بسم الله

مرجع مثلثات

مؤلفان : رضا اسلامی ،کاظم اجلالی

انتشارات خوشخوان

فهرست

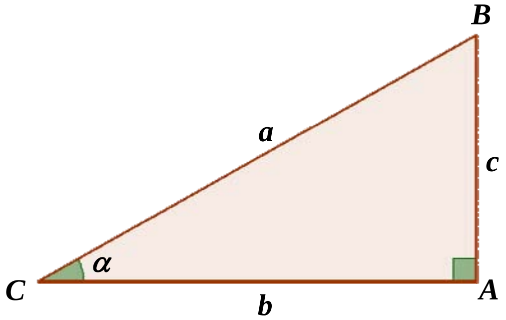
فصل ۱

نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

در این فصل نسبتهای مثلثاتی یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه را معرفی خواهیم کرد. شما خواهید آموخت که نسبت اندازه اضلاع یک مثلث قائم الزاویه با زوایای آن چه ارتباطی دارد و این ارتباط چه کاربردی می‌تواند داشته باشد. همچنین در مثالها و مسائل پایانی فصل مقدماتی را فراهم خواهیم کرد که در فصل‌های بعدی به شدت مورد استفاده قرار خواهند گرفت. مطالعه این فصل برای تمامی کسانی که می‌خواهند مثلثات را به عنوان یک ابزار محاسباتی بیاموزند، توصیه می‌شود. لازم به ذکر است که مطالب این فصل منطبق بر سرفصل‌های کتاب ریاضیات سال اول دبیرستان می‌باشد.

۱–۱– نسبت مثلثاتی سینوس

در مثلث قائم الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{ABC}$ $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، زاویه‌ی حاده‌ی α را در نظر می‌گیریم. سینوس این زاویه‌ی حاده این‌گونه تعریف می‌شود:



$$\sin(\alpha)=\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی وتر}}=\frac{c}{a}$$

از آن‌جا که در مثلث قائم الزاویه، طول وتر از سایر اضلاع بزرگ‌تر است، همواره حاصل تقسیم اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی α بر اندازه‌ی وتر عددی کوچک‌تر از یک خواهد بود:

$$۰<\alpha<۹۰^\circ \Rightarrow ۰<\sin\alpha<۱$$

مثال

اگر $۰<\alpha<۹۰^\circ$ و $\sin\alpha=\frac{m-۳}{۵}$ باشد، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۳ دقیقه

حل)

α زاویه‌ای حاده است : $۰<\sin\alpha<۱$

$\Rightarrow ۰<\frac{m-۳}{۵}<۱$ (ضرب طرفین در ۵) $\Rightarrow ۰<m-۳<۵$ (جمع طرفین با ۳)

$\Rightarrow ۳<m<۸$ (مشخص کردن اعداد صحیح) $\Rightarrow m=۴,۵,۶,۷$

بنابراین ۴ مقدار صحیح وجود دارد.

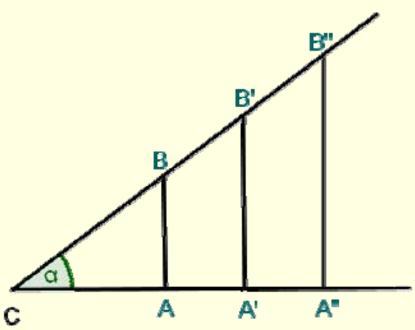
تذکر

در مورد زاویه‌ی مشخص و حاده‌ی α می‌توان گفت $\sin\alpha$ نیز عددی مشخص است. یعنی در مثلث‌های قائم الزاویه‌ی متفاوت که یک زاویه‌ی حاده‌ی α دارند، نسبت اندازه‌ی ضلع مقابلِ α به اندازه‌ی وتر، عددی ثابت است.

به شکل زیر توجه کنید:

طبق قضیه‌ی تالس می‌توان گفت که در مثلث‌های ABC و $A'B'C$ و $A''B''C$ اضلاع باهم متناسب می‌باشند و حاصل نسبت اندازه‌ی ضلع مقابلِ α بر اندازه‌ی وتر در هر سه مثلث باهم برابر است.

$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C}=\frac{A''B''}{B''C}$$



شبیه سازی

کد: ۱۰۱

۴ دقیقه

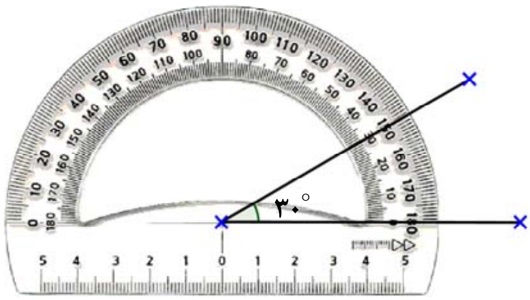
مثال هر یک از مثلث‌های قائم الزاویه‌ی زیر را رسم کرده و مقدار $\sin 30^\circ$ را در آن‌ها حساب کنید.

الف) $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ$ و $BC = 4cm$

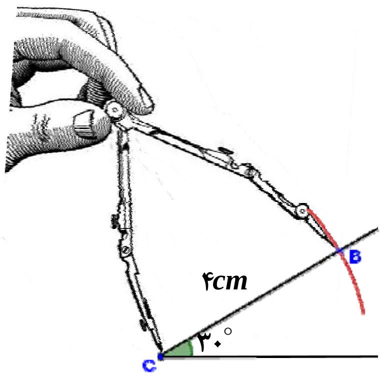
ب) $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ$ و $BC = 3cm$

حل الف)

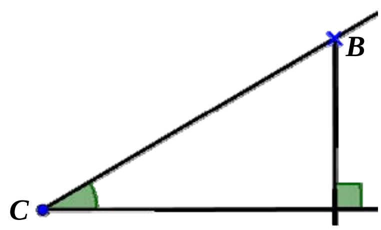
۱ رسم زاویه‌ی $\hat{C} = 30^\circ$ به کمک نقاله



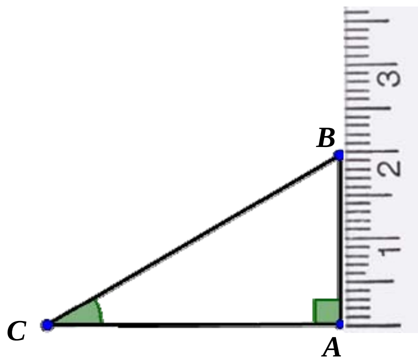
۲ مشخص کردن ضلع BC به کمک پرگار



۳ رسم عمود از B به کمک گونیا



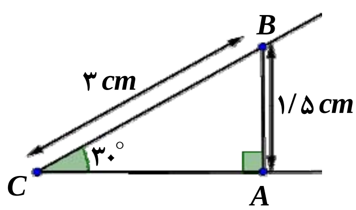
۴ اندازه‌گیری ضلع AB به کمک خط‌کش



۵ محاسبه‌ی $\sin 30^\circ$: $\sin 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4}$

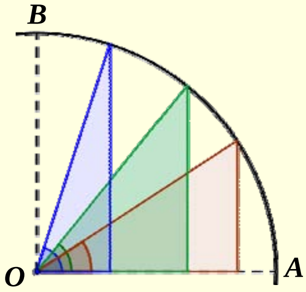
حل ب)

اگر قسمت الف را تکرار کنیم، مثلث ABC این گونه رسم می‌شود:



$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1/5}{3} = \frac{1}{2}$$

هرچه زاویه‌ی α از صفر تا ۹۰ درجه بزرگ‌تر گردد، مقدار $\sin\alpha$ نیز بزرگ‌تر می‌شود. همان‌طور که در دایره‌ی روبه‌رو مشخص شده، در تمامی مثلث‌های قائم‌الزاویه، طول وتر یکسان است و با زیاد شدن زاویه‌ی α، اندازه‌ی ضلع مقابل بزرگ‌تر می‌شود و در نتیجه مقدار $\sin\alpha$ بیشتر می‌شود.



شبیه سازی

کد: ۱۰۲

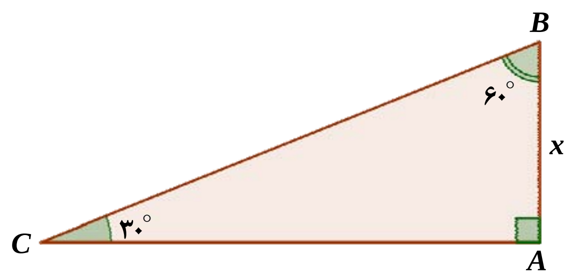
مثال

سینوس زوایای ۳۰° ، ۶۰° و ۴۵° را به روش هندسی به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

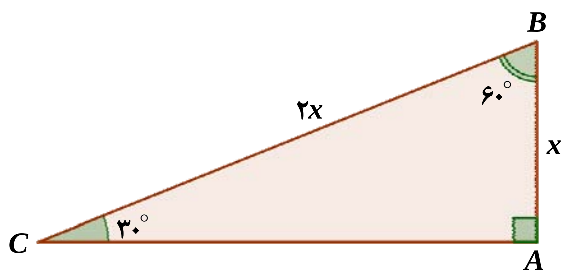
۴ دقیقه

حل)

۱ رسم مثلث قائم الزاویه‌ای با زاویه‌ی ۳۰°



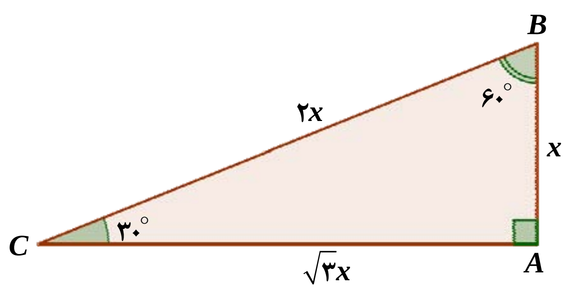
۲ در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌روی زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است.



به کمک رابطه‌ی فیثاغورث طول ضلع AC را برحسب x به دست می‌آوریم:

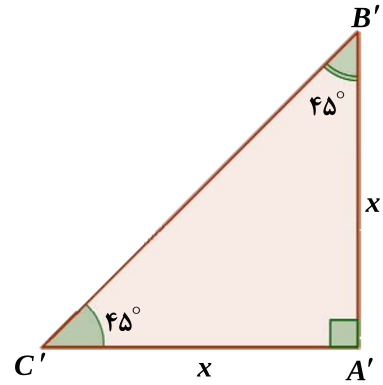
$$(۲x)^۲ = x^۲ + (AC)^۲ \Rightarrow ۴x^۲ = x^۲ + (AC)^۲ \Rightarrow (AC)^۲ = ۳x^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۳}x$$

۳ محاسبه‌ی $\sin ۳۰^\circ$ و $\sin ۶۰^\circ$



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{x}{۲x} = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}x}{۲x} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

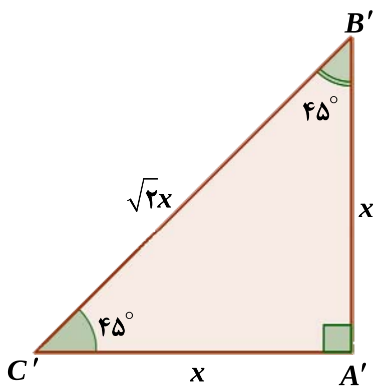
۱ رسم مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی ۴۵°



۲ به کمک رابطه‌ی فیثاغورث طول وتر را برحسب x می‌یابیم:

$$(BC)^{۲} = x^{۲} + x^{۲}$$
$$\Rightarrow (BC)^{۲} = ۲x^{۲} \Rightarrow BC = \sqrt{۲}x$$

۳ محاسبه‌ی $\sin ۴۵^\circ$



$$\sin ۴۵^\circ = \frac{x}{\sqrt{۲}x} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

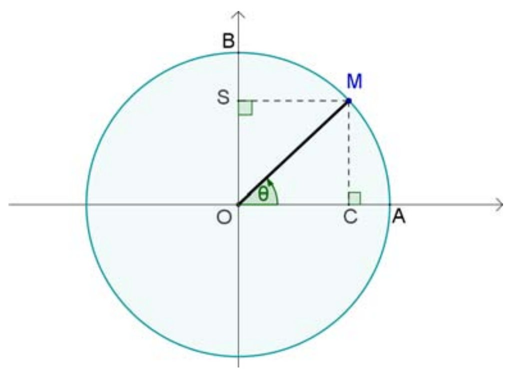
پس مقایسه‌ی $\sin ۳۰^\circ$، $\sin ۴۵^\circ$ و $\sin ۶۰^\circ$ به این ترتیب خواهد بود:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{\sqrt{۲}}{۲} < \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin ۳۰^\circ < \sin ۴۵^\circ < \sin ۶۰^\circ$$

مثال

دایره‌ی روبه‌رو که به شعاع ۱ رسم شده است،
معروف به دایره‌ی مثلثاتی است.
مقدار $\sin\theta$ برابر با طول کدام پاره‌خط است؟
(θ زاویه‌ی دلخواه است.)

۲ دقیقه



حل)

از نقطه‌ی M به دو پاره‌خط OA و OB عمود رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{OMC}$، مقدار $\sin\theta$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin\theta = \frac{MC}{OM} = \frac{MC}{۱} = MC$$

در مستطیل $OSMC$، طول MC با طول OS برابر است.

$$\Rightarrow \sin\theta = OS$$

تذکر

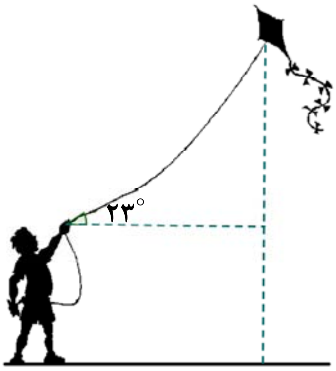
همان‌طور که در دایره‌ی مثلثاتی مشخص است با افزایش زاویه‌ی θ، طول OS یعنی $\sin\theta$ بیشتر می‌شود. همچنین اگر θ به صفر نزدیک شود، سینوس آن به صفر و اگر به ۹۰° نزدیک شود، سینوس آن به عدد یک نزدیک می‌شود. پس داریم: $\sin ۰^\circ = ۰ \quad , \quad \sin ۹۰^\circ = ۱$.

شبیه سازی
کد: ۱۰۳

مثال ۳ دقیقه

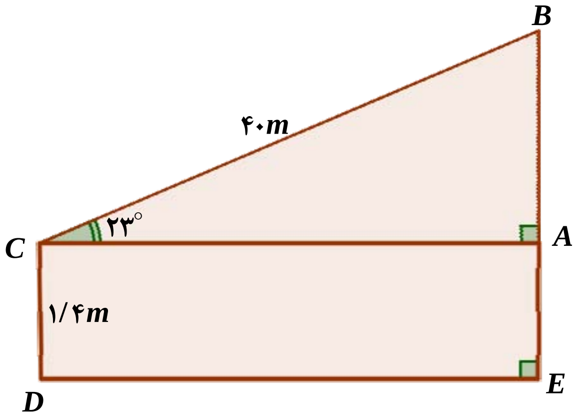
شخصی که دارای قد ۱ متر و ۴۰ سانتی‌متر است، بادبادکی به هوا فرستاده است. در لحظه‌ای که ۴۰ متر از نخ را رها کرده است، زاویه‌ی بین راستای نخ و سطح زمین 23° می‌باشد. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟

(فرض کنید نخ در امتداد مستقیم قرار دارد و $\sin 23^\circ = 0/39$ است.)



حل)

همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشخص است برای محاسبه‌ی ارتفاع بادبادک از زمین باید ابتدا اندازه‌ی ضلع AB را محاسبه و سپس آن را با اندازه‌ی AE جمع کنیم :



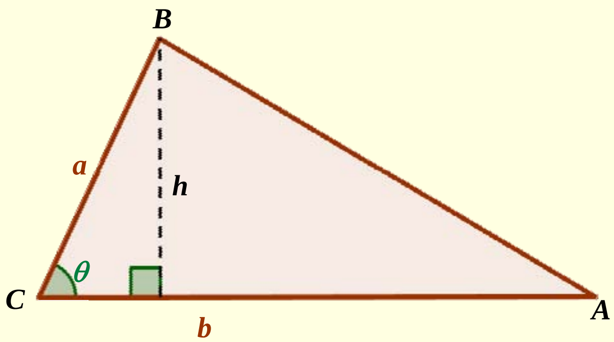
$$\sin 23^\circ = \frac{AB}{BC} \text{ (جاگذاری)}\Rightarrow 0/39 = \frac{AB}{40} \Rightarrow AB = 15/6\,m$$

$$\Rightarrow BE = AB + AE \Rightarrow BE = 15/6 + 1/4 = 17\,m$$

نکته

مساحت یک مثلث دلخواه با دو ضلع a و b که زاویه‌ی بین آن‌ها θ می‌باشد، از رابطه‌ی $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ به دست می‌آید.

اثبات :



$$\sin\theta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\sin\theta$$

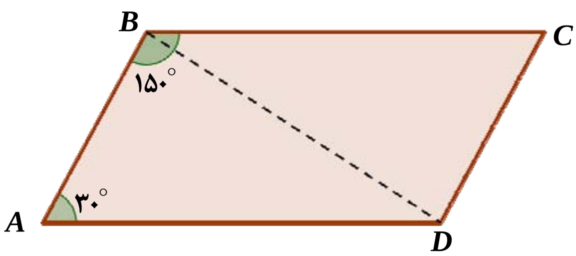
$$S = \frac{1}{2}b \times h \text{ (جاگذاری)} \Rightarrow S = \frac{1}{2}b \times a\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\theta}$$

مثال ۳ دقیقه

مساحت متوازی الاضلاعی را که اندازه‌ی دو ضلع مجاور آن ۵ و ۸ و زاویه‌ی بین این دو ضلع 150° می‌باشد، به‌دست آورید.

حل)



در شکل مقابل زاویه‌ی A مکمل زاویه‌ی B است. پس داریم:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB.AD\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 10$$

پس مساحت متوازی الاضلاع دو برابر مساحت مثلث و برابر ۲۰ می‌باشد.