استدلال استنتاجی- مثال نقض- قضیه‌ی شرطی- اثبات بازگشتی

بخش‌پذیری

قضیه‌ی الگوریتم تقسیم: فرض کنیم a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد، در این صورت اعداد صحیح و منحصربه‌فرد q و r وجود دارند به‌طوری‌که:

$$a = bq + r \ , \ 0 \le r < b$$

a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌گوییم.

یکی از کاربردهای قضیه‌ی تقسیم، دسته‌بندی اعداد صحیح براساس باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی b است. به‌عنوان مثال، اگر عدد صحیح a را بر عدد ۳ تقسیم کنیم، آن‌گاه:

$$a = 3q + r \ , \ 0 \le r < 3$$

اگر $r = 0$، آن‌گاه: $a = 3q \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} a \in A = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

اگر $r = 1$، آن‌گاه: $a = 3q + 1 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} a \in B = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$

اگر $r = 2$، آن‌گاه: $a = 3q + 2 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} a \in C = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

در واقع هر عضو مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ فقط به یکی از سه مجموعه‌ی A یا B یا C تعلق دارد. مجموعه‌ی A شامل تمام اعداد صحیحی است که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر صفر می‌باشد و مجموعه‌ی B شامل تمام اعداد صحیحی است که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر یک و مجموعه‌ی C شامل تمام اعداد صحیحی است که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر ۲ است.

نتیجه: بنابر قضیه‌ی تقسیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد صحیح مانند a بر عدد طبیعی b، یکی از اعداد مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ می‌باشد. (باقی‌مانده عدد منفی نمی‌باشد و هم‌چنین بزرگ‌تر یا مساوی مقسوم‌علیه نمی‌باشد.)

نکته: بنابر قضیه‌ی تقسیم از هر n عدد صحیح متوالی دقیقاً یکی بر n بخش‌پذیر است.

به‌عنوان مثال، از هر دو عدد صحیح متوالی دقیقاً یکی بر عدد ۲ بخش‌پذیر است، در واقع یکی به صورت $a = 2k + 0$ (زوج) و دیگری به صورت $b = 2k + 1$ (فرد) می‌باشد.

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح b **بخش‌پذیر (تقسیم‌پذیر)** می‌گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به‌طوری‌که $a = bq$. در این صورت می‌نویسیم $b \mid a$ و چنین می‌خوانیم:

«a بر b تقسیم‌پذیر است.» یا «b یک شمارنده یا مقسوم‌علیه a است.» یا «b، a را عاد می‌کند.»

هرگاه a بر b تقسیم‌پذیر نباشد، می‌نویسیم $b \nmid a$

برای مثال $12 \mid -36$، زیرا: $(-3) \times 12 = -36$ و یا $-16 \mid 32$، زیرا: $(-2) \times -16 = 32$.

ولی $4 \nmid 2$، زیرا عدد صحیحی مانند q وجود ندارد به‌طوری‌که $4q = 2$ باشد.

نکته: $0 \mid 0$ (۰ بر ۰ تقسیم‌پذیر است)، زیرا به‌ازای هر $q \in \mathbb{Z}$ داریم: $0 = 0 \times q$

استدلال استنتاجی

تعریف: **استدلال استنتاجی** روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

مثال ۲۰: با کمک استدلال استنتاجی، از عبارات زیر نتیجه را کامل کنید.

آ) در صفحه دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند. دو خط L_1 و L_2 در صفحه بر خط d عمود هستند.

نتیجه: L_1 و L_2 ....

ب) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند محاسبه کنند. حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد.

نتیجه: حمید ....

پاسخ: آ) با هم موازی هستند. ب) می‌تواند محاسبه کند.

نکته: وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

در واقع استدلال استنتاجی نتیجه‌گیری از کل به جزء است. به‌عنوان مثال، اهمیّت قضیه‌ی فیثاغورس در این است که این قضیه برای همه‌ی مثلث‌های قائم‌الزاویه برقرار است و نه برای تعداد محدودی از آن‌ها.

تعریف: **قضایای کلّی** احکامی هستند که همیشه برقرار می‌باشند.

مثال ۲۱: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، همواره عددی زوج است.

پاسخ: فرض کنیم a و $a+1$ دو عدد صحیح متوالی باشند. دو حالت وجود دارد:

حالت اول: a عددی زوج است، بنابراین داریم:

$$a=2k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow a(a+1)=2k(2k+1)=2\underbrace{(k(2k+1))}_{k'}=2k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

پس $a(a+1)$ زوج است.

حالت دوم: a عددی فرد است، بنابراین داریم:

$$a=2k+1\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow a(a+1)=(2k+1)\underbrace{(2k+2)}_{2(k+1)}=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k'}=2k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

پس $a(a+1)$ زوج است.

لذا در هر دو حالت حاصل‌ضرب $a(a+1)$ عددی زوج می‌باشد.

مثال ۲۲: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی، همواره مضرب ۶ است.

پاسخ: فرض کنیم a، $a+1$ و $a+2$ سه عدد متوالی باشند. از هر دو عدد متوالی یکی بر ۲ بخش‌پذیر است. بنابراین یکی از دو عدد a یا $a+1$ زوج است، بنابراین $a(a+1)(a+2)$ مضرب ۲ است. همچنین از هر سه عدد صحیح متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین $a(a+1)(a+2)$ مضرب ۳ می‌باشد. عدد $a(a+1)(a+2)$ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین مضرب ۶ می‌باشد.

حالت کلی‌تر مثال بالا را که در حل تست‌ها از آن استفاده می‌کنیم به صورت یک نکته بیان می‌کنیم:

> **نکته:** حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی همواره بر $n!$ بخش‌پذیر است.

مثال ۲۳: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر P و $P+2$، $(P\geq 5)$ دو عدد اول باشند، آن‌گاه $P+1$ مضرب ۶ است.

پاسخ: از هر دو عدد متوالی یکی زوج است. دو عدد P و $P+1$ متوالی می‌باشند و P زوج نمی‌باشد، بنابراین $P+1$ زوج است. از طرفی از هر سه عدد متوالی یکی مضرب ۳ می‌باشد و P، $P+1$ و $P+2$ سه عدد متوالی می‌باشند و چون P و $P+2$ مضرب ۳ نمی‌باشند، لذا $P+1$ مضرب ۳ است. $P+1$ هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ می‌باشد و در نتیجه مضرب ۶ است.

مثال ۲۴: اگر n عدد صحیح و مضرب ۴ باشد، بزرگ‌ترین عددی که n^2-4n همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام می‌باشد؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

پاسخ: فرض کنیم $k\in\mathbb{Z}$, $n=4k$ باشد (n مضرب ۴ است.) در این صورت:

$$n^2-4n=n(n-4)=4k\underbrace{(4k-4)}_{4(k-1)}=16\underbrace{k(k-1)}_{\text{ضرب دو عدد صحیح متوالی زوج است.}}=16(2k')=32k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

بنابراین n^2-4n همواره بر ۳۲ بخش‌پذیر است. پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۲۵: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع سه عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۳ است.

پاسخ: فرض کنیم a، $a+1$ و $a+2$ سه عدد صحیح متوالی باشند، داریم:

$$a+(a+1)+(a+2)=3a+3=3\underbrace{(a+1)}_{a'\in\mathbb{Z}}=3a'$$

بنابراین حاصل‌جمع سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

> **نکته:** اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه مجموع n عدد صحیح متوالی همواره مضرب n است. ولی هیچ مقدار طبیعی زوج n وجود ندارد به‌طوری که مجموع n عدد صحیح متوالی مضرب n باشد.

برای مثال، مجموع ۱۵ عدد صحیح متوالی، همواره مضرب ۱۵ است ولی مجموع هیچ ۶ عدد صحیح متوالی، مضرب ۶ نمی‌باشد.

مثال ۲۶: با استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌جمع سه برابر هر عدد زوج با یک عدد فرد، همواره فرد است. (نهایی - شهریور ۸۶)

پاسخ: فرض کنیم a یک عدد زوج و b یک عدد فرد باشد، در این صورت: $a=2k\,,\,k\in\mathbb{Z}\quad,\quad b=2k'+1\,,\,k'\in\mathbb{Z}$

$$3a+b=3(2k)+2k'+1=6k+2k'+1=2\underbrace{(3k+k')}_{m\in\mathbb{Z}}+1=2m+1$$

بنابراین $3a+b$ عددی فرد است.

مثال ۲۷: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مربع هر عدد صحیح فرد به صورت $8k+1$ است که در آن $k\in\mathbb{Z}$.

پاسخ: فرض کنیم a یک عدد صحیح فرد باشد، در این صورت: $a=2m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow a^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=4m(m+1)+1\qquad(1)$$

حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی است، بنابراین عددی زوج است، پس: $m(m+1)$

$$m(m+1)=2k\xrightarrow{(1)}a^2=4(2k)+1=8k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

تذکر: در حل تست‌ها از حکم مثال بالا استفاده می‌کنیم و باید آن را حفظ کنیم.

مثال ۲۸: اگر a عددی فرد و b عددی زوج باشد، با کدام استدلال می‌توان نتیجه گرفت که $(a+b)^2-1$ بر عدد ۸ بخش‌پذیر است؟

۱) استنتاجی ۲) استقرای ریاضی ۳) شهودی ۴) تمثیلی

پاسخ: a یک عدد فرد و b یک عدد زوج است، بنابراین $a+b$ یک عدد فرد می‌باشد و مربع آن به صورت $8k+1$ است. پس:

$$(a+b)^2-1=(8k+1)-1=8k$$

در واقع با استفاده از استدلال استنتاجی نتیجه گرفته‌ایم که $(a+b)^2-1$ مضرب ۸ است.

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۲۹: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع دو عدد گویا، عددی گویا است. (تمرین ۷ قسمت (ب) کتاب درسی - صفحه‌ی ۲۷)

پاسخ: می‌دانیم هر عدد گویا به صورت $\frac{p}{q}$ است که در آن p و q دو عدد صحیح می‌باشند و $q\neq 0$. فرض کنیم x و y دو عدد گویای دلخواه باشند، در این صورت:

$$x=\frac{p}{q}\,,\;p,q\in\mathbb{Z}\,,\,q\neq0\quad,\quad y=\frac{m}{n}\,,\;m,n\in\mathbb{Z}\,,\,n\neq0$$

بنابراین:

$$x+y=\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+mq}{qn}=\frac{a}{b}$$

$a=pn+mq$ و $b=qn$ هر دو عدد صحیح می‌باشند و $b=qn\neq0$، لذا $x+y$ یک عدد گویا است.

مثال ۳۰: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب هر دو عدد به صورت $6q+5$، عددی به صورت $6q+1$ است.

پاسخ: فرض کنیم $6q+5$ و $6q'+5$ دو عدد دلخواه باشند، در این صورت:

$$(6q+5)(6q'+5)=36qq'+30q+30q'+25=(36qq'+30q+30q'+24)+1=6\underbrace{(6qq'+5q+5q'+4)}_{k}+1=6k+1$$

در واقع ثابت کرده‌ایم که اگر حاصل‌ضرب دو عددی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۶ برابر ۵ است را بر ۶ تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم برابر ۱ می‌شود.

مثال نقض

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجه‌ی به‌دست آمده حتماً درست است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیّت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

تعریف: به مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری کلّی غلط است، **مثال نقض** می‌گویند.

مثال ۳۱: آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت؟ (مثال ۶ کتاب درسی - صفحه‌ی ۲۰)

پاسخ: بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل‌جمع اعداد متوالی نوشت. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

$$15=1+2+3+4+5\;,\;74=17+18+19+20\;,\;100=18+19+20+21+22,\ldots$$

امّا عدد ۸ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت. در واقع عدد ۸ مثال نقضی است که نشان می‌دهد هر عدد طبیعی را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت.

نکته: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه ۲^n را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت.

مثال ۳۲: برای اثبات نادرستی هر یک از احکام زیر یک مثال نقض ارائه دهید.

آ) مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، گنگ است.

ب) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ‌تر است.

پ) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد.

ت) اگر $x > ۱$، آن‌گاه $x > ۲$.

ث) به‌ازای هر عدد طبیعی n، $n^۲ + n + ۴۱$ عدد اول است.

ج) محیط دایره همواره عددی اصم است.

چ) اگر x عدد گویای مثبت و مخالف یک و y یک عدد گنگ باشد، آن‌گاه x^y یک عدد گنگ است.

ح) اگر x و y دو عدد گنگ باشند، آن‌گاه x^y یک عدد گنگ است.

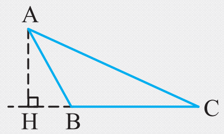
پاسخ:

آ) اگر $x = y = \sqrt{۲}$، آن‌گاه: $x - y = ۰ \in \mathbb{Q}\ ,\ xy = ۲ \in \mathbb{Q}\ ,\ \frac{x}{y} = ۱ \in \mathbb{Q}$

و اگر $x = \sqrt{۲}$ و $y = -\sqrt{۲}$، آن‌گاه: $x + y = ۰ \in \mathbb{Q}$

ب) اگر $x = \frac{۱}{۲}$، آن‌گاه: $x^۲ = \frac{۱}{۴} \not> x = \frac{۱}{۲}$

پ) در مثلث منفرجه‌الزاویه‌ی مقابل، ارتفاع AH خارج مثلث واقع می‌شود:



ت) اگر قرار دهیم $x = \frac{۳}{۲}$، آن‌گاه $x > ۱$ ولی $x \not> ۲$.

ث) با قرار دادن $n = ۴۱$، عدد $n^۲ + n + ۴۱$ بر ۴۱ بخش‌پذیر است، بنابراین عددی غیر اول می‌باشد. (توجه کنیم تمام اعداد طبیعی مضرب ۴۱ مثال نقض خواهند بود.)

ج) اگر قرار دهیم $R = \frac{۱}{\pi}$ (شعاع دایره)، آن‌گاه: $\text{محیط دایره} = ۲\pi R = ۲ \in \mathbb{Q}$

چ) می‌دانیم $a^{\log_a b} = b$، بنابراین داریم: $۲^{\log_۲ ۳} = ۳ \in \mathbb{Q}$ (۲ یک عدد گویا و $\log_۲ ۳$ یک عدد گنگ است.)

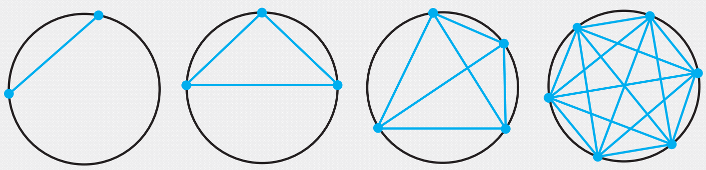
ح) اگر $x = ۲^{\sqrt{۲}}$ و $y = \sqrt{۲}$، آن‌گاه: $x^y = (۲^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = ۲^۲ = ۴ \in \mathbb{Q}$

مثال ۳۳: کدام عدد کلّیت حکم «اگر n نقطه روی محیط دایره را دوبه‌دو به هم وصل کنیم، دایره به $۲^{n-۱}$ ناحیه تقسیم می‌شود.» را نقض می‌کند؟

(مثال ۷ کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۱)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶

پاسخ: شکل هر گزینه را رسم می‌کنیم و تعداد ناحیه‌های ایجادشده را به‌دست می‌آوریم:



تعداد نقطه‌ها	۲	۳	۴	۶
تعداد ناحیه‌ها	۲	۴	۸	۳۰

مشاهده می‌کنیم که فرمول برای $n = ۶$ برقرار نمی‌باشد.

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

قضایای شرطی

هر جمله به صورت «اگر ... آن‌گاه ...» را یک **جمله‌ی شرطی** می‌گوییم. جمله‌های شرطی که درست باشند را **قضیه‌های شرطی** (یا به اختصار قضیه) می‌گوییم. برای مثال جمله‌ی شرطی «اگر $x > ۱$، آن‌گاه $x > ۰$» همواره برقرار است، بنابراین یک قضیه‌ی شرطی می‌باشد.

قسمت شرطی قضایای شرطی را فرض قضیه و نتیجه‌ی جمله را حکم قضیه می‌گوییم.

هرگاه، p فرض قضیه و q حکم قضیه باشد، قضیه‌ی شرطی را به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دهیم و نماد $\Rightarrow$ به معنای «آن‌گاه یا نتیجه می‌دهد» است.

مثال ۳۴: قضیه‌ی «هر دو زاویه‌ی متقابل به رأس، مساوی هستند.» را به صورت یک قضیه‌ی شرطی بیان کنید. فرض و حکم قضیه را مشخص کنید.

پاسخ: قضیه‌ی شرطی: «اگر دو زاویه‌ی xoy و $x'oy'$ متقابل به رأس باشند، آن‌گاه $x\hat{o}y = x'\hat{o}y'$»

فرض قضیه: دو زاویه‌ی xoy و $x'oy'$ متقابل به رأس هستند.

حکم قضیه: $x\hat{o}y = x'\hat{o}y'$

نکته: جای فرض و حکم در قضیه‌ی شرطی را می‌توان عوض کرد تا عکس قضیه‌ی شرطی به‌دست آید.
عکس قضیه، همیشه قضیه نیست. اگر عکس قضیه، خود یک قضیه باشد، آن‌گاه این دو قضیه را به صورت یک قضیه می‌نویسیم که به آن قضیه‌ی دوشرطی می‌گوییم.

به‌عنوان مثال با شرط صحیح بودن عدد a، عکس قضیه‌ی شرطی «اگر a یک عدد فرد باشد، آن‌گاه $a^۲$ نیز فرد است» به صورت «اگر $a^۲$ یک عدد فرد باشد، آن‌گاه a نیز یک عدد فرد است» درمی‌آید که یک قضیه است. بنابراین این دو قضیه‌ی شرطی را به صورت قضیه‌ی دوشرطی زیر می‌نویسیم: «a فرد است اگر و تنها اگر $a^۲$ فرد باشد.»

مثال ۳۵: عکس کدام‌یک از قضیه‌های شرطی زیر، برقرار می‌باشد؟

۱) اگر x یک عدد گویا باشد، آن‌گاه $x^۲+۱$ یک عدد گویا است.

۲) اگر $a=۱$ و $b=۲$، آن‌گاه $(a-۱)(b-۲)=۰$

۳) اگر $x=۰$، آن‌گاه $x^۳+x=۰$

۴) اگر p و $p+۲$ $(p\geq ۵)$ دو عدد اول باشند، آن‌گاه $p+۱$ مضرب ۶ است.

پاسخ: عکس گزینه‌ی (۱) نادرست است. زیرا $(\sqrt{۲})^۲+۱$ یک عدد گویاست ولی $\sqrt{۲}$ گویا نمی‌باشد.

عکس گزینه‌ی (۲) نادرست است. زیرا اگر $a=۱$ و $b=۵$، آن‌گاه $(a-۱)(b-۲)=۰$ ولی $b\neq ۲$.

عکس گزینه‌ی (۳) درست است. زیرا:

$$x^۳+x=۰ \Rightarrow x(x^۲+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^۲+۱=۰ \ (\text{غیرممکن}) \end{cases} \Rightarrow x=۰$$

عکس گزینه‌ی (۴) نادرست است. زیرا اگر $p=۲۳$، آن‌گاه $p+۱=۲۴$ مضرب ۶ است ولی $p+۲=۲۵$ عدد اول نمی‌باشد.

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

اثبات بازگشتی

گاهی برای اثبات بعضی از قضیه‌ها به‌خصوص در مورد تساوی‌ها، نامساوی‌ها و تساوی مجموعه‌ها، با استفاده از درستی حکم به یک رابطه‌ی بدیهی و یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات می‌بایستی نشان دهیم که تمام مراحل انجام‌شده بازگشت‌پذیر هستند وگرنه درستی اثبات تأیید نمی‌شود.

تذکر: در اثبات اکثر نامساوی‌ها به روش بازگشتی برای رسیدن به رابطه‌ی بدیهی از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌شود.

مثال ۳۶: با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

آ) اگر x و y دو عدد حقیقی و $xy>۰$ باشد، آن‌گاه: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$

ب) اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه: $\frac{x+y}{۲}\geq \sqrt{xy}$

(این نامساوی به نامساوی میانگین حسابی - هندسی مشهور است.)

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، آن‌گاه: $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+xz+yz$

ت) اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه: $y^۲+۱\geq ۲x(y-x+۱)$

ث) اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه: $x^۲+y^۲-xy\geq x+y-۱$

ج) اگر x، y و z سه عدد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه: $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\geq x+y+z$

چ) اگر $a^۲$، $b^۲$ و $c^۲$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه $\frac{۱}{a+c}$، $\frac{۱}{b+c}$ و $\frac{۱}{a+b}$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی می‌باشند.

ح) $\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}=۲\sqrt{۳}$

پاسخ: آ) فرض می‌کنیم حکم درست است، پس باید به یک رابطه‌ی بدیهی برسیم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2 \xrightarrow{\times xy} x^2+y^2\ge 2xy \Rightarrow x^2+y^2-2xy\ge 0 \Rightarrow (x-y)^2\ge 0$$ (بدیهی است.)

اثبات بازگشت‌پذیر بودن تمام مراحل انجام شده:

$$(x-y)^2\ge 0\Rightarrow x^2+y^2-2xy\ge 0 \Rightarrow x^2+y^2\ge 2xy \xrightarrow{\div xy} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$$

تذکر: در حل سایر قسمت‌ها از نماد $\Leftrightarrow$ برای برگشت‌پذیر بودن استفاده می‌کنیم.

ب) $$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y\ge 2\sqrt{xy} \xleftrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} (x+y)^2\ge 4xy \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy\ge 4xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$$ (بدیهی است.)

پ) $$x^2+y^2+z^2\ge xy+xz+yz \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2+2y^2+2z^2\ge 2xy+2xz+2yz$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz\ge 0 \Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\ge 0$$ (بدیهی است.)

ت) $$y^2+1\ge 2x(y-x+1) \Leftrightarrow y^2+1\ge 2xy-2x^2+2x \Leftrightarrow y^2+1-2xy+2x^2-2x\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-2xy+x^2)+(x^2-2x+1)\ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2\ge 0$$ (بدیهی است.)

ث) $$x^2+y^2-xy\ge x+y-1 \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2+2y^2-2xy\ge 2x+2y-2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+2\ge 0 \Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\ge 0$$ (بدیهی است.)

ج) $$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\ge x+y+z \xrightarrow{\times(xyz)} x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

$$\overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2\ge 2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2y^2-2x^2yz+x^2z^2)+(x^2y^2-2xy^2z+y^2z^2)+(y^2z^2-2xyz^2+x^2z^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (xy-xz)^2+(xy-yz)^2+(yz-xz)^2\ge 0$$ (بدیهی است.)

چ) سه عدد a^2، b^2 و c^2 سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی می‌باشند، بنابراین: فرض: $2b^2=a^2+c^2$

$\frac{1}{a+b},\frac{1}{b+c},\frac{1}{a+c}$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی می‌باشند. $\Leftrightarrow \frac{2}{b+c}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{b+c}=\frac{(a+c)+(a+b)}{(a+b)(a+c)} \Leftrightarrow \frac{2}{b+c}=\frac{2a+b+c}{a^2+ab+ac+bc} \Leftrightarrow 2(a^2+ab+ac+bc)=(b+c)(2a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2ab+2ac+2bc=2ab+b^2+bc+2ac+bc+c^2 \Leftrightarrow 2a^2=b^2+c^2$$ (فرض مسأله)

ح) $$\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}=2\sqrt{3} \xleftrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} (5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})+2\sqrt{5+2\sqrt{6}}\times\sqrt{5-2\sqrt{6}}=12$$

$$\Leftrightarrow 10+2\underbrace{\sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}}_{25-24=1}=12 \Leftrightarrow 12=12\ \checkmark$$

تذکر: موارد (آ) و (ب) در مثال قبل مهم می‌باشند و باید آن‌ها را حفظ کنیم.

مثال ۳۷: کم‌ترین مقدار عبارت $x+\frac{8}{x}\ (x>0)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با استفاده از نامساوی میانگین حسابی- هندسی داریم:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab} \xrightarrow[b=\frac{8}{x}]{a=x} x+\frac{8}{x}\ge 2\sqrt{\cancel{x}\times\frac{8}{\cancel{x}}}=4\sqrt{2} \Rightarrow x+\frac{8}{x}\ge 4\sqrt{2}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار عبارت $x+\frac{8}{x}$ برابر $4\sqrt{2}$ است.

پرسش‌های جلسه دوم

۶ کدام‌یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید. (نهایی- شهریور ۹۳)

آ) توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگ‌تر است. ب) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۸ است.

۷ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است. (نهایی- خرداد ۹۳)

۸ با استدلال استنتاجی ثابت کنید:

آ) تفاضل مربعات دو عدد فرد، همواره مضرب ۴ است. (نهایی- دی ۹۰)

ب) اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $x(x+3)$ مضرب ۱۸ است. (نهایی- شهریور ۹۱)

۹ برای احکام نادرست زیر مثال نقض بیاورید.

آ) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (نهایی- دی ماه ۹۲)

ب) برای هر عدد طبیعی n، آن‌گاه 3^n+2 عددی اول است. (نهایی- دی ۹۲)

پ) اگر $xy=0$، آن‌گاه $x=0$ و $y=0$ (نهایی- دی ۸۹)

ت) اگر a، b و c اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است. (نهایی- خرداد ۹۱)

۱۰ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید. (نهایی- خرداد ۹۰)

آ) به‌ازای هیچ دو عدد اول a و b، عدد $a+b$ اول نیست.

ب) اگر x فرد باشد، آن‌گاه $x(x+2)$ هم فرد است.

۱۱ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید: $a^2+b^2\geq 2(b-1)$ (نهایی- شهریور ۹۳)

۱۲ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $ab\leq(\frac{a+b}{2})^2$ (نهایی- خرداد ۹۳)

۱۳ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$ (نهایی- خرداد ۹۲)

۱۴ اگر x عددی حقیقی و مثبت باشد، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x+\frac{1}{x}\geq 2$ (نهایی- شهریور ۹۲)

۱۵ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$ (نهایی- دی ۹۲)

۱۶ اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$ (نهایی- خرداد ۹۱)

۱۷ اگر a و b اعدادی حقیقی باشند، به‌طوری که $ab<0$، ثابت کنید: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -2$ (نهایی- شهریور ۹۱)

۱۸ اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطه‌ی $x^4+y^4\geq x^3y+xy^3$ را ثابت کنید. (نهایی- دی ۹۰)

۱۹ با اثبات بازگشتی نشان دهید: $(a,b\in\mathbb{R}^+)$, $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (نهایی- شهریور ۸۹)

۲۰ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، به روش بازگشتی ثابت کنید: $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\geq\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (نهایی- خرداد ۸۷)

پاسخ پرسش‌های جلسه دوم

۶

آ) این حکم نادرست است. زیرا اگر $x=\frac{1}{2}$، آن‌گاه $x^2=\frac{1}{4}<x=\frac{1}{2}$.

ب) حکم صحیح است. زیرا اگر فرض کنیم $2k$ و $2k+2$ دو عدد صحیح زوج متوالی باشند، آن‌گاه:

$$2k(2k+2)=2k(2(k+1))=4\underbrace{k(k+1)}_{2k'}=8k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

۷

فرض کنیم $2k+1$ و $2k'+1$ $(k,k'\in\mathbb{Z})$ دو عدد صحیح فرد باشند، داریم:

$$(2k+1)^2+(2k'+1)^2=(4k^2+4k+1)+(4k'^2+4k'+1)=4k^2+4k'^2+4k+4k'+2$$

$$=2\underbrace{(2k^2+2k'^2+2k+2k'+1)}_{k''\in\mathbb{Z}}=2k''\ \text{(عدد زوج)}$$

۸

آ) فرض کنیم دو عدد فرد به صورت $۲k+۱$ و $۲k'+۱$ باشد $(k,k'\in\mathbb{Z})$. در این صورت داریم:

$$(۲k+۱)^۲-(۲k'+۱)^۲=(۴k^۲+۴k+۱)-(۴k'^۲+۴k'+۱)=۴\underbrace{(k^۲+k-k'^۲-k')}_{k''}=۴k''\ ,\ k''\in\mathbb{Z}$$

ب) فرض کنیم x عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، در این صورت:

$$x=۳k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x(x+۳)=۳k(۳k+۳)=۹\underbrace{k(k+۱)}_{\text{زوج}}=۹(۲k')=۱۸k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

۹

آ) اگر $x=\sqrt{۲}$ و $y=-\sqrt{۲}$، آن‌گاه: $x+y=۰\in\mathbb{Q}$

ب) اگر $n=۵$، آن‌گاه عدد $۳^n+۲=۳^۵+۲=۲۴۵$ یک عدد مرکب است (۲۴۵ بر ۵ بخش‌پذیر است).

پ) اگر $x=۲$ و $y=۰$، آن‌گاه $xy=۰$ ولی $x\neq۰$

ت) اگر $a=c=۲$ و $b=۱$، آن‌گاه $b\sqrt{ac}=۲$ یک عدد گویا است.

۱۰

آ) نادرست، زیرا اگر $a=۳$ و $b=۲$، آن‌گاه $a+b=۵$ عدد اول است.

ب) درست است، زیرا اگر $x=۲k+۱$ (عدد فرد) باشد که در آن $k\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه:

$$x(x+۲)=(۲k+۱)(۲k+۳)=۴k^۲+\underbrace{۶k+۲k}_{۸k}+۳=۲\underbrace{(۲k^۲+۴k+۱)}_{k'}+۱=۲k'+۱$$

بنابراین $x(x+۲)$ یک عدد فرد است.

۱۱

$$a^۲+b^۲\geq۲(b-۱)\Leftrightarrow a^۲+b^۲-۲b+۲\geq۰\Leftrightarrow a^۲+(b^۲-۲b+۱)+۱\geq۰\Leftrightarrow a^۲+(b-۱)^۲+۱\geq۰$$ درستی عبارت بدیهی است.

۱۲

$$ab\leq(\frac{a+b}{۲})^۲\Leftrightarrow ab\leq\frac{a^۲+b^۲+۲ab}{۴}\Leftrightarrow ۴ab\leq a^۲+b^۲+۲ab\Leftrightarrow a^۲+b^۲-۲ab\geq۰\Leftrightarrow(a-b)^۲\geq۰$$

درستی عبارت بدیهی است.

۱۳

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y\overset{\times۲}{\Leftrightarrow}۲x^۲+۲y^۲+۲\geq۲xy+۲x+۲y\Leftrightarrow۲x^۲+۲y^۲+۲-۲xy-۲x-۲y\geq۰$$
$$\Leftrightarrow(x^۲-۲xy+y^۲)+(x^۲-۲x+۱)+(y^۲-۲y+۱)\geq۰\Leftrightarrow(x-y)^۲+(x-۱)^۲+(y-۱)^۲\geq۰$$

درستی عبارت بدیهی است.

۱۴

$$x+\frac{۱}{x}\geq۲\Leftrightarrow x^۲+۱\geq۲x\Leftrightarrow x^۲-۲x+۱\geq۰\Leftrightarrow(x-۱)^۲\geq۰$$

درستی عبارت بدیهی است.

۱۵

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}\Leftrightarrow a+b+۲\sqrt{ab}\geq a+b\Leftrightarrow۲\sqrt{ab}\geq۰$$

درستی عبارت بدیهی است.

۱۶

$$a^۲+b^۲+c^۲+۳\geq۲(a+b+c)\Leftrightarrow a^۲+b^۲+c^۲+۳-۲a-۲b-۲c\geq۰$$
$$\Leftrightarrow(a^۲-۲a+۱)+(b^۲-۲b+۱)+(c^۲-۲c+۱)\geq۰\Leftrightarrow(a-۱)^۲+(b-۱)^۲+(c-۱)^۲\geq۰$$

نامساوی اخیر بدیهی است.

۱۷

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq-۲\Leftrightarrow\frac{a^۲+b^۲}{ab}\leq-۲\overset{ab<۰}{\Leftrightarrow}a^۲+b^۲\geq-۲ab\Leftrightarrow a^۲+b^۲+۲ab\geq۰\Leftrightarrow(a+b)^۲\geq۰$$ (بدیهی است.)

۱۸

$$x^۴+y^۴\geq x^۳y+xy^۳\Leftrightarrow\underline{x^۴}+\underline{\underline{y^۴}}-\underline{x^۳y}-\underline{\underline{xy^۳}}\geq۰\Leftrightarrow x^۳(x-y)+y^۳\underbrace{(y-x)}_{-(x-y)}\geq۰$$
$$\Leftrightarrow x^۳(x-y)-y^۳(x-y)\geq۰\Leftrightarrow(x^۳-y^۳)(x-y)\geq۰$$
$$\Leftrightarrow(x-y)(x^۲+xy+y^۲)(x-y)\geq۰\Leftrightarrow(x-y)^۲(x^۲+xy+y^۲)\geq۰$$ (بدیهی است.)

۱۹

$$\frac{a}{b^۲}+\frac{b}{a^۲}\geq\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\Leftrightarrow\frac{a^۳+b^۳}{a^۲b^۲}\geq\frac{a+b}{ab}\Leftrightarrow a^۳+b^۳\geq ab(a+b)\Leftrightarrow\underline{a^۳}+\underline{\underline{b^۳}}-\underline{a^۲b}-\underline{\underline{ab^۲}}\geq۰$$
$$\Leftrightarrow a^۲(a-b)+b^۲(b-a)\geq۰\Leftrightarrow a^۲(a-b)-b^۲(a-b)\geq۰$$
$$\Leftrightarrow(a-b)(a^۲-b^۲)\geq۰\Leftrightarrow(a-b)(a-b)(a+b)\geq۰\Leftrightarrow(a-b)^۲(a+b)\geq۰$$ (بدیهی است.)

۲۰

$$\frac{۱}{\sqrt{a}}+\frac{۱}{\sqrt{b}}\geq\frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}\geq\frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\Leftrightarrow(\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲\geq۴\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b+۲\sqrt{ab}\geq۴\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\geq۰\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geq۰$$ (بدیهی است.)

تست‌های جلسه دوم

۲

۲۶. اگر a و b دو عدد صحیح و $a+b$ و ab اعدادی زوج باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $a^۲+۱$ عدد زوج می‌باشد. ۲) $a(b+۱)$ عدد زوج می‌باشد.

۳) $a^۲-b^۲$ مضرب ۸ می‌باشد. ۴) $۲a+b+۶$ عدد فرد می‌باشد.

۲۷. برای اثبات .... حکم «مجموع سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۶ است»، از روش .... استفاده می‌کنیم.

۱) درستی- استنتاجی ۲) درستی- استقرای ریاضی ۳) نادرستی- مثال نقض ۴) درستی- استدلال قیاسی

۲۸. حاصل‌ضرب دو عدد به صورت $۴q+۳$، به کدام صورت است؟

۱) $۶q+۳$ ۲) $۶q+۱$ ۳) $۴q+۳$ ۴) $۴q+۱$

۲۹. علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه‌ی خود هستند. با توجه به شرایط زیر کوتاه‌ترین و بلندترین آن‌ها کدام است؟

آ) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاه‌تر می‌باشند. ب) داوود از کامران کوتاه‌تر است.

پ) احمد کوتاه‌ترین پسر نیست. ت) داوود از علی بلندتر است.

۱) ابراهیم- داوود ۲) ابراهیم- کامران ۳) علی- کامران ۴) علی- داوود

۳۰. با کدام استدلال «عدد چهاررقمی به صورت $\overline{abab}$ بخش‌پذیر بر ۱۰۳» وجود ندارد؟

۱) استقرایی ۲) مثال نقض ۳) استنتاجی ۴) تمثیلی

۳۱. اگر a و b دو عدد گویا و $a(۲\sqrt{۲}+\sqrt{۳})+b(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})=\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}$، کدام عدد زیر، گویا می‌باشد؟

۱) $\sqrt{a-۳b}$ ۲) $\sqrt{۲a}$ ۳) $\sqrt{۳+b}$ ۴) $\sqrt{۲a-b}$

۳۲. اگر ۲، ۳، ۵، ... و p، صد عدد اول متوالی باشند، باقی‌مانده‌ی عدد $۲^۲+۳^۲+۵^۲+\cdots+p^۲$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۳۳. کدام گزینه‌ی زیر مثال نقض ندارد؟

۱) هر عدد به صورت $۸k+۱$، $k\in W$، مربع یک عدد فرد است.

۲) اگر n یک عدد طبیعی و $n^۲$ به صورت $۶k+۱$ باشد، آن‌گاه n نیز به صورت $۶k+۱$ است.

۳) اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و $x+y=۲$، آن‌گاه $xy\le ۱$

۴) هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

۳۴. کلیت حکم «اگر عددی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه مجموع ارقام آن عدد بر ۴ بخش‌پذیر است.» با کدام عدد نقض می‌شود؟

۱) ۸۶۲ ۲) ۸۴۴ ۳) ۸۸۴ ۴) ۱۲۴

۳۵. کدام عدد کلیّت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت.» را نقض می‌کند؟

۱) ۱۴ ۲) ۳۷ ۳) ۶۱ ۴) ۲۴

۳۶. چند عدد طبیعی دورقمی را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۷. کدام گزینه‌ی زیر مثال نقض دارد؟

۱) هر مربعی یک مستطیل است.

۲) اگر $x>۲$، آن‌گاه $x>۱$

۳) اگر a و b دو عدد اول غیرمتوالی باشند، آن‌گاه $a+b$ عدد مرکب است.

۴) حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌ها است.

۳۸. کدام عدد یک مثال نقض برای حکم «برای هر عدد طبیعی n، $n^۲+۴n+۲۹$ عددی اول است.» می‌باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۱۶

۳۹. اگر $\alpha+2$ و $\alpha+\beta$ دو عدد گنگ باشند، کدام عدد زیر همواره گنگ است؟

۱) $\alpha\beta$ ۲) $\alpha^2\beta$ ۳) $3\alpha+1$ ۴) 2β

۴۰. کدام‌یک از احکام زیر همواره درست است؟

۱) اگر x^2 عددی گویا باشد، آن‌گاه x نیز عددی گویا است.
۲) حاصل‌ضرب دو عدد گنگ، عددی گویا است.
۳) تفاضل دو عدد فرد، عددی زوج است.
۴) اگر x عدد زوج باشد، آن‌گاه x^2+3x عددی فرد است.

۴۱. کدام گزینه کلیت حکم «ماتریس‌های مربعی از مرتبه‌ی ۲، وارون‌پذیر هستند.» را نقض می‌کند؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

۴۲. کدام مورد یک مثال نقض برای حکم «حاصل‌ضرب هر دو ماتریس مخالف صفر، ماتریس مخالف صفر است.» می‌باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

۴۳. روش استدلال در بررسی کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) هر مستطیل یک مربع است.
۲) توان دوم هر عدد طبیعی از توان سوم آن کم‌تر است.
۳) هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰۰ را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.
۴) مربع هیچ عدد طبیعی به صورت $4k+2$ نمی‌باشد.

۴۴. عکس کدام‌یک از قضیه‌های شرطی زیر، قضیه‌ی شرطی <u>نیست</u>؟

۱) اگر n یک عدد طبیعی و n^3 یک عدد زوج باشد، آن‌گاه n نیز زوج است.
۲) عدد 3^n را به‌ازای هر عدد طبیعی n می‌توان به صورت مجموع دو عدد متوالی نوشت.
۳) حاصل‌ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است.
۴) در مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول وتر با مجموع مربعات طول دو ضلع قائمه برابر است.

۴۵. عکس کدام‌یک از قضیه‌های شرطی زیر، قضیه‌ی شرطی می‌باشد؟

۱) اگر $x=y$، آن‌گاه $x^3=y^3$ ۲) اگر $x=y$، آن‌گاه $\tan x=\tan y$

۳) اگر $x=y$، آن‌گاه $x^2-y^2=0$ ۴) اگر $x=y\neq 0$، آن‌گاه $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=2$

۴۶. برای اثبات حکم «اگر a، b، c و d اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه $\sqrt{(a+b)(c+d)}\geq\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$» به روش اثبات بازگشتی، کدام رابطه‌ی بدیهی به‌دست می‌آید؟

۱) $(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2\geq 0$ ۲) $(\sqrt{ac}-\sqrt{bd})^2\geq 0$ ۳) $(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2\geq 0$ ۴) $(\sqrt{ad}+\sqrt{bc})^2\geq 0$

۴۷. برای اثبات حکم « $a,b>0$, $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ » با استدلال بازگشتی، از کدام رابطه‌ی بدیهی زیر استفاده می‌شود؟

۱) $a^2+b^2>0$ ۲) $(a-b)^2(a+b)\geq 0$ ۳) $(a+b)^2\geq 0$ ۴) $a^3+b^3\geq 0$

۴۸. اگر a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند به‌طوری که $a+b+c=1$، کم‌ترین مقدار $(1-a)(1-b)(1-c)$ کدام است؟

۱) abc ۲) $a+b+c$ ۳) $8abc$ ۴) $8(a+b+c)$

۲ پاسخ تست‌های جلسه‌دوم

۲۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$a+b$ عددی زوج است، در نتیجه a و b هر دو زوج و یا هر دو فرد می‌باشند و با توجه به این‌که ab زوج است باید هر دو عدد a و b زوج باشند و با توجه به گزینه‌ها، عدد $a(b+1)$، عددی زوج است چون که حاصل‌ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد می‌باشد.

۲۷ **۱** ۲ ۳ ۴

فرض کنیم $2n$، $2n+2$ و $2n+4$ سه عدد صحیح زوج و متوالی باشند، در این صورت:

$2n+(2n+2)+(2n+4)=6n+6=6(n+1)$ (مضرب ۶ است.)

بنابراین حکم همواره درست است و برای اثبات از استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم.

۲۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

فرض کنیم دو عدد به صورت $a=4q+3$ و $b=4q'+3$ داشته باشیم:

$$ab=(4q+3)(4q'+3)=16qq'+12q+12q'+9$$
$$=16qq'+12q+12q'+8+1$$
$$=4(4qq'+3q+3q'+2)+1=4m+1\ ,\ m\in\mathbb{Z}$$

۲۹ ۱ **۲** ۳ ۴

داوود از کامران کوتاه‌تر و از علی بلندتر است، بنابراین کامران از علی بلندتر است.

هم‌چنین حداقل دو نفر از علی کوتاه‌تر می‌باشند، بنابراین احمد و ابراهیم از علی کوتاه‌تر می‌باشند و با توجه به این‌که احمد کوتاه‌ترین پسر نمی‌باشد، لزوماً ابراهیم کوتاه‌ترین فرد این مجموعه است و در نتیجه، ترتیب آن‌ها برحسب افزایش قد از راست به چپ به صورت زیر است:

ابراهیم- احمد- علی- داوود- کامران

۳۰ ۱ ۲ **۳** ۴

داریم:

$$\overline{abab}=b+10a+100b+1000a=101b+1010a=101(b+10a)$$

از طرفی به‌ازای هیچ مقادیری از a و b، $b+10a$ نمی‌تواند مضرب ۱۰۳ باشد، لذا $\overline{abab}$ به‌ازای هیچ مقادیری از a و b بر ۱۰۳ بخش‌پذیر نمی‌باشند. بنابراین با استفاده از استدلال استنتاجی حکم ثابت می‌شود.

۳۱ **۱** ۲ ۳ ۴

$$a(2\sqrt{2}+\sqrt{3})+b(\sqrt{2}-\sqrt{3})=2a\sqrt{2}+a\sqrt{3}+b\sqrt{2}-b\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{2}(2a+b)+\sqrt{3}(a-b)=\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2a+b=1\\ a-b=2\end{cases}\Rightarrow a=1\ ,\ b=-1$$

با توجه به گزینه‌ها، عدد $\sqrt{a-3b}=\sqrt{4}=2$ یک عدد گویا می‌باشد.

۳۲ ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است، بنابراین:

$$A=2^2+\underbrace{3^2+5^2+\cdots+p^2}_{\text{مربع ۹۹ عدد فرد}}$$
$$=4+(8k_1+1)+(8k_2+1)+\cdots+(8k_{99}+1)$$
$$=4+\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{\text{۹۹ تا}}+8\underbrace{(k_1+\cdots+k_{99})}_{k'}=103+8k'$$
$$=7+96+8k'=7+8\times12+8k'=7+8\underbrace{(12+k')}_{q}=8q+7$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم A بر ۸ برابر ۷ است.

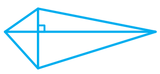
۳۳ ۱ ۲ **۳** ۴

گزینه‌ی (۱) نادرست است، زیرا $8(2)+1=17$ مربع هیچ عدد فردی نمی‌باشد.

گزینه‌ی (۲) نادرست است، زیرا $6(4)+1=25=5^2$، ولی عدد ۵ به صورت $6k+1$ نمی‌باشد.

گزینه‌ی (۳) با توجه به نامساوی میانگین حسابی- هندسی برقرار است،

زیرا: $x+y\ge2\sqrt{xy}\xrightarrow{x+y=2}\sqrt{xy}\le1\Rightarrow xy\le1$

گزینه‌ی (۴) نادرست است، زیرا در چهارضلعی  قطرها بر هم عمودند ولی چهارضلعی لوزی نمی‌باشد. توجه کنیم عکس این مطلب درست است.

۳۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

عدد ۱۲۴ بر ۴ بخش‌پذیر است ولی مجموع ارقام آن بر ۴ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

۳۵ ۱ **۲** ۳ ۴

اعداد ۱۴، ۶۱ و ۲۴ را به صورت زیر و به صورت مجموع سه مربع کامل می‌توانیم بنویسیم:

$$24=2^2+2^2+4^2\ ,\ 61=3^2+4^2+6^2\ ,\ 14=1^2+2^2+3^2$$

ولی عدد ۳۷ را نمی‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت.

۳۶ **۱** ۲ ۳ ۴

اعداد 2^n که در آن n یک عدد طبیعی باشد را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت، بنابراین اعداد دورقمی ۱۶، ۳۲ و ۶۴ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

۳۷ ۱ ۲ **۳** ۴

گزینه‌ی (۱) درست است، زیرا مربع تمام شرایط تعریف و ویژگی‌های مستطیل را دارد.

گزینه‌ی (۲) درست است، زیرا: $x>2\ ,\ 2>1\Rightarrow x>1$

گزینه‌ی (۳) نادرست است، زیرا ۲ و ۵ دو عدد اول غیرمتوالی می‌باشند و مجموع آن‌ها، یعنی عدد ۷ عدد مرکب نمی‌باشد.

گزینه‌ی (۴) درست است، زیرا:

$$xy\le\frac{x^2+y^2}{2}\Leftrightarrow 2xy\le x^2+y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\ge0\Leftrightarrow(x-y)^2\ge0$$ بدیهی است.

۳۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

با عددگذاری به‌جای n، حاصل عبارت $A=n^2+4n+29$ برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) عدد اول به‌دست می‌آید.

توجه کنیم که اگر به‌جای n هر عدد طبیعی مضرب ۲۹ قرار دهیم، A یک عدد مرکب است (A حتماً بر ۲۹ بخش‌پذیر است.) عدد ۱۱۶ مضرب ۲۹ است، بنابراین به‌جای n اگر عدد ۱۱۶ قرار دهیم، A حتماً عددی غیراول خواهد شد.

۳۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$2+\alpha$ عدد گنگ است، پس α یک عدد گنگ خواهد بود. α و $\alpha+\beta$ اعداد گنگ هستند، بنابراین β هم می‌تواند عدد گویا ($\alpha+\beta=\sqrt{2}+2$) و هم یک عدد گنگ ($\alpha+\beta=\sqrt{2}+2\sqrt{2}$) باشد. طبق گزینه‌ها، گزینه‌ی (۳) همواره عددی گنگ است و سایر گزینه‌ها مثال نقض دارند:

گزینه‌ی (۱): $\alpha=\sqrt{2}\ ,\ \beta=0 \Rightarrow \alpha\beta=0\in Q$

گزینه‌ی (۲): $\alpha=\sqrt{2}\ ,\ \beta=0 \Rightarrow \alpha^2\beta=2\in Q$

گزینه‌ی (۴): $\beta=0 \Rightarrow 2\beta=0\in Q$

۴۰ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

گزینه‌ی (۳) به کمک استدلال استنتاجی ثابت می‌شود و سایر گزینه‌ها با مثال نقض رد می‌شوند:

گزینه‌ی (۱): اگر $x=\sqrt{2}$، آن‌گاه $x^2=2$ عددی گویا است ولی x عدد گویا نمی‌باشد.

گزینه‌ی (۲): $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ دو عدد گنگ هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها $\sqrt{6}$ نیز عددی گنگ است.

گزینه‌ی (۴): اگر $x=2$، آن‌گاه $x^2+3x=10$.

۴۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A|=ad-bc\neq 0$، آن‌گاه ماتریس A وارون‌پذیر است. با محاسبه‌ی دترمینان هر یک از ماتریس‌ها، در گزینه‌ی (۲) داریم:

$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=12-12=0 \Rightarrow$ A وارون‌پذیر نمی‌باشد.

۴۲ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

با ضرب ماتریس‌های داده‌شده در گزینه‌ها، در گزینه‌ی (۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\bar{O}$$

۴۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

هر یک از سه گزینه‌ی اول را می‌توان با مثال نقض رد کرد. برای رد گزینه‌ی (۱)، کافی است مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ در نظر بگیریم. برای رد گزینه‌ی (۲)، کافی است عدد طبیعی ۱ را در نظر بگیریم و برای گزینه‌ی (۳)، هر عدد به صورت 2^n یک مثال نقض خواهد بود. برای تأیید درستی گزینه‌ی (۴)، اگر n یک عدد فرد باشد، آن‌گاه مربع آن به صورت $8k+1$ است و اگر n یک عدد زوج باشد، آن‌گاه مربع آن به صورت $n^2=(2k)^2=4k^2=4k'$ است. لذا به‌ازای هیچ مقداری از n، عدد n^2 به صورت $4k+2$ نمی‌باشد.

۴۴ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

اعداد به صورت 3^n، فرد می‌باشند و هر عدد فرد را می‌توان به صورت مجموع دو عدد متوالی نوشت ($k+(k+1)=2k+1$) ولی عکس آن برقرار نیست، به عنوان مثال ۵ را می‌توان به صورت $2+3=5$ نوشت، ولی ۵ به فرم 3^n نمی‌باشد.

۴۵ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

عکس هریک از قضیه‌های شرطی را می‌نویسیم:

گزینه‌ی (۱): اگر $x^3=y^3$، آن‌گاه $x=y$

گزینه‌ی (۲): اگر $\tan x=\tan y$، آن‌گاه $x=y$ (نادرست است، زیرا $\tan 0=\tan\pi$ ولی $\pi\neq 0$)

گزینه‌ی (۳): اگر $x^2-y^2=0$، آن‌گاه $x=y$ (نادرست است، زیرا: $x^2-y^2 \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow x=\pm y$)

گزینه‌ی (۴): اگر $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=2$، آن‌گاه $x=y\neq 0$ (نادرست است، زیرا با قرار دادن $x=1$ و $y=-1$ تساوی $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=2$ برقرار است، ولی $x\neq y$)

۴۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

اثبات به روش بازگشتی را می‌نویسیم تا به رابطه‌ی بدیهی برسیم:

$$\text{حکم} \Leftrightarrow (a+b)(c+d)\geq ac+bd+2\sqrt{acbd}$$
$$\Leftrightarrow ac+ad+bc+bd\geq ac+bd+2\sqrt{acbd}$$
$$\Leftrightarrow ad+bc-2\sqrt{acbd}\geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2\geq 0$$

بنابراین رابطه‌ی بدیهی به صورت $(\sqrt{ad}-\sqrt{bc})^2\geq 0$ است.

۴۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \xrightarrow{\times a^2b^2>0} a^3+b^3\geq ab^2+ba^2$$
$$\Rightarrow a^3-ab^2+b^3-ba^2\geq 0 \Rightarrow a(a^2-b^2)+b(b^2-a^2)\geq 0$$
$$\Rightarrow a(a-b)(a+b)+b(b-a)(b+a)\geq 0$$
$$\Rightarrow a(a-b)(a+b)-b(a-b)(a+b)\geq 0$$
$$\Rightarrow (a-b)(a+b)(a-b)\geq 0$$
$$\Rightarrow (a-b)^2(a+b)\geq 0 \quad \text{(رابطه‌ی بدیهی)}$$

۴۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$a+b+c=1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 1-a=b+c\geq 2\sqrt{bc} & \text{(نامساوی میانگین حسابی - هندسی)} \\ 1-b=a+c\geq 2\sqrt{ac} & \text{(نامساوی میانگین حسابی - هندسی)} \\ 1-c=a+b\geq 2\sqrt{ab} & \text{(نامساوی میانگین حسابی - هندسی)} \end{cases}$$
$$\Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c)\geq 8\sqrt{bc}\times\sqrt{ac}\times\sqrt{ab}$$
$$=8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc$$