درسنامه ۳

سقوط آزاد

سقوط آزاد یکی از نمونه‌های مهم حرکت با شتاب ثابت بر روی مسیر مستقیم است. به همین علت می‌توانیم از تمام روابط حرکت شتاب‌دار با شتاب ثابت در این حرکت استفاده کنیم. فقط چون حرکت در راستای عمودی انجام می‌شود به جای x در تمام روابط از y استفاده می‌کنیم. اگر جهت مثبت محور yها را به طرف بالا در نظر بگیریم جهت شتاب همواره در خلاف محور yها بوده پس در روابط حرکت شتاب‌دار $-g$ را به جای a قرار می‌دهیم. بنابراین روابط اصلی به شکل زیر خواهند شد:

رابطه‌های حرکت سقوط آزاد	رابطه‌های حرکت شتاب‌دار با شتاب ثابت
$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$	$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$
$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$	$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$
$v=-gt+v_0$	$v=at+v_0$
$v_2^2-v_1^2=-2g\Delta y$	$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x$

نکته *وقتی جهت رو به بالا مثبت در نظر گرفته می‌شود باید دقت کنیم که:*

۱- اگر جسم رو به بالا در حال حرکت باشد $v>0$ و اگر رو به پایین در حال حرکت باشد $v<0$ است.

۲- در بررسی جابه‌جایی جسم، اگر نقطه‌ی دوم بالاتر از نقطه‌ی اول باشد Δy مثبت و اگر نقطه‌ی دوم پایین‌تر از نقطه‌ی اول باشد Δy منفی است.

۳- چون جهت شتاب همواره رو به پایین است، چه جسم رو به بالا در حال حرکت باشد و چه در حال حرکت رو به پایین باشد، در روابط باید علامت منفی پشت g باقی بماند. به‌عبارت دیگر برای تمام اجسام در تمام طول حرکت آن‌ها اندازه و جهت شتاب ثابت است و همه‌ی اجسام دارای یک شتاب هستند.

مثال ۲۱

در شرایط خلأ از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سنگی را در راستای قائم با سرعت $15\frac{m}{s}$ رو به بالا پرتاب می‌کنیم. چه مدت طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

☑ **پاسخ:** قبل از حل این مثال به این نکته توجه کنید که هر حرکت سقوط آزاد دارای یک معادله‌ی حرکت است. به عبارت دیگر برای چنین مثال‌هایی لازم نیست حرکت رو به بالای سنگ را جدا و حرکت رو به پایین آن را جداگانه بررسی کنیم. یعنی برای هر دو نقطه از مسیر حرکت جسم که بخواهیم می‌توانیم معادله‌های حرکت را به کار ببریم.

در این مثال، از آن‌جایی که جهت رو به بالا مثبت در نظر گرفته شده است:

۱- چون جسم در ابتدا رو به بالا پرتاب شده پس $v_0=+15\frac{m}{s}$ است.

۲- چون نقطه‌ی دوم (زمین) ۵۰ متر از نقطه‌ی پرتاب پایین‌تر است باید $\Delta y=-50m$ در نظر گرفته شود.

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\Rightarrow -50=-5t^2+15t\Rightarrow 5t^2-15t-50=0$$

$$\Rightarrow t^2-3t-10=0\Rightarrow (t-5)(t+2)=0\Rightarrow\begin{cases}t=-2s & \text{غ ق ق}\\ t=5s\end{cases}$$

یعنی سنگ پس از ۵ ثانیه به زمین می‌رسد.

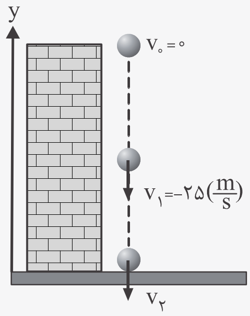
مثال ۲۲

در شرایط خلأ از بالای ساختمانی به ارتفاع h گلوله‌ای بدون سرعت اولیه رها می‌شود. یک ثانیه قبل از برخورد گلوله با زمین بزرگی سرعت گلوله ۲۵ متر بر ثانیه می‌شود.

آ) ارتفاع h چند متر است؟

ب) زمان کل سقوط چند ثانیه است؟

پ) سرعت متوسط گلوله از لحظه‌ی رها شدن تا رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$



☑ **پاسخ:** آ) مطابق شکل اگر جهت رو به بالا را مثبت بگیریم، سرعت گلوله یک ثانیه قبل از برخورد با زمین $v_1 = -۲۵\frac{m}{s}$ است. به عبارت دیگر مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت گلوله از v_1 به $v_۲$ برسد برابر یک ثانیه است. از این موضوع می‌توان استفاده کرد و $v_۲$ را به‌دست آورد:

$$v_۲ = -gt + v_1 \Rightarrow v_۲ = -۱۰\times۱-۲۵ \Rightarrow v_۲ = -۳۵\frac{m}{s}$$

به عبارت دیگر گلوله با سرعت $۳۵\frac{m}{s}$ به زمین برخورد می‌کند. حالا اگر معادله‌ی مستقل از زمان را برای کل سقوط بنویسیم ارتفاع کل سقوط به‌دست می‌آید:

$$v_۲^۲ - v_\circ^۲ = -۲g\Delta y \Rightarrow (-۳۵)^۲ - \circ = -۲۰\Delta y \Rightarrow ۱۲۲۵ = -۲۰\Delta y \Rightarrow \Delta y = -۶۱/۲۵m$$

یعنی ارتفاع سقوط $h = ۶۱/۲۵m$ است.

ب) باز هم برای کل سقوط می‌توانیم رابطه‌ی سرعت- زمان را بنویسیم:

$$v_۲ = -gt + v_\circ \Rightarrow -۳۵ = -۱۰t + \circ \Rightarrow t = ۳/۵s$$

پ) سرعت متوسط را می‌توان از دو روش زیر پیدا کرد:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-۶۱/۲۵}{۳/۵} = -۱۷/۵\frac{m}{s}$$

$$v = \frac{v_\circ + v_۲}{۲} = \frac{\circ - ۳۵}{۲} = -۱۷/۵\frac{m}{s}$$

نقطه‌ی اوج

هرگاه جسم در راستای قائم رو به بالا پرتاب شود، به بالاترین نقطه‌ای که می‌رسد، نقطه‌ی اوج گفته می‌شود. در نقطه‌ی اوج سرعت جسم لحظه‌ای صفر شده و سپس جهت حرکت آن تغییر می‌کند. برای جسمی که با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ رو به بالا پرتاب شود، می‌توان روابط زیر رابه دست آورد. در این روابط H ارتفاع اوج نسبت به نقطه‌ی پرتاب و t_H زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج از لحظه‌ی پرتاب است:

$$v^۲ - v_\circ^۲ = -۲g\Delta y \xrightarrow[\Delta y = H]{v=\circ} \circ - v_\circ^۲ = -۲gH \Rightarrow \boxed{H = \frac{v_\circ^۲}{۲g}}$$

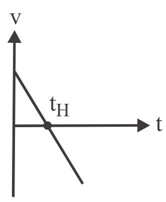
$$v = -gt + v_\circ \xrightarrow{v=\circ} \circ = -gt + v_\circ \Rightarrow \boxed{t_H = \frac{v_\circ}{g}}$$

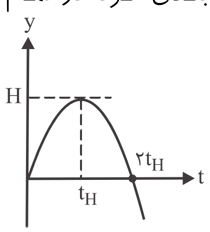
نکته *در شرایط خلأ (یعنی شرایطی که مقاومت هوا بسیار ناچیز است) زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج با زمان بازگشت به نقطه‌ی پرتاب برابر است. به عنوان مثال اگر جسمی پس از پرتاب رو به بالا بعد از ۶ ثانیه به نقطه‌ی پرتاب برگردد، زمان رسیدن به اوج ۳ ثانیه بوده است. از طرفی سرعت جسم در هنگام برگشت به نقطه‌ی پرتاب با سرعت پرتاب رو به بالا هم‌اندازه است.*

نمودارهای حرکت سقوط آزاد

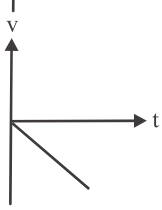
چون این حرکت یک حرکت شتاب‌دار با شتاب ثابت است، پس نمودار مکان- زمان آن سهمی، نمودار سرعت- زمان آن خطی و نمودار شتاب- زمان آن یک خط افقی است. برای حالت‌های مختلف می‌توان نمودارها را به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد. در تمام شکل‌ها نقطه‌ی پرتاب مبدأ مکان است و جهت رو به بالا مثبت در نظر گرفته شده است:

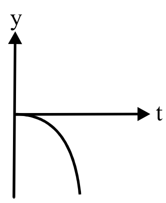
۱- پرتاب قائم رو به بالا:



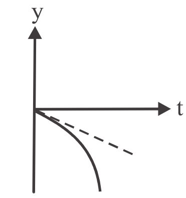


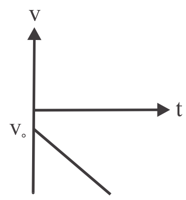
۲- رها کردن جسم بدون سرعت اولیه:



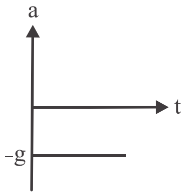


۳- پرتاب رو به پایین با سرعت اولیه‌ی v_0:





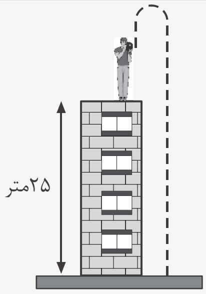
۴- برای تمام حالت‌ها نمودار شتاب- زمان به‌صورت مقابل است:



توجه اگر نمودار سرعت- زمان را برای چند جسم که سقوط آزاد انجام می‌دهند رسم کنیم، شیب تمام نمودارها یکی می‌شود. زیرا شیب نمودار سرعت- زمان معرف شتاب است و شتاب تمام سقوط‌ها برابر است.

مثال ۲۳

مطابق شکل از بالای ساختمانی به طول ۲۵ متر توپی در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود و پس از ۴ ثانیه به نقطه‌ی پرتاب برمی‌گردد. توپ: (مشابه تمرین کتاب درسی)



آ) با چه سرعتی پرتاب شده است؟

ب) تا چه ارتفاعی (نسبت به زمین) بالا می‌رود؟

پ) با چه سرعتی به زمین می‌رسد؟

ت) بعد از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

ث) نمودار سرعت- زمان و مکان- زمان را با فرض این که نقطه‌ی پرتاب مبدأ باشد برای این حرکت رسم کنید.

☑ **پاسخ:** آ) ۴ ثانیه طول کشیده تا توپ دوباره به نقطه‌ی پرتاب برگردد. بنابراین زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج از لحظه‌ی پرتاب ۲ ثانیه بوده است.

$$t_H = \frac{v_0}{g} \Rightarrow 2 = \frac{v_0}{10} \Rightarrow v_0 = 20\frac{m}{s}$$

ب)

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{400}{20} = 20m$$

یعنی توپ ۲۰ متر از نقطه‌ی پرتاب بالا می‌رود تا به اوج برسد و چون ارتفاع ساختمان ۲۵ متر است ارتفاع اوج نسبت به زمین ۴۵ متر است.

پ) برای پیدا کردن سرعت رسیدن جسم به زمین می‌توانیم رابطه‌ی مستقل از زمان را از لحظه‌ی پرتاب تا رسیدن به زمین بنویسیم. دقت کنید که چون زمین پایین‌تر از نقطه‌ی پرتاب است $\Delta y = -25m$ است.

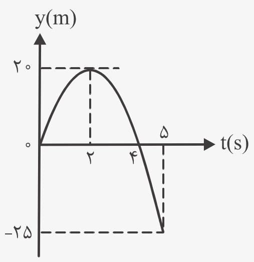
$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \Rightarrow v^2 - 400 = -20 \times (-25) \Rightarrow v^2 = 900 \Rightarrow v = \pm 30\frac{m}{s}$$

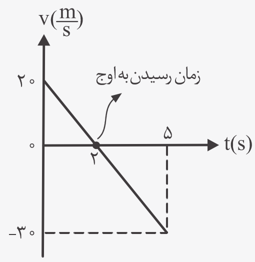
چون در لحظه‌ی برخورد با زمین جسم در حال حرکت رو به پایین است $v = -30\frac{m}{s}$ صحیح است.

ت)

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow -30 = -10t + 20 \Rightarrow t = 5s$$

ث)





توجه باز هم می‌توان دید که مطالب گفته شده در درس‌نامه‌ی اول این فصل برای تمام حرکت‌های روی خط راست صدق می‌کند. به عنوان مثال در نمودارهای مثال قبل، شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در $t = 2s$ صفر است که نمودار $(v-t)$ نیز این موضوع را تأیید می‌کند؛ و یا این که مساحت زیر نمودار سرعت- زمان در یک بازه‌ی زمانی برابر جابه‌جایی آن مرحله است و... .

بررسی حرکت دو گلوله

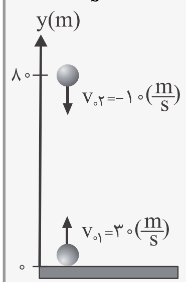
در برخی از مسائل سقوط آزاد، حرکت دو گلوله مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عنوان مثال دو گلوله با اختلاف زمانی پشت سر هم پرتاب می‌شوند و زمان رسیدن آن‌ها به زمین خواسته می‌شود و یا این که دو گلوله یکی از بالا و دیگری از پایین به سمت هم پرتاب می‌شوند و زمان برخورد آن‌ها مورد سؤال قرار می‌گیرد و ... . در این مسائل کافی است معادله‌ی حرکت هر دو متحرک را نوشته و به وسیله‌ی آن‌ها مسأله را حل کنیم. به عنوان مثال اگر زمان رسیدن دو گلوله به هم مورد سؤال بود باید معادله‌ی مکان- زمان آن‌ها را برابر قرار دهیم (چرا؟) و مسأله را حل کنیم.

توجه وقتی معادله‌ی دو متحرک را می‌نویسید باید برای هر دو یک دستگاه مختصات و یک مبدأ انتخاب کرده باشید.

مثال ۲۴

در شرایط خلأ دو گلوله یکی از پایین یک ساختمان با سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ رو به بالا و دیگری از بالای ساختمان با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ در همان راستا رو به پایین پرتاب می‌شوند. اگر ارتفاع ساختمان ۸۰ متر باشد:

آ) دو گلوله پس از چه زمانی با هم برخورد می‌کنند؟ ب) ارتفاع محل برخورد دو گلوله از سطح زمین چند متر است؟ $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$



☑ **پاسخ:** آ) مطابق شکل، اگر زمین را مبدأ و جهت رو به بالا را مثبت بگیریم معادله‌های حرکت دو گلوله به‌صورت زیر خواهند شد:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰ \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = -۵t^۲ + ۳۰t \\ y_۲ = -۵t^۲ - ۱۰t + ۸۰ \end{cases}$$

حالا زمانی دو گلوله به هم می‌رسند که $y_۱ = y_۲$ باشد بنابراین:

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow -۵t^۲ + ۳۰t = -۵t^۲ - ۱۰t + ۸۰ \Rightarrow ۴۰t = ۸۰ \Rightarrow t = ۲s$$

یعنی دو گلوله پس از دو ثانیه به هم می‌رسند.

ب) هر کدام از y ها که در $t = ۲s$ پیدا کنیم، ارتفاع نقطه‌ی برخورد دو گلوله از سطح زمین را به ما می‌دهد:

$$y_۱ = -۵t^۲ + ۳۰t \xrightarrow{t=۲s} y_۱ = -۵\times۴ + ۳۰\times۲ = ۴۰m$$

مثال ۲۵

در شرایط خلأ از سطح زمین دو گلوله با اختلاف زمانی ۲ ثانیه و با سرعت‌های اولیه‌ی $۳۰\frac{m}{s}$ پشت سر هم و در یک راستا رو به بالا پرتاب می‌شوند.

آ) این دو گلوله پس از چند ثانیه از لحظه‌ی پرتاب گلوله‌ی دوم با هم برخورد می‌کنند؟

ب) ارتفاع محل برخورد دو گلوله از سطح زمین چند متر است؟

پ) سرعت هر یک از گلوله‌ها در لحظه‌ی برخورد با هم چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

☑ **پاسخ:** آ) اگر دستگاه مختصاتی انتخاب کنیم که مبدأ زمین و جهت رو به بالا مثبت باشد، معادله‌های حرکت این دو متحرک به‌صورت زیر خواهند شد. دقت کنید که متحرکی که دیرتر پرتاب شده و زمان کم‌تری در هوا بوده، t کوچک‌تری دارد و چون هر دو از زمین پرتاب می‌شوند، برای هر دو $y_۰ = ۰$ است.

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰ \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = -۵t_۱^۲ + ۳۰t_۱ \\ y_۲ = -۵t_۲^۲ + ۳۰t_۲ \xrightarrow{t_۲=t_۱-۲} y_۲ = -۵(t_۱ - ۲)^۲ + ۳۰(t_۱ - ۲) \end{cases}$$

حالا زمانی که دو گلوله به هم می‌رسند $y_۱ = y_۲$ می‌شود. بنابراین:

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow -۵t_۱^۲ + ۳۰t_۱ = -۵(t_۱ - ۲)^۲ + ۳۰(t_۱ - ۲) \Rightarrow -۵t_۱^۲ + ۳۰t_۱ = -۵(t_۱^۲ - ۴t_۱ + ۴) + ۳۰t_۱ - ۶۰$$

$$\Rightarrow ۳۰t_۱ = ۲۰t_۱ - ۲۰ + ۳۰t_۱ - ۶۰ \Rightarrow ۲۰t_۱ = ۸۰ \Rightarrow t_۱ = ۴s$$

چون زمان از لحظه‌ی پرتاب گلوله‌ی دوم خواسته شده پس باید $t_۲$ را به‌دست آوریم: $t_۲ = t_۱ - ۲ = ۲s$

ب) برای پیدا کردن ارتفاع محل برخورد دو گلوله باید $y_۱$ یا $y_۲$ را پیدا کنیم: $y_۱ = -۵t_۱^۲ + ۳۰t_۱ \xrightarrow{t_۱=۴s} y_۱ = -۵\times۱۶ + ۳۰\times۴ = ۴۰m$

پ) با استفاده از معادله‌ی سرعت مربوط به هر یک از گلوله‌ها می‌توانیم سرعت برخورد آن‌ها با یک‌دیگر را به‌دست آوریم:

$$v_۱ = -gt_۱ + v_{۰۱} \Rightarrow v_۱ = -۱۰\times۴ + ۳۰ = -۱۰\frac{m}{s} \qquad v_۲ = -gt_۲ + v_{۰۲} \Rightarrow v_۲ = -۱۰\times۲ + ۳۰ = +۱۰\frac{m}{s}$$

دقت کنید که سرعت گلوله‌ی اول در لحظه‌ی برخورد منفی و سرعت گلوله‌ی دوم در این لحظه مثبت شده، یعنی گلوله‌ی اول پس از پرتاب به نقطه‌ی اوج خود رسیده و در حال برگشت با گلوله‌ی اول برخورد می‌کند. از طرفی اندازه‌ی سرعت دو گلوله در لحظه‌ی برخورد با هم برابر است. این حالت فقط زمانی اتفاق می‌افتد که اندازه‌ی سرعت اولیه‌ی گلوله‌ها برابر باشد.

۴۵- جسمی را از ارتفاع ۴۵ متری سطح زمین رها می‌کنیم. (تجربی- خرداد ۹۱)
آ) جسم پس از چه مدت به زمین می‌رسد؟
ب) سرعت جسم در لحظه‌ی برخورد به زمین را حساب کنید. ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

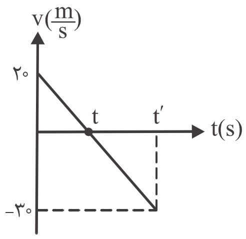
۴۶- توپی را از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌کنیم. (تجربی- دی ۹۰)
آ) سرعت آن هنگام برخورد به زمین چه‌قدر می‌شود؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)
ب) زمان حرکت توپ تا رسیدن به زمین چند ثانیه است؟
پ) نمودار سرعت- زمان حرکت توپ را در این سقوط رسم کنید.

۴۷- توپی را در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. اگر تا ارتفاع ۵ متر بالا رود، (تجربی- شهریور ۹۰)
آ) سرعت اولیه‌ی آن چه‌قدر بوده است؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)
ب) زمان حرکت توپ از لحظه‌ی شروع تا برگشت به نقطه‌ی پرتاب اولیه چند ثانیه است؟

۴۸- جسمی در شرایط خلأ با سرعت $\vec{v_۰} = ۱۰\vec{j}$ از ارتفاع ۱۵ متری زمین به طرف بالا پرتاب می‌شود. (ریاضی- تیر ۹۰)
آ) در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی پرتاب سرعت جسم $۵\frac{m}{s}$ می‌شود؟
ب) این جسم پس از چه مدت به زمین می‌رسد؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۴۹- از بالای یک ساختمان، جسم کوچکی را با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. اگر پس از ۴s به زمین برسد،
آ) سرعت برخورد آن به زمین چه‌قدر است؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$) (تجربی- تیر ۹۰)
ب) ارتفاع ساختمان را حساب کنید.
پ) نمودار سرعت- زمان آن را از لحظه‌ی پرتاب تا رسیدن به زمین رسم کنید.

۵۰- نمودار سرعت- زمان جسمی که در راستای قائم و در شرایط خلأ به طرف بالا پرتاب می‌شود، به‌صورت مقابل است: (تجربی- اسفند ۸۹)
آ) زمان‌های t و t' را محاسبه کنید.
ب) جابه‌جایی و سرعت متوسط را در کل مسیر حساب کنید. ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)



۵۱- از سطح زمین، جسم کوچکی را با سرعت $۴۰\frac{m}{s}$ در شرایط خلأ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم.
آ) جسم پس از چه زمانی به محل پرتاب بازمی‌گردد؟ (تجربی- اسفند ۹۰ و مشابه تجربی- اسفند ۸۷)
ب) سرعت گلوله هنگام رسیدن به زمین چه‌قدر است؟

۵۲- چگونه می‌توانید به کمک دوست خود و یک خط‌کش بلند، زمان واکنش بدن خود را اندازه‌گیری کنید؟ (ریاضی- دی ۸۹)

۵۳- بالنی با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ در راستای قائم در حال صعود است. وقتی بالن به ارتفاع ۱۵ متری سطح زمین می‌رسد، گلوله‌ی کوچکی از آن رها می‌شود. سرعت گلوله را در هنگام برخورد به سطح زمین برحسب بردارهای یکه بنویسید. (محور y را در راستای قائم و رو به بالا در نظر بگیرید و $g \simeq ۱۰\frac{m}{s^۲}$) (ریاضی- دی ۸۷)

۵۴- گلوله‌ی کوچکی را از یک بلندی با سرعت ۲۰ $\frac{m}{s}$ در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. (ریاضی- دی ۸۷)

آ) چند ثانیه پس از پرتاب، بزرگی سرعت گلوله ۲۵ $\frac{m}{s}$ می‌شود؟

ب) فاصله‌ی گلوله از نقطه‌ی پرتاب در این لحظه چه‌قدر است؟

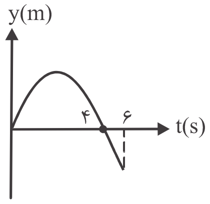
پ) شتاب گلوله را در بالاترین ارتفاعی که گلوله به آن می‌رسد، تعیین کنید. (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و $g \simeq ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۵۵- آ) منظور از سقوط آزاد اجسام در نزدیکی سطح زمین چیست؟ (تجربی- دی ۸۷)

ب) گلوله‌ای را از سطح زمین در شرایط خلأ و در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. نمودار سرعت- زمان حرکت گلوله را از لحظه‌ی پرتاب تا رسیدن به زمین، رسم کنید.

۵۶- از ارتفاع ۵ متری سطح زمین، جسمی را در شرایط خلأ رها می‌کنیم. سرعت جسم هنگام برخورد به زمین چه‌قدر است؟ (تجربی- دی ۸۷)

۵۷- نمودار مکان- زمان گلوله‌ای که بالای یک ساختمان در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود، مطابق شکل است. اگر گلوله پس از ۶ ثانیه به زمین برسد:



آ) سرعت اولیه‌ی پرتاب گلوله چند متر بر ثانیه است؟

ب) ارتفاع ساختمان چند متر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و $g \simeq ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۵۸- در شرایط خلأ گلوله‌ای را از ارتفاع h رها می‌کنیم. اگر گلوله در دو ثانیه‌ی آخر حرکتش تا رسیدن به زمین ۸۰ متر را طی کند، ارتفاع h چند متر است؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۵۹- گلوله‌ای را از سطح زمین در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر مقاومت هوا ناچیز باشد و گلوله در دو لحظه‌ی $t_۱ = ۳s$ و $t_۲ = ۵s$ از یک نقطه بگذرد، سرعت اولیه‌ی گلوله چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۶۰- گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی $v_۰$ از یک ارتفاع مشخص در راستای قائم رو به پایین پرتاب می‌شود و در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی مسافت‌های ۲۵ متر، ۶۵ متر و $\Delta h_۳$ را می‌پیماید. $\Delta h_۳$ چند متر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

۶۱- از یک بلندی به ارتفاع ۱۲ متر از سطح زمین، گلوله‌ای که مقاومت هوا بر آن ناچیز است با سرعت اولیه‌ی ۴ $\frac{m}{s}$ به طور قائم رو به پایین پرتاب می‌شود. در همین لحظه گلوله‌ی مشابهی از سطح زمین با سرعت ۸ $\frac{m}{s}$ رو به بالا پرتاب می‌شود.

آ) این دو گلوله پس ازچه زمانی با یک‌دیگر برخورد می‌کنند؟

ب) سرعت هر کدام از آن‌ها در برخورد با یک‌دیگر چند متر بر ثانیه است؟

پ) ارتفاع محل برخورد دو گلوله از سطح زمین چند متر است؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

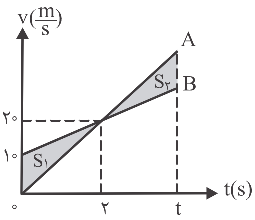
۶۲- از سطح زمین و در شرایط خلأ دو گلوله با فاصله‌ی زمانی ۲ ثانیه، اولی با سرعت ۲۸ $\frac{m}{s}$ و دومی با سرعت ۲۰ $\frac{m}{s}$ در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌شوند.

آ) چه مدت پس از پرتاب گلوله دوم، این دو گلوله از کنار هم می‌گذرند؟

ب) سرعت هر کدام در لحظه‌ای که از کنار هم می‌گذرند چند متر بر ثانیه است؟

پ) ارتفاع محلی که دو گلوله از کنار هم می‌گذرند نسبت به محل پرتاب چند متر است؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۴۴ آ) **روش اول:** می‌توانیم شتاب هر یک از متحرک‌ها را به‌دست آوریم:



$$a_A=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰-۰}{۲}=۱۰\frac{m}{s^۲}$$

$$a_B=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰-۱۰}{۲}=۵\frac{m}{s^۲}$$

چون دو متحرک در ابتدا در یک محل بودند و دوباره به هم می‌رسند، جابه‌جایی آن‌ها برابر است:

$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow\frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{\circ A}t=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+v_{\circ B}t$$

$$\Rightarrow ۵t^۲+۰=\frac{۵}{۲}t^۲+۱۰t\Rightarrow ۲/۵t^۲-۱۰t=۰\Rightarrow t(۲/۵t-۱۰)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۰\\t=۴s\end{cases}$$

یعنی دو متحرک بعد از ۴ ثانیه دوباره به هم می‌رسند.

روش دوم: سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر جابه‌جایی است. چون در این سؤال باید جابه‌جایی دو متحرک برابر باشد، در شکل بالا، کافی است دو مثلث مشخص شده در شکل با هم برابر باشند. برای این اتفاق باید $t=۴s$ باشد.

ب) بیش‌ترین فاصله‌ی دو متحرک زمانی است که سرعت آن‌ها برابر می‌شود (دلیل این موضوع در درس‌نامه گفته شده است) یعنی در $t=۲s$ بیش‌ترین فاصله را دارند. با توجه به این که سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر جابه‌جایی است و هر دو در ابتدا در یک نقطه بودند، این فاصله برابر مساحت $S_۱$ در شکل است.

$$S_۱=\frac{۱۰\times۲}{۲}=۱۰m$$

یعنی بیش‌ترین فاصله‌ی دو متحرک در این حرکت برابر ۱۰ متر است.

---

۴۵ آ)
$$\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_\circ t\Rightarrow -۴۵=-۵t^۲+۰\Rightarrow t^۲=۹\Rightarrow t=۳s$$

ب)
$$v=-gt+v_\circ=-۱۰\times۳+۰=-۳۰\frac{m}{s}$$

---

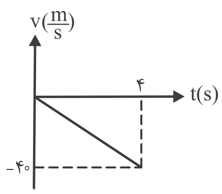
۴۶ آ) چون توپ رها شده $v_\circ=۰$ است.

$$v^۲-v_\circ^۲=-۲g\Delta y\Rightarrow v^۲-۰=-۲۰\times(-۸۰)\Rightarrow v^۲=۱۶۰۰\Rightarrow v=\pm۴۰\frac{m}{s}$$

چون در لحظه‌ی برخورد با زمین توپ رو به پایین می‌رود پس $v=-۴۰\frac{m}{s}$ قابل قبول است.

ب)
$$v=-gt+v_۱\Rightarrow -۴۰=-۱۰t\Rightarrow t=۴s$$

پ)



---

۴۷ آ) ارتفاع اوج ۵ متر است:

$$H=\frac{v_\circ^۲}{۲g}\Rightarrow ۵=\frac{v_\circ^۲}{۲۰}\Rightarrow v_\circ^۲=۱۰۰\Rightarrow v_\circ=۱۰\frac{m}{s}$$

ب) زمان رفت و برگشت به نقطه پرتاب دو برابر زمان رسیدن به اوج است:

$$t=۲t_H=\frac{۲v_\circ}{g}=\frac{۲\times۱۰}{۱۰}=۲s$$

---

۴۸ آ)
$$v^۲-v_\circ^۲=-۲g\Delta y\Rightarrow ۵^۲-۱۰^۲=-۲۰\Delta y\Rightarrow -۷۵=-۲۰\Delta y$$

$$\Delta y=\frac{۷۵}{۲۰}=۳/۷۵m$$

ب) تا رسیدن به زمین جسم $-۱۵m$ جابه‌جا می‌شود.

$$\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_\circ t\Rightarrow -۱۵=-۵t^۲+۱۰t\Rightarrow ۵t^۲-۱۰t-۱۵=۰$$

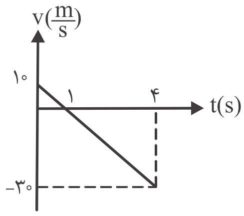
$$t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow (t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۳s\\t=-۱s\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۴۹ آ) $v=-gt+v_0 \Rightarrow v=-10\times 4+10=-30\dfrac{m}{s}$

ب) $\Delta y=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t=-5\times 4^2+10\times 4=-80+40=-40m$

$\Delta y=-40m$ به این معنی است که گلوله از لحظه‌ی پرتاب تا رسیدن به زمین ۴۰ متر جابه‌جایی رو به پایین داشته است. بنابراین ارتفاع ساختمان ۴۰ متر است.

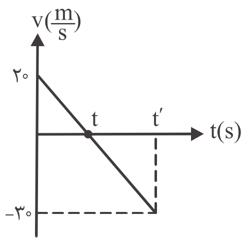
پ)



---

۵۰ آ) t زمان رسیدن به اوج است:

$$t=\frac{v_0}{g}=\frac{20}{10}=2s$$



t' زمانی است که متحرک سرعتش به $-30\dfrac{m}{s}$ رسیده است:

$$v=-gt'+v_0 \Rightarrow -30=-10t'+20 \Rightarrow -50=-10t' \Rightarrow t'=5s$$

ب) $\Delta y=-\dfrac{1}{2}gt'^2+v_0t' \Rightarrow \Delta y=-5\times 5^2+20\times 5=-125+100=-25m$

$$\bar{v}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{20-30}{2}=-5\frac{m}{s}$$

می‌توانستید از مساحت زیر نمودار سرعت- زمان نیز جابه‌جایی و سپس سرعت متوسط را حساب کنید.

---

۵۱ آ) زمان برگشت به نقطه‌ی پرتاب دو برابر زمانی است که گلوله به اوج می‌رسد:

$$t=2t_H=2\frac{v_0}{g}=\frac{2\times 40}{10}=8s$$

ب) در شرایط خلأ، گلوله با همان سرعتی که رو به بالا پرتاب می‌شود، با همان سرعت به نقطه‌ی پرتاب برمی‌گردد. پس گلوله با سرعت $40\dfrac{m}{s}$ به نقطه‌ی پرتاب (زمین) برمی‌گردد. این گفته را می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان اثبات کنیم. هنگامی که گلوله دوباره به زمین برمی‌گردد $\Delta y=0$ است.

$$v^2-v_0^2=-2g\Delta y \Rightarrow v^2-v_0^2=0 \Rightarrow v^2=v_0^2 \Rightarrow v=\pm v_0$$

که البته $v=-v_0$ صحیح است زیرا گلوله در هنگام برخورد با زمین رو به پایین در حال حرکت است.

---

۵۲ از دوست خود می‌خواهیم تا خط‌کش را بین انگشتان ما نگه داشته و ناگهان آن را رها کند؛ ما سعی می‌کنیم خط‌کش را بگیریم. در این فاصله خط‌کش به اندازه‌ی y سقوط کرده که با توجه به اعداد روی خط‌کش قابل اندازه‌گیری است. با توجه به رابطه‌ی $y=\dfrac{1}{2}gt^2$، زمان سقوط خط‌کش که همان زمان واکنش بدن ما است را به‌دست می‌آوریم.

---

۵۳ وقتی بالن با سرعت $10\dfrac{m}{s}$ رو به بالا در حال حرکت است، تمام چیزهایی که درون آن قرار دارند نیز این سرعت را دارند. به عبارت دیگر وقتی گلوله از داخل این بالن رها می‌شود، در واقع دارای سرعت اولیه $10\dfrac{m}{s}$ رو به بالا است. حالا می‌توانیم سرعت گلوله در هنگام برخورد با زمین را پیدا کنیم:

$$v^2-v_0^2=-2g\Delta y \Rightarrow v^2-100=-20\times(-15) \Rightarrow v^2=400$$

$$\Rightarrow v=\pm 20\frac{m}{s}$$

چون جهت رو به بالا مثبت است و در هنگام برخورد با زمین گلوله رو به پایین حرکت می‌کند پس $v=-20\dfrac{m}{s}$ قابل قبول است؛ که اگر بخواهیم آن را برحسب بردارهای یکه بنویسیم به شکل زیر خواهد شد:

$$\vec{v}=-20\vec{j}$$

۵۴ آ) چون سرعت اولیه $۲۰\frac{m}{s}$ رو به بالا است، پس تا برگشت گلوله به نقطه‌ی پرتاب بزرگی سرعت از $۲۰\frac{m}{s}$ بیش‌تر نمی‌شود. بنابراین برای اینکه بزرگی سرعت $۲۵\frac{m}{s}$ شود باید در هنگام برگشت از نقطه‌ی پرتاب پایین‌تر برود. به عبارت دیگر، اندازه‌ی سرعت گلوله در هنگام برگشت و حرکت رو به پایین می‌تواند $۲۵\frac{m}{s}$ شود.

$$v=-gt+v_\circ \Rightarrow -۲۵=-۱۰t+۲۰ \Rightarrow -۴۵=-۱۰t \Rightarrow t=۴/۵s$$

ب)
$$v^۲-v_\circ^۲=-۲g\Delta y \Rightarrow ۲۵^۲-۲۰^۲=-۲۰\Delta y \Rightarrow ۶۲۵-۴۰۰=-۲۰\Delta y$$
$$\Delta y=-\frac{۲۲۵}{۲۰}=-۱۱/۲۵m$$

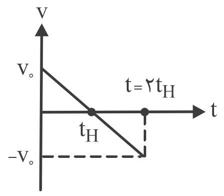
یعنی گلوله در این لحظه ۱۱/۲۵ متر پایین‌تر از نقطه‌ی پرتاب است.

پ) در حرکت سقوط آزاد در تمام لحظه‌ها (حتی بالاترین ارتفاع) شتاب حرکت ثابت و بزرگی آن برابر g و جهت آن رو به پایین است.

---

۵۵ آ) سقوط آزاد حرکتی با شتاب ثابت g در مسیر مستقیم و در راستای قائم است.

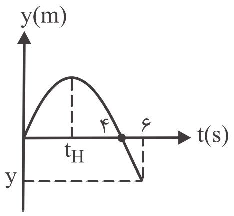
ب) دقت کنید که اندازه‌ی سرعت گلوله هنگام رسیدن به زمین با سرعت اولیه برابر است.



۵۶
$$v^۲-v_\circ^۲=-۲g\Delta y \Rightarrow v^۲-۰=-۲\times۱۰\times(-۵) \Rightarrow v^۲=۱۰۰ \Rightarrow v=-۱۰\frac{m}{s}$$

---

۵۷ آ) مطابق شکل، زمان رفت و برگشت به نقطه‌ی پرتاب ۴ ثانیه است. بنابراین زمان رسیدن به اوج ۲ ثانیه است.



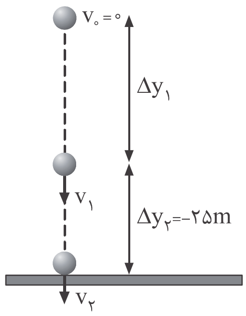
$$t_H=\frac{v_\circ}{g} \Rightarrow ۲=\frac{v_\circ}{۱۰} \Rightarrow v_\circ=۲۰\frac{m}{s}$$

ب)
$$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_\circ t+y_\circ \Rightarrow y=-۵\times۶^۲+۲۰\times۶+۰ \Rightarrow y=-۶۰m$$

بنابراین ارتفاع ساختمان ۶۰ متر است.

---

۵۸ حرکت گلوله مطابق شکل مقابل است. اگر فقط ۸۰ متر آخر را مورد مطالعه قرار دهیم، $v_۱$ سرعت اولیه‌ی این مرحله است و می‌توان آن را به‌صورت زیر به‌دست آورد:



$$\Delta y_۲=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_۱t$$
$$-۸۰=-۵\times۲^۲+v_۱\times۲ \Rightarrow -۸۰=-۲۰+۲v_۱$$
$$-۶۰=۲v_۱ \Rightarrow v_۱=-۳۰\frac{m}{s}$$

حالا معادله‌ی مستقل از زمان را برای قسمت اول حرکت می‌نویسیم:

$$v_۱^۲-v_\circ^۲=-۲g\Delta y_۱ \Rightarrow (-۳۰)^۲-۰=-۲۰\Delta y_۱ \Rightarrow \Delta y_۱=-۴۵m$$

اندازه‌ی ارتفاع h برابر مجموع اندازه‌های $\Delta y_۱$ و $\Delta y_۲$ است. یعنی $h=|\Delta y_۱|+|\Delta y_۲|=۴۵+۸۰=۱۲۵m$

---

۵۹ **روش اول:** اگر معادله‌ی حرکت را برای این گلوله بنویسیم، به ازای $t_۱=۳s$ و $t_۲=۵s$ این معادله باید یک جواب داشته باشد زیرا در این دو لحظه گلوله در یک مکان قرار دارد. اگر سطح زمین را مبدأ در نظر بگیریم $y_\circ=۰$ خواهد شد. بنابراین:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_\circ t+y_\circ \Rightarrow \begin{cases} y_۱=-۵t_۱^۲+v_\circ t_۱ \\ y_۲=-۵t_۲^۲+v_\circ t_۲ \end{cases}$$

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow -۵t_۱^۲+v_\circ t_۱=-۵t_۲^۲+v_\circ t_۲ \Rightarrow -۵\times۹+v_\circ\times۳=-۵\times۲۵+v_\circ\times۵$$
$$\Rightarrow ۸۰=۲v_\circ \Rightarrow v_\circ=۴۰\frac{m}{s}$$

روش دوم: هرگاه گلوله از نقطه‌ای عبور کند و در حال بالا رفتن باشد، زمان رفت تا اوج و دوباره برگشتن به نقطه‌ی مورد نظر با هم برابر است. چون در $t_۱=۳s$ و $t_۲=۵s$ گلوله از یک نقطه عبور می‌کند، بنابراین در میانگین این دو عدد یعنی در $t=۴s$ گلوله به اوج می‌رسد. حالا می‌توانیم به وسیله‌ی زمان رسیدن به اوج سرعت اولیه‌ی گلوله را پیدا کنیم:

$$t_H=\frac{v_\circ}{g} \Rightarrow ۴=\frac{v_\circ}{۱۰} \Rightarrow v_\circ=۴۰\frac{m}{s}$$

۶۰ چون سقوط آزاد یک حرکت شتاب‌دار با شتاب ثابت است، پس جابه‌جایی‌ها در زمان‌های مساوی متوالی یک تصاعد حسابی را تشکیل می‌دهند. بنابراین از آن‌جایی که در بازه‌ی زمانی دوم گلوله $۶۵-۲۵=۴۰m$ بیش‌تر از بازه‌ی زمانی اول جابه‌جا شده پس در بازه‌ی زمانی سوم هم به این اندازه بیش‌تر از زمان دوم جابه‌جا می‌شود. پس:

$$\Delta h_۳ = \Delta h_۲ + ۴۰ = ۶۵ + ۴۰ = ۱۰۵m$$

---

۶۱ آ) معادله‌ی حرکت هر دو گلوله را با فرض این که مبدأ زمین است می‌نویسیم و آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰ \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = -۵t^۲ - ۴t + ۱۲ & \text{(گلوله‌ای که از بالا رو به پایین پرتاب می‌شود)} \\ y_۲ = -۵t^۲ + ۸t & \text{(گلوله‌ای که رو به بالا پرتاب می‌شود)} \end{cases}$$

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow -۵t^۲ - ۴t + ۱۲ = -۵t^۲ + ۸t \Rightarrow ۱۲t = ۱۲ \Rightarrow t = ۱s$$

ب) سرعت گلوله‌ای که از بالا رو به پایین پرتاب می‌شود:

$$v_۱ = -gt + v_{۰۱} \Rightarrow v_۱ = -۱۰\times۱ - ۴ = -۱۴\frac{m}{s}$$

سرعت گلوله‌ای که از پایین رو به بالا پرتاب می‌شود:

$$v_۲ = -gt + v_۰ \Rightarrow v_۲ = -۱۰\times۱ + ۸ = -۲\frac{m}{s}$$

پ) برای پیدا کردن ارتفاع محل برخورد دو گلوله، باید $y_۱$ یا $y_۲$ را پیدا کنیم:

$$y_۲ = -۵t^۲ + ۸t \Rightarrow y_۲ = -۵\times۱ + ۸\times۱ = ۳m$$

---

۶۲ آ) معادله‌ی حرکت هر دو گلوله را با در نظر گرفتن زمین به عنوان مبدأ می‌نویسیم و سپس آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم. دقت کنید چون گلوله‌ی دوم ۲ ثانیه دیرتر پرتاب شده $t_۲ = t_۱ - ۲$ است.

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰ \begin{cases} y_۱ = -۵t_۱^۲ + ۲۸t_۱ \\ y_۲ = -۵t_۲^۲ + ۲۰t_۲ \Rightarrow y_۲ = -۵(t_۱-۲)^۲ + ۲۰(t_۱-۲) \end{cases}$$

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow -۵t_۱^۲ + ۲۸t_۱ = -۵(t_۱-۲)^۲ + ۲۰(t_۱-۲)$$

$$\Rightarrow -۵t_۱^۲ + ۲۸t_۱ = -۵(t_۱^۲ - ۴t_۱ + ۴) + ۲۰t_۱ - ۴۰$$

$$\Rightarrow -۵t_۱^۲ + ۲۸t_۱ = -۵t_۱^۲ + ۲۰t_۱ - ۲۰ + ۲۰t_۱ - ۴۰$$

$$\Rightarrow ۲۸t_۱ = ۴۰t_۱ - ۶۰ \Rightarrow ۱۲t_۱ = ۶۰ \Rightarrow t_۱ = \frac{۶۰}{۱۲} = ۵s$$

چون زمان حرکت گلوله دوم مد نظر است پس $t_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$t_۲ = t_۱ - ۲ = ۵ - ۲ = ۳s$$

ب)

$$v_۱ = -gt_۱ + v_{۰۱} \Rightarrow v_۱ = -۱۰\times۵ + ۲۸ = -۲۲\frac{m}{s}$$

$$v_۲ = -gt_۲ + v_{۰۲} \Rightarrow v_۲ = -۱۰\times۳ + ۲۰ = -۱۰\frac{m}{s}$$

با توجه به سرعت‌های به‌دست آمده، دو گلوله در هنگامی که رو به پایین در حال برگشت به زمین بودند به هم می‌رسند؛ زیرا سرعت آن‌ها در این لحظه منفی است.

پ) کافی است $y_۱$ یا $y_۲$ را پیدا کنیم:

$$y_۱ = -۵t_۱^۲ + ۲۸t_۱ \xrightarrow{t_۱=۵s} y_۱ = -۵\times۲۵ + ۲۸\times۵ = ۱۵m$$

$$y_۲ = -۵t_۲^۲ + ۲۰t_۲ \xrightarrow{t_۲=۳s} y_۲ = -۵\times۹ + ۲۰\times۳ = ۱۵m$$

۶۳

$$\begin{cases} x = ۲t^۳ + ۶ \\ y = ۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} \begin{cases} v_x = ۶t^۲ \xrightarrow{t=۱s} v_x = ۶ \\ v_y = ۰ \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{۶^۲ + ۰} = ۶\frac{m}{s}$$