مجموعه کتاب های EQ را
با دو جلد مجزا به دو شیوه بخوانید:

۱. کتاب را از ابتدا باز کنید و
درسنامه‌های طبقه بندی شده مطابق با
امتحانات نهایی را بخوانید.

۲. کتاب را ۱۸۰ درجه بچرخانید و
نمونه سوالات امتحان نهایی و
نوبت اول را بخوانید.

فصل ۱ تابع

تعریف تابع

تعریف اول: یک کمیّت مانند y، تابعی از یک کمیّت دیگر مانند x است، اگر برای هر مقدار x یک و فقط یک مقدار برای y، نتیجه شود. این تابع را به‌صورت $y=f(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال: الف) در $y=2x^2+1$، همواره به‌ازای هر x، تنها یک مقدار برای y به‌دست می‌آید، پس تابع هست.

ب) در $y^2=x-1$، مثلاً به‌ازای $x=2$، دو مقدار ۱ و ۱- برای y به‌دست می‌آید، پس تابع نیست.

تذکر پیداکردن یک x که به‌ازای آن، دو مقدار برای y به‌دست بیاید، برای نشان دادن تابع نبودن، کافی است، هرچندکه شاید بی‌شمار x با این شرط بتوان پیدا کرد.

تعریف دوم: یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، قانونی است که به هر عضو x در مجموعه‌ی A، دقیقاً یک عنصر y از مجموعه‌ی B را نسبت دهد. مجموعه‌ی A، دامنه‌ی تابع f و مجموعه‌ی B، برد تابع f نامیده می‌شود.

مثال: تابع $m=3-2n$ که از مجموعه‌ی $\{0,1,2\}$ به مجموعه‌ی $\{-1,0,1,3\}$ تعریف شده است را در نظر بگیرید.
این تابع، قانونی است که به هر عضو n از دامنه، یک عضو m از برد را نسبت می‌دهد. در واقع اگر هر عضو دامنه را در قانون تابع قرار دهیم، مقادیر برد به‌دست می‌آید:

$n=0 \Rightarrow m=3-2(0)=3-0=3$

$n=1 \Rightarrow m=3-2(1)=3-2=1$

$n=2 \Rightarrow m=3-2(2)=3-4=-1$

پاورقی: جلوتر که پیش برویم و دامنه، برد و مقدار تابع را که تعریف کنیم، کم‌کم این مفاهیم را بهتر و عمیق‌تر درک خواهید کرد. پس با ما قدم‌به‌قدم پیش بیایید...

صورت‌های مختلف نمایش تابع
۱ نمره

۱ ضابطه (فرمول)

مثال: $y=x-3$ (با دامنه‌ی $\{0,1,2,3\}$)

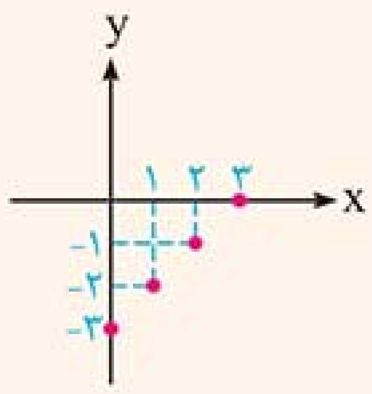
۲ جدول

مثال:

x	۰	۱	۲	۳
y	-۳	-۲	-۱	۰

۳ نمودار

مثال:



۴ زوج مرتب

مثال: $\{(3,0),(2,-1),(1,-2),(0,-3)\}$

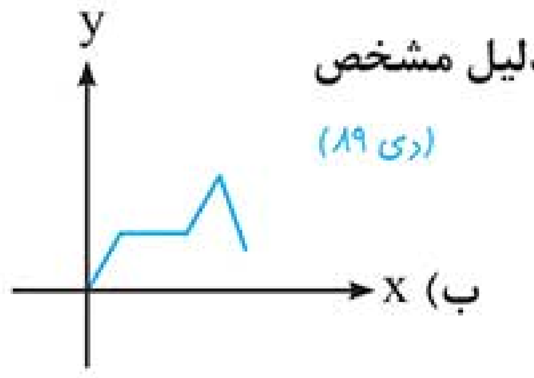
تمرین

تابع بودن یا نبودن جدول و نمودار زیر را با دلیل مشخص کنید. (دی ۸۹)

الف)

x	۱	۲	۵	۲
y	۳	۴	۴	۵

ب)



حل

الف) برای این‌که جدول داده‌شده، نمایشگر یک تابع باشد، باید به‌ازای هر x تنها یک مقدار y داشته باشیم که این‌طور نیست، زیرا به‌ازای $x=2$، دو مقدار $y=4$ و $y=5$ را برای آن داریم، پس تابع نیست.

ب) **نکته** *یک نمودار تنها در صورتی نشان دهنده‌ی یک تابع است که هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.*

اگر هر خطی موازی محور yها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (در واقع به‌ازای هر x، حداکثر یک y داریم)، پس تابع هست.

پاورقی: اگر تعریف تابع و انواع نمایش آن را خوب یاد بگیرید، نه تنها در حل سؤالات این قسمت، بلکه در حل سؤالات قسمت‌های بعدی هم که همگی در ارتباط با تابع هستند، مشکلی پیدا نخواهید کرد.

متغیر مستقل و وابسته ـ دامنه و برد
۰/۵ نمره

تعریف متغیر: به کمیّتی که تغییر می‌کند، متغیر گفته می‌شود.

مثال: با تغییر دمای هوا، میزان آلاینده‌های هوا تغییر می‌کند.

انواع متغیر:

۱ مستقل: متغیری است که وابسته به متغیر دیگری نیست.

دامنه‌ی یک تابع، مجموعه‌ی مقدارهایی است که یک متغیر مستقل می‌تواند داشته باشد. (دی ۸۹)

۲ وابسته: متغیری است که وابسته به تغییرات متغیر دیگری است.

برد یک تابع، مجموعه‌ی مقدارهایی است که یک متغیر وابسته می‌تواند داشته باشد.

مثال: الف) در مثال قبل، دمای هوا، متغیر مستقل و میزان آلاینده‌های هوا متغیر وابسته (وابسته به تغییرات دمای هوا) است.

ب) در عبارت «با افزایش فعالیت بدنی، میزان سوخت و ساز بدن بالا می‌رود.» متغیر مستقل، فعالیت بدنی و متغیر وابسته، سوخت و ساز بدن است.

پ) برای تابع

x	۱	۴	۷	۱۵
y	۲	۶	۱۲	۹

، دامنه، برابر مجموعه‌ی $\{1,4,7,15\}$ و برد، مجموعه‌ی $\{2,6,9,12\}$ می‌باشد.

ت) در تابع مساحت یک مربع، یعنی $y=x^2$، چون طول ضلع، همواره عددی مثبت است، پس دامنه $x>0$ می‌باشد. از طرفی چون همواره $x^2>0$، پس برد هم $y>0$ است.

دامنه‌ی توابع خاص
۱/۵ نمره

۱ **چندجمله‌ای‌ها** $(y=ax^n+bx^{n-1}+...+t)$: دامنه‌ی این توابع، تمام اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ است. (زیرا دلیلی برای محدودکردن x در این توابع، وجود ندارد.)

مثال: دامنه‌ی تابع $y=x^3+2x^2-1$ چون چندجمله‌ای است، برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. (شهریور ۹۰)

۲ توابع کسری $\left(y=\frac{f(x)}{g(x)}\right)$: دامنه‌ی این توابع، تمام اعداد حقیقی به‌جز xهایی است که به‌ازای آن‌ها مخرج کسر، یعنی $g(x)$ برابر صفر می‌شود. به‌عبارتی:

دامنه $=\mathbb{R}-\{x\,|\,g(x)=0\}$

مثال: برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تابع $y=\frac{x}{x-5}$ ابتدا xهایی را می‌یابیم که به‌ازای آن‌ها مخرج کسر برابر صفر شود. پس: (دی ۹۱)

$x-5=0\Rightarrow x=5$

حال دامنه‌ی آن برابر می‌شود با: دامنه $=D=\mathbb{R}-\{5\}$

توجه از D به جای نوشتن «دامنه» استفاده می‌کنیم.

۳ توابع رادیکالی:

الف) رادیکال‌ها با فرجه‌ی فرد $\left(y=\sqrt[2n+1]{f(x)}\right)$: دامنه‌ی این توابع، با دامنه‌ی $f(x)$ برابر است.

مثال: برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تابع $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ کافی است دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال را پیدا کنیم. چون زیر رادیکال یک تابع کسری است، پس داریم:

$x\neq 0\Rightarrow$ دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال $=\mathbb{R}-\{0\}\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{0\}$

ب) رادیکال‌ها با فرجه‌ی زوج $\left(y=\sqrt[2n]{f(x)}\right)$: دامنه‌ی این توابع، xهایی است که به‌ازای آن‌ها $f(x)\geq 0$ باشد. (چون زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج، نمی‌تواند منفی باشد.)

مثال: برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{4+2x}$، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم: (شهریور ۹۰)

$4+2x\geq 0\Rightarrow 2x\geq -4\Rightarrow x\geq -2\Rightarrow D_y: x\geq -2$

تذکر اگر تابع رادیکالی در مخرج یک کسر قرار داشت، آن‌گاه در صورتی که فرجه فرد باشد، باید xهایی را پیدا کنیم که به‌ازای آن‌ها $f(x)\neq 0$ باشد و در صورتی که فرجه زوج باشد، دامنه برابر xهایی است که به‌ازای آن‌ها $f(x)>0$ باشد.

تمرین

۱ـ در عبارت (تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها در هر دقیقه، به تغییرات درجه‌ی حرارت بستگی دارد.) متغیرهای وابسته و مستقل را مشخص کنید. (مثال کتاب درسی)

حل

متغیر مستقل: درجه‌ی حرارت — متغیر وابسته: تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها در هر دقیقه

۲ـ دامنه‌ی توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $y=3x^3-7$ (شهریور ۹۲)

ب) $y=\frac{7}{2x+1}$ (دی ۹۳)

پ) $y=\sqrt{9-x}$ (دی ۹۰)

ت) $y=\frac{x+5}{(x+1)(x-1)}$ (دی ۸۹)

ث) $y=x^2+5x+2$ (شهریور ۸۹)

ج) $y=\frac{1}{x+5}$ (شهریور ۹۲)

چ) $y=\sqrt{2x-4}$ (خرداد ۸۹)

ح) $y=\sqrt{x+9}$ (دی ۹۱)

خ) $y=\frac{7x-1}{(x-2)(x+5)}$ (شهریور ۸۹)

حل

الف) $D=\mathbb{R}$ (چون چندجمله‌ای است.)

ب) $2x+1\neq 0\Rightarrow 2x\neq -1\Rightarrow x\neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (چون تابع کسری است.)

پ) $9-x\geq 0\Rightarrow -x\geq -9\Rightarrow x\leq 9\Rightarrow D: x\leq 9$ (چون تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج است.)

ت) $(x+1)(x-1)\neq 0\Rightarrow x\neq -1, x\neq 1\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

ث) $D=\mathbb{R}$

ج) $x+5\neq 0\Rightarrow x\neq -5\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-5\}$

چ) $2x-4\geq 0\Rightarrow 2x\geq 4\Rightarrow x\geq 2\Rightarrow D: x\geq 2$

ح) $x+9\geq 0\Rightarrow x\geq -9\Rightarrow D: x\geq -9$

خ) $(x-2)(x+5)\neq 0\Rightarrow x\neq 2\,,\,x\neq -5\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-5,2\}$

پاورقی *سؤال تعیین دامنه، همیشه به همین فرم با دو یا سه تابع از توابع خاصی که تعریف کردیم، مطرح می‌شود که با تشخیص نوع تابع، به‌دست آوردن دامنه‌ی آن بسیار راحت خواهد بود، چون همگی مشابه هم و در یک تیپ هستند، پس حتماً سعی کنید از این سؤال، نمره‌ی کامل را بگیرید.*

نماد تابع — ۱ نمره

مفهوم نماد تابع: وقتی یک تابع به‌وسیله‌ی یک عبارت جبری یا یک ضابطه که همان فرمول است، نمایش داده می‌شود، معمولاً از نماد تابع استفاده می‌شود. نماد $f(x)$ نشان می‌دهد که نام تابع، f و **متغیر مستقل**، **x** است. مقدار $f(x)$ یا **y**، **مقدار تابع** است که **متغیر وابسته** به متغیر مستقل می‌باشد.

تذکر از هر حرفی به‌غیر از x، می‌توان برای نشان دادن متغیر مستقل و از هر حرفی به غیر از f می‌توان برای نشان دادن نام تابع استفاده کرد. مانند $g(t)$ یا $h(r)$ یا ...

مثال: در تابع $g(w)$ با ضابطه‌ی $g(w)=\frac{2w-1}{w^2}$، نام تابع g، متغیر مستقل، w و $g(w)$ مقدار تابع و متغیر وابسته است.

تذکر ۱- در هر فرمول، حرف داخل پرانتز، نشان‌دهنده‌ی متغیر مستقل است. مانند h در $x(h)=\sqrt{h+1}$.

۲- در فرمول‌ها مقدارهایی وجود دارند که همیشه ثابت هستند. به این مقدارها، **مقدار ثابت** گفته می‌شود. مانند ۲- در $y=3x-2$.

ضابطه‌ی تابع — ۱/۵ نمره

گاهی تابعی به‌صورت جدول داده می‌شود و می‌خواهیم با استفاده از آن ضابطه‌ی تابع را بنویسیم. در این‌صورت با دقت در اعداد جدول، باید ببینیم که هر x، طبق چه قانونی (ضابطه‌ای) به y تبدیل شده است.

مثال: فرض کنید بخواهیم ضابطه‌ی جدول

x	۱	۲	۳	۴
y	۱	۴	۹	۱۶

را بنویسیم. با دقت در مقادیر x جدول می‌بینیم که هر x به توان ۲ رسیده تا y متناظر آن به‌دست آمده است. پس می‌توانیم ضابطه‌ی تابع آن را به‌صورت $y=x^2$ بنویسیم که در آن مجموعه‌ی {۱,۲,۳,۴} دامنه و مجموعه‌ی {۱,۴,۹,۱۶} برد تابع می‌باشد. (دی ۹۳)

تمرین

۱- در تابع $f(t)=\frac{۲t-۱}{۳t}$ ، متغیر مستقل .... و متغیر وابسته .... می‌باشد. (شهریور ۹۲)

حل

به‌ترتیب t و $f(t)$

۲- در معادله‌ی $y=۴x-۳$ متغیر مستقل و متغیر وابسته را مشخص کنید. (دی ۹۲ - مشابه دی ۹۴)

حل

متغیر مستقل: x و متغیر وابسته: y

۳- با توجه به جدول زیر، ضابطه‌ی (فرمول) تابع را نوشته، سپس دامنه و برد تابع را مشخص کنید. (دی ۹۰)

x	۲	۳	۴	۵
y	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷

حل

با دقت در مقادیر x و امتحان کردن حالت‌های مختلف، به این نتیجه می‌توان رسید که هر x، ابتدا در عدد ۵ ضرب و سپس با ۲ جمع شده تا y آن به‌دست آمده است: $y=۵x+۲$

x مقادیر $=$ دامنه $=\{۲،۳،۴،۵\}$ ، y مقادیر $=$ برد $=\{۱۲،۱۷،۲۲،۲۷\}$

۴- با توجه به جدول مقابل، فرمول (ضابطه‌ی) تابع را نوشته، سپس مقدار y را به‌ازای $x=۰$ و $x=۵$ بنویسید. (شهریور ۹۴ - مشابه شهریور ۹۱)

x	۱	۲	۳	۴
y	۲	۵	۱۰	۱۷

حل

با دقت در اعداد جدول، می‌بینیم که هر x به توان ۲ رسیده و سپس با ۱ جمع شده تا y به‌دست آمده است. پس ضابطه‌ی آن را می‌توان به‌صورت $y=x^۲+۱$ نوشت و داریم:

$x=۰ \Rightarrow y=(۰)^۲+۱=۰+۱=۱$ ، $x=۵ \Rightarrow y=۵^۲+۱=۲۵+۱=۲۶$

۵- تابعی با ضابطه‌ی $y=۳x-۵$ را در نظر بگیرید: (شهریور ۸۹ - مشابه شهریور ۹۰)

الف) جدول را کامل کنید.

ب) دامنه و برد تابع را با توجه به جدول مشخص کنید.

x	۰	۱	۲	۳
y				

حل

الف) هر x را در ضابطه‌ی تابع قرار داده و مقدار y را به‌دست می‌آوریم:

$x=۰ \Rightarrow y=۳(۰)-۵=۰-۵=-۵$

$x=۱ \Rightarrow y=۳(۱)-۵=۳-۵=-۲$

$x=۲ \Rightarrow y=۳(۲)-۵=۶-۵=۱$

$x=۳ \Rightarrow y=۳(۳)-۵=۹-۵=۴$

$\Rightarrow$

x	۰	۱	۲	۳
y	-۵	-۲	۱	۴

ب) مقادیر x دامنه و مقادیر y برد تابع هستند، پس:

دامنه $=\{۰،۱،۲،۳\}$ و برد $=\{-۵،-۲،۱،۴\}$

۶- اگر $f(x)=۲x+۱$ باشد، جدول مقابل را کامل کنید. (دی ۹۱)

x	-۱	۰	۱	۲
y				

حل

x	-۱	۰	۱	۲
y	-۱	۱	۳	۵

$x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=۲(-۱)+۱=-۲+۱=-۱$

$x=۰ \Rightarrow f(۰)=۲(۰)+۱=۰+۱=۱$

$x=۱ \Rightarrow f(۱)=۲(۱)+۱=۲+۱=۳$

$x=۲ \Rightarrow f(۲)=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$

توجه: نوشتن اعداد داخل جدول برای پاسخ امتحان، کافی است و روش محاسبه لازم نیست.

پاورقی: *شاید حدس زدن ضابطه‌ی تابع، کمی سخت باشد، ولی با دقت و تمرین، این سؤالات را هم می‌توانید به سادگی حل کنید. پس مثل همیشه، فقط تمرین و تمرین ...*

مقدار تابع

۱/۵ نمره

مفهوم: به‌ازای مقدارهای مختلفی که به متغیر مستقل (x) داده می‌شود، مقدار تابع یا $f(x)$ به‌دست می‌آید.

مثال: اگر $f(x)=\frac{x}{۲-x}$ و $g(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، آن‌گاه برای به‌دست آوردن مقادیر زیر، این‌طور عمل می‌کنیم: (دی ۸۹)

الف) $g(۱)+۳f\left(\frac{۱}{۲}\right)$

$$\begin{cases} g(۱)=۱+\sqrt{۱}=۱+۱=۲ \\ f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\dfrac{\frac{۱}{۲}}{۲-\frac{۱}{۲}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow g(۱)+۳f\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲+۳\left(\frac{۱}{۳}\right)=۲+۱=۳$$

ب) $|f(۴)|$

$$f(۴)=\frac{۴}{۲-۴}=\frac{۴}{-۲}=-۲ \Rightarrow |f(۴)|=|-۲|=۲$$

ج) $\frac{f(۳)}{g(۴)}$

$$\begin{cases} f(۳)=\frac{۳}{۲-۳}=\frac{۳}{-۱}=-۳ \\ g(۴)=۴+\sqrt{۴}=۴+۲=۶ \end{cases} \Rightarrow \frac{f(۳)}{g(۴)}=\frac{-۳}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

نکته: *وقتی $f(m)=n$ است، نقطه‌ای به مختصات $(m،n)$ یکی از نقاط نمودار تابع f می‌باشد. به‌عبارتی $y=f(m)=n$ عرض نقطه‌ای است که طول آن $x=m$ می‌باشد.*

مثال: اگر $f(-۲)=۱$ باشد، آن‌گاه نمودار f، شامل نقطه‌ی $(-۲،۱)$ است.

یک تعبیر: هر تابع را می‌توان مانند یک ماشین در نظر گرفت که مقادیر دامنه، ورودی‌های آن و مقادیر برد، خروجی‌های آن هستند. درون ماشین هم ضابطه‌ی (قانون) تابع عمل می‌کند.

تمرین

۱- اگر $f(x)=۲x-۵$ و $g(x)=\sqrt{x+۲}$ باشد، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید: (شهریور ۹۲ - مشابه دی ۹۲)

الف) $f(۳)\times g(۲)$ ب) $f(t)$

حل

الف) $\begin{cases} f(۳)=۲(۳)-۵=۶-۵=۱ \\ g(۲)=\sqrt{۲+۲}=\sqrt{۴}=۲ \end{cases} \Rightarrow f(۳)\times g(۲)=۱\times ۲=۲$

ب) $f(t)=۲(t)-۵=۲t-۵$

توجه: همیشه به‌جای متغیر مستقل، عدد قرار نمی‌گیرد. گاهی از عبارت‌های حرفی برای قرار دادن به جای متغیر مستقل استفاده می‌شود که هیچ فرقی نمی‌کند.

۲- اگر $f(x)=|x-۲|$ و $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$ باشد، مقادیر زیر را محاسبه کنید. (دی ۹۰ - مشابه شهریور ۹۰)

الف) $f(۰)+g(۱)$ ب) $۲f(۵)\times ۳g(۰)$

حل

الف) $\begin{cases} f(۰)=|۰-۲|=|-۲|=۲ \\ g(۱)=\frac{۱}{۱^{۲}+۱}=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow f(۰)+g(۱)=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$

ب) $\begin{cases} f(۵)=|۵-۲|=|۳|=۳ \\ g(۰)=\frac{۱}{۰^{۲}+۱}=\frac{۱}{۱}=۱ \end{cases}$

$\Rightarrow ۲f(۵)\times ۳g(۰)=(۲\times ۳)\times(۳\times ۱)=۶\times ۳=۱۸$

۳- اگر $f(x)=|x-۵|$ و $g(x)=\sqrt{۱۰-x}$ باشند، مقادیر زیر را بیابید. (دی ۹۳)

الف) $۲g(۱)+f(-۲)$ ب) $f(t)$

حل

الف) $\begin{cases} g(۱)=\sqrt{۱۰-۱}=\sqrt{۹}=۳ \\ f(-۲)=|-۲-۵|=|-۷|=۷ \end{cases} \Rightarrow ۲g(۱)+f(-۲)=۲(۳)+۷=۱۳$

ب) $f(t)=|t-۵|$

پاورقی به‌دست آوردن مقدار تابع، جزو سؤالات بسیار ساده است. فقط باید مواظب باشید در جمع و تفریق‌ها اشتباه نکنید.

تابع خطی
۱/۵ نمره

تعریف: تابع‌هایی که نمودار آن‌ها به شکل یک خط است، تابع‌های خطی هستند و معادلهٔ آن‌ها به صورت کلی $y=f(x)=mx+n$ می‌باشد که در آن m، ضریب زاویه یا نسبت تغییرات y به تغییرات x است و n محل تقاطع خط با محور عمودی (یا yها) است که عرض از مبدأ نامیده می‌شود. (دی ۸۹)

نکته به محل تقاطع خط با محور xها $(y=۰)$، طول از مبدأ گفته می‌شود.

مثال: در خط $y=-۲x+۳$، (۲-) ضریب زاویه، ۳ عرض از مبدأ و $\frac{۳}{۲}$ طول از مبدأ خط است.

ضریب زاویه (شیب): ۱) $m=\frac{\text{مقدار خیز}}{\text{مقدار رفت}}$

۲) $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{y_۱-y_۲}{x_۱-x_۲}$ یا $m=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(x_۱)-f(x_۲)}{x_۱-x_۲}$

مثال: ضریب زاویه‌ی (شیب) خطی که از دو نقطه‌ی $A(-۲,۱)$ و $B(-۵,۳)$ می‌گذرد. برابر است با: (شهریور ۹۰)

$A(-۲,۱)\ ,\ B(-۵,۳)$

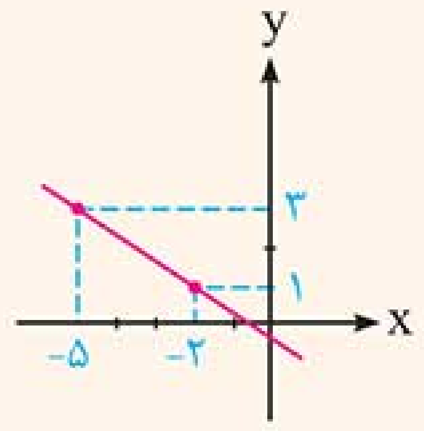
$\downarrow\ \downarrow \quad \downarrow\ \downarrow$

$x_۱\ y_۱ \quad x_۲\ y_۲$

$\Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۳-۱}{-۵-(-۲)}=\frac{۲}{-۵+۲}=-\frac{۲}{۳}$

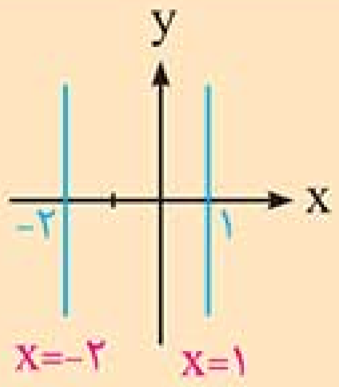
تذکر با داشتن دو نقطه از یک خط، می‌توان آن را رسم کرد.

مثال: نمودار خطی که از دو نقطه‌ی مثال قبل می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

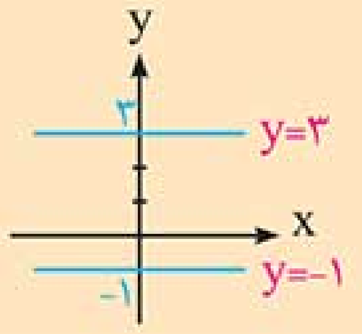


خط‌های خاص:

۱ـ خط‌های عمودی: شیب آن‌ها تعریف نشده است. تمام نقاط روی خط، طول یکسان دارند.



۲ـ خط‌های افقی: شیب آن‌ها صفر است. تمام نقاط روی خط، عرض یکسان دارند.



تمرین

۱ـ معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب (ضریب زاویه‌ی) آن $m=\frac{۳}{۴}$ باشد و از نقطه‌ی $A(۰,۱)$ بگذرد. (فروردین ۸۹)

حل

چون خط از نقطه‌ی $(۰,۱)$ می‌گذرد، پس عرض از مبدأ آن ۱ است. در نتیجه داریم:

$y=mx+n\ ,\ m=\frac{۳}{۴}\ ,\ n=۱\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x+۱$

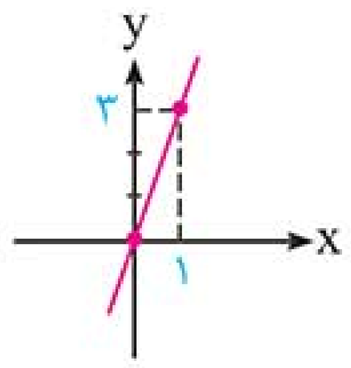
۲ـ خط‌های زیر را رسم کنید. (فروردین ۸۹)

الف) $y=۳x$ ب) $۳y+۲x=۶$

حل

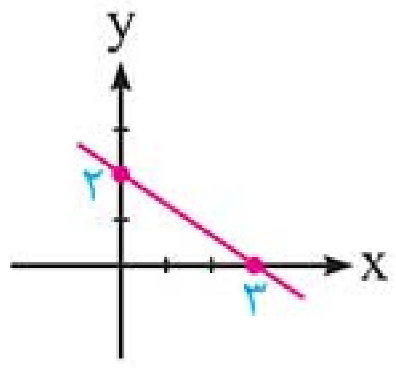
الـف) دو نقطه از خط را پیدا کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

x	۰	۱
y	۰	۳



ب)

x	۰	۳
y	۲	۰



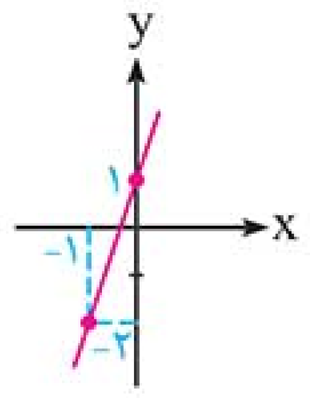
۳ـ الف) نمودار خط $y-۳x=۱$ را رسم کنید. (شهریور ۹۲)

ب) در معادله‌ی $y=۲x+۳$، ضریب زاویه‌ی (شیب) خط و عرض از مبدأ را مشخص کنید.

حل

الف) دو نقطه از خط را پیدا کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

x	۰	-۱
y	۱	-۲



ب) ضریب زاویه = ۲ و عرض از مبدأ = ۳

۴ـ ضریب زاویه (شیب) خط‌های زیر را تعیین کنید. (شهریور ۹۱ ـ مشابه شهریور ۸۹)

الف) خطی که از دو نقطه‌ی $B(۱,۴)$ و $A(۳,۲)$ بگذرد.

ب) خط $y=۳$

۱

الف) برای همه‌ی مقادیر x به‌جز $x = 0$، به‌ازای هر x دو مقدار برای y وجود دارد. مثلاً اگر $x = 1$، آن‌گاه $y = 1$ یا $y = -1$، پس تابع نیست. (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) تابع نیست. چون به‌ازای برخی مقادیر x، دو مقدار برای y وجود دارد، (۰/۲۵)

مثلاً اگر $x = 2$، آن‌گاه $y = 1$ یا $y = -1$. (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ج) تابع است. چون به‌ازای هر مقدار برای x، یک مقدار برای y وجود دارد. (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۱- تعریف تابع)

۲

الف) چون تابع کسری داریم، باید مخرج کسر مخالف صفر باشد:

$(x-1)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x-1 \neq 0$ یا $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ یا $x \neq -2$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow$ دامنه $= \mathbb{R} - \{1, -2\}$ (۰/۷۵)

ب) عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر و مخرج کسر، مخالف صفر باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} \geq 0 \xrightarrow{x^2+1>0 \text{ همواره}} x \geq 0 \\ x^2+1 \neq 0 \quad \text{همواره برقرار} \end{cases} \Rightarrow D: x \geq 0$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۱- دامنه‌ی توابع خاص)

۳

الف) با توجه به اعداد جدول، می‌بینیم که هر x به توان ۲ رسیده و سپس با عدد ۱ جمع شده است، پس ضابطه‌ی تابع جدول به‌صورت $y = x^2 + 1$ می‌باشد. (۰/۵)

ب)
$x = -3 \Rightarrow y = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$x = 5 \Rightarrow y = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۱- ضابطه‌ی تابع)

۴

الف) $f(-4) = -4 + \sqrt{-(-4)} = -4 + \sqrt{4} = -4 + 2 = -2$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow |f(-4)| = |-2| = 2$ (۰/۲۵)

ب)
$$\begin{cases} g(-2) = \dfrac{-2}{1+2(-2)} = \dfrac{-2}{1-4} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3} \\ f(-1) = -1 + \sqrt{-(-1)} = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow \dfrac{g(-2)}{2f(-1)+1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{2(0)+1} = \dfrac{2}{3}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ج)
$$\begin{cases} f(-9) = -9 + \sqrt{-(-9)} = -9 + \sqrt{9} = -9 + 3 = -6 \\ g(3) = \dfrac{3}{1+2(3)} = \dfrac{3}{1+6} = \dfrac{3}{7} \end{cases}$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow f(-9) \times g(3) = -6 \times \dfrac{3}{7} = -\dfrac{18}{7}$ (۰/۲۵)

(فصل ۱- مقدار تابع)

۵

الف) $2x - 4y = 1 \Rightarrow -4y = 1 - 2x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ شیب تعریف نشده (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ج) $3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3} \Rightarrow m = 0$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۱- تابع خطی)

۶

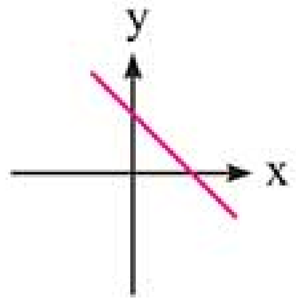
چون خط، محور طول‌ها را در نقطه‌ی ۲- قطع می‌کند، پس نقطه‌ی $(-2, 0)$ روی خط قرار دارد:

$m = 3, y = mx + n \xrightarrow{(-2,0)} 0 = 3(-2) + n \Rightarrow n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵)

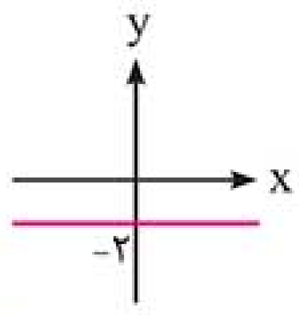
$\Rightarrow y = 3x + 6$ (۰/۲۵)

(فصل ۱- تابع خطی)

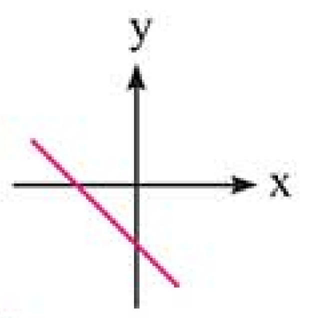
۷



(ج) (۰/۵)



(ب) (۰/۵)



(الف) (۰/۵)

(فصل ۱- نمودار خط در حالت کلی)

۸

معادله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$(x-1)(2x+3) = x - 6 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2x - 3 = x - 6$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 3 - x + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3 = 0$ (۰/۵)

$\Rightarrow$ ضریب جمله‌ی درجه‌ی اول $= 0$ (۰/۲۵) ، جمله‌ی ثابت $= 3$ (۰/۲۵)

(فصل ۲- معادله‌ی درجه‌ی دوم)

۹

چون معادله جواب ندارد، پس $\Delta < 0$ است: (۰/۲۵)

$\Delta = b^2 - 4ac = (-a)^2 - 4(3)(5) < 0 \Rightarrow a^2 - 60 < 0 \Rightarrow a^2 < 60$ (۰/۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow -\sqrt{60} < a < \sqrt{60} \Rightarrow -2\sqrt{15} < a < 2\sqrt{15}$ (۰/۵)

(فصل ۲- حل معادلات درجه‌ی دوم)

۱۰

الف)
$$(2x-1)^2 = (x+3)^2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x + 3 \\ \text{یا} \\ 2x - 1 = -(x+3) \end{cases}$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 - x - 3 = 0 \\ 2x - 1 + x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ 3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $x^2 + 7x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x = 12$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{(\frac{b}{2})^2 = (\frac{7}{2})^2 = \frac{49}{4}} x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 12 + \frac{49}{4}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \frac{97}{4} \Rightarrow (x + \frac{7}{2})^2 = \frac{97}{4} \Rightarrow x + \frac{7}{2} = \pm\frac{\sqrt{97}}{2}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{7}{2} = \dfrac{\sqrt{97}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{97} - 7}{2} \\ x + \dfrac{7}{2} = -\dfrac{\sqrt{97}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-\sqrt{97} - 7}{2} \end{cases}$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۲- حل معادلات درجه‌ی دوم)

نام	آزمون (۲)	تاریخ امتحان
نام خانوادگی	نوبت اول - دی ماه	موضوع امتحان

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف		نمره
۱	کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع هستند؟ چرا؟ الف) $\|y\|=x^2$ ب) $y^2=x-1$ ج) $y=\|x\|$	۲
۲	دامنه‌ی توابع زیر را مشخص کنید. الف) $y=\frac{3x-1}{(x-1)(x+2)}$ ب) $y=\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$	۲/۵
۳	الف) ضابطه‌ی تابع مربوط به جدول مقابل را بنویسید. ب) مقدار تابع را به‌ازای $x=-3$ و $x=5$ پیدا کنید. x: ۲-، ۱-، ۰، ۱ — y: ۵، ۲، ۱، ۲	۱/۵
۴	اگر $f(x)=x+\sqrt{-x}$ و $g(x)=\frac{x}{1+2x}$، آن‌گاه مقدارهای زیر را بیابید. الف) $\|f(-4)\|$ ب) $\frac{g(-2)}{2f(-1)+1}$ ج) $f(-9)\times g(3)$	۳/۵
۵	شیب خط‌های زیر را به‌دست آورید. الف) $2x-4y=1$ ب) $x-2=0$ ج) $3y-5=0$	۱/۵
۶	معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن برابر ۳ باشد و محور طول‌ها را در نقطه‌ی ۲- قطع کند.	۱/۵
۷	نمودار تقریبی خط‌های زیر را رسم کنید. الف) خط دارای شیب و عرض از مبدأ منفی باشد. ب) خط دارای شیب صفر و عرض از مبدأ ۲- باشد. ج) خط فقط از ناحیه‌ی سوم دستگاه مختصات عبور نکند.	۱/۵
۸	در معادله‌ی درجه‌ی دوم $(x-1)(2x+3)=x-6$، ضریب جمله‌ی درجه‌ی اول و جمله‌ی ثابت را مشخص کنید.	۱
۹	اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2-ax+5=0$ جواب نداشته باشد، حدود مقادیر a را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۰	معادله‌های زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید. الف) $(x+3)^2=(2x-1)^2$ (ریشه‌ی زوج) ب) $x^2+7x-12=0$ (مربع کامل کردن)	۳/۵
	جمع نمره	۲۰

x	۲-	۱-	۰	۱
y	۵	۲	۱	۲

۱

الف) چون y چندجمله‌ای است، پس دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ می‌باشد. (۰/۲۵)

ب) $\frac{۱}{x-۲} \ge ۰ \Rightarrow x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \Rightarrow D: x>۲$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۱- دامنه‌ی توابع خاص)

۲

چون f تابع است، باید به‌ازای هر x، تنها یک مقدار برای y داشته باشیم.

پس: $\begin{cases}(۲,m+۱)\in f\\(۲,-۳)\in f\end{cases} \Rightarrow m+۱=-۳ \Rightarrow m=-۴$ (۰/۵) (۰/۲۵)

بنابراین تابع f به‌صورت $f=\{(۱,-۳),(۲,-۳),(۳,۴)\}$ (۰/۵) درمی‌آید و دامنه و برد آن برابر است با: $\{۱,۲,۳\}=$ دامنه‌ی f ، $\{-۳,۴\}=$ برد f (۰/۲۵) (۰/۵)

(فصل ۱- تعریف تابع)

۳

الف) $x=-۳ \Rightarrow f(-۳)=(-۳)^۲-۲(-۳)=۹+۶=۱۵$

$y=-۱ \Rightarrow f(x)=-۱ \Rightarrow x^۲-۲x=-۱ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰$

$\Rightarrow (x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$x=۲ \Rightarrow f(۲)=۲^۲-۲(۲)=۴-۴=۰$

$x=۴ \Rightarrow f(۴)=۴^۲-۲(۴)=۱۶-۸=۸$

x	-۳	۱	۲	۴
y	۱۵	-۱	۰	۸

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $\{-۳,۱,۲,۴\}=$ دامنه‌ی f (۰/۵) و $\{-۱,۰,۸,۱۵\}=$ برد f (۰/۵)

(فصل ۱- ضابطه‌ی تابع)

۴

الف) $\begin{cases}f(-۱)=\frac{(-۱)^۲+۱}{-۱-۳}=\frac{۱+۱}{-۴}=\frac{۲}{-۴}=-\frac{۱}{۲} \\ g(۰)=|۰-۲|=|-۲|=۲\end{cases}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۲f(-۱)+g(۰)=۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۲=-۱+۲=۱$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $\begin{cases}f(۲)=\frac{۲^۲+۱}{۲-۳}=\frac{۵}{-۱}=-۵ \\ g(-۳)=|-۳-۲|=|-۵|=۵\end{cases}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow f(۲)\times g(-۳)=(-۵)\times ۵=-۲۵$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۱- مقدار تابع)

۵

$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \Rightarrow -۲=\frac{۲-۳a}{a-۱-(-۳)} \Rightarrow -۲=\frac{۲-۳a}{a+۲}$ (۰/۵) (۰/۲۵)

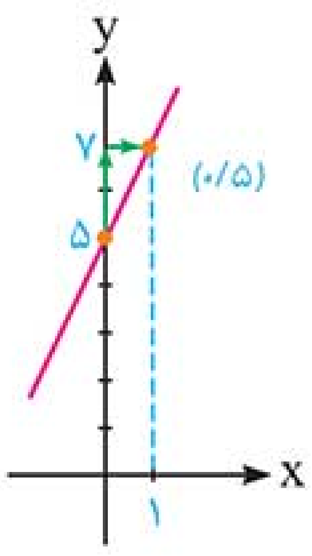
$\Rightarrow -۲a-۴=۲-۳a \Rightarrow a=۶$ (۰/۲۵)

(فصل ۱- تابع خطی)

۶

$۲x-y+۵=۰ \Rightarrow -y=-۲x-۵ \Rightarrow y=۲x+۵$

$\Rightarrow$ شیب $=۲=\frac{۲}{۱}$ (۰/۲۵) ، $(۰,۵)=$ عرض از مبدأ (۰/۲۵)



(۰/۵)

نقطه‌ی $(۰,۵)$ (۰/۲۵) را روی دستگاه مختصات مشخص کرده و سپس ۲ واحد به بالا (خیز) (۰/۲۵) و ۱ واحد به راست (رفت) (۰/۲۵) می‌رویم تا نقطه‌ی دوم به‌دست آید. خطی که از این دو نقطه می‌گذرد را رسم می‌کنیم. (۰/۲۵)

(فصل ۱- نمودار تابع خطی)

۷

الف) معادله‌ی کلی خطی که شیب آن تعریف نشده است، به‌صورت $x=k$ می‌باشد. چون این خط از نقطه‌ی $(۲,۵)$ می‌گذرد، پس $x=۲$ (۰/۵) معادله‌ی آن می‌باشد.

ب) $\begin{cases}f(-۲)=۳ \Rightarrow ۳=a(-۲)+b \Rightarrow -۲a+b=۳ \\ f(۱)=۵ \Rightarrow ۵=a(۱)+b \Rightarrow a+b=۵\end{cases}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۳a=۲ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳} \Rightarrow b=\frac{۱۳}{۳}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱۳}{۳} \Rightarrow f(-۳)=\frac{۲}{۳}(-۳)+\frac{۱۳}{۳}=-۲+\frac{۱۳}{۳}=\frac{۷}{۳}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۱- تابع خطی)

۸

ابتدا معادله را به‌صورت استاندارد $۲x^۲-۳x-۱=۰$ می‌نویسیم. (۰/۲۵) حال داریم:

-۱ : جمله‌ی ثابت ، $-۳x$: جمله‌ی درجه‌ی ۱ ، $۲x^۲$: جمله‌ی درجه‌ی ۲ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۲- معادله‌ی درجه‌ی دوم)

۹

$x=-۲$ یا $x=۳ \Rightarrow x+۲=۰$ یا $x-۳=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۳)=۰$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow x^۲-x-۶=۰$ (۰/۵)

(فصل ۲- نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با داشتن دو جواب آن)

۱۰

الف) $x^۲-۷x-۱۸=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x+۲=۰\\ \text{یا}\\ x-۹=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-۲\\ \text{یا}\\ x=۹\end{cases}$ (۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۵)

ب) $(x-۵)^۲-۹=۰ \Rightarrow (x-۵)^۲=۹ \Rightarrow \begin{cases}x-۵=\sqrt{۹}\\ \text{یا}\\ x-۵=-\sqrt{۹}\end{cases}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \begin{cases}x-۵=۳\\ \text{یا}\\ x-۵=-۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۸\\ \text{یا}\\ x=۲\end{cases}$ (۰/۵) (۰/۲۵)

ج) $۲x^۲-۳x+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases}a=۲\\ b=-۳\\ c=۱\end{cases}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=(-۳)^۲-۴(۲)(۱)=۹-۸=۱$ (۰/۲۵) (۰/۵)

$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۳)\pm\sqrt{۱}}{۲(۲)}=\frac{۳\pm۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{۴}{۴}=۱\\ \text{یا}\\ x=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$ (۰/۵) (۰/۵)

(فصل ۲- حل معادلات درجه‌ی دوم)

نام	آزمون (۱)	تاریخ امتحان
نام خانوادگی	نوبت اول - دی ماه	موضوع امتحان

ردیف	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	نمره
۱	دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید. الف) $y = ۵x^۲ - ۳x + ۱$ ب) $y = \sqrt{\frac{۱}{x-۲}}$	۱
۲	اگر $f = \{(۱,-۳),(۲,m+۱),(۳,۴),(-۳,۲)\}$ یک تابع باشد، مقدار m را به‌دست آورید، سپس دامنه و برد تابع را مشخص کنید.	۲/۵
۳	اگر $f(x) = x^۲ - ۲x$، آن‌گاه: الف) جدول مقابل را برای این تابع کامل کنید. ب) دامنه و برد f را با توجه به جدول بنویسید.	۲
۴	اگر $f(x) = \frac{x^۲+۱}{x-۳}$ و $g(x) = \|x-۲\|$، آن‌گاه مقدارهای زیر را به‌دست آورید. الف) $۲f(-۱) + g(۰)$ ب) $f(۲) \times g(-۳)$	۳
۵	ضریب زاویه‌ی خطی که از نقاط $(a-۱,۲)$ و $(-۳,۳a)$ می‌گذرد، برابر ۲- است. مقدار a را به‌دست آورید.	۱
۶	خط $۲x - y + ۵ = ۰$ را با استفاده از شیب و عرض از مبدأ رسم کنید.	۲
۷	الف) معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن تعریف نشده باشد و از نقطه‌ی $(۲,۵)$ بگذرد. ب) اگر $f(x) = ax + b$، $f(-۲) = ۳$ و $f(۱) = ۵$ باشد، $f(-۳)$ را به‌دست‌آورید.	۲
۸	در معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲ - ۳x = ۱$، جمله‌ی درجه‌ی ۲، جمله‌ی درجه‌ی ۱ و جمله‌ی ثابت را مشخص کنید.	۱
۹	معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۲- و ۳ باشند.	۱/۲۵
۱۰	معادلات زیر را با روش‌های خواسته شده حل کنید. الف) $x^۲ - ۷x - ۱۸ = ۰$ (تجزیه) ب) $(x-۵)^۲ - ۹ = ۰$ (ریشه‌ی زوج) ج) $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ (روش فرمول کلی یا Δ)	۴/۲۵
	جمع نمره	۲۰

جدول سؤال ۳:

x	-۳		۲	۴
y		-۱		