فصل اول

جلسه اول

CHAPTER ONE

۱

الگو و دنباله

دنباله

می‌دانیم قاره‌ها در ابتدا به هم پیوسته بوده و یک قاره‌ی بزرگ را تشکیل می‌دادند و با گذشت زمان با حرکت قسمت‌هایی از این خشکی بزرگ، قاره‌ها به‌وجود آمدند. با ذکر این مقدمه مثال زیر را حل می‌کنیم تا بتوانیم مفهوم دنباله را بهتر درک کنیم.

مثال ا: فرض کنید قاره‌ها در هر سال ۴ سانتی‌متر حرکت می‌کنند. می‌خواهیم حرکت قاره‌ها را از سال ۱۳۹۳ بررسی کنیم. جدول زیر میزان حرکت قاره‌ها را در ۵ سال آینده نشان می‌دهد:

(مشابه فعالیت کتاب درسی- صفحه‌ی ۲)

۵	۴	۳	۲	۱	عدد سال
۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	میزان حرکت قاره‌ها برحسب سانتی‌متر

آ) جدول فوق را تا سال ۸اُم کامل کنید.

ب) پس از گذشت ۱۲ سال قاره‌ها چند سانتی‌متر حرکت می‌کنند؟

پ) در چه سالی قاره‌ها به اندازه‌ی ۱۲۰ سانتی‌متر حرکت می‌کنند؟

ت) پس از گذشت n سال میزان حرکت قاره‌ها چقدر است؟

پاسخ :

آ)

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	عدد سال
۳۲	۲۸	۲۴	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	میزان حرکت قاره‌ها برحسب سانتی‌متر

ب) همان‌طور که می‌دانید هر سال قاره‌ها، ۴ سانتی‌متر جابه‌جا می‌شوند پس بعد از گذشت ۱۲ سال قاره‌ها به اندازه‌ی ۱۲×۴ یعنی ۴۸ سانتی‌متر حرکت می‌کنند.

پ) فرض می‌کنیم قاره‌ها بعد از گذشت k سال ۱۲۰ سانتی‌متر حرکت کنند، در این صورت با یک تناسب ساده داریم:

$$\frac{\text{۱ سال}}{k} = \frac{\text{۴ سانتی‌متر حرکت می‌کنند.}}{۱۲۰} \Rightarrow ۴k = ۱۲۰ \Rightarrow k = ۳۰$$

یعنی پس از گذشت ۳۰ سال، قاره‌ها ۱۲۰ سانتی‌متر حرکت می‌کنند.

ت) اگر میزان حرکت قاره‌ها پس از گذشت n سال را با نماد a_n نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{\text{۱ سال}}{n} = \frac{\text{۴ سانتی‌متر حرکت می‌کنند.}}{a_n} \Rightarrow a_n = ۴n$$

استاد! این رابطه به چه دردی می‌خوره؟

جواب: عزیزم! با استفاده از این رابطه می‌تونیم میزان حرکت قاره‌ها رو در هر سال دلخواه محاسبه کنیم. مثلاً بعد از گذشت ۷۰ سال قاره‌ها به اندازه‌ی $a_{۷۰} = ۴ \times ۷۰ = ۲۸۰$ سانتی‌متر حرکت می‌کنند. همچنین اگر میزان حرکت قاره‌ها را در سال‌های متوالی به‌صورت زیر بنویسیم به یک دنباله از اعداد به شکل زیر می‌رسیم:

$$۴, ۸, ۱۲, ۱۶, \ldots, ۴n, \ldots$$

اولین جمله‌ی این دنباله ۴ است و جملات دوم، سوم و چهارم به ترتیب ۸، ۱۲ و ۱۶ می‌باشند و جمله‌ی nاُم این دنباله برابر ۴n است که به آن جمله‌ی عمومی دنباله نیز می‌گوییم.

تعریف: یک سری از اعداد که آن‌ها را پشت سر هم نوشته باشیم، یک **دنباله** از اعداد نامیده می‌شود و به هر عدد که در یک دنباله قرار گرفته است یک جمله‌ی آن دنباله گفته می‌شود.

جمله‌ی عمومی یک دنباله

تعریف: جمله‌ی nاُم دنباله را که در آن n یک عدد طبیعی دلخواه است **جمله‌ی عمومی دنباله** می‌نامیم که معمولاً با a_n، b_n، u_n و ... نشان می‌دهیم. از روی جمله‌ی عمومی دنباله و با قراردادن مقادیر طبیعی به جای n می‌توانیم هر جمله‌ی دلخواه از دنباله را مشخص کنیم.

توجه: اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله a_n باشد می‌توان دنباله را با نماد $\{a_n\}$ نشان داد.

مثال ۲: **جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n = ۴n - ۱$ می‌باشد. چهار جمله‌ی اول آن را بنویسید.**

پاسخ : کافی است در جمله‌ی عمومی دنباله به جای n، مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را قرار دهیم:

جمله‌ی اول: $a_۱ = ۴(۱) - ۱ = ۳ \Rightarrow a_۱ = ۳$ ، جمله‌ی دوم: $a_۲ = ۴(۲) - ۱ = ۷ \Rightarrow a_۲ = ۷$

جمله‌ی سوم: $a_۳ = ۴(۳) - ۱ = ۱۱ \Rightarrow a_۳ = ۱۱$ ، جمله‌ی چهارم: $a_۴ = ۴(۴) - ۱ = ۱۵ \Rightarrow a_۴ = ۱۵$

مثال ۳: **جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $b_n = \frac{۳n+۱}{n+۱}$ می‌باشد:**

آ) جمله‌ی سوم و نهم آن را مشخص کنید. **ب) چندمین جمله‌ی آن $\frac{۲۳}{۸}$ می‌باشد؟** **پ) چندمین جمله‌ی آن ۱۰ است؟**

پاسخ : آ) جمله‌ی نهم : $b_۹ = \frac{۳(۹)+۱}{۹+۱} = \frac{۲۸}{۱۰} = ۲/۸$ ، جمله‌ی سوم : $b_۳ = \frac{۳(۳)+۱}{۳+۱} = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$

ب) چون در سؤال پرسیده شده است که چندمین جمله‌ی دنباله $\frac{۲۳}{۸}$ است، کافیست جمله‌ی عمومی را برابر $\frac{۲۳}{۸}$ قرار دهیم و مقدار n را بیابیم. (دقت کنید که n باید عددی طبیعی باشد.)

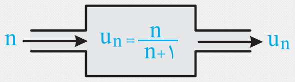
$$b_n = \frac{۲۳}{۸} \Rightarrow \frac{۳n+۱}{n+۱} = \frac{۲۳}{۸} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲۴n + ۸ = ۲۳n + ۲۳ \Rightarrow n = ۱۵$$

پس جمله‌ی پانزدهم دنباله مساوی با $\frac{۲۳}{۸}$ است.

پ)
$$b_n = ۱۰ \Rightarrow \frac{۳n+۱}{n+۱} = \frac{۱۰}{۱} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۰n + ۱۰ = ۳n + ۱ \Rightarrow ۷n = -۹ \Rightarrow n = \frac{-۹}{۷} \notin \mathbb{N}$$

n باید یک عدد طبیعی باشد پس هیچ جمله‌ای از دنباله برابر با ۱۰ نیست.

مثال ۴: **دنباله‌ی u_n مانند ماشین (سیستم) مقابل عمل می‌کند. یعنی n به آن وارد شده و u_n از آن خارج می‌شود.**



آ) جمله‌ی چهارم آن را به‌دست آورید.

ب) چندمین جمله‌ی این دنباله ۰/۸۷۵ می‌باشد؟

پ) چه تعداد از جملات دنباله کوچک‌تر از $\frac{۹}{۱۰}$ هستند؟

پاسخ : آ) جمله‌ی چهارم: $u_۴ = \frac{۴}{۴+۱} = \frac{۴}{۵}$

ب)
$$u_n = ۰/۸۷۵ \Rightarrow \frac{n}{n+۱} = ۰/۸۷۵ \Rightarrow \frac{n}{n+۱} = \frac{۸۷۵}{۱۰۰۰} \xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم.}} \frac{n}{n+۱} = \frac{۷}{۸} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۸n = ۷n + ۷ \Rightarrow n = ۷$$

پ)
$$u_n < \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow \frac{n}{n+۱} < \frac{۹}{۱۰} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۰n < ۹n + ۹ \Rightarrow n < ۹ \Rightarrow$$
هشت جمله‌ی دنباله از $\frac{۹}{۱۰}$ کوچک‌تر هستند.

تذکر: دقت کنید که در یک نامعادله، اگر دو طرف مثبت باشند می‌توانیم عمل طرفین وسطین را انجام دهیم.

مثال ۵: **اگر جملات یک دنباله به‌صورت $\{\frac{n+۱}{۲n^۲+n-۱}\}$ باشد، چندمین جمله‌ی آن $\frac{۱}{۹}$ است؟**

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ :
$$\frac{n+۱}{۲n^۲+n-۱} = \frac{۱}{۹} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲n^۲ + n - ۱ = ۹n + ۹ \Rightarrow ۲n^۲ - ۸n - ۱۰ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} n^۲ - ۴n - ۵ = ۰ \xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله‌ی مشترک}} (n-۵)(n+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۵ \\ n = -۱ \text{(غ ق ق)} \end{cases} \Rightarrow$$
گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۶: **جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $u_n = an + b$ می‌باشد که در آن $a, b \in \mathbb{R}$. اگر $u_۲ = -۱$ و $u_۶ = ۷$ باشد، جمله‌ی ۱۰اُم این دنباله کدام است؟**

۱) ۲۵ ۲) ۱۵ ۳) ۵ ۴) ۱۰

پاسخ :
$$\begin{cases} u_n = an + b \xrightarrow[n=۲]{u_۲=-۱} u_۲ = ۲a + b = -۱ \\ u_n = an + b \xrightarrow[n=۶]{u_۶=۷} u_۶ = ۶a + b = ۷ \end{cases} \Rightarrow (-۱)\times \begin{cases} ۲a+b=-۱ \\ ۶a+b=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a-b=۱ \\ ۶a+b=۷ \end{cases} \Rightarrow ۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

$$۲a + b = -۱ \xrightarrow{a=۲} ۴ + b = -۱ \Rightarrow b = -۵$$

$$\xrightarrow[b=-۵]{a=۲} u_n = ۲n - ۵ \xrightarrow{n=۱۰} u_{۱۰} = ۲(۱۰) - ۵ = ۲۰ - ۵ = ۱۵ \Rightarrow$$
گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۷: **چه تعداد از جملات دنباله‌ی $a_n = (-۱)^n(۳n-۱)$ بین ۱۰ و ۳۵ قرار دارند؟**

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ : چون ۱۰ و ۳۵ دو عدد مثبت هستند و می‌خواهیم n هایی را پیدا کنیم که به ازای آن‌ها عبارت $(-۱)^n(۳n-۱)$ بین ۱۰ و ۳۵ باشد پس n حتماً باید زوج باشد (زیرا هر عدد فردی که به جای n قرار دهیم حاصل $(-۱)^n(۳n-۱)$ منفی می‌شود) پس با فرض زوج بودن n، جمله‌ی عمومی دنباله‌ی a_n به‌صورت $a_n = ۳n-۱$ تبدیل می‌شود.

$$\Rightarrow ۱۰ < ۳n-۱ < ۳۵ \xrightarrow{+۱} ۱۱ < ۳n < ۳۶ \xrightarrow{\div ۳} \frac{۱۱}{۳} < n < ۱۲ \xrightarrow{\text{زوج } n} n = ۴,۶,۸,۱۰ \Rightarrow$$ گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۸: **اولین جمله‌ی دنباله‌ی $\frac{۲n+۳}{n+۴}$ که بزرگ‌تر از ۱/۹ می‌باشد، کدام است؟**

۱) ۴۵ ۲) ۴۶ ۳) ۴۷ ۴) ۴۸

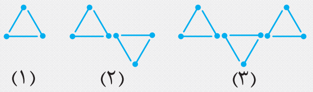
پاسخ :

$$\frac{۲n+۳}{n+۴} > ۱/۹ \Rightarrow \frac{۲n+۳}{n+۴} > \frac{۱۹}{۱۰} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲۰n+۳۰ > ۱۹n+۷۶ \Rightarrow n > ۴۶$$

اولین عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۴۶، عدد ۴۷ است و لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

در بعضی دنباله‌ها الگویی وجود دارد که باید از روی این الگو جملات دنباله را به‌دست آوریم. البته همیشه مشخص کردن جملات دنباله و جمله‌ی عمومی آن از روی الگو کار آسانی نیست. در این گونه مسائل بهتر است از روی روند و ارتباط جملات دنباله، جمله‌ی عمومی را به‌دست آوریم. البته در درسنامه‌ی بعدی که مبحث دنباله‌های حسابی و هندسی را خواهید آموخت اکثر این سؤالات را به روش بسیار ساده‌تری حل خواهید کرد.

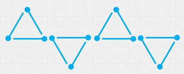
مثال ۹: **با استفاده از چوب کبریت‌ها، شکل‌های مقابل را ساخته‌ایم:**



آ) شکل بعدی را حدس بزنید.

ب) تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در شکل nاُم چند تا است؟

پاسخ : آ) بدیهی است که در هر مرحله سه چوب کبریت به چوب کبریت‌های قبلی اضافه می‌شود. بنابراین در شکل شماره‌ی (۴)، به تعداد ۱۲ چوب کبریت داریم و شکل آن به‌صورت روبه‌رو است:



ب) تعداد چوب‌کبریت‌ها در هر مرحله را در جدول می‌آوریم:

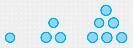
۴	۳	۲	۱	شماره شکل
۱۲	۹	۶	۳	تعداد چوب‌کبریت‌ها

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل nاُم برابر $۳n$ می‌باشد و یا به‌عبارت دیگر می‌توان نوشت: $a_n = ۳n$

مثال ۱۰: **در هر قسمت، جمله‌ی عمومی هر یک از الگوهای داده شده را بنویسید.**

آ)


ب)


پ)


پاسخ : آ) تعداد دایره‌ها را به‌صورت دنباله‌ی مقابل می‌نویسیم: $۱,۴,۹,...$

بنابراین جمله‌ی عمومی این دنباله $a_n = n^۲$ است که این دنباله به **دنباله‌ی مربعی** معروف می‌باشد.

ب) تعداد دایره‌ها را به‌صورت دنباله‌ی مقابل می‌نویسیم: $۱,۳,۵,...$

با توجه به الگو درمی‌یابیم که جملات آن اعداد فرد می‌باشند پس جمله‌ی عمومی آن به‌صورت $a_n = ۲n-۱$ خواهد بود.

پ) جملات دنباله به‌صورت مقابل می‌باشند: $۱,۳,۶,...$

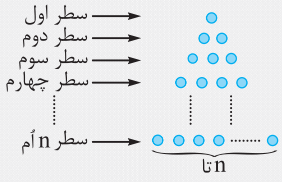
ابتدا سعی می‌کنیم تا جمله‌ی چهارم آن را مشخص کنیم از شکل اول به دوم، ۲ دایره و از شکل دوم به سوم سه دایره و بنابراین از شکل سوم به چهارم، چهار دایره اضافه می‌شود. پس شکل چهارم آن دارای ۱۰ دایره می‌باشد.

$$\Rightarrow a_۴ = ۱۰$$

بنابراین جمله‌ی nاُم آن به‌صورت زیر است:

$$a_n = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (n-۱) + n$$

برای به‌دست آوردن مجموع فوق از روش زیر استفاده می‌کنیم:



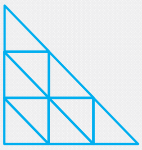
$$\oplus \begin{array}{l} a_n = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (n-۱) + n \\ \underline{a_n = n + (n-۱) + (n-۲) + \cdots + ۲ + ۱} \end{array}$$

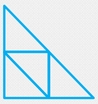
$$۲a_n = \underbrace{(n+۱)+(n+۱)+\cdots+(n+۱)+(n+۱)}_{\text{n تا}} \Rightarrow ۲a_n = n(n+۱) \Rightarrow a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

استاد! این اثباتی که الان گفتید رو باید یاد بگیریم؟ خیلی سخته!

جواب: نیازی نیست. شما بهتره دنباله‌ی مثلثی رو حفظ کنی و بدونی که جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ...,۱,۳,۶,۱۰ برابر با $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ است.

مثال ۱۱: **با توجه به الگوی مقابل، تعداد مثلث‌های کوچک شکل دهم کدام است؟**


شکل (۳)


شکل (۲)


شکل (۱)

۱) ۹۰

۲) ۹۵

۳) ۱۰۰

۴) ۱۲۱

پاسخ : کافیست تعداد مثلث‌های کوچک شکل‌ها را به‌صورت یک دنباله بنویسیم: ...,۱,۴,۹

بدیهی است که جمله‌ی عمومی این دنباله $a_n = n^۲$ است و در نتیجه شکل دهم آن ۱۰۰ مثلث کوچک دارد یعنی $a_{۱۰} = ۱۰^۲ = ۱۰۰$. لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۱۲: **با توجه به الگوی داده شده، در کدام مرحله تعداد چوب‌کبریت‌های استفاده شده ۳۸ می‌باشد؟**


شکل (۳)


شکل (۲)


شکل (۱)

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ : ابتدا تعداد چوب‌کبریت‌ها را به‌صورت یک دنباله می‌نویسیم: ...,۸,۱۱,۱۴

همان‌طور که می‌بینید از هر شکل به شکل بعدی سه چوب کبریت اضافه می‌شود:

$$\overset{+۳}{\curvearrowright}\ \overset{+۳}{\curvearrowright}$$
$$۸,۱۱,۱۴,...$$

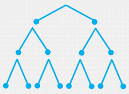
تعداد چوب کبریت‌های شکل دوم $= a_۲ = ۳\times۱+۸$

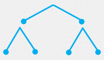
تعداد چوب کبریت‌های شکل سوم $= a_۳ = ۳\times۲+۸$

تعداد چوب کبریت‌های شکل nاُم $= a_n = ۳\times(n-۱)+۸ = ۳n-۳+۸ = ۳n+۵$

$۳n+۵ = ۳۸ \Rightarrow ۳n = ۳۳ \Rightarrow n = ۱۱ \Rightarrow$ گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۱۳: **با توجه به الگوی مقابل در مرحله‌ی هشتم، چند چوب کبریت به‌کار رفته است؟**


مرحله‌ی (۳)


مرحله‌ی (۲)


مرحله‌ی (۱)

۱) ۲۵۴ ۲) ۵۱۰

۳) ۱۰۲۲ ۴) ۱۰۲۶

پاسخ : تعداد چوب کبریت‌ها در هر مرحله را در جدول می‌نویسیم:

مرحله‌ی (۱)	مرحله‌ی (۲)	مرحله‌ی (۳)
۲	$۲+۲^۲$	$۲+۲^۲+۲^۳$

بنابراین تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی هشتم برابر است با $۲+۲^۲+۲^۳+\cdots+۲^۸ = ۵۱۰$ و لذا گزینه‌ی (۲) صحیح است.

دنباله‌ی بازگشتی

تعریف: **دنباله‌ی بازگشتی** دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن با استفاده از جمله یا جملات قبلی آن به‌دست می‌آید. بنابراین در این دنباله برای تعیین جملات، باید جمله‌ی اول یا چند جمله‌ی اول مشخص باشد.

مثال ۱۴: **دنباله‌ی $\{a_n\}$ به‌صورت زیر تعریف شده است:**

$$\begin{cases} a_۱ = ۱ \\ a_n = ۲a_{n-۱}+۲ \ ;\ n \geq ۲ \end{cases}$$

چهار جمله‌ی اول این دنباله را مشخص کنید.

پاسخ : با توجه به فرض، جمله‌ی اول $a_۱ = ۱$ می‌باشد. حال با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی $a_n = ۲a_{n-۱}+۲$ جملات بعدی را به‌دست می‌آوریم:

$$n = ۲ \Rightarrow a_۲ = ۲a_۱+۲ \xrightarrow{a_۱=۱} a_۲ = ۲(۱)+۲ = ۴ \Rightarrow a_۲ = ۴$$

$$n = ۳ \Rightarrow a_۳ = ۲a_۲+۲ \xrightarrow{a_۲=۴} a_۳ = ۲(۴)+۲ = ۱۰ \Rightarrow a_۳ = ۱۰$$

$$n = ۴ \Rightarrow a_۴ = ۲a_۳+۲ \xrightarrow{a_۳=۱۰} a_۴ = ۲(۱۰)+۲ = ۲۲ \Rightarrow a_۴ = ۲۲$$

مثال ۱۵: جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n = a_{n-۱} - a_{n-۲} \;\; ; \;\; n \geq ۳$ می‌باشد:
اگر جملات اول و دوم دنباله به‌ترتیب ۱ و ۲ باشند، چهار جمله‌ی بعدی آن را مشخص کنید.

پاسخ : با توجه به فرض $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۲$ می‌باشند. در این صورت با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی $a_n = a_{n-۱} - a_{n-۲}$ داریم:

$$n = ۳ \Rightarrow a_۳ = a_۲ - a_۱ = ۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow a_۳ = ۱$$
$$n = ۴ \Rightarrow a_۴ = a_۳ - a_۲ = ۱ - ۲ = -۱ \Rightarrow a_۴ = -۱$$
$$n = ۵ \Rightarrow a_۵ = a_۴ - a_۳ = -۱ - ۱ = -۲ \Rightarrow a_۵ = -۲$$
$$n = ۶ \Rightarrow a_۶ = a_۵ - a_۴ = -۲ - (-۱) = -۲ + ۱ = -۱ \Rightarrow a_۶ = -۱$$

مثال ۱۶: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را به‌صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_۱ = ۲ \\ a_n = a_{n-۱} + ۵ \;\; ; \;\; n \geq ۲ \end{cases}$$

فرمولی صریح برای جمله‌ی عمومی آن به‌دست آورید (یعنی جمله‌ی عمومی آن را مستقلاً و بدون استفاده از جمله‌ی قبل به‌دست آورید).

پاسخ : ابتدا چند جمله‌ی اول آن را به‌دست می‌آوریم:

$$n = ۲ \Rightarrow a_۲ = a_۱ + ۵ \overset{a_۱ = ۲}{=\!=\!=} ۲ + ۵ = ۷ \Rightarrow a_۲ = ۷$$
$$n = ۳ \Rightarrow a_۳ = a_۲ + ۵ \overset{a_۲ = ۷}{=\!=\!=} ۷ + ۵ = ۱۲ \Rightarrow a_۳ = ۱۲$$
$$n = ۴ \Rightarrow a_۴ = a_۳ + ۵ \overset{a_۳ = ۱۲}{=\!=\!=} ۱۲ + ۵ = ۱۷ \Rightarrow a_۴ = ۱۷$$

در این صورت جملات آن به‌صورت مقابل می‌باشند:

$$۲ \overset{+۵}{\curvearrowright} ۷ \overset{+۵}{\curvearrowright} ۱۲ \overset{+۵}{\curvearrowright} ۱۷ , \ldots$$

$$a_۲ = ۵ \times ۱ + ۲$$
$$a_۳ = ۵ \times ۲ + ۲$$
$$a_۴ = ۵ \times ۳ + ۲$$
$$\vdots$$
$$a_n = ۵ \times (n - ۱) + ۲ = ۵n - ۵ + ۲ = ۵n - ۳$$

مثال ۱۷: جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $u_n = u_{n-۱} + u_{n-۲}$ و $u_۱ = u_۲ = ۱$ می‌باشد، جمله‌ی هشتم دنباله کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۱ ۳) ۳۴ ۴) ۲۴

پاسخ : با توجه به جمله‌ی عمومی متوجه خواهید شد که هر جمله (از جمله‌ی سوم به بعد) از مجموع دو جمله‌ی قبل از آن به‌دست می‌آید:
$۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,\ldots \Rightarrow$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

توجه: دنباله‌ی مثال فوق به دنباله‌ی فیبوناتچی معروف می‌باشد.

مثال ۱۸: در دنباله‌ی $a_۱ = ۲$ و $a_n = ۳a_{n-۱} \; , \; n \geq ۲$ جمله‌ی nاُم دنباله کدام است؟

۱) $n + ۱$ ۲) $۴n - ۲$ ۳) $۲ \times ۳^{n-۱}$ ۴) $۲(۲^n - ۱)$

پاسخ :

$$\left.\begin{array}{l} n = ۲ \Rightarrow a_۲ = ۳a_۱ \xrightarrow{a_۱ = ۲} a_۲ = ۶ \\ n = ۳ \Rightarrow a_۳ = ۳a_۲ \xrightarrow{a_۲ = ۶} a_۳ = ۱۸ \\ n = ۴ \Rightarrow a_۴ = ۳a_۳ \xrightarrow{a_۳ = ۱۸} a_۴ = ۵۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{جملات دنباله}: ۲ \overset{\times ۳}{\curvearrowright} ۶ \overset{\times ۳}{\curvearrowright} ۱۸ \overset{\times ۳}{\curvearrowright} ۵۴ , \ldots$$

جملات دنباله را می‌توان به‌صورت مقابل بازنویسی کرد:

$$\left.\begin{array}{l} a_۲ = ۳ \times ۲ \\ a_۳ = ۳ \times a_۲ = ۳ \times ۳ \times ۲ = ۳^۲ \times ۲ \\ a_۴ = ۳ \times a_۳ = ۳ \times ۳^۲ \times ۲ = ۳^۳ \times ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = ۳^{n-۱} \times ۲ \Rightarrow$$ گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۱

پرسش‌های جلسه اول

۱ چهار جمله‌ی اول دنباله‌های زیر را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۳ کتاب درسی- صفحه‌ی ۶)

آ) $a_n = ۶n - ۱$ ب) $b_n = (-۱)^n n^۲$ پ) $c_n = -n^۲ + ۳n$

ت) $d_n = ۵ \times ۲^n$ ث) $e_n = \frac{(-۱)^n}{n+۱}$ ج) $f_n = \frac{\sqrt{n+۱}}{n^۲}$

۲ در جدول زیر چهار دنباله و پنج جمله‌ی عمومی دنباله آمده است. معین کنید که هر جمله‌ی عمومی مربوط به کدام دنباله است. (مشابه تمرین ۶ کتاب درسی- صفحه‌ی ۶)

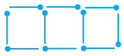
$-۱,۱,۳,۵,...$	$a_n = \frac{n}{n+۱}$
$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},...$	$b_n = (\frac{۱}{۲})^n$
$\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},...$	$c_n = (-۱)^n$
$-۱,۱,-۱,۱,...$	$d_n = ۲n - ۳$
_	$u_n = (-۱)^{n+۱}$

۳ مشخص کنید چندمین جمله از دنباله‌ی $a_n = ۲n^۲ + ۳n - ۱$، برابر ۶۴ است؟

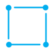
۴ ابتدا سه جمله‌ی بعدی هر یک از دنباله‌های زیر را پیدا کنید و سپس جمله‌ی عمومی آن‌ها را بنویسید. (مشابه تمرین در کلاس کتاب درسی- صفحه‌ی ۵)

آ) $۱,۲,۴,۸,...$ ب) $۱,۶,۱۱,۱۶,...$ پ) $\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴},۱,...$

۵ به کمک تعدادی چوب کبریت شکل‌های زیر را ساخته‌ایم:


(۴)

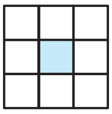

(۳)

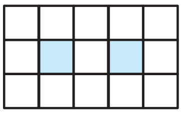

(۲)

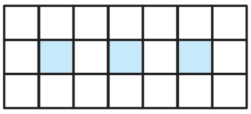

(۱)

تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در شکل nاُم را به‌دست آورید.

۶ شکل‌های داده شده را در نظر بگیرید، اگر شکل‌ها را به همین ترتیب ادامه دهیم، جمله‌ی عمومی دنباله‌ای را پیدا کنید که مشخص کند چه کسری از شکل nاُم رنگی است؟


شکل (۱)


شکل (۲)


شکل (۳)

۷ ۷۰ نفر در یک جلسه شرکت کرده و تصمیم دارند ۴ نفر را به عنوان هیأت رئیسه از بین خودشان انتخاب کنند. برای این کار تصمیم گرفتند نام تمام افراد روی کاغذهای هم‌اندازه نوشته شود. اگر یک کاغذ را با تا زدن نصف کنیم و این عمل را مرتباً تکرار کنیم حداقل باید چند بار عمل تا زدن را تکرار کنیم تا کاغذهای هم‌اندازه‌ی کافی برای نوشتن اسامی افراد داشته باشیم؟ (مشابه تمرین ۴ کتاب درسی- صفحه‌ی ۶)

۸ دنباله‌ی بازگشتی $a_n = na_{n-۱} \,,\, n \ge ۲$ را با شرط $a_۱ = ۱$ در نظر بگیرید:

آ) جمله‌ی پنجم آن را به‌دست آورید.

ب) فرمولی صریح برای جمله‌ی عمومی آن به‌دست آورید.

۹ رضا اول هر هفته ۱۶۰۰ تومان پول توجیبی می‌گیرد و در یک صندوق می‌گذارد. او تا آخر هر هفته نیمی از پول صندوق را خرج می‌کند. اگر در اولین هفته، پولی در صندوق نبوده باشد رضا در پایان هفته‌ی اول، هفته‌ی دوم و هفته‌ی سوم چه‌قدر پول در صندوق دارد؟ پول‌های رضا را در پایان هر هفته به صورت یک دنباله در نظر بگیرید و چهار جمله‌ی اول این دنباله را بنویسید. بین جمله‌ی nاُم و جمله‌ی $(n+۱)$اُم این دنباله چه رابطه‌ای وجود دارد؟ (تمرین ۸ کتاب درسی- صفحه‌ی ۶)

۱ پاسخ پرسش‌های جلسه‌اول

۱

آ) $a_۱ = ۶(۱) - ۱ = ۵$ $\quad a_۲ = ۶(۲) - ۱ = ۱۱$ $\quad a_۳ = ۶(۳) - ۱ = ۱۷$ $\quad a_۴ = ۶(۴) - ۱ = ۲۳$

ب) $b_۱ = (-۱)^۱ \times ۱^۲ = -۱$ $\quad b_۲ = (-۱)^۲ ۲^۲ = ۴$ $\quad b_۳ = (-۱)^۳ ۳^۲ = -۹$ $\quad b_۴ = (-۱)^۴ ۴^۲ = ۱۶$

پ) $c_۱ = -۱^۲ + ۳(۱) = -۱ + ۳ = ۲$ $\quad c_۲ = -۲^۲ + ۳(۲) = -۴ + ۶ = ۲$

$c_۳ = -۳^۲ + ۳(۳) = -۹ + ۹ = ۰$ $\quad c_۴ = -۴^۲ + ۳(۴) = -۱۶ + ۱۲ = -۴$

ت) $d_۱ = ۵ \times ۲^۱ = ۱۰$ $\quad d_۲ = ۵ \times ۲^۲ = ۵ \times ۴ = ۲۰$ $\quad d_۳ = ۵ \times ۲^۳ = ۵ \times ۸ = ۴۰$ $\quad d_۴ = ۵ \times ۲^۴ = ۵ \times ۱۶ = ۸۰$

ث) $e_۱ = \frac{(-۱)^۱}{۱+۱} = \frac{-۱}{۲}$ $\quad e_۲ = \frac{(-۱)^۲}{۲+۱} = \frac{۱}{۳}$ $\quad e_۳ = \frac{(-۱)^۳}{۳+۱} = \frac{-۱}{۴}$ $\quad e_۴ = \frac{(-۱)^۴}{۴+۱} = \frac{۱}{۵}$

ج) $f_۱ = \frac{\sqrt{۱+۱}}{۱^۲} = \sqrt{۲}$ $\quad f_۲ = \frac{\sqrt{۲+۱}}{۲^۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ $\quad f_۳ = \frac{\sqrt{۳+۱}}{۳^۲} = \frac{۲}{۹}$ $\quad f_۴ = \frac{\sqrt{۴+۱}}{۴^۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۱۶}$

۲

$$a_n = \frac{n}{n+۱} \Rightarrow a_۱ = \frac{۱}{۲} \ , \ a_۲ = \frac{۲}{۳} \ , \ a_۳ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \dots$$

پس دنباله‌ی a_n جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \dots$ می‌باشد.

$$b_n = (\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow b_۱ = \frac{۱}{۲} \ , \ b_۲ = \frac{۱}{۴} \ , \ b_۳ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \dots$$

پس دنباله‌ی b_n جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \dots$ می‌باشد.

$$c_n = (-۱)^n \Rightarrow c_۱ = (-۱)^۱ = -۱ \ , \ c_۲ = (-۱)^۲ = ۱ \ , \ c_۳ = (-۱)^۳ = -۱ \Rightarrow -۱, ۱, -۱, \dots$$

پس دنباله‌ی c_n جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $-۱, ۱, -۱, \dots$ می‌باشد.

$$d_n = ۲n - ۳ \Rightarrow d_۱ = ۲(۱) - ۳ = -۱ \ , \ d_۲ = ۲(۲) - ۳ = ۱ \ , \ d_۳ = ۲(۳) - ۳ = ۳ \Rightarrow -۱, ۱, ۳, \dots$$

پس دنباله‌ی d_n جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $-۱, ۱, ۳, \dots$ می‌باشد.

پس جمله‌ی عمومی $u_n = (-۱)^{n+۱}$ مربوط به هیچ‌کدام از دنباله‌ها نمی‌باشد.

۳

$$a_n = ۶۴ \Rightarrow ۲n^۲ + ۳n - ۱ = ۶۴ \Rightarrow ۲n^۲ + ۳n - ۶۵ = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac} \Delta = ۹ + ۵۲۰ = ۵۲۹$$

$$\Rightarrow n = \frac{-۳ \pm \sqrt{۵۲۹}}{۴} = \frac{-۳ \pm ۲۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} n = -\frac{۲۶}{۴} = -\frac{۱۳}{۲} \notin \mathbb{N} \ (\text{غ ق ق}) \\ n = \frac{۲۰}{۴} = ۵ \ (\text{ق ق}) \end{cases}$$

۴

آ) $۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴, \dots \Rightarrow ۲^۰, ۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, ۲^۴, ۲^۵, ۲^۶, \dots \Rightarrow a_n = ۲^{n-۱}$

ب) $۱, ۶, ۱۱, ۱۶, ۲۱, ۲۶, ۳۱, \dots \Rightarrow ۵(۱) - ۴, ۵(۲) - ۴, ۵(۳) - ۴, \dots \Rightarrow a_n = ۵n - ۴$

پ) $\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱, \frac{۵}{۴}, \frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۴}, \dots \Rightarrow \frac{۱}{۴}, \frac{۲}{۴}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۴}, \frac{۵}{۴}, \dots \Rightarrow a_n = \frac{n}{۴}$

۵

ابتدا تعداد چوب کبریت‌ها را به‌صورت یک دنباله می‌نویسیم:

$۱, ۴, ۷, ۱۰, \dots$

بدیهی است که تعداد چوب کبریت‌ها از هر شکل به شکل بعدی ۳ واحد افزایش می‌یابد. در این صورت:

تعداد چوب کبریت‌ها در شکل (۲) $= a_۲ = ۳ \times ۱ + ۱$

تعداد چوب کبریت‌ها در شکل (۳) $= a_۳ = ۳ \times ۲ + ۱$

تعداد چوب کبریت‌ها در شکل (۴) $= a_۴ = ۳ \times ۳ + ۱$

بنابراین تعداد چوب کبریت‌ها در شکل nاُم به‌صورت $a_n = ۳ \times (n - ۱) + ۱$ یا به عبارتی $a_n = ۳n - ۲$ می‌باشد.

۶

با توجه به شکل‌ها دنباله‌ی خواسته شده را به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $\frac{۱}{۹},\frac{۲}{۱۵},\frac{۳}{۲۱},...$

در جمله‌ی عمومی حدس زدن صورت کسر بسیار راحت است. اما برای نوشتن مخرج کسر در جمله‌ی عمومی، مخرج‌ها را به‌صورت یک دنباله می‌نویسیم:

$$\overset{+۶}{\frown}\ \overset{+۶}{\frown}$$
$$۹,۱۵,۲۱,...$$

مخرج کسر اول $=۶\times۱+۳$

مخرج کسر دوم $=۶\times۲+۳$

مخرج کسر سوم $=۶\times۳+۳$

$\vdots$

مخرج کسر nاُم $=۶n+۳$

بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $...,\frac{۳}{۲۱},\frac{۲}{۱۵},\frac{۱}{۹}$ به‌صورت $a_n=\frac{n}{۶n+۳}$ می‌باشد.

۷

ابتدا مشخص می‌کنیم که در هر مرحله تا زدن، تعداد کاغذهای هم‌اندازه چند تا می‌شود.

۵	۴	۳	۲	۱	شماره‌ی مرحله
۳۲	۱۶	۸	۴	۲	تعداد کاغذها

لذا تعداد کاغذها را در هر مرحله به‌صورت دنباله‌ی زیر می‌نویسیم:

$$۲,۴,۸,۱۶,۳۲,...$$

پس جمله‌ی nاُم آن به‌صورت $a_n=۲^n$ می‌باشد.

چون ۷۰ نفر در جلسه شرکت می‌کنند پس باید $۲^n\geq۷۰$ باشد و چون $۲^۷=۱۲۸$ است پس باید ۷ مرحله عمل تا زدن را ادامه دهیم.

۸

آ)

$$n=۲\Rightarrow a_۲=۲a_۱\xrightarrow{a_۱=۱}a_۲=۲\times۱=۲$$
$$n=۳\Rightarrow a_۳=۳a_۲\xrightarrow{a_۲=۲}a_۳=۳\times۲=۶$$
$$n=۴\Rightarrow a_۴=۴a_۳\xrightarrow{a_۳=۶}a_۴=۴\times۶=۲۴$$
$$n=۵\Rightarrow a_۵=۵a_۴\xrightarrow{a_۴=۲۴}a_۵=۵\times۲۴=۱۲۰$$

ب)

$$a_۲=۲\times۱=۲$$
$$a_۳=۳\times a_۲=۳\times۲\times۱$$
$$a_۴=۴\times a_۳=۴\times۳\times۲\times۱$$
$$a_۵=۵\times a_۴=۵\times۴\times۳\times۲\times۱$$
$$\vdots$$
$$a_n=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times...\times۲\times۱$$

۹

رضا در هفته‌ی اول ۱۶۰۰ تومان پول گرفته و نصف آن را خرج کرده، پس ۸۰۰ تومان در آخر هفته در صندوق باقی می‌ماند. در هفته‌ی دوم دوباره ۱۶۰۰ تومان پول می‌گیرد پس کل موجودی او ۲۴۰۰ تومان می‌شود و چون نصف آن یعنی ۱۲۰۰ تومان را تا آخر هفته خرج می‌کند پس در آخر هفته‌ی دوم مبلغ ۱۲۰۰ تومان در صندوق باقی می‌ماند. در هفته‌ی سوم دوباره ۱۶۰۰ تومان می‌گیرد پس موجودی او ۲۸۰۰ تومان می‌شود و چون نصف آن را تا آخر هفته خرج می‌کند پس در آخر هفته‌ی سوم، مبلغ ۱۴۰۰ تومان در صندوق باقی می‌ماند. با توجه به این توضیحات می‌توان دنباله‌ی پول‌های باقی‌مانده در آخر هر هفته را به‌صورت زیر نوشت:

$$۸۰۰,۱۲۰۰,۱۴۰۰,\underset{\frac{۱۴۰۰+۱۶۰۰}{۲}=۱۵۰۰}{\underset{\downarrow}{۱۵۰۰}},...$$

اگر a_n موجودی صندوق در پایان هفته‌ی nاُم باشد پس در ابتدای هفته‌ی $(n+۱)$اُم، موجودی او $۱۶۰۰+a_n$ می‌شود و تا آخر هفته، نصف آن را خرج می‌کند، پس $\frac{۱۶۰۰+a_n}{۲}$ در صندوق باقی می‌ماند:

$$a_{n+۱}=\frac{۱۶۰۰+a_n}{۲}=\frac{a_n}{۲}+۸۰۰$$

۱ تست‌های جلسه اول

۱. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n = \frac{۲n}{n+۱}$ است. کدام جمله‌ی این دنباله برابر ۱/۶ است؟

۱) جمله‌ی چهارم ۲) جمله‌ی ششم ۳) جمله‌ی پنجم ۴) جمله‌ی هفتم

۲. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای $a_n = ۲^n + ۵$ می‌باشد. در این دنباله چند عدد دو رقمی وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳. جمله‌ی بعدی دنباله‌ی مقابل کدام است؟ ۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,...

۱) ۸۴ ۲) ۸۶ ۳) ۸۷ ۴) ۸۹

۴. مجموع چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی $\left\{(n+۱)^{(-۱)^n}\right\}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۹۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۳۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۵. در دنباله‌ی $a_{n+۱} = a_n + ۱۰^{-n+۱}$ ، اگر $a_۱ = ۱$ باشد، حاصل $a_۴ - a_۳$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

۶. مجموع ۲۰ جمله‌ی دوم دنباله‌ی $a_n = ۲ + (-۱)^{n+۱}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

۷. در دنباله‌ی مثلثی، اختلاف جمله‌ی نهم و پنجم چقدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۵

۸. اگر $۴n = ۳a_{n+۱} - ۲$ باشد، جمله‌ی هشتم این دنباله کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۱ ۳) ۱۰ ۴) $\frac{۳۱}{۳}$

۹. اگر جمله‌ی $(۲n-۳)$اُم یک دنباله به‌صورت $\frac{n}{n-۳}$ باشد، جمله‌ی نهم آن کدام است؟

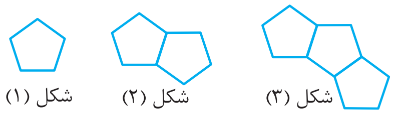
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) تعریف نشده

۱۰. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $u_n = an^۲ + b$ می‌باشد. در صورتی‌که $u_۲ = ۵$ و $u_۵ = ۶۸$ باشد، چندمین جمله‌ی این دنباله ۲۹۳ می‌باشد؟

۱) نهم ۲) دهم ۳) یازدهم ۴) دوازدهم

۱۱. با توجه به الگوی مقابل، در شکل چندم این الگو، ۴۹ پاره‌خط وجود دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱
۳) ۱۲ ۴) ۱۳


شکل (۳) شکل (۲) شکل (۱)

۱۲. نخستین جمله‌ی دنباله‌ی $\{\frac{۳n-۱}{n+۱}\}$ که بزرگ‌تر از ۲/۸ می‌باشد کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۳. اگر $u_۱ = -۲$ ، $u_۲ = ۲$ و $u_n = u_{n-۲} + ۱ - ۲n$ باشند، جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟

۱) -۲۰ ۲) -۲۹ ۳) -۲۵ ۴) -۳۵

۱۴. اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله $a_n = ۴n + ۲$ و جمله‌ی $(۲n+۵)$اُم آن، $an + b$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۳۰

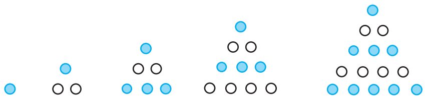
۱۵. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n = \frac{(-۱)^n n}{n^۲ + ۲}$ می‌باشد. اگر kاُمین جمله‌ی آن $\frac{۴}{۳۳}$ باشد، حاصل $k^۲ + k$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷۲ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۰

۱۶. در مرحله‌ی دهم الگوی مقابل، چند دایره‌ی توپر وجود دارد؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۴

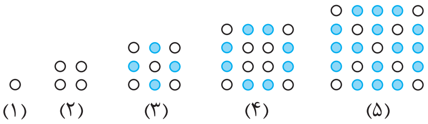
۳) ۲۵ ۴) ۲۶



۱۷. با توجه به الگوی مقابل، تعداد دایره‌های توخالی در مرحله‌ی دهم کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹

۳) ۱۸ ۴) ۱۷



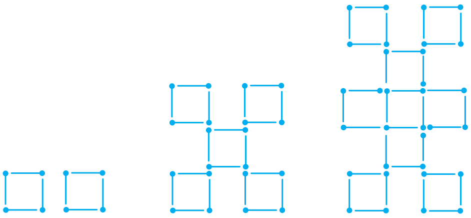
۱۸. طبق الگوی مقابل، تعداد چوب کبریت‌های مرحله‌ی دوازدهم کدام است؟

۱) ۹۷

۲) ۱۰۳

۳) ۱۴۰

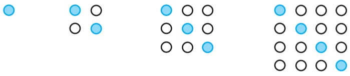
۴) ۱۲۸



۱۹. تعداد دایره‌های توخالی در شکل nاُم الگوی مقابل کدام است؟

۱) $n^۲$ ۲) $n^۲ - n$

۳) $n^۲ - ۲n$ ۴) $\frac{n^۲}{۲} - ۲n$



۲۰. با استفاده از چوب کبریت‌ها شکل‌های زیر را ساخته‌ایم. در شکل nاُم چند چوب کبریت به‌کار رفته است؟

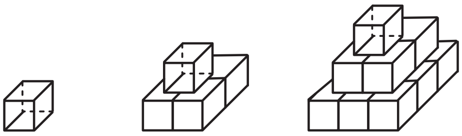
۱) $۴n + ۴$ ۲) $۲n + ۶$

۳) $۳n + ۵$ ۴) $۵n + ۳$

۲۱. با توجه به الگوی مقابل، در شکل ششم چند مکعب وجود دارد؟

۱) ۹۶ ۲) ۹۱

۳) ۱۳۹ ۴) ۱۳۶



۲۲. اگر جملات یک دنباله از رابطه‌ی بازگشتی $a_n = xa_{n-۱} + a_{n-۲}$ به‌دست آید و جملات این دنباله به‌صورت ...,۱,۲,۵,۱۲ باشد، جمله‌ی ششم این دنباله کدام است؟

۱) ۷۰ ۲) ۶۰ ۳) ۵۸ ۴) ۶۵

۲۳. در یک دنباله، جمله‌ی اول برابر ۲ و برای هر دو عدد طبیعی m و n داریم $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$، جمله‌ی هفتم کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۵ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

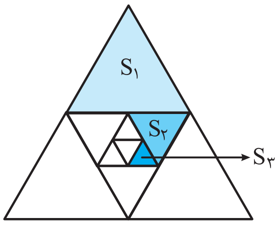
۲۴. مجموع ۸ جمله‌ی اول دنباله‌ی $a_n = \frac{۲}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۲۵. در شکل مقابل وسط اضلاع مثلث‌ها را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود و این عمل را مرتباً انجام می‌دهیم. مساحت nاُمین مثلث سایه‌خورده (S_n) چه کسری از مساحت کل است؟

۱) $\frac{۱}{۲^n}$ ۲) $\frac{۱}{۲^{۲n}}$

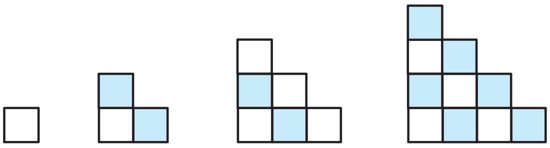
۳) $\frac{۱}{۲^{n+۲}}$ ۴) $\frac{۱}{۲^{۲n+۲}}$



۲۶. با توجه به الگوی زیر، اگر شکل‌ها را به همین ترتیب ادامه دهیم، چه کسری از شکل هشتم سایه‌خورده است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$



۱

پاسخ تست‌های جلسه‌اول

۱ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$a_n = ۱/۶ \xrightarrow{a_n=\frac{۲n}{n+۱}} \frac{۲n}{n+۱} = ۱/۶ \Rightarrow \frac{۲n}{n+۱} = \frac{۱۶}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲۰n = ۱۶n + ۱۶ \Rightarrow ۴n = ۱۶ \Rightarrow n = ۴$$

۲ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$۱۰ \le ۲^n + ۵ \le ۹۹ \xrightarrow{-۵} ۵ \le ۲^n \le ۹۴ \Rightarrow n = ۳,۴,۵,۶$$

پس چهار جمله‌ی دنباله‌ی مورد نظر دو رقمی می‌باشند.

۳ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

با توجه به دنباله متوجه می‌شویم که از جمله‌ی سوم به بعد هر جمله از مجموع دو جمله‌ی قبل خود به‌دست می‌آید (همان دنباله‌ی فیبوناتچی می‌باشد). بنابراین جمله‌ی بعد از ۵۵ برابر است با: $۳۴ + ۵۵ = ۸۹$

۴ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$\left.\begin{array}{l} n = ۱ \Rightarrow a_۱ = ۲^{(-۱)^۱} = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲} \\ n = ۲ \Rightarrow a_۲ = ۳^{(-۱)^۲} = ۳ \\ n = ۳ \Rightarrow a_۳ = ۴^{(-۱)^۳} = ۴^{-۱} = \frac{۱}{۴} \\ n = ۴ \Rightarrow a_۴ = ۵^{(-۱)^۴} = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{۳۵}{۴}$$

۵ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

کافیست در رابطه‌ی $a_{n+۱} = a_n + ۱۰^{-n+۱}$ به جای n عدد ۳ را قرار دهیم:

$$n = ۳ \Rightarrow a_۴ = a_۳ + ۱۰^{-۲} \Rightarrow a_۴ - a_۳ = ۱۰^{-۲} = \frac{۱}{۱۰۰} = ۰/۰۱$$

۶ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$\text{مجموع بیست جمله‌ی دوم} = a_{۲۱} + a_{۲۲} + \dots + a_{۴۰}$$

$$= \underbrace{(۲+(-۱)^{۲۲})}_{۳} + \underbrace{(۲+(-۱)^{۲۳})}_{۱} + \dots + \underbrace{(۲+(-۱)^{۴۰})}_{۳} + \underbrace{(۲+(-۱)^{۴۱})}_{۱}$$

$$= \underbrace{\underbrace{۳+۱}_{۴} + \underbrace{۳+۱}_{۴} + \dots + \underbrace{۳+۱}_{۴}}_{\text{۱۰ تا}} = ۱۰(۴) = ۴۰$$

۷ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

می‌دانیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ی مثلثی به‌صورت $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} a_۵ = \frac{۵(۶)}{۲} = ۱۵ \\ a_۹ = \frac{۹(۱۰)}{۲} = ۴۵ \end{cases} \Rightarrow a_۹ - a_۵ = ۳۰$$

۸ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$۳a_{n+۱} - ۲ = ۴n \Rightarrow ۳a_{n+۱} = ۴n + ۲ \Rightarrow a_{n+۱} = \frac{۴n+۲}{۳}$$

باید ابتدا تعیین کنیم که جمله‌ی هشتم، به‌ازای چه n ای به‌دست می‌آید:

$$n + ۱ = ۸ \Rightarrow n = ۷$$

حال باید در فرمول $a_{n+۱}$ به جای n، عدد ۷ را قرار دهیم:

$$a_{۷+۱} = a_۸ = \frac{۴(۷)+۲}{۳} = \frac{۲۸+۲}{۳} = \frac{۳۰}{۳} = ۱۰$$

۹ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

می‌دانیم $u_{۲n-۳} = \frac{n}{n-۳}$ پس باید ابتدا n ای را بیابیم که به ازای آن $۲n - ۳ = ۹$ باشد: $۲n - ۳ = ۹ \Rightarrow ۲n = ۱۲ \Rightarrow n = ۶$

حال در رابطه‌ی $u_{۲n-۳} = \frac{n}{n-۳}$ به جای n ها، عدد ۶ را قرار می‌دهیم:

$$u_{۲n-۳} = \frac{n}{n-۳} \xrightarrow{n=۶} u_۹ = \frac{۶}{۳} = ۲$$

۱۰ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$u_n = an^۲ + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{u_۲=۵} ۴a + b = ۵ \\ \xrightarrow{u_۵=۶۸} ۲۵a + b = ۶۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴a + b = ۵ \\ ۲۵a + b = ۶۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۴a - b = -۵ \\ ۲۵a + b = ۶۸ \end{cases} \Rightarrow ۲۱a = ۶۳ \Rightarrow a = ۳$$

$$۴a + b = ۵ \xrightarrow{a=۳} ۱۲ + b = ۵ \Rightarrow b = -۷$$

$$u_n = an^۲ + b \xrightarrow[b=-۷]{a=۳} u_n = ۳n^۲ - ۷$$

$$\xrightarrow{u_n=۲۹۳} ۳n^۲ - ۷ = ۲۹۳ \Rightarrow ۳n^۲ = ۳۰۰ \Rightarrow n^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow n = ۱۰$$

۱۱ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$\text{تعداد پاره‌خط}: ۵, \overset{+۴}{۹}, \overset{+۴}{۱۳}, \dots$$

$$a_۲ = ۴ \times ۱ + ۵ \quad , \quad a_۳ = ۴ \times ۲ + ۵$$

بنابراین جمله‌ی nاُم به‌صورت $a_n = ۴(n-۱) + ۵$ می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$a_n = ۴۹ \Rightarrow ۴(n-۱) + ۵ = ۴۹ \Rightarrow ۴n - ۴ + ۵ = ۴۹ \Rightarrow n = ۱۲$$

۱۲ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$\frac{۳n-۱}{n+۱} > ۲/۸ \Rightarrow \frac{۳n-۱}{n+۱} > \frac{۲۸}{۱۰} \Rightarrow \frac{۳n-۱}{n+۱} > \frac{۱۴}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۵n - ۵ > ۱۴n + ۱۴ \Rightarrow n > ۱۹$$

پس اولین جمله‌ی دنباله‌ی $\{\frac{۳n-۱}{n+۱}\}$ که از ۲/۸ بیش‌تر است جمله‌ی بیستم می‌باشد.

۱۳ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

با توجه به جمله‌ی عمومی برای محاسبه‌ی جمله‌ی هفتم نیازی به داشتن جملات دوم، چهارم و ششم نیست.

$$\begin{cases} n = ۳ \Rightarrow u_۳ = u_۱ + ۱ - ۲(۳) \overset{u_۱ = -۲}{=\!=\!=} -۲ - ۵ = -۷ \\ n = ۵ \Rightarrow u_۵ = u_۳ + ۱ - ۲(۵) \overset{u_۳ = -۷}{=\!=\!=} -۷ - ۹ = -۱۶ \\ n = ۷ \Rightarrow u_۷ = u_۵ + ۱ - ۲(۷) \overset{u_۵ = -۱۶}{=\!=\!=} -۱۶ - ۱۳ = -۲۹ \end{cases}$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

می‌دانیم $a_n = ۴n + ۲$، در این صورت داریم:

$$a_{۲n+۵} = ۴(۲n+۵) + ۲ = ۸n + ۲۰ + ۲ = ۸n + ۲۲$$

و چون $a_{۲n+۵} = an + b$ پس باید رابطه‌ی $an + b = ۸n + ۲۲$ برقرار باشد و تساوی در صورتی امکان‌پذیر است که $b = ۲۲$ و $a = ۸$ باشد. در نتیجه $a + b = ۳۰$ می‌باشد.

۱۵ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$a_k = \frac{۴}{۳۳} \Rightarrow \frac{(-۱)^k k}{k^۲ + ۲} = \frac{۴}{۳۳}$$

برای برقراری تساوی، k باید زوج باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{k}{k^۲ + ۲} = \frac{۴}{۳۳} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۴k^۲ + ۸ = ۳۳k \Rightarrow ۴k^۲ - ۳۳k + ۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac} \Delta = ۱۰۸۹ - ۴(۴)(۸) = ۹۶۱$$

$$\Rightarrow k = \frac{۳۳ \pm \sqrt{۹۶۱}}{۸} = \frac{۳۳ \pm ۳۱}{۸} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{۶۴}{۸} = ۸ \\ k = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

$$k^۲ + k \overset{k=۸}{=\!=\!=} ۶۴ + ۸ = ۷۲$$

۱۶ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

تعداد دایره‌های توپر: ۱ , ۱ , ۴ , ۴ , ۹ , ...

+۳ +۵

با توجه به اعداد فوق، تعداد دایره‌های توپر در مرحله‌های بعد به‌صورت زیر است:

شکل‌ها: (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰)

دایره‌های توپر: ۱ , ۱ , ۴ , ۴ , ۹ , ۹ , ۱۶ , ۱۶ , ۲۵ , ۲۵

+۳ +۵ +۷ +۹

۱۷ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

تعداد دایره‌های توخالی: ۱ , ۴ , ۵ , ۸ , ۹ , ...

+۳ +۱ +۳ +۱

با توجه به روند فوق می‌توان تعداد دایره‌های توخالی در مراحل بعدی را به‌صورت دنباله‌ی زیر نوشت:

۱ , ۴ , ۵ , ۸ , ۹ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۶ , ۱۷ , ۲۰

+۳ +۱ +۳ +۱ +۳ +۱ +۳ +۱ +۳

پس تعداد دایره‌های توخالی در مرحله‌ی دهم ۲۰ می‌باشد.

۱۸ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

تعداد چوب‌کبریت‌ها را به‌صورت دنباله‌ی زیر می‌نویسیم:

+۱۲ +۱۲

۸ , ۲۰ , ۳۲ , ...

در این صورت داریم:

تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی (۲) $= ۱۲ \times ۱ + ۸$

تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی (۳) $= ۱۲ \times ۲ + ۸$

$\vdots$

تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی (n) $= ۱۲ \times (n-۱) + ۸$

$$\Rightarrow a_n = ۱۲n - ۴ \xrightarrow{n=۱۲} a_{۱۲} = ۱۴۰$$

۱۹ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

تعداد دایره‌های توخالی: $۰, ۲^۲ - ۲, ۳^۲ - ۳, ۴^۲ - ۴, \ldots \Rightarrow a_n = n^۲ - n$

روش تستی: گاهی یافتن فرمول مربوط به یک الگو، دشوار و کمی هم ابتکاری است. در این گونه تست‌ها می‌توانید از گزینه‌ها استفاده کنید. مثلاً اگر در گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) به‌جای n ها عدد ۳ قرار دهید، جواب هیچ‌کدام ۶ نمی‌شود (تعداد دایره‌های توخالی در شکل سوم) ولی اگر در گزینه‌ی (۲) عدد ۳ را جای‌گذاری کنید، به عدد ۶ می‌رسید.

۲۰ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

تعداد چوب کبریت‌ها را به‌صورت دنباله‌ی زیر می‌نویسیم:

+۵ +۵

۸ , ۱۳ , ۱۸ , ... $\Rightarrow a_n = ۵n + ۳$

$۵ \times ۱ + ۳$, $۵ \times ۲ + ۳$, $۵ \times ۳ + ۳$

۲۱ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

تعداد مکعب‌ها را به‌صورت جدول زیر می‌نویسیم:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳
تعداد مکعب‌ها	۱	$۱^۲ + ۲^۲$	$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲$

پس تعداد مکعب‌ها در شکل ششم برابر است با:

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲ + ۶^۲ = ۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + ۳۶ = ۹۱$$

۲۲ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

با توجه به این‌که $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۲$ و $a_۳ = ۵$ است داریم:

$$a_n = xa_{n-۱} + a_{n-۲} \xrightarrow{n=۳} a_۳ = xa_۲ + a_۱$$

$$\Rightarrow ۵ = ۲x + ۱ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

در این صورت داریم: $a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$

$$n = ۵ \Rightarrow a_۵ = ۲a_۴ + a_۳ \xrightarrow[a_۳=۵]{a_۴=۱۲} a_۵ = ۲(۱۲) + ۵ = ۲۹$$

$$n = ۶ \Rightarrow a_۶ = ۲a_۵ + a_۴ \xrightarrow[a_۴=۱۲]{a_۵=۲۹} a_۶ = ۲(۲۹) + ۱۲ = ۷۰$$

۲۳ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

می‌دانیم $a_۱ = ۲$ است در این صورت با توجه به تعریف $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ داریم:

$$a_۲ = a_{۱+۱} = a_۱ + a_۱ + ۱ = ۲ + ۲ + ۱ = ۵$$

$$a_۳ = a_{۲+۱} = a_۲ + a_۱ + ۲ = ۵ + ۲ + ۲ = ۹$$

$$a_۴ = a_{۳+۱} = a_۳ + a_۱ + ۳ = ۹ + ۲ + ۳ = ۱۴$$

$$a_۷ = a_{۴+۳} = a_۴ + a_۳ + ۱۲ = ۱۴ + ۹ + ۱۲ = ۳۵$$

۲۴ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

ابتدا جمله‌ی عمومی را ساده‌تر می‌کنیم:

$$a_n = \frac{۲}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}} \; \frac{\text{ضرب در}}{\text{مزدوج مخرج}} \; \frac{۲(\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+۱} + \sqrt{n})(\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})}$$

$$= \frac{۲(\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})}{n+۱-n} = ۲(\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})$$

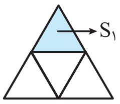
در این صورت داریم:

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_۸ = ۲(\sqrt{۲} - ۱) + ۲(\sqrt{۳} - \sqrt{۲}) + \ldots + ۲(\sqrt{۹} - \sqrt{۸})$$

$$= ۲(\sqrt{۲} - ۱ + \sqrt{۳} - \sqrt{۲} + \ldots + \sqrt{۹} - \sqrt{۸}) = ۲(\sqrt{۹} - ۱) = ۴$$

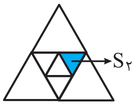
۲۵ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

در مرحله‌ی اول چون مساحت چهار مثلث با هم برابر هستند پس مساحت مثلث سایه‌خورده $\frac{۱}{۴}$ مساحت کل می‌باشد:



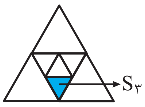
$$\Rightarrow S_۱ = \frac{۱}{۴}S$$

در مرحله‌ی دوم یعنی در شکل



چون مساحت ۴ مثلث کوچک‌تر با هم برابر می‌باشد پس مساحت مثلث سایه‌خورده $\frac{۱}{۴}$ مساحت $S_۱$ و در نهایت $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت کل می‌باشد $S_۲ = \frac{۱}{۴}S_۱ = \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۴}S) = \frac{۱}{۱۶}S = \frac{۱}{۴^۲}S$

و در مورد $S_۳$ در شکل زیر می‌توان چنین نوشت:



$$S_۳ = \frac{۱}{۴}S_۲ = \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۱۶}S) = \frac{۱}{۶۴}S = \frac{۱}{۴^۳}S$$

پس S_n در نهایت $\frac{۱}{۲^{۲n}} = \frac{۱}{۴^n}$ مساحت کل می‌باشد.

۲۶ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

ابتدا تعداد مربع‌های سایه‌خورده‌ی شکل هشتم را به‌دست می‌آوریم. برای این کار تعداد مربع‌های سایه‌خورده را به‌صورت دنباله‌ی زیر می‌نویسیم:

۰ , ۲ , ۲ , ۶ , ۶ , ۱۲ , ۱۲ , ۲۰

+۲ +۴ +۶ +۸

پس ۲۰ مربع شکل هشتم سایه‌خورده است.

حال کافیست تعداد کل مربع‌های شکل هشتم را به‌دست آوریم. برای این کار ابتدا دنباله‌ی زیر را که شامل کل مربع‌های تشکیل‌دهنده‌ی شکل‌ها می‌باشد را می‌نویسیم: ۱,۳,۶,۱۰,...

واضح است که دنباله‌ی فوق، یک دنباله‌ی مثلثی می‌باشد پس تعداد کل مربع‌های شکل هشتم برابر است با:

$$a_n = \frac{n(n+۱)}{۲} \xrightarrow{n=۸} a_۸ = \frac{۸(۹)}{۲} = ۳۶$$

پس $\frac{۲۰}{۳۶}$ یا به‌عبارتی $\frac{۵}{۹}$ شکل هشتم سایه‌خورده است.