ از این خط برابر است با:

$$D=\frac{|\overrightarrow{OP}\times u|}{|u|}=\frac{|(-۲,۱,۱)|}{|(۰,۱,-۱)|}=\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۳}$$

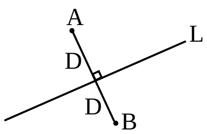
**روش دوم:** معادلات پارامتری خط عبارت‌اند از: $x=۱ \ , \ y=t \ , \ z=۲-t$ پس اگر نقطه‌ی $A$ روی خط $L$ باشد، به ازای یک مقدار $t$ حقیقی، مختصات این نقطه $A(۱,t,۲-t)$ است. اگر فاصله‌ی مبدأ از $A$ را با $d$ نشان بدهیم، داریم:

$$d^۲=۱^۲+t^۲+(۲-t)^۲=۲t^۲-۴t+۵$$

فاصله‌ی مبدأ از خط $L$، کوتاه‌ترین فاصله بین مبدأ و نقاط خط $L$ است. یعنی این فاصله وقتی به دست می‌آید که مقدار $d$ (و به تبع آن مقدار $d^۲$) می‌نیمم شود، که با استفاده از مربع کامل سازی (یا استفاده از مشتق) این مقدار به دست می‌آید:

$$d^۲=۲(t^۲-۲t+۱)+۳=۲(t-۱)^۲+۳\geq ۳\Rightarrow d\geq\sqrt{۳}\Rightarrow d_{min}=\sqrt{۳}$$

**B** **۲۷- گزینه‌ی (۳)**




خط داده شده را $L$ می‌نامیم. فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ از خط $L$ برابر $D$ باشد، در این صورت چون نقطه‌ی $B$ قرینه‌ی نقطه‌ی $A$ نسبت به خط $L$ است، پس طول پاره‌خط $AB$ برابر $۲D$ است.
نقطه‌ی $P=(-۲,۱,۰)$ روی خط $L$ قرار دارد و $u=(۳,۴,۱)$ بردار هادی $L$ است، پس:

$$D=\frac{|\overrightarrow{AP}\times u|}{|u|}=\frac{|(-۷,-۱,-۱)\times(۳,۴,۱)|}{|(۳,۴,۱)|}=\frac{|(۳,۴,-۲۵)|}{\sqrt{۲۶}}=\frac{\sqrt{۶۵۰}}{\sqrt{۲۶}}=۵$$

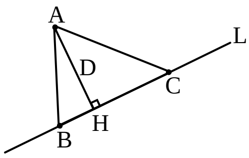
پس: $|AB|=۱۰$.

**B** **۲۸- گزینه‌ی (۲)**

خط داده شده را $L$ می‌نامیم. نقطه‌ی $P=(-۷,-۲,۲)$ روی این خط قرار دارد و $u=(۴,۲,۱)$ بردار هادی این خط است. فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ از $L$ برابر است با:

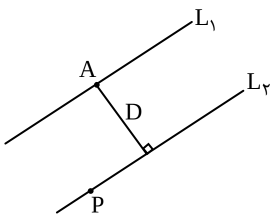
$$D=\frac{|\overrightarrow{AP}\times u|}{|u|}=\frac{|(-۱۰,۲,-۶)\times(۴,۲,۱)|}{|(۴,۲,۱)|}=\frac{|(۱۴,-۱۴,-۲۸)|}{\sqrt{۲۱}}=\frac{\sqrt{۱۴^۲+۱۴^۲+۲۸^۲}}{\sqrt{۲۱}}=\frac{۱۴\sqrt{۶}}{\sqrt{۲۱}}=\frac{۱۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}=\frac{۱۴\sqrt{۱۴}}{۷}=۲\sqrt{۱۴}$$

پس اندازه‌ی ارتفاع $AH$ از مثلث $ABC$ برابر $۲\sqrt{۱۴}$ است، لذا:




$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|AH||BC|=۱۴$$

**B** **۲۹- گزینه‌ی (۲)**

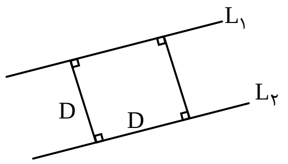



دو خط داده شده را به ترتیب $L_۱$ و $L_۲$ می‌نامیم. نقطه‌ی $A=(۰,۰,۰)$ روی $L_۱$ و نقطه‌ی $P=(۳,۱,۵)$ روی $L_۲$ قرار دارد و $u=(۲,۳,۱)$ بردار هادی این دو خط است. برای محاسبه‌ی فاصله‌ی این دو خط کافی است فاصله‌ی $A$ را از $L_۲$ بیابیم. این فاصله برابر است با:

$$D=\frac{|\overrightarrow{AP}\times u|}{|u|}=\frac{|(۳,۱,۵)\times(۲,۳,۱)|}{|(۲,۳,۱)|}=\frac{|(-۱۴,۷,۷)|}{\sqrt{۱۴}}=\frac{\sqrt{۱۴^۲+۷^۲+۷^۲}}{\sqrt{۱۴}}=\frac{۷\sqrt{۶}}{\sqrt{۱۴}}=\frac{۷\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}}=\sqrt{۲۱}$$

**B** **۳۰- گزینه‌ی(۴)**

دو خط داده شده را به ترتیب $L_۱$ و $L_۲$ می‌نامیم. طول هر ضلع مربع برابر فاصله‌ی این دو خط از یک‌دیگر است. نقطه‌ی $A=(۰,۰,۰)$ روی $L_۱$ و نقطه‌ی $P=(-۳,-۵,۰)$ روی $L_۲$ قرار دارد و $u=(۲,۲,۱)$ بردار هادی این دو خط است. فاصله‌ی بین $L_۱$ و $L_۲$ برابر فاصله‌ی $A$ از $L_۲$ است و این فاصله برابر است با:




$$D=\frac{|\overrightarrow{AP}\times u|}{|u|}=\frac{|(-۳,-۵,۰)\times(۲,۲,۱)|}{|(۲,۲,۱)|}=\frac{|(-۵,۳,۴)|}{۳}=\frac{\sqrt{۵۰}}{۳}$$

پس مساحت مربع برابر $D^۲=\frac{۵۰}{۹}$ است.

**B** **۳۱- گزینه‌ی (۱)**

**شرط توازی دو خط:** اگر دو خط موازی باشند، بردارهای هادی آن دو نیز موازی خواهند بود. پس دو خط $L_۱$ و $L_۲$ با بردارهای هادی $u_۱$ و $u_۲$ موازی‌اند، اگر و تنها اگر، $u_۱$ و $u_۲$ هم راستا (یا همان موازی) باشند. در حالت خاصی که دو خط موازی، نقطه‌ی مشترکی مانند $A$ داشته باشند، منطبق خواهند بود که حالت خاصی از توازی است.

فرض کنید $L_۱$ خط به معادلات $\frac{x+۳}{۵}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z-۲}{۳}$ و $L_۲$ خط به معادلات $\frac{x-۷}{۱۰}=\frac{y-۵}{۴}=\frac{z-۸}{۶}$ باشد، در این صورت بردارهای هادی $L_۱$ و $L_۲$ به ترتیب برابر $u_۱=(۵,۲,۳)$ و $u_۲=(۱۰,۴,۶)$ هستند و $A=(-۳,۱,۲)$ نقطه‌ای روی $L_۱$ است. چون $u_۲=۲u_۱$، پس $u_۱$ و $u_۲$ موازی‌اند. هم‌چنین نقطه‌ی $A$ در معادلات $L_۲$ صدق می‌کند، زیرا:

$$\frac{-۳-۷}{۱۰}=\frac{۱-۵}{۴}=\frac{۲-۸}{۶}$$

پس نقطه‌ی $A$ روی $L_۲$ قرار دارد و بنابراین دو خط موازی با یک نقطه‌ی مشترک داریم. نتیجه می‌گیریم $L_۱$ و $L_۲$ بر هم منطبق‌اند.

**تذکر:** دقت کنید که هر دو گزینه‌ی (۱) و (۲) صحیح‌اند، ولی گزینه‌ی (۱) وضعیت را دقیق‌تر نشان می‌دهد.

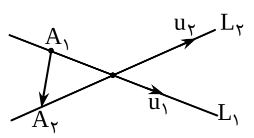
**B** **۳۲- گزینه‌ی(۲)**

فرض کنید $L_۱$ خط به معادلات $\frac{x-۳}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z+۱}{۴}$ و $L_۲$ خط به معادلات $۴x+۱=۶y=۳z-۲$ باشد، در این صورت بردارهای هادی $L_۱$ و $L_۲$ به ترتیب برابر $u=(۳,۲,۴)$ و $u_۲=(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۳})$ هستند و $A=(۳,۱,-۱)$ نقطه‌ای روی $L_۱$ است. چون $u_۱=۱۲u_۲$، پس $u_۱$ و $u_۲$ موازی‌اند و دو خط $L_۱$ و $L_۲$ نیز موازی خواهند بود. هم‌چنین نقطه‌ی $A$ در معادلات $L_۲$ صدق نمی‌کند، پس $L_۱$ و $L_۲$ منطبق نیستند.

**B** **۳۳- گزینه‌ی (۳)**

**شرط تقاطع دو خط:** فرض کنید $u_۱$ و $u_۲$ به ترتیب بردارهای هادی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ باشند، $A_۱$ نقطه‌ای روی $L_۱$ و $A_۲$ نقطه‌ای روی $L_۲$ باشد، در ضمن بردارهای $u_۱$ و $u_۲$ هم راستا نباشند. در این صورت $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع‌اند اگر و تنها اگر بردارهای $u_۱$، $u_۲$ و $\overrightarrow{A_۱A_۲}$ هم صفحه باشند، یعنی:

$$\overrightarrow{A_۱A_۲}.(u_۱\times u_۲)=۰$$




خط $\frac{x+۴}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=z$ را $L_۱$ و خط $۳x-۴=۲y-۸=z$ را $L_۲$ می‌نامیم. در این صورت بردار هادی $L_۱$ برابر $u_۱=(۳,۲,۱)$ و بردار هادی $L_۲$ برابر $u_۲=(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲},۱)$ است. چون $u_۱$ و $u_۲$ هم راستا نیستند، پس $L_۱$ و $L_۲$ موازی نیستند. حال نقطه‌ی $A_۱=(-۴,۱,۰)$ روی $L_۱$ و نقطه‌ی $A_۲=(\frac{۴}{۳},۴,۰)$ روی $L_۲$ قرار دارد. با محاسبه می‌توان دید که $\overrightarrow{A_۱A_۲}.(u_۱\times u_۲)=۰$، پس $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع‌اند.

**روش دیگر:** دیدیم که $L_۱$ و $L_۲$ موازی نیستند، پس این دو خط یا متقاطع‌اند یا متنافر. اگر نقطه‌ای از $L_۱$ در معادلات $L_۲$ صدق کند، آن‌گاه $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع و در غیر این صورت متنافرند. پس یک نقطه‌ی عمومی روی $L_۱$ مانند $A=(۳t-۴,۲t+۱,t)$ در نظر می‌گیریم. اگر $A$ در معادلات $L_۲$ صدق کند، آن‌گاه:

$$۳(۳t-۴)-۴=۲(۲t+۱)-۸=t$$

می‌بینیم که این معادلات به ازای $t=۲$ برقرارند. پس نقطه‌ی $A=(۲,۵,۲)$ هم روی $L_۱$ قرار دارد و هم روی $L_۲$، پس $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع‌اند.

C **۳۴- گزینه‌ی (۴)**

خط $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}$ را $L_1$ و خط $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3}$ را $L_2$ می‌نامیم. در این صورت $u_1=(2,4,3)$ بردار هادی $L_1$ و $u_2=(4,2,3)$ بردار هادی $L_2$ است. چون $u_1$ و $u_2$ هم راستا نیستند، پس $L_1$ و $L_2$ موازی نیستند. حال $A_1=(0,0,0)$ نقطه‌ای روی $L_1$ و $A_2=(-1,2,1)$ نقطه‌ای روی $L_2$ است. با محاسبه می‌توان دید که $\overrightarrow{A_1A_2}.(u_1\times u_2)=-6$، پس $L_1$ و $L_2$ متقاطع نیستند و لذا متنافرند.
این سؤال را می‌توانیم با روش دوم سؤال قبل نیز حل کنیم.

B **۳۵- گزینه‌ی (۴)**

خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{a}=z$ را $L_1$ و خط $\frac{x-5}{4}=\frac{y-b}{6}=\frac{z-c}{d}$ را $L_2$ می‌نامیم. بردار هادی $L_1$ برابر $u_1=(2,a,1)$ و بردار هادی $L_2$ برابر $u_2=(4,6,d)$ است. چون $L_1$ و $L_2$ بر هم منطبق‌اند، پس $u_1$ و $u_2$ موازی‌اند، لذا $\frac{2}{4}=\frac{a}{6}=\frac{1}{d}$، پس $a=3$ و $d=2$. نقطه‌ی $A=(1,-1,0)$ روی $L_1$ قرار دارد و چون $L_2$ بر $L_1$ منطبق است، پس $A$ باید در معادلات $L_2$ صدق کند، لذا:
$\frac{1-5}{4}=\frac{-1-b}{6}=\frac{0-c}{2}$، پس $b=5$ و $c=2$، لذا $a+b+c+d=12$.

C **۳۶- گزینه‌ی (۳)**

خط $x=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ را $L_1$ و خط $x=y+1=\frac{z-1}{m}$ را $L_2$ می‌نامیم. بردار هادی $L_1$ برابر $u_1=(1,3,2)$ و بردار هادی $L_2$ برابر $u_2=(1,1,m)$ است. همچنین نقطه‌ی $A_1=(0,1,0)$ روی $L_1$ و نقطه‌ی $A_2=(0,-1,1)$ روی $L_2$ قرار دارد. با محاسبه می‌توان دید که:
$\overrightarrow{A_1A_2}.(u_1\times u_2)=2m-6$
حال اگر $L_1$ و $L_2$ متقاطع باشند، آن‌گاه $2m-6=0$ و لذا $m=3$.
روش دیگر: چون می‌خواهیم $L_1$ و $L_2$ متقاطع باشند، پس باید نقطه‌ای از $L_1$ در معادلات $L_2$ صدق کند. پس یک نقطه‌ی عمومی مانند $A=(t,3t+1,2t)$ روی $L_1$ در نظر می‌گیریم. اگر $A$ در معادلات $L_2$ صدق کند، آن‌گاه:
$t=3t+2=\frac{2t-1}{m}$
از $t=3t+2$ نتیجه می‌گیریم $t=-1$ و از $t=\frac{2t-1}{m}$ نتیجه می‌گیریم $m=3$.

B **۳۷- گزینه‌ی (۴)**

فرض کنید $A$ نقطه‌ی تقاطع دو خط داده شده باشد. چون $A$ روی خط $x+1=y-3=\frac{z}{2}$ قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند $t$، $A=(t-1,t+3,2t)$. حال چون $A$ روی خط $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-3}{3}$ نیز قرار دارد، پس باید در معادلات این خط صدق کند، لذا:
$$\frac{t-1}{2}=\frac{(t+3)-1}{5}=\frac{2t-3}{3}$$
پس $t=3$ و لذا $A=(2,6,6)$. در نتیجه مجموع مختصات $A$ برابر ۱۴ است.

C **۳۸- گزینه‌ی (۴)**

خط گذرا از $A$ و $B$ را $L_1$ و خط $\frac{x+3}{4}=\frac{y}{m}=z-n$ را $L_2$ می‌نامیم. بردار هادی $L_1$ برابر $\overrightarrow{AB}=(-3,9,-6)$ و بردار هادی $L_2$ برابر $u=(4,m,1)$ است، لذا:
$\overrightarrow{AB}.u=-12+9m-6=9m-18$
چون $L_1$ و $L_2$ متعامدند، پس $\overrightarrow{AB}$ و $u$ نیز متعامدند، لذا $\overrightarrow{AB}.u=0$، پس $m=2$. معادلات پارامتری خط $L_1$ عبارت است از:
$$\begin{cases}x=-3t+2\\y=9t-1\\z=-6t+6\end{cases}$$
فرض کنید $C$ نقطه‌ی تقاطع $L_1$ و $L_2$ باشد. چون $C$ روی $L_1$ قرار دارد، پس به ازای عددی حقیقی مانند $t$، $C=(-3t+2,9t-1,-6t+6)$ و چون $C$ روی $L_2$ قرار دارد، پس باید در معادلات $L_2$ صدق کند، لذا:
$$\frac{(-3t+2)+3}{4}=\frac{9t-1}{2}=(-6t+6)-n$$
با حل این معادلات نتیجه می‌گیریم $t=\frac{1}{3}$ و $n=3$، پس $m+n=5$.

# خودآزمایی ۱

۱- معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه‌ی $A=(2,3,1)$ و موازی با بردار $u=3i-2k$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=2t+3\\y=3t\\z=t-2\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=2t-3\\y=3t\\z=t+2\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=3t+2\\y=3\\z=-2t+1\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=3t-2\\y=2\\z=-2t-1\end{cases}$

۲- معادلات پارامتری خط $d$ به صورت $x=5t-1$ ، $y=2t+4$ ، $z=t-3$ است. فرض کنید $A$ نقطه‌ی تقاطع خط $d$ با صفحه‌ی $xz$ باشد. مجموع مختصات $A$ برابر کدام است؟

۱) $-16$ ۲) $-8$ ۳) $2$ ۴) $8$

۳- خط گذرا از نقطه‌ی $A=(4,3,1)$ موازی با بردار $u=2i+j+5k$ شامل کدام نقطه است؟

۱) $(6,4,5)$ ۲) $(0,1,-4)$ ۳) $(10,4,11)$ ۴) $(2,2,-4)$

۴- به ازای کدام $m$ خط $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+3}{m}$ یکی از محورهای مختصات را قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۳) $6$ ۴) $-6$

۵- خط گذرا از نقاط $A=(2,-1,2)$ و $B=(3,4,1)$ صفحه‌ی $yz$ را در نقطه‌ی $C$ قطع می‌کند. فاصله‌ی $C$ از محور $y$ برابر کدام است؟

۱) $2$ ۲) $4$ ۳) $9$ ۴) $11$

۶- معادلات خط گذرا از نقطه‌ی $A=(3,5,1)$ و عمود بر خطوط $\frac{x}{3}=y=\frac{z}{2}$ و $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z$ کدام است؟

۱) $\frac{x-3}{7}=y-5=\frac{z-1}{-7}$ ۲) $\frac{x-3}{-7}=y-5=\frac{z-1}{7}$

۳) $\frac{x-3}{5}=y-5=\frac{z-1}{-7}$ ۴) $\frac{x-3}{5}=5-y=\frac{z-1}{-7}$

۷- فرض کنید $A=(1,0,5)$ ، $\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$ و $\overrightarrow{AC}=(4,3,0)$. نیمساز خارجی زاویه‌ی $A$ از مثلث $ABC$ صفحه‌ی $xy$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $(-5,-7,0)$ ۲) $(7,7,0)$ ۳) $(3,9,0)$ ۴) $(-9,-4,0)$

۸- فرض کنید $A$ نقطه‌ای از خط $\frac{x+5}{3}=y+1=z$ باشد و فاصله‌ی $A$ از محور $x$ برابر ۵ باشد. فاصله‌ی $A$ از صفحه‌ی $yz$ برابر کدام است؟

۱) $4$ ۲) $5$ ۳) $6$ ۴) $7$

۹- فرض کنید $L$ خطی گذرا از نقطه‌ی $A=(-2,5,0)$ و عمود بر بردار $u=3i+4j+k$ باشد که خط $\frac{x+3}{3}=\frac{y+1}{5}=z+3$ را نیز قطع می‌کند. بردار هادی $L$ کدام است؟

۱) $3i-2j-k$ ۲) $2i-j-2k$ ۳) $i-j+k$ ۴) $3i-j-5k$

۱۰- فرض کنید $d$ خطی موازی با محور $y$ باشد و خطوط $\frac{x}{2}=y=\frac{z}{3}$ و $x=y-1=\frac{z+2}{2}$ را به ترتیب در نقاط $A$ و $B$ قطع کند. مجموع مختصات نقطه‌ی $A$ چند است؟

۱) $6$ ۲) $8$ ۳) $10$ ۴) $12$

۱۱- مکان هندسی نقاطی از فضا که در معادلات $z=\frac{|y+1|}{2}=|x-1|$ صدق می‌کنند کدام است؟

۱) اجتماع دو خط ۲) اجتماع چهار خط ۳) اجتماع دو نیم‌خط ۴) اجتماع چهار نیم‌خط

۱۲- فاصله‌ی نقطه‌ی $A=(1,1,2)$ از خط $z=4, x=\frac{y+1}{2}$ برابر کدام است؟

۱) $1$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2$ ۴) $\sqrt{5}$

۱۳- فرض کنید اضلاع $AB$ و $CD$ از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به ترتیب روی خطوط $\frac{z}{۳}=\frac{y}{۲}=x$ و $x+۱=\frac{y-۲}{۲}=\frac{z-۵}{۳}$ قرار داشته باشند و $|AB|=\sqrt{۲۱}$. مساحت این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) ۱۲ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۱۴- فرض کنید دو خط زیر بر یک‌دیگر منطبق باشند:

$$x+۴=\frac{y-۳}{۲}=\frac{z-n}{۳} \quad , \quad x=\frac{y-m}{۲}=\frac{z+۱}{۳}$$

حاصل $m+n$ برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۵- وضعیت نسبی دو خط زیر چگونه است؟

$$x=y+۲=-z \quad , \quad x=y+۲=z+۱$$

۱) منطبق ۲) موازی ۳) متقاطع ۴) متنافر

۱۶- به ازای کدام $m$ خطوط زیر متعامدند؟

$$mx=۲y+۱=۴z-۲ \quad , \quad ۲x+۱=my-۳=z$$

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴-

۱۷- به ازای کدام $m$، خطوط $x-۲=\frac{y+۲}{۳}=\frac{z+۳}{m}$ و $\frac{x+۱}{۲}=y+۱=z-۲$ متقاطع‌اند؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸- فرض کنید $A$ نقطه‌ی تقاطع دو خط $\frac{z}{۷}=\frac{y-۱}{۳}$ , $x=۴$ و $\frac{x}{۲}=y-۲=\frac{z-۱}{۳}$ باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ از مبدأ مختصات برابر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۳

## پاسخ‌نامه‌ی خودآزمایی ۱

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱- ○●○○ | ۲- ○○○● | ۳- ●○○○ | ۴- ●○○○ |
| ۵- ○○●○ | ۶- ●○○○ | ۷- ○○○● | ۸- ●○○○ |
| ۹- ○○●○ | ۱۰- ●○○○ | ۱۱- ●○○○ | ۱۲- ○●○○ |
| ۱۳- ○○●○ | ۱۴- ●○○○ | ۱۵- ○●○○ | ۱۶- ●○○○ |
| ۱۷- ●○○○ | ۱۸- ○●○○ | | |