

فصل ۱

استدلال ریاضی

(صفحه‌ی ۴ تا ۳۳ کتاب درسی)

مسائل ستاره‌دار برای علاقه‌مندان است و احتمال طرح آن‌ها در امتحانات هماهنگ کشوری و استانی، کم‌تر از سایر سؤالات می‌باشد.

درک شهودی - استدلال تمثیلی (قیاسی) - استدلال استقرایی

۱- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) می‌تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد.

ب) انواع تمثیل می‌توانند در ایجاد برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی کمک مؤثری باشند.

ج) استدلال روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است. (هماهنگ کشوری - شهریور ۸۹)

د) عالمان تجربی مشاهدات خود را نظم داده و با توجه به نظم حاکم بر آن‌ها، قوانین عمومی طبیعت را کشف می‌کنند. در علوم تجربی به این نوع استدلال و در ریاضی به آن گفته می‌شود.

۲- درک شهودی را تعریف کنید و برای آن یک مثال بزنید. (امتحانات تهران - ۸۹)

۳- اگر انسان از بلندی یا کوتاهی سایه‌ی اشیا در روز پی به موقعیت زمان ببرد، از کدام استدلال استفاده کرده است؟ (امتحانات تهران - ۸۸)

۴- استدلال تمثیلی را تعریف کنید و برای آن یک مثال بزنید. (امتحانات شهرستان‌ها - ۸۸)

۵- استدلال استقرایی را تعریف کنید و برای آن یک مثال بزنید. (امتحانات شهرستان‌ها - ۸۸)

۶- الف) در الگوی مقابل، حاصل سطر چهارم را حدس بزنید.

$$\sqrt{۱۲۱} = ۱۱$$

$$\sqrt{۱۲۳۲۱} = ۱۱۱$$

$$\sqrt{۱۲۳۴۳۲۱} = ۱۱۱۱$$

$$\sqrt{۱۲۳۴۵۴۳۲۱} = ?$$

ب) برای حدس خود از چه استدلالی استفاده کردید؟

(امتحانات تهران - ۸۹)

۷- ضرب‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$37 \times 18 = 666$$

الف) چه الگویی بین این ضرب‌ها مشاهده می‌کنید؟

$$37 \times 21 = 777$$

$$37 \times 24 = 888$$

ب) مقدار سطر چهارم را بدون محاسبه حدس بزنید.

$$37 \times 27 = ?$$

$$37 \times 30 = ?$$

ج) از چه استدلالی برای این حدس استفاده کردید؟

د) حاصل سطر چهارم را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بوده است؟

ه) ابتدا حاصل سطر پنجم را حدس بزنید، سپس مقدار آن را به‌دست آورید. آیا حدس شما درست بوده است؟

و) در مورد نوع استدلال به کار برده چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۸- ضعف اساسی استدلال استقرایی چیست؟

استقرای ریاضی

۹- جملات درست را با علامت ✓ مشخص کنید.

الف) اگر از درستی $P(k)$ ، درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست است. ☐

ب) اصل استقرا برای اثبات روابط ریاضی برای هر عدد حقیقی، به کار می‌رود. ☐

ج) اگر $P(m)$ برای $m > 1$ درست باشد و از درستی $P(k)$ ، درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است. ☐

د) در اصل استقرای تعمیم‌یافته، اولین مرحله‌ی استقرا از یک عدد طبیعی $n > 1$ آغاز می‌شود. ☐

۱۰- با استفاده از استقرای ریاضی، ثابت کنید تساوی‌های زیر به ازای هر عدد طبیعی n برقرار هستند.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

(همهانگ کشوری - ۸۱)

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$$

(همهانگ فارغ از کشور - فرداد ۸۶)



$$\text{ج) } ۳ + ۶ + ۹ + + ۳n = \frac{۳(n^۲ + n)}{۲}$$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۸۶)

$$\text{د) } ۱ + ۴ + ۷ + + (۳n - ۲) = \frac{n(۳n - ۱)}{۲}$$

(هماهنگ کشوری - دی ۸۴)

$$\text{ه) } ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ... + n^۳ = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۹۰ و هماهنگ خارج از کشور - فرورداد ۸۵)

$$\text{و) } ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ... + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$\text{ز) } ۱ \times ۲ + ۲ \times ۵ + ... + n(۳n - ۱) = n^۲(n + ۱)$$

(هماهنگ کشوری - مرداد ۹۱)

$$\text{ح) } (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(هماهنگ کشوری - دی ۸۳ و هماهنگ خارج از کشور - فرورداد ۸۳)

.....

.....

.....

.....

.....

$$\text{ط) } (1 \times 3) + (2 \times 5) + (3 \times 7) + \dots + (n \times (2n+1)) = \frac{2n^3 + 9n^2 + 5n}{6}$$

(هماهنگ کشوری - فرورداد ۸۹)

.....

.....

.....

.....

.....

$$\text{ی) } \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

(هماهنگ کشوری - دی ۸۶ و هماهنگ خارج از کشور - دی ۸۲)

.....

.....

.....

.....

.....

$$\text{ک) } \frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15} + \dots + \frac{1}{(2n+7)(2n+9)} = \frac{n}{9(2n+9)}$$

(هماهنگ کشوری - دی ۹۰)

.....

.....

.....

.....

.....

$$\text{ج) } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

(هماهنگ کشوری و هماهنگ خارج از کشور - فرورداد ۸۴)

.....

.....

.....

.....

.....



$$\text{م)} \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

(هماهنگ کشوری - دی ۸۹ و فرورداد ۸۵)

$$\text{ن)} 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} ; (a \neq 1)$$

$$\text{س)} 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n = (n-1) \times 2^{n+1} + 2$$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۸۸)

$$\text{ع)} \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

(هماهنگ کشوری - فرورداد ۹۰ و هماهنگ فارج از کشور - فرورداد ۸۶)

$$\text{ف)} 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

(هماهنگ فارج از کشور - شهریور ۸۶)

$$\text{ص)} \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

(هماهنگ کشوری - فرورداد ۸۸)

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2} \quad \text{ق)$$

(هماهنگ کشوری - دی ۸۷)

$$\star \log x^n = n \log x$$

$$\star ۱۱ - \text{با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید، اگر } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ آنگاه به ازای هر عدد طبیعی } n, \text{ داریم } A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}.$$

$$\star ۱۲ - \text{هرگاه } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ با استقرای ریاضی ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی } n, \text{ داریم } A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{(امتحانات تهران - دی ۷۷)}$$

$$\star ۱۳ - \text{با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی } n, \text{ عدد } 9^n - 1 \text{ بر } 8 \text{ بخش پذیر است.} \quad \text{(هماهنگ فارج از کشور - دی ۸۵)}$$



۱۴- با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، عدد $1 - 11^n = P_n$ بر 10 بخش پذیر است. (هماهنگ کشوری - فرداد ۸۷)

۱۵- با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، عدد $5 + 4^n$ بر 3 بخش پذیر است. (هماهنگ کشوری - ۸۳)

۱۶- برای هر عدد طبیعی n ، با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید $1 - 4n - 5^n$ بر عدد 16 بخش پذیر است. (هماهنگ کشوری - فرداد ۸۶)

۱۷- برای هر عدد طبیعی n ، به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید $1 - 15n - 4^n$ بر 9 بخش پذیر است. (امتحانات شهرستانها - ۸۹)

۱۸- با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، عدد $3^{2n} - 3^n$ بر 7 بخش پذیر است. (هماهنگ کشوری - ۸۲)

۱۹- با استدلال استقرای ریاضی، درستی نامساوی‌های زیر را برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید:

الف) $(1 + \sqrt{3})^n \geq 1 + n\sqrt{3}$

(همهانگ کشوری - فرورداد ۹۱ و دی ۸۸ و شهریور ۸۷ و ۸۵)

ب) $1 + 2 + 3 + \dots + n \leq \frac{1}{8}(2n+1)^2$

(امتحانات شهرستانها - ۸۹)

ج) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq n+1$

(امتحانات تهران - ۸۸)

د) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2n}{n+1}$

(امتحانات تهران - ۸۸)

هـ) $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 3 - \frac{1}{n}$

(امتحانات شهرستانها - ۸۸)



$$و) 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

(امتحانات تهران - ۸۸)

$$ز) |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|, \quad (x_i \in \mathbb{R})$$

استقرای تعمیم یافته

۲۰- جدول زیر را که مربوط به مجموع زوایای داخلی n ضلعی‌های محدب است، در نظر بگیرید:

n (تعداد اضلاع)	۳	۴	۵	۶	۷
مجموع زوایای داخلی	180°	$2 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$4 \times 180^\circ$

الف) با توجه به الگویی که مشاهده می‌کنید، مجموع زوایای داخلی ۷ ضلعی را در جدول بنویسید.

ب) با توجه به روند جدول، حدس می‌زنید مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب، بر حسب n برابر چه عبارتی باشد؟

ج) با استفاده از اصل استقرای تعمیم یافته، حدس خود را برای هر عدد طبیعی $n \geq 3$ ، ثابت کنید.

$$۲۱- با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$.$$

۲۲- در هر یک از قسمت‌های زیر ابتدا عدد طبیعی مناسب $m > 1$ را یافته و سپس با استفاده از اصل استقرای تعمیم‌یافته، درستی هر یک از روابط را برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ ، ثابت کنید.

الف) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$

(هماهنگ کشوری - فرداد ۸۳)

ب) $2^n \geq 3n + 2$

(امتحانات تهران - ۸۸)

ج) $n! > 3^n$

(امتحانات تهران - ۸۸)

د) $n! > n^2$

ه) $2^n > n^2$

(هماهنگ خارج از کشور - دی ۸۶)



و) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > n$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۸۹)

.....

.....

.....

.....

.....

ز) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2}$

(هماهنگ کشوری - ۸۲)

.....

.....

.....

.....

.....

ح) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

(امتحانات شهرستانها - ۸۸)

.....

.....

.....

.....

.....

ط) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$

.....

.....

.....

.....

.....

ی) $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

.....

.....

.....

.....

.....