تمرین

۴۵- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورده و آن‌ها را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.

الف) $f(x)=\log\sqrt[3]{(x+1)^2}$ **ب)** $g(x)=x-\log_5(9-x^2)$

چهار عمل اصلی روی توابع

چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را که بلدید؟! تا حالا این اعمال را برای اعداد به کار می‌بردیم و حالا می‌خواهیم در مورد توابع به کار ببریم. ما چهار عمل اصلی را روی مقادیر و ضابطه‌های دو تابع اثر می‌دهیم؛ مثلاً اگر $f(2)=10$ و $g(2)=5$ آن‌گاه:

$(f+g)(2)=f(2)+g(2)=10+5=15$ $\qquad$ $(f-g)(2)=f(2)-g(2)=10-5=5$

$(f\cdot g)(2)=f(2)\cdot g(2)=10\times 5=50$ $\qquad$ $(\frac{f}{g})(2)=\frac{f(2)}{g(2)}=\frac{10}{5}=2$

یک مثال دیگر برایتان بزنم؛ اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$ آن‌گاه: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{x}\times\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}$

در این مثال، ضابطه‌ی تابع $f\cdot g$ را ساختیم؛ اما دامنه‌ی این تابع چیست؟ خب معلوم است؛ $f(x)\cdot g(x)$ زمانی تعریف شده که هم $f(x)$ و هم $g(x)$ تعریف شده باشد. $f(x)$ به ازای $x=0$ تعریف نشده و دامنه‌ی آن $\mathbb{R}-\{0\}$ است. $g(x)$ هم به ازای $x=-1$ تعریف نشده و دامنه‌ی آن $\mathbb{R}-\{-1\}$ است. پس $f(x)\cdot g(x)$ به ازای $x=0,-1$ تعریف نشده و دامنه‌ی آن $\mathbb{R}-\{0,-1\}$ است. مثل این است که از دامنه‌های دو تابع اشتراک گرفتیم.

روی مقادیر یا ضابطه‌ی دو تابع، می‌توان چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را انجام داد و توابع $f+g$، $f-g$، $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را ساخت. دامنه‌ی تابع حاصل، اشتراک دامنه‌های دو تابع است و البته برای تقسیم دو تابع، شرط صفرنشدن مخرج را هم باید اضافه کرد:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\qquad$ $D_{f+g}=D_f\cap D_g$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $\qquad$ $D_{f-g}=D_f\cap D_g$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ $\qquad$ $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad$ $D_{\frac{f}{g}}=\{x\in D_f\cap D_g \mid g(x)\neq 0\}$

برای دو تابع $f=\{(-1,4),(0,3),(1,-2),(2,0)\}$ و $g=\{(-2,-3),(-1,7),(1,0),(2,5)\}$، داریم:

$-2 \xrightarrow{f} -$, $-2 \xrightarrow{g} -3$ $\qquad$ $-1 \xrightarrow{f} 4$, $-1 \xrightarrow{g} 7$ $\qquad$ $0 \xrightarrow{f} 3$, $0 \xrightarrow{g} -$ $\qquad$ $1 \xrightarrow{f} -2$, $1 \xrightarrow{g} 0$ $\qquad$ $2 \xrightarrow{f} 0$, $2 \xrightarrow{g} 5$

$x=-2$ و $x=0$ را کنار می‌گذاریم (چون هر دو تابع f و g به ازای آن‌ها تعریف نشده، یعنی عضو $D_f\cap D_g$ نیست)؛ حالا:

$f+g=\{(-1,4+7),(1,-2+0),(2,0+5)\}=\{(-1,11),(1,-2),(2,5)\}$

$f-g=\{(-1,4-7),(1,-2-0),(2,0-5)\}=\{(-1,-3),(1,-2),(2,-5)\}$

$f\cdot g=\{(-1,4\times 7),(1,-2\times 0),(2,0\times 5)\}=\{(-1,28),(1,0),(2,0)\}$

در $\frac{f}{g}$، $x=1$ از دامنه کنار می‌رود، چون $g(1)=0$. ببینید: $\frac{f}{g}=\{(-1,\frac{4}{7}),(1,\frac{-2}{0}),(2,\frac{0}{5})\}=\{(-1,\frac{4}{7}),(2,0)\}$

در $\frac{g}{f}$، $x=2$ از دامنه کنار می‌رود، چون $f(2)=0$. ببینید: $\frac{g}{f}=\{(-1,\frac{7}{4}),(1,\frac{0}{-2}),(2,\frac{5}{0})\}=\{(-1,\frac{7}{4}),(1,0)\}$

اگر $f(x)=\begin{cases}3x^2-1 & x\le -2\\ \sqrt{x+2} & -2<x\end{cases}$ **و** $g(x)=\frac{1-3x}{1-2x}$ **باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.**

الف) $(f+g)(-1)$ **ب)** $(f-g)(-3)$ **ج)** $(f\cdot g)(7)$ **د)** $(\frac{f}{g})(0)$

الف) $(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=\sqrt{-1+2}+\frac{1-3(-1)}{1-2(-1)}=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$

ب) $(f-g)(-۳)=f(-۳)-g(-۳)=(۳(-۳)^۲-۱)-\frac{۱-۳(-۳)}{۱-۲(-۳)}=۲۶-\frac{۱۰}{۷}=\frac{۱۷۲}{۷}$

ج) $(f\cdot g)(۷)=f(۷)\cdot g(۷)=\sqrt{۷+۲}\times\frac{۱-۳\times ۷}{۱-۲\times ۷}=۳\times\frac{۲۰}{۱۳}=\frac{۶۰}{۱۳}$

د) $(\frac{f}{g})(۰)=\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{\sqrt{۰+۲}}{\frac{۱-۳\times ۰}{۱-۲\times ۰}}=\sqrt{۲}$

تمرین

۴۶- اگر $f=\{(-۲,۳),(-۱,۲),(۰,-۴),(۱,۰),(۳,۵)\}$ **و** $g=\{(-۳,۵),(-۱,۱),(۰,۶),(۱,۳)\}$ **باشد، توابع زیر را بیابید.**

الف) $f+g$ **ب)** $۲f-g$ **ج)** $f-f\cdot g$ **د)** $\frac{f}{g}+\frac{g}{f}$

۴۷- اگر $f=\{(-۷,۰),(-۲,۳),(-۱,۳),(۱,۶),(۲,۴)\}$ **و** $g(x)=\sqrt{\frac{۲-x-x^۲}{x+۳}}$ **باشد، تابع** $\frac{f}{g}$ **چیست؟**

اگر $f(x)=\frac{x+۳}{x-۱}$ **و** $g(x)=\frac{\sqrt{-x}}{x^۲-۱}$**، دامنه و ضابطه‌ی توابع** $f\pm g$**،** $f\cdot g$**،** $\frac{f}{g}$ **و** $\frac{g}{f}$ **را بیابید.**

$D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ (چون باید $x-۱\neq ۰$) و $D_g=(-\infty,۰]-\{-۱\}$ (چون باید $-x\leq ۰$، یعنی $x\leq ۰$ و هم‌چنین $x^۲-۱\neq ۰$، یعنی $x\neq\pm ۱$). پس:

$$D_f\cap D_g=(-\infty,۰]-\{-۱,۱\}=(-\infty,۰]-\{-۱\}=(-\infty,-۱)\cup(-۱,۰]\Rightarrow D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\cdot g}=(-\infty,-۱)\cup(-۱,۰]$$

$g(x)$ به ازای $x=۰$ صفر می‌شود و باید از $D_f\cap D_g$ حذف شود: $D_{\frac{f}{g}}=\{x\in D_f\cap D_g\mid g(x)\neq ۰\}=(-\infty,-۱)\cup(-۱,۰)$

$f(x)$ به ازای $x=-۳$ صفر می‌شود و باید از $D_f\cap D_g$ حذف شود: $D_{\frac{g}{f}}=\{x\in D_f\cap D_g\mid f(x)\neq ۰\}=(-\infty,-۳)\cup(-۳,-۱)\cup(-۱,۰]$

حالا ضابطه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x+۳}{x-۱}+\frac{\sqrt{-x}}{x^۲-۱}=\frac{(x+۳)(x+۱)+\sqrt{-x}}{x^۲-۱}=\frac{x^۲+۴x+۳+\sqrt{-x}}{x^۲-۱}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+۳}{x-۱}-\frac{\sqrt{-x}}{x^۲-۱}=\frac{(x+۳)(x+۱)-\sqrt{-x}}{x^۲-۱}=\frac{x^۲+۴x+۳-\sqrt{-x}}{x^۲-۱}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{x+۳}{x-۱}\times\frac{\sqrt{-x}}{x^۲-۱}=\frac{(x+۳)\sqrt{-x}}{(x-۱)(x^۲-۱)}=\frac{(x+۳)\sqrt{-x}}{(x-۱)^۲(x+۱)}$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+۳}{x-۱}\div\frac{\sqrt{-x}}{x^۲-۱}=\frac{x+۳}{x-۱}\times\frac{x^۲-۱}{\sqrt{-x}}=\frac{x+۳}{\cancel{x-۱}}\times\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\sqrt{-x}}=\frac{(x+۳)(x+۱)}{\sqrt{-x}}=\frac{x^۲+۴x+۳}{\sqrt{-x}}$$

$$(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{-x}}{x^۲-۱}\div\frac{x+۳}{x-۱}=\frac{\sqrt{-x}}{x^۲-۱}\times\frac{x-۱}{x+۳}=\frac{\sqrt{-x}}{(x+۱)\cancel{(x-۱)}}\times\frac{\cancel{x-۱}}{x+۳}=\frac{\sqrt{-x}}{(x+۱)(x+۳)}=\frac{\sqrt{-x}}{x^۲+۴x+۳}$$

تمرین

۴۸- اگر $f(x)=x^۲-۱$ **و** $g(x)=\frac{x}{x+۱}$**، نمودار تابع** $f\cdot g$ **را رسم کنید.**

۴۹- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{x^۳-۳x^۲}{x+۴}}$ **و** $g(x)=\frac{x^۲-۱۶}{\sqrt{۵-|x|}}$ **باشد، دامنه‌ی توابع** $\frac{f}{g}$ **و** $\frac{g}{f}$ **را بیابید.**

۵۰- فرض کنید $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x}}$ **و** $g(x)=\sqrt{۱+\sqrt{۱-x}}$**؛ در این صورت:**

الف) دامنه‌ی تابع $f-g$ **چیست؟** **ب) مقادیر تابع** $f\cdot g$ **به ازای** $x=۲$ **و** $x=۳-۲\sqrt{۲}$ **چیست؟**

۵۱- اگر $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ **و** $g(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x$**، دامنه و ضابطه‌ی توابع** $f-g$ **و** $\frac{f}{g}$ **چیست؟**

موقع انجام هر عمل روی دو تابع، آدم وسوسه می‌شود اول ضابطه را پیدا کند؛ چون راحت‌تر است! اما این عادت خوبی نیست و بهتر است از حالا خودتان را عادت دهید که اول دامنه را پیدا کنید، بعد ضابطه را. این‌طوری کم‌تر دچار اشتباه می‌شوید. مثلاً اگر $f(x)=x$ **و** $g(x)=\frac{۱}{x}$ **آن‌گاه** $(f\cdot g)(x)=x\times\frac{۱}{x}=۱$ **و ممکن است بگویید دامنه‌ی تابع** $f\cdot g$ **مساوی** $\mathbb{R}$ **است (چون** $(f\cdot g)(x)=۱$**)؛ در صورتی که** $g(x)$ **در** $x=۰$ **تعریف نشده و همین باعث می‌شود** $f\cdot g$ **هم در** $x=۰$ **تعریف نشده باشد، یعنی دامنه‌ی آن** $\mathbb{R}-\{۰\}$ **است.**

اگر $f(x)=\sqrt{8-x^3}$ و $g(x)=\sqrt{x-2}$ آن‌گاه توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

$0\le 8-x^3 \Rightarrow x^3\le 2^3 \Rightarrow x\le 2 \Rightarrow D_f=(-\infty,2]$, $0\le x-2 \Rightarrow 2\le x \Rightarrow D_g=[2,+\infty)$

$D_f\cap D_g=\{2\}$، پس $D_{f-g}=\{2\}$؛ به ازای $x=2$ مقدار تابع $f-g$ را حساب می‌کنیم: $(f-g)(2)=f(2)-g(2)=\sqrt{8-2^3}+\sqrt{2-2}=0$

پس $f-g=\{(2,0)\}$. یعنی تفاضل دو تابع f و g، تابعی تک‌عضوی شد. در مورد $\frac{f}{g}$، $g(2)=0$ و در نتیجه $\frac{f(2)}{g(2)}$ قابل تعریف نیست؛ یعنی $\frac{f}{g}=\varnothing$.

تمرین

۵۲- اگر $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin 2x$، تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

۵۳- اگر $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\cot x$، نمودار تابع $f\cdot g$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$ چگونه است؟

ترکیب توابع

چند صفحه قبل بود که این مثال را با هم دیدیم: اگر $f(x)=2x+3$ آن‌گاه حاصل $f(5-x)$ چیست؟ برای جواب گفتیم باید به جای x های $f(x)$، قرار دهیم $5-x$: $f(5-x)=2(5-x)+3=10-2x+3=-2x+13$

خب می‌توانستیم مثال را این‌طوری مطرح کنیم: اگر $f(x)=2x+3$ و $g(x)=5-x$، آن‌گاه $f(g(x))$ چیست؟ باز هم برای جواب، باید به جای x های $f(x)$، قرار دهیم $g(x)$: $f(g(x))=f(5-x)=2(5-x)+3=10-2x+3=-2x+13$

مثل این است که دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با هم ترکیب کردیم و تابع مرکب $f(g(x))$ را ساختیم. خب راستش را بخواهید، $f(g(x))$ را به صورت $(fog)(x)$ هم نشان می‌دهیم.

تابع مرکب fog (اِف اُ جی!) از ترکیب دو تابع f و g به دست می‌آید طوری‌که برای نوشتن ضابطه‌ی آن، باید به جای x های $f(x)$ قرار دهیم $g(x)$: $(fog)(x)=f(g(x))$

اگر $f(x)=x^2-2x$ و $g(x)=2x+1$ باشد، ضابطه‌ی تابع fog چیست؟

$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=(2x+1)^2-2(2x+1)=(4x^2+4x+1)-(4x+2)=4x^2-1$

می‌بینم که با fog آشنا شدید! حالا آیا می‌توانید بگویید ضابطه‌ی gof چه‌طوری به دست می‌آید؟ آفرین:

ضابطه‌ی gof، از قراردادن $f(x)$ به جای x های $g(x)$ به دست می‌آید. یعنی: $(gof)(x)=g(f(x))$

در مثال قبل، ضابطه‌ی تابع gof را بیابید.

$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^2-2x)=2(x^2-2x)+1=2x^2-4x+1$

اگر $f(x)=\frac{3x+2}{x^2+1}$ و $g(x)=x+4$ باشد، $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را بیابید. آیا این دو تابع مرکب با هم مساوی‌اند؟

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+4)=\frac{3(x+4)+2}{(x+4)^2+1}=\frac{3x+14}{x^2+8x+17}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{3x+2}{x^2+1})=\frac{3x+2}{x^2+1}+4=\frac{3x+2+4x^2+4}{x^2+1}=\frac{4x^2+3x+6}{x^2+1}$$

دو تابع بالا با هم مساوی نیستند. کلاً این را بدانید که:

دو تابع f و g را ممکن است بتوان به دو صورت fog و gof ترکیب کرد؛ توابع fog و gof ربطی به هم ندارند (معمولاً با هم مساوی نیستند).

تمرین

۵۴- اگر $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}+1$ باشد، $(fog)(x)$ را بیابید.

۵۵- اگر $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ باشد، ضابطه‌ی gof را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۵۶- اگر $f(x)=5x+3$ و $g(x)=4-6x$ آن‌گاه $(fog)(1+x)-(gof)(1-x)$ را بیابید.

حالا بگویید ببینم اگر $f(x)=3x^2-6$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$ آن‌وقت $(fog)(2)$ چند است؟ می‌خواهم بدون محاسبه‌ی ضابطه‌ی fog به این سؤال جواب دهید. خب می‌نویسیم:

$$g(2)=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}\Rightarrow (fog)(2)=f(g(2))=f(\frac{2}{3})=3(\frac{2}{3})^2-6=\frac{4}{3}-6=-\frac{14}{3}$$

در واقع مثل این است که اول ۲ وارد $g(x)$ شد و $\frac{2}{3}$ بیرون آمد، بعد $\frac{2}{3}$ وارد $f(x)$ شد و $-\frac{14}{3}$ بیرون آمد. این اتفاقی است که در همه‌ی توابع مرکب می‌افتد.

در تابع مرکب fog، ابتدا x وارد g می‌شود و g(x) بیرون می‌آید؛ بعد g(x) وارد f می‌شود و f(g(x)) بیرون می‌آید:

$$x \to \boxed{g} \xrightarrow{g(x)} \boxed{f} \to f(g(x))$$

اگر $f(5)=3$ و $g(4)=5$ باشد، مقدار $(fog)(4)$ چیست؟ جواب: $(fog)(4)=f(\underbrace{g(4)}_{5})=f(5)=3$

خروجی ماشین روبه‌رو چیست و این ماشین کدام تابع مرکب را نشان می‌دهد؟ $\pi \to \boxed{\sin x} \to \boxed{\cos x} \to ?$

π وارد $\sin x$ می‌شود و $\sin\pi=0$ بیرون می‌آید، بعد $x=0$ وارد $\cos x$ می‌شود و $\cos 0=1$ بیرون می‌آید. پس خروجی، عدد ۱ است. این ماشین تابع مرکب $y=\cos(\sin x)$ را نشان می‌دهد. در واقع، اگر فرض کنیم $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$، همان $y=f(g(x))$ است. حواستان باشد که به اشتباه نگویید ضابطه‌ی تابع، $y=\sin(\cos x)$ است! چون در شکل، اول π وارد سینوس شد، در ضابطه هم اول x وارد سینوس می‌شود و درنتیجه سینوس داخل پرانتز قرار می‌گیرد.

تمرین

۵۷- اگر $f(x)=\cos x-\sin^2 x$ و $g(x)=\sqrt{3-4x}$ باشد، مقدار $(gof)(\frac{\pi}{3})$ چیست؟

۵۸- اگر خروجی ماشین مقابل مساوی ۲- باشد، مقدار ورودی چیست؟ ورودی $\to \boxed{\sqrt[3]{x}+3} \to \boxed{\frac{x-3}{\sqrt{x}}} \to$ خروجی

۵۹- الف) دو تابع مثال بزنید که ترکیب آن‌ها، تابع $y=\frac{x^2-3}{x^2+1}$ شود.

ب) دو تابع مثال بزنید که ترکیب آن‌ها، تابع $y=\frac{1}{(x-3)^5}$ شود.

قرارمان این شد که علاوه بر ضابطه‌ی توابع، به دامنه‌ی آن‌ها هم توجه کنیم. حالا می‌توانید بگویید دامنه‌ی fog را چه‌طوری می‌شود به دست آورد؟ بگذارید کمکتان کنم! دو تابع مثل $f(x)=\frac{1}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در نظر بگیرید.

$f(g(9))$ چند می‌شود؟ آفرین: $g(9)=\sqrt{9}=3\Rightarrow f(g(9)=f(3)=\frac{1}{3-2}=1$

$f(g(-1))$ چند می‌شود؟ احسنت: $g(-1)=\sqrt{-1}$: تعریف‌نشده $\Rightarrow f(g(-1))$: تعریف‌نشده

$f(g(4))$ چند می‌شود؟ مرحبا: $g(4)=\sqrt{4}=2\Rightarrow f(g(4))=f(2)=\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0}$: تعریف‌نشده

$f(g(-1))$ تعریف‌نشده بود، چون $g(x)$ به ازای $x=-1$ وجود نداشت، یعنی $(-1)\notin D_g$.

$f(g(4))$ هم تعریف‌نشده بود، چون اگرچه $g(4)$ وجود داشت اما $f(x)$ به ازای $g(4)$ وجود نداشت، یعنی $g(4)\notin D_f$.

پس یک نتیجه‌ای می‌توان گرفت: اگر $x\notin D_g$ یا $g(x)\notin D_f$، آن‌گاه $f(g(x))$ تعریف نشده است. به عبارت دیگر، زمانی $f(g(x))$ تعریف شده که هم $x\in D_g$ و هم $g(x)\in D_f$.

برای تعیین دامنه‌ی تابع fog، می‌نویسیم: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

(x باید مجوز ورود به g را داشته باشد، یعنی $x\in D_g$ و خروجی آن باید مجوز ورود به f را بگیرد، یعنی $g(x)\in D_f$)

به همین ترتیب، دامنه‌ی تابع gof، می‌شود: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

(x باید مجوز ورود به f را داشته باشد، یعنی $x\in D_f$ و خروجی آن باید مجوز ورود به g را بگیرد، یعنی $f(x)\in D_g$)

اگر $f(x)=\frac{1}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ آن‌گاه: $D_f=\mathbb{R}-\{2\}\quad,\quad D_g=[0,+\infty)$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[0,+\infty)\mid g(x)\neq 2\}=\{0\le x\mid \sqrt{x}\neq 2\}=\{0\le x\mid x\neq 4\}=[0,+\infty)-\{4\}$

اگر $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$ و $g(x)=x^2-5$ آن‌گاه ضابطه و دامنه‌ی تابع fog چیست؟

برای رسیدن به ضابطه‌ی تابع fog به جای xهای $f(x)$، قرار می‌دهیم x^2-5 (همان $g(x)$):

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2-5)=\frac{(x^2-5)-2}{(x^2-5)+1}=\frac{x^2-7}{x^2-4}$$

برای تعیین دامنه‌ی fog، می‌نویسیم: $D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}\xrightarrow{D_g=\mathbb{R}\,,\,D_f=\mathbb{R}-\{-1\}}D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)\neq -1\}$

از طرفی $g(x)=-1\Rightarrow x^2-5=-1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$، پس: $D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\pm 2\}=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

از روی ضابطه‌ی fog هم معلوم بود که باید $x^2-4\neq 0$ و در نتیجه $x\neq\pm 2$.

یک چیزی به شما می‌گویم، آویزه‌ی گوشتان کنید: دامنه‌ی توابع مرکب را همیشه از روی همین تعریف‌هایی که گفتیم تعیین کنید نه از روی ضابطه‌ی آن تابع مرکب. چون تعیین دامنه از روی ضابطه‌ی تابع مرکب، ممکن است شما را به اشتباه بیندازد. مثلاً اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$، آن‌گاه $(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x})^2=x$؛ ممکن است بگویید دامنه‌ی تابع $(fog)(x)=x$ مساوی $\mathbb{R}$ است، در حالی که: $D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[0,+\infty)\mid g(x)\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$

اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x\sqrt{x^2-4}$ آن‌گاه ضابطه و دامنه‌ی تابع gof چیست؟

ضابطه‌ی تابع gof، این است: $(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sqrt{x}\cdot\sqrt{(\sqrt{x})^2-4}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4}=\sqrt{x^2-4x}$

تعیین اشتباه (!) دامنه از روی ضابطه: $0\le x^2-4x\Rightarrow x\le 0$ یا $4\le x$ $\quad\begin{array}{ccccc} & 0 & & 4 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array}\quad\Rightarrow D_{gof}=(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$

اشتباه ما این بود که از نسخه‌ی ساده‌شده‌ی تابع استفاده کردیم! باید از $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4}$ استفاده می‌کردیم: $0\le x\quad,\quad 0\le x-4\Rightarrow 4\le x$

اشتراک $0\le x$ و $4\le x$ می‌شود $4\le x$، پس: $D_{gof}=[4,+\infty)$

تعیین دامنه‌ی تابع مرکب با استفاده از تعریف، ریسک‌های بالا را ندارد! ببینید:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}\xrightarrow{D_f=[0,+\infty)\,,\,D_g=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)}D_{gof}=\{x\in[0,+\infty)\mid f(x)\le -2 \text{ یا } 2\le f(x)\}=[4,+\infty)$$

در مورد دامنه‌ی g، گفتیم $2\le x$ یا $x\le -2$ $\Leftarrow 0\le x^2-4\Rightarrow 4\le x^2\Rightarrow$. هم‌چنین:

$$f(x)\le -2 \text{ یا } 2\le f(x)\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}\ge 0}2\le f(x)\Rightarrow 2\le\sqrt{x}\Rightarrow 4\le x$$

تمرین

۶۰- برای توابع f و g داده‌شده در زیر، دامنه و ضابطه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{3x+1}$ و $g(x)=3x^2-2x$ **ب)** $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x)=\tan x$

۶۱- برای توابع $f(x)=1-3x+x^2$ و $g(x)=|x+2|$، دامنه و ضابطه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف بیابید.

زمانی می‌توان دو تابع را ترکیب کرد که دامنه‌ی تابع مرکبِ حاصل، تهی نشود. بنابراین ممکن است دو تابع f و g را نتوان به هر دو صورت fog و gof ترکیب کرد.

مثلاً اگر $f(x)=\sqrt{-x}$ و $g(x)=x^2+1$، با توجه به این‌که $D_f=(-\infty,0]$ و $D_g=\mathbb{R}$، داریم:

$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+1\le 0\}\xrightarrow{1\le x^2+1}D_{fog}=\varnothing\Rightarrow$ ترکیب f و g به صورت fog ممکن نیست

$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,0]\mid\sqrt{-x}\in\mathbb{R}\}=(-\infty,0]\quad,\quad(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{-x})=(\sqrt{-x})^2+1=-x+1$

تمرین

۶۲- اگر $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ **و** $g(x)=-1-\sin\frac{1}{x^2}$ **آن‌گاه:**

الف) ضابطه و دامنه‌ی تابع gof **چیست؟** **ب) آیا این دو تابع را می‌توان به صورت** fog **ترکیب کرد؟**

یک تابع می‌تواند با خودش ترکیب شود؟ بله که می‌تواند. کافی است در تعریف fog **و** D_{fog}**، به جای** g **بگذاریم** f**؛ نتیجه این می‌شود:** $(fof)(x)=f(f(x))\quad,\quad D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$

اگر $f(x)=\sin\pi x$ **باشد، مقدار** $(fof)(\frac{1}{6})$ **چیست؟**

$f(\frac{1}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$، پس: $(fof)(\frac{\pi}{6})=f(f(\frac{\pi}{6}))=f(\frac{1}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$

اگر $f(x)=\frac{x}{x+3}$ **باشد، تابع** fof **را تشکیل دهید. (دامنه و ضابطه‌ی تابع را معلوم کنید)**

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}\xrightarrow{D_f=\mathbb{R}-\{-3\}}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq -3,\frac{x}{x+3}\neq -3\}=\mathbb{R}-\{-3,-\frac{9}{4}\}$$

(اگر $\frac{x}{x+3}=-3$ آن‌گاه $x=-3x-9$ و در نتیجه $x=-\frac{9}{4}$) ضابطه‌ی fof هم این است:

$$f(x)=\frac{x}{x+3}\Rightarrow (fof)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{x+3}}{\frac{x}{x+3}+3}=\frac{\frac{x}{x+3}}{\frac{x+3x+9}{x+3}}=\frac{x}{4x+9}$$

تمرین

۶۳- اگر $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}}$ **باشد، مقدار** $(fof)(9)$ **چیست؟**

۶۴- برای تابع $\begin{cases} f:[-3,3]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x(2x-1)\end{cases}$ **دامنه و ضابطه‌ی تابع** fof **را بیابید.**

۶۵- اگر $f(x)=\frac{x}{x-1}$ **باشد، نمودار تابع** fof **را رسم کنید.**

بعضی وقت‌ها به جای آن‌که دو تابع را داشته باشیم و آن‌ها را ترکیب کنیم، تابع مرکب به همراه یکی از توابع را داریم و تابع دیگر را می‌خواهیم. مثلاً ضابطه‌ی f **و** fog **را داریم و ضابطه‌ی** g **را می‌خواهیم.**[1]
در این حالت، به جای x **های** $f(x)$ **قرار می‌دهیم** $g(x)$**، یعنی** $f(g(x))$ **را به دست می‌آوریم. بعد،** $f(g(x))$**ی را که خودمان برحسب** $g(x)$ **به دست آورده‌ایم، با** $f(g(x))$**ی که سؤال داده مساوی قرار می‌دهیم و ضابطه‌ی** $g(x)$ **را حساب می‌کنیم.**

اگر $f(x)=2x+1$ **و** $(fog)(x)=x^2-1$ **باشد،** $g(x)$ **چیست؟**

$f(g(x))$ را خودمان به دست می‌آوریم: $f(x)=2x+1\Rightarrow f(g(x))=2g(x)+1$

اما سؤال گفته $(fog)(x)=f(g(x))=x^2-1$، پس: $2g(x)+1=x^2-1\Rightarrow 2g(x)=x^2-2\Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}x^2-1$

تمرین

۶۶- اگر $f(x)=2x-a$ **و** $g(x)=ax^2+bx+c$ **باشد،** a **،** b **و** c **را طوری تعیین کنید که داشته باشیم** $(fog)(x)=4x^2+3x-5$.

۶۷- اگر $g(x)=\frac{x+1}{2x-3}$ **و** $(gof)(x)=x^2$ **باشد، مقدار** $f(2)$ **چیست؟**

در مثال بعدی، توابعی را ترکیب می‌کنیم که به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بیان شده‌اند.

۱- این حالت جزء تمرین‌های کتاب درسی و نمونه سؤالات امتحان نهایی است؛ حالتی که g و fog را داریم و f را می‌خواهیم، در قسمت بعدی این فصل بررسی می‌شود.

اگر $f=\{(-۲,-۶),(-۱,۳),(۱,۲)\}$ و $g=\{(۳,۱),(-۱,-۲)\}$ باشد، توابع fog و gof را تشکیل دهید.

برای تشکیل fog، از مؤلفه‌های اول g استفاده می‌کنیم: $-۱ \xrightarrow{g} -۲ \xrightarrow{f} -۶$ $\quad$ $۳ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۲$

ترجمه: g عدد ۳ را به ۱ می‌برد ($(۳,۱)\in g$) و f عدد ۱ را به ۲ می‌برد ($(۱,۲)\in f$)، پس fog عدد ۳ را به ۲ می‌برد ($(۳,۲)\in fog$). مورد دوم هم به همین صورت ترجمه می‌شود! خلاصه این‌که: $fog=\{(۳,۲),(-۱,-۶)\}$

برای تشکیل gof، از مؤلفه‌های اول f استفاده می‌کنیم: $۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} -$ $\quad$ $-۱ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} ۱$ $\quad$ $-۲ \xrightarrow{f} -۶ \xrightarrow{g} -$

در مورد اولی و سومی، چون ۶- و ۲ (خروجی‌های f) در دامنه‌ی g نبودند، در نهایت چیزی خارج نشد. پس: $gof=\{(-۱,۱)\}$

تمرین

۶۸- اگر $f=\{(-۴,۰),(-۲,۱),(۰,۳),(۱,۵),(۳,۱)\}$ و $g=\{(۲,-۴),(-۱,۱),(۰,۱),(۳,-۲)\}$ باشد، توابع زیر را بیابید.

الف) fog $\quad$ **ب)** gof $\quad$ **ج)** fof $\quad$ **د)** gog

در ترکیب توابع چندضابطه‌ای باید مدام چک کنید که حدود x چیست و از کدام ضابطه باید استفاده کنید.

اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & ۰\le x \\ \sqrt{۱-x} & x<۰ \end{cases}$ باشد، مقدار $(fof)(-۸)$ چیست؟

$-۸<۰$، پس $f(-۸)=\sqrt{۱-(-۸)}=\sqrt{۹}=۳$؛ حالا: $(fof)(-۸)=f(f(-۸))=f(۳) \xrightarrow{۰\le ۳} =۲\times۳+۱=۷$

تمرین

۶۹- اگر $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-x^۲} & ۰\le x\le ۱ \\ \dfrac{x+۲}{x} & x<۰ \text{ یا } ۱<x \end{cases}$ باشد، مقدار تابع fof در هر یک از نقاط زیر چیست؟

الف) $x=\frac{۴}{۵}$ $\quad$ **ب)** $x=\frac{۵}{۳}$ $\quad$ **ج)** $x=-۴$

برای توابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x+۳}{x+۲}$، جدول زیر را ببینید:

عمل	تابع	ضابطه	دامنه
+	$f+g$	$y=\frac{۱}{x-۱}+\frac{x+۳}{x+۲}=\frac{x^۲+۳x-۱}{x^۲+x-۲}$	$D_f\cap D_g=(\mathbb{R}-\{۱\})\cap(\mathbb{R}-\{-۲\})=\mathbb{R}-\{۱,-۲\}$
−	$f-g$	$y=\frac{۱}{x-۱}-\frac{x+۳}{x+۲}=\frac{-x^۲-x+۵}{x^۲+x-۲}$	$D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۱,-۲\}$
×	$f\cdot g$	$y=\frac{۱}{x-۱}\times\frac{x+۳}{x+۲}=\frac{x+۳}{x^۲+x-۲}$	$D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۱,-۲\}$
÷	$\frac{f}{g}$	$y=\frac{۱}{x-۱}\div\frac{x+۳}{x+۲}=\frac{۱}{x-۱}\times\frac{x+۲}{x+۳}=\frac{x+۲}{x^۲+۲x-۳}$	$\{x\in D_f\cap D_g \mid g(x)\ne ۰\}=\mathbb{R}-\{۱,-۲,-۳\}$
÷	$\frac{g}{f}$	$y=\frac{x+۳}{x+۲}\div\frac{۱}{x-۱}=\frac{x+۳}{x+۲}\times(x-۱)=\frac{x^۲+۲x-۳}{x+۲}$	$\{x\in D_f\cap D_g \mid f(x)\ne ۰\}=\mathbb{R}-\{۱,-۲\}$
o	fog	$y=f(g(x))=\frac{۱}{\frac{x+۳}{x+۲}-۱}=\frac{۱}{\frac{x+۳-x-۲}{x+۲}}=x+۲$	$\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\ne -۲ \mid g(x)\ne ۱\}=\mathbb{R}-\{-۲\}$
o	gof	$y=g(f(x))=\frac{\frac{۱}{x-۱}+۳}{\frac{۱}{x-۱}+۲}=\frac{\frac{۱+۳x-۳}{x-۱}}{\frac{۱+۲x-۲}{x-۱}}=\frac{۳x-۲}{۲x-۱}$	$\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\ne ۱ \mid f(x)\ne -۲\}=\mathbb{R}-\{۱,\frac{۱}{۲}\}$

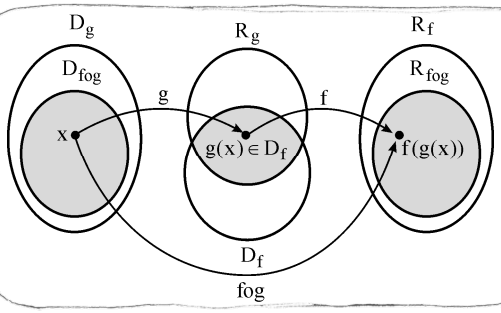
هدف از مثال بالا این بود که یک بار عملیات اصلی روی توابع و ترکیب توابع را برایتان جمع‌بندی کنم!

تمرین

۷۰- اگر $f(x)=۳x+۴$ **و** $g(x)=\frac{۱}{x}$ **باشد، مقدار توابع زیر را در** $x=۲$ **حساب کنید.**

الف) $\frac{f}{g}-gof$ **ب)** $(f+۲g)of$

این مبحث را با نمودار روبه‌رو از کتاب درسی تمام می‌کنم.
نمودار روبه‌رو صرفاً جهت حُسن ختام است و ارزش دیگری ندارد!
موفق و پیروز باشید و سربلند.



برد تابع $f(x)=x^2+4x+6$ چیست؟

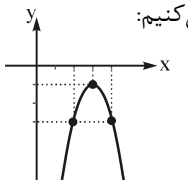
برد تابع f مساوی $[2,+\infty)$ است. ببینید: $f(x)=x^2+4x+6=(x^2+4x+4)+2=(x+2)^2+2$

روال کار این‌طوری بود که گفتیم نصف ضریب x مساوی ۲ است که مربع آن می‌شود ۴. پس x^2+4x+4 مربع کامل است و آن را جدا کردیم.

حالا $(x+2)^2$ همیشه نامنفی است، یعنی حداقل صفر است؛ پس $(x+2)^2+2$ حداقل ۲ است: $0\le(x+2)^2 \Rightarrow 2\le(x+2)^2+2 \Rightarrow 2\le f(x)$

نمودار تابع $f(x)=-2x^2+12x-19$ را رسم کنید و پایین‌ترین یا بالاترین نقطه‌ی نمودار را نیز مشخص نمایید.

دلتای $-2x^2+12x-19$ منفی است، پس نمودار محور xها را قطع نمی‌کند و بر آن مماس نیست. در نقطه‌ی $(0,-19)$ محور yها را قطع می‌کند. چون ضریب x^2 منفی است، سهمی رو به پایین است و تابع بیشترین مقدار دارد. بالاترین نقطه‌ی نمودار را پیدا می‌کنیم:



$$f(x)=-2x^2+12x-19=-2(x^2-6x)-19$$

ضریب x مساوی ۶- است، نصف آن می‌شود ۳- که وقتی به توان ۲ می‌رسد، می‌شود ۹. پس می‌نویسیم:

$$f(x)=-2(x^2-6x+9)-1=-2(x-3)^2-1$$

اگر $x=3$ آن‌گاه $-2(x-3)^2$ مساوی صفر و در نتیجه مقدار تابع ۱- می‌شود. در سایر نقاط، $-2(x-3)^2$ منفی و در نتیجه مقدار تابع از ۱- کم‌تر است، پس $(3,-1)$ بالاترین نقطه‌ی نمودار است. این نقطه را روی نمودار مشخص می‌کنیم. حالا محض احتیاط، دو نقطه‌ی دیگر از نمودار را هم پیدا می‌کنیم؛ $f(2)=f(4)=-3$، پس نقاط $(2,-3)$ و $(4,-3)$ هم روی نمودارند.

۱۰۶- برد تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ کدام بازه‌ی زیر است؟ *(خارج از کشور ۸۹)*

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,0)$

۱۰۷- کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\begin{cases}(x+5)^2-4 & x>1\\ |x+1|-2 & -1\le x\le 1\\ (x+3)^2-3 & x<-1\end{cases}$ برابر است با:

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۵ ۴) ۴-

برویم سراغ چهار عمل اصلی روی توابع

۱۰۸- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

۱) $(-3,+\infty)-\{1\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۳) $(-3,+\infty)$ ۴) $(-3,+\infty)-\{0\}$

برای انجام چهار عمل اصلی روی توابع چندضابطه‌ای و پیداکردن ضابطه‌ی حاصل، ابتدا باید با توجه به مرز ضابطه‌ها، فواصل یا مجموعه‌های مختلفی از x را در نظر بگیرید که هر دو تابع در آن دارای یک ضابطه‌اند؛ سپس در هر یک از آن محدوده‌ها، عمل موردنظر را انجام دهید.

اگر $f(x)=\begin{cases}3x+2 & 2<x\\ 1-|x| & x\le 2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}5x & x\le 1\\ 6 & 1<x\end{cases}$ باشد، ضابطه‌ی $f-g$ را بیابید.

مرز ضابطه‌ها در تابع f، نقطه‌ی $x=2$ و در تابع g، نقطه‌ی $x=1$ است؛ پس سه حالت را جدا بررسی می‌کنیم: قبل از $x=1$، بین $x=1$ و $x=2$، بعد از $x=2$. در هر حالت کمی تأمل می‌کنیم که از کدام ضابطه‌ها باید استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}&x\le 1 \Rightarrow f(x)-g(x)=(1-|x|)-5x=-5x-|x|+1\\ &1<x\le 2 \Rightarrow f(x)-g(x)=(1-|x|)-6=-|x|-5\\ &2<x \Rightarrow f(x)-g(x)=(3x+2)-6=3x-4\end{aligned} \Rightarrow (f-g)(x)=\begin{cases}-5x-|x|+1 & x\le 1\\ -|x|-5 & 1<x\le 2\\ 3x-4 & 2<x\end{cases}$$

فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<-2\\ 1-x & -2\le x\end{cases}$ و $g(x)=2x+1$؛ در این صورت:

الف) مقدار $(f-g^2)(-3)$ را بیابید. **ب) ضابطه‌ی تابع $f\cdot g$ را بیابید.**

الف) اگر $x<-2$ آن‌گاه $f(x)=x^2+1$؛ پس $f(-3)=(-3)^2+1=10$. هم‌چنین $g(x)=2x+1$، پس $g(-3)=2(-3)+1=-5$. حالا:

$$(f-g^2)(-3)=f(-3)-g^2(-3)=10-(-5)^2=-15$$

ب) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}(x^2+1)(2x+1) & x<-2\\(1-x)(2x+1) & -2\le x\end{cases}=\begin{cases}2x^3+x^2+2x+1 & x<-2\\-2x^2+x+1 & -2\le x\end{cases}$

در تمرین بالا، به توانِ توابع برخوردید؛ در f^n، ضابطه به توان n می‌رسد. یعنی $y=f(x)$ به $y=(f(x))^n$ تبدیل می‌شود. $(f(x))^n$ را به صورت $f^n(x)$ نیز می‌توان نمایش داد. مثلاً اگر $f(x)=x+1$ آن‌گاه $f^2(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1$. یا اگر $g(x)=\sin x$ آن‌گاه ضابطه‌ی g^3 به صورت $y=\sin^3 x$ است.

۱۰۹- اگر $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\x-1 & x\le 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x & x\ge -2\\x-2 & x<-2\end{cases}$ باشد، حاصل $(f+2g)(x)$ به ازای $x=f(0)$ چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴- ۳) ۶- ۴) ۳

تست‌هایی که در آن‌ها دو تابع را می‌دهند و ترکیب آن‌ها را می‌خواهند، آسان است. ببینید:

۱۱۰- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ و $g(f(a))=5$ باشد، عدد a کدام است؟ *(سراسری ۹۱)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۱- اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $f=\{(x,2x-1),x\in A\}$ باشد، تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟ *(سراسری ۸۳)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۲- اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x\sqrt{1-x^2}$ باشد، مقدار $(gof)(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟ *(سراسری ۸۱)*

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

۱۱۳- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x)=\tan x$ باشد، ضابطه‌ی تابع $(fog)(x)$ در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ برابر کدام است؟ *(سراسری ۸۰)*

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۱۱۴- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2+2x+1$ باشد، حاصل $fog(1-\sqrt{2})-gof(1-\sqrt{2})$ کدام است؟ *(سراسری ۸۹)*

۱) $4(1-\sqrt{2})$ ۲) $4(\sqrt{2}-1)$ ۳) ۴ ۴) $4\sqrt{2}$

۱۱۵- اگر $f(x)=|x|-x$ باشد، ضابطه‌ی تابع $(fof)(x)$ برابر کدام است؟ *(سراسری ۸۳)*

۱) x ۲) $|x|$ ۳) $x+|x|$ ۴) صفر

۱۱۶- اگر $f(x)=\sqrt{x+2|x|}$ باشد، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟ *(سراسری ۸۸)*

۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۱۷- اگر $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$ باشد، مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟ *(خارج از کشور ۸۸)*

۱) تعریف نشده ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

۱۱۸- اگر $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$، مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار می‌گیرد، برابر کدام بازه است؟

۱) $(-4,1)$ ۲) $(-3,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-1,4)$ *(سراسری ۹۱)*

۱۱۹- اگر $f(x)=\frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f(x^2)-2f(x)+1$ کدام است؟ *(خارج از کشور ۸۹)*

۱) $\frac{1}{1-x^2}$ ۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ ۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ ۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۱۲۰- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2(2-x)^2$، حاصل $f(1+x)-f(1-x)$ کدام است؟ *(سراسری ۸۵)*

۱) صفر ۲) $4x$ ۳) $2x^2$ ۴) $4x^2$

در ترکیب توابع چندضابطه‌ای، مدام چِک کنید که از کدام ضابطه باید استفاده کنید.

۱۲۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x-\sqrt{x+4} & x>3\\2x+3 & x\le 3\end{cases}$ مقدار $f(f(5))+f(f(1))$ کدام است؟ *(سراسری ۹۰)*

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۲۲- اگر $f(x)=\begin{cases}2 & x\ge 0\\ -2 & x<0\end{cases}$ **و** $g(x)=\begin{cases}x+1 & x\ge 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$ **باشند، حاصل** $g(f(\tan 200^\circ+\cot 200^\circ))$ **کدام است؟**

۱) -3 ۲) 3 ۳) 1 ۴) -1

۱۲۳- اگر $f(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x\le 1\end{cases}$ **باشد، حاصل** $f(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x})+f(1-\cos^2 x)$ **برابر است با:**

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) صفر

دامنه‌ی تابع مرکب را با استفاده از تعریف به دست آورید تا کم‌تر دچار اشتباه شوید.

۱۲۴- اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ **و** $g(x)=\frac{1}{x^2-4x}$ **باشد، دامنه‌ی تابع** gof **کدام است؟** *(خارج از کشور ۸۷)*

۱) $(0,8)\cup(8,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-\{0,8\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۴) $(0,+\infty)$

۱۲۵- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ **و** $g(x)=\tan x\ ;|x|<\frac{\pi}{2}$ **باشد، دامنه‌ی تابع** fog **، کدام است؟** *(سراسری ۸۷)*

۱) $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ ۲) $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ ۳) $[-\frac{\pi}{4},0)\cup(0,\frac{\pi}{4}]$ ۴) $[-1,0)\cup(0,1]$

یک تابع را می‌توان چندین بار با خودش ترکیب کرد.

اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ **باشد، دامنه و ضابطه‌ی تابع** fofof **چیست؟**

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow f(f(x))=f(\frac{x-1}{x+1})=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{\frac{x-1-x-1}{x+1}}{\frac{x-1+x+1}{x+1}}=\frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}}=\frac{-2}{2x}=-\frac{1}{x}$$

بنابراین:

$$(fofof)(x)=f(\underbrace{f(f(x))}_{-\frac{1}{x}})=f(-\frac{1}{x})=\frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1}=\frac{\frac{-1-x}{x}}{\frac{-1+x}{x}}=\frac{-1-x}{-1+x}=\frac{1+x}{1-x}$$

اگر از روی ضابطه تعیین علامت کنید، به احتمال زیاد اشتباه خواهید کرد. تعیین دامنه با تعریف، ایمن‌تر است:

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}\xrightarrow{D_f=\mathbb{R}-\{-1\}}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ne -1, f(x)\ne -1\}$$

$f(x)=-1\Rightarrow \frac{x-1}{x+1}=-1\Rightarrow x-1=-x-1\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$، پس $D_{fof}=\mathbb{R}-\{-1,0\}$. حالا دوباره از تعریف استفاده می‌کنیم:

$$D_{fofof}=D_{(fof)of}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_{fof}\}=\{x\in\mathbb{R}-\{-1\}\,|\,f(x)\ne -1,0\}=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$$

دقت کنید که:

$$f(x)=-1\Rightarrow x=0\quad,\quad f(x)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$

ممکن است شما به جای آن‌که fofof را به صورت (fof)of نوشته باشید، آن را به صورت fo(fof) در نظر گرفته باشید؛ این اشکالی ندارد:

$$D_{fofof}=D_{fo(fof)}=\{x\in D_{fof}\,|\,(fof)(x)\in D_f\}=\{x\,|\,x\ne 0,-1\ ,\ (fof)(x)\ne -1\}=\{x\,|\,x\ne 0,-1\ ,\ -\frac{1}{x}\ne -1\}=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$$

(از $-\frac{1}{x}=-1$ نتیجه می‌شود $x=1$)

۱۲۶- اگر $f(x)=2x+1$ **باشد، حاصل** $f(f(f(f(x))))$ **کدام است؟** *(مشابه خارج از کشور ۸۸)*

۱) $8x+7$ ۲) $16x+15$ ۳) $8x+1$ ۴) $16x+1$

۱۲۷- اگر $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & x>0\\ \sqrt{-x} & x\le 0\end{cases}$ **باشد، حاصل** $fofof(-81)$ **کدام است؟**

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $-\frac{1}{9}$

گفتیم وقتی ضابطه‌ی $f(g(x))$ **و** $f(x)$ **را داریم (تابع مرکب و تابع بیرونی) و** $g(x)$ **(تابع درونی) را می‌خواهیم، به جای** x **های** $f(x)$ **قرار می‌دهیم** $g(x)$**، یعنی خودمان** $f(g(x))$ **را برحسب** $g(x)$ **به دست می‌آوریم. سپس حاصل را با** $f(g(x))$**ی که سؤال داده مساوی قرار می‌دهیم.**

۱۲۸- اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟ *(سراسری ۸۴)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۹- اگر $f(x)=2x^2+4$ و $f(g(x))=4x^2+6x$ باشد، مقدار $g(-2)$ کدام است؟ *(خارج از کشور ۸۴)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

وقتی ضابطه‌ی $f(g(x))$ و $g(x)$ (تابع مرکب و تابع درونی) را داریم و $f(x)$ (تابع بیرونی) را می‌خواهیم، فرض می‌کنیم $t=g(x)$؛ سپس از این رابطه، x را برحسب t می‌نویسیم. در نهایت، در ضابطه‌ی $f(g(x))$، به جای $g(x)$ قرار می‌دهیم t و به جای x ها، معادلشان را برحسب t می‌نویسیم. با این کار، $f(t)$ به دست می‌آید و حالا کافی است به جای t بنویسیم x تا $f(x)$ داشته باشیم.

اگر $(fog)(x)=x^2-2x+4$ و $g(x)=x+1$ آن‌گاه $f(x)$ را به دست آورید.

تغییر متغیر: $g(x)=t \Rightarrow x+1=t \Rightarrow x=t-1$

جاگذاری: $f(g(x))=x^2-2x+4 \Rightarrow f(t)=(t-1)^2-2(t-1)+4=t^2-2t+1-2t+2+4=t^2-4t+7$

بنابراین $f(x)=x^2-4x+7$.

البته می‌توانیم تغییر متغیر را زمانی انجام دهیم که در $f(g(x))$، $g(x)$ را ظاهر کردیم:

$$f(g(x))=x^2-2x+4=(x^2-2x+1)+3=(x-1)^2+3=((x+1)-2)^2+3 \xrightarrow{g(x)=x+1} f(x+1)=((x+1)-2)^2+3$$

$$f(t)=(t-2)^2+3=t^2-4t+4+3=t^2-4t+7 \Rightarrow f(x)=x^2-4x+7$$

صورت مثال قبل را این‌گونه هم می‌شد مطرح کرد: اگر $f(x+1)=x^2-2x+4$ آن‌گاه $f(x)$ را به دست آورید.

در بعضی تست‌ها به جای آن‌که ضابطه‌ی تابع بیرونی را بخواهند، مقدار آن را در یک نقطه می‌خواهند. در این صورت، به جای t در روش تغییر متغیر، همان عدد خاص را قرار دهید.

اگر $f(x+1)=x^2-2x+4$ آن‌گاه $f(0)$ را به دست آورید.

حالا: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$، $f(x+1)=x^2-2x+4 \xrightarrow{x=-1} f(-1+1)=(-1)^2-2(-1)+4 \Rightarrow f(0)=1+2+4=7$

۱۳۰- اگر $f(x-3)=x^2-4x+5$ باشد، آن‌گاه $f(1-x)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۰)*

۱) x^2+1 ۲) x^2+3 ۳) x^2+4x+5 ۴) x^2-4x+5

۱۳۱- اگر $f(\sqrt{x})=x+\sqrt{x}$ باشد، حاصل $f(2)+f(1)$ کدام است؟

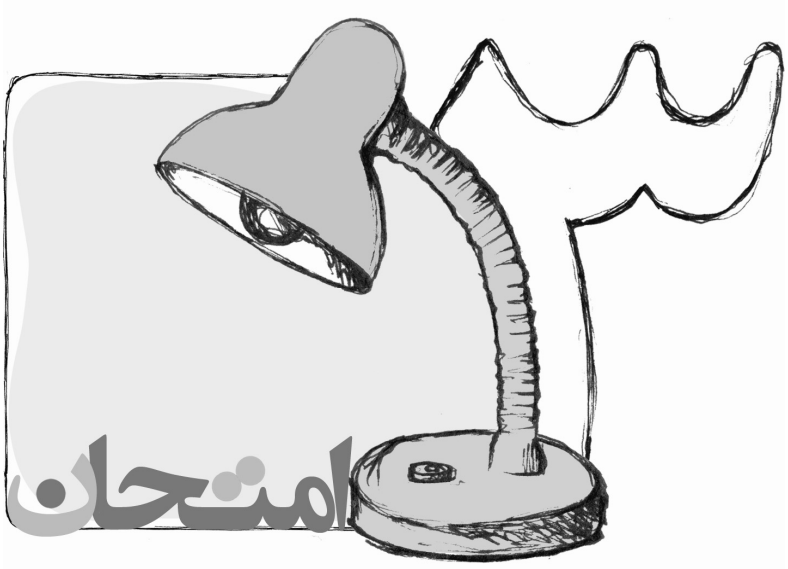
۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۳۲- اگر $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+2$ باشد، آن‌گاه $f(\sqrt{2})$ چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) $1+\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}+2$ ۴) ۵

۱۳۳- اگر $f(x^2+x)=x^4+2x^3+x^2$ باشد، آن‌گاه $f(\sqrt{3})$ چه‌قدر است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) $(3+\sqrt{3})^2$ ۴) $\sqrt{3}$



شهریور ۹۱

۱۳۴- الف) دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{x}{x^{2}-4}$ **برابر است با ..... .**

ب) معادله‌ی $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x^{2}-1}=\frac{x-2}{x+1}$ **را حل کنید.**

۱۳۵- سهمی به معادله‌ی $f(x)=ax^{2}+bx+c$ **مفروض است؛ مقادیر** a **،** b **و** c **را طوری بیابید که این سهمی محور** y **ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ و محور** x **ها را در نقطه‌ای به طول** -1 **قطع کند و از نقطه‌ی** $M(1,4)$ **نیز بگذرد.**

۱۳۶- تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^{2} & x\geq 0\\ x-3 & x<0\end{cases}$ **مفروض است.** $f(f(2))$ **را محاسبه کنید.**

۱۳۷- توابع $f(x)=x-1$ **و** $g(x)=\sqrt{x+2}$ **داده شده‌اند.**

الف) دامنه‌ی توابع $f(x)$ **و** $g(x)$ **را به دست آورید.**

ب) دامنه‌ی تابع $f\times g$ **را به دست آورید.**

ج) ضابطه‌ی gof **را بنویسید.**

۱۳۸- مقدار $\cos 75^{\circ}$ **را محاسبه کنید.**

خرداد ۹۱

۱۳۹- نامعادله‌ی $x-2\geq\frac{2x-1}{x+2}$ **را حل کنید و سپس مجموعه جواب آن را به صورت بازه بنویسید.**

۱۴۰- درستی رابطه‌ی مقابل را نشان دهید. $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

۱۴۱- اگر $f(x)=ax^{2}+bx+c$ **باشد،** a **،** b **و** c **را طوری بیابید که این سهمی محور** y **ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ و محور** x **ها را در نقطه‌ای به طول** -1 **قطع کند و از نقطه‌ی** $(1,2)$ **نیز بگذرد.**

۱۴۲- نمودار $f(x)=\begin{cases}1+x^{2} & x\geq 0\\ 1-\frac{x}{2} & x<0\end{cases}$ **را رسم کرده، سپس** $f(f(-4))$ **را به دست آورید.**

۱۴۳- اگر $f(x)=x+3$ **و** $g(x)=\sqrt{1-x}$ **دو تابع باشند:**

الف) دامنه‌ی f **و** g **را به دست آورید.**

ب) دامنه‌ی تابع gof **را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.**

ج) ضابطه‌ی fog **را بنویسید.**

دی ۹۰

۱۴۴- اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\leq x\leq 4\}$ **و** $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>2\}$ **باشند،** $A\cup B$ **و** $A\cap B$ **را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.**

۱۴۵- نامعادله‌ی $\frac{3}{x-4}+\frac{5}{x+4}>\frac{8}{x^{2}-16}$ **را حل کنید.**

۱۴۶- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sin\frac{1}{x+2}$ ب) $g(x)=\frac{-5}{\sqrt[3]{x+1}}$

۱۴۷- اگر توابع $f(x)=\sqrt{x+7}$ و $g(x)=x^2-1$ باشند، مطلوب است:

الف) محاسبه‌ی مقدار $(g+2f)(2)$ ب) تعیین دامنه‌ی f، g و دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ (با استفاده از تعریف)

۱۴۸- اگر $fog(x)=8x+12$ و $f(x)=2x+4$ باشند، تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

خرداد ۹۰

۱۴۹- نامعادله‌ی $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}\geq -1$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نشان دهید.

۱۵۰- مقادیر a و b را چنان بیابید که مجموعه‌ی $g=\{(-1,-b+3),(7,1),(-1,4-a),(7,a)\}$ یک تابع باشد.

۱۵۱- دامنه‌ی تابع $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ را به دست آورید.

۱۵۲- دو تابع $f(x)=3x^2-1$ و $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$ داده شده‌اند.

الف) ضابطه‌ی تابع gof و دامنه‌ی gof را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

ب) مقدار $(f-3g)(1)$ را محاسبه کنید.

شهریور ۹۰

۱۵۳- توابع $f(x)=-2$ و $g(x)=x^2+1$ داده شده‌اند.

الف) نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید. ب) مقدار $(f\cdot g)(-3)$ را محاسبه کنید.

۱۵۴- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورده و به صورت بازه نشان دهید:

الف) $f(x)=\log(x^2-2x-3)$ ب) $g(x)=\frac{x}{\sqrt{2x-1}}$

۱۵۵- دو تابع $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ داده شده‌اند.

الف) ضابطه‌ی تابع fog را بنویسید. ب) دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

۱۵۶- سهمی به معادله‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$ مفروض است. اگر نمودار آن، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -1 و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و داشته باشیم $f(2)=3$، مقادیر a، b و c را بیابید.

دی ۸۹

۱۵۷- اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1<x<3\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>0\}$ باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cap B$ تعریف شده‌اند مشخص کنید.

۱۵۸- نامعادله‌ی $\frac{2x^2-16}{x^2+3x+2}<1$ را حل کرده و جواب را روی محور نشان دهید.

۱۵۹- تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 1\\ x^2 & x<1\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) حاصل $f(f(-1))$ را به دست آورید.

۱۶۰- دو تابع $f(x)=x-2$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$ داده شده‌اند.

الف) ضابطه‌ی تابع مرکب gof را مشخص کنید. ب) دامنه‌ی تابع مرکب gof را تعیین کنید.

۱۶۱- اگر $f(x)=3x+5$ و $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$، دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

ج) $D_f=(-\infty,-1)$، چون: $1-x^2\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 1 \Rightarrow x\neq \pm 1 \quad , \quad 0\le \frac{x-1}{1-x^2} \Rightarrow 0\le \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow 0\le \frac{-1}{x+1} \Rightarrow x+1<0 \Rightarrow x<-1$

د) $D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$، چون باید: $\sqrt{x^2-1}\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 1 \Rightarrow x\neq \pm 1 \quad , \quad 0\le x^2-1 \Rightarrow 1\le x^2 \Rightarrow x\le -1$ یا $1\le x$

هـ) $D_f=(0,3]-\{1\}=(0,1)\cup(1,3]$، چون باید: $0\le 3-x \Rightarrow x\le 3 \quad , \quad 0\le \frac{1}{x} \Rightarrow 0<x \quad , \quad 1-\sqrt{\frac{1}{x}}\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x}\neq 1 \Rightarrow x\neq 1$

و)

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-6}=\frac{2(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2})}{x^2+x-6}=\frac{2(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(x+3)(x-2)}$$

	-3		$\frac{1}{2}$		1		2	
$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$0\le \frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-6} \Rightarrow x<-3$ یا $\frac{1}{2}\le x\le 1$ یا $2<x \Rightarrow D_f=(-\infty,-3)\cup[\frac{1}{2},1]\cup(2,+\infty)$

ز) $D_f=(0,\frac{1}{2}]$، چون باید:

$$0\le x \quad , \quad 0\le 1-2x \Rightarrow 2x\le 1 \Rightarrow x\le \frac{1}{2} \quad , \quad \sqrt{1-2x}-1\neq 0 \Rightarrow \sqrt{1-2x}\neq 1 \Rightarrow 1-2x\neq 1 \Rightarrow 2x\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$$

ح) غیرممکن $\xrightarrow{(2)} 0\le \frac{1}{x-3} \Rightarrow 3<x \ , \ 0\le \frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x-3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x-3}}\le \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x-3}\le \frac{1}{x^2} \xrightarrow{(1)} x-3\ge x^2 \Rightarrow x^2-x+3\le 0$

بنابراین $D_f=\varnothing$.

توضیح (۱): وقتی دو طرف یک نامساوی هم‌علامت‌اند، با معکوس‌کردن طرفین، جهت نامساوی عوض می‌شود. در این‌جا با توجه به $3<x$، دو طرف نامساوی مثبت‌اند.

توضیح (۲): دلتای x^2-x+3 منفی است، پس این عبارت ریشه ندارد و همیشه مثبت است (هم‌علامت با ضریب x^2).

پاسخ ۴۴

الف) $1+\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=-1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

ب) $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{2k\pi+\frac{\pi}{3}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$

ج) به خاطر $\sqrt{x}$، باید $0\le x$ و به خاطر $\frac{1}{x}$، باید $x\neq 0$. کمان کتانژانت هم نباید مضرب صحیح π باشد: $\frac{1}{x}\neq k\pi \Rightarrow x\neq \frac{1}{k\pi}$

بنابراین: $D_h=(0,+\infty)-\{\frac{1}{k\pi}\,|\,k\in\mathbb{N}\}$

پاسخ ۴۵

الف) برای مثبت‌بودن $\sqrt[3]{(x+1)^2}$ کافی است $(x+1)^2$ مثبت باشد. از طرفی $(x+1)^2$ نامنفی است (صفر یا مثبت)، پس فقط باید غیرصفر باشد؛ یعنی $x\neq -1$ و در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$.

ب) $0<9-x^2 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow -3<x<3$، پس $D_g=(-3,3)$.

پاسخ ۴۶

$-3 \xrightarrow{f} -$, $\xrightarrow{g} 5$; $-2 \xrightarrow{f} 3$, $\xrightarrow{g} -$; $-1 \xrightarrow{f} 2$, $\xrightarrow{g} 1$; $0 \xrightarrow{f} -4$, $\xrightarrow{g} 6$; $1 \xrightarrow{f} 0$, $\xrightarrow{g} 3$; $3 \xrightarrow{f} 5$, $\xrightarrow{g} -$

مورد آخر و دو مورد اول را کنار می‌گذاریم و فقط با سومی، چهارمی و پنجمی کار داریم!

الف) $f+g=\{(-1,2+1),(0,-4+6),(1,0+3)\}=\{(-1,3),(0,2),(1,3)\}$

ب) $2f-g=\{(-1,2\times 2-1),(0,2\times(-4)-6),(1,2\times 0-3)\}=\{(-1,3),(0,-14),(1,-3)\}$

ج) $f-f\cdot g=\{(-1,2-2\times 1),(0,-4-(-4)\times 6),(1,0-0\times 3)\}=\{(-1,0),(0,20),(1,0)\}$

د) $\frac{f}{g}=\{(-1,\frac{2}{1}),(0,\frac{-4}{6}),(1,\frac{0}{3})\}=\{(-1,2),(0,-\frac{2}{3}),(1,0)\} \quad , \quad \frac{g}{f}=\{(-1,\frac{1}{2}),(0,\frac{6}{-4}),(1,\frac{3}{0})\}=\{(-1,\frac{1}{2}),(0,-\frac{3}{2})\}$

دقت کنید که $\frac{g}{f}$ به ازای $x=1$ تعریف نشده، چون $f(1)=0$. حالا: $\frac{f}{g}+\frac{g}{f}=\{(-1,2+\frac{1}{2}),(0,-\frac{2}{3}-\frac{3}{2})\}=\{(-1,\frac{5}{2}),(0,-\frac{13}{6})\}$

پاسخ ۴۷

$f(-7)=0\,,\,g(-7)=\sqrt{\frac{2+7-49}{-7+3}}=\sqrt{10}\ \Rightarrow\ (\frac{f}{g})(-7)=\frac{0}{\sqrt{10}}=0$

$f(-2)=3\,,\,g(-2)=\sqrt{\frac{2+2-4}{-2+3}}=0\ \Rightarrow\ (\frac{f}{g})(-2)=\frac{3}{0}$ (تعریف‌نشده)

$f(-1)=3\,,\,g(-1)=\sqrt{\frac{2+1-1}{-1+3}}=1\ \Rightarrow\ (\frac{f}{g})(-1)=\frac{3}{1}=3$

$f(1)=6\,,\,g(1)=\sqrt{\frac{2-1-1}{1+3}}=0\ \Rightarrow\ (\frac{f}{g})(1)=\frac{6}{0}$ (تعریف‌نشده)

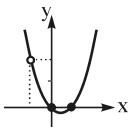
$f(2)=4\,,\,g(2)=\sqrt{\frac{2-2-4}{2+3}}=\sqrt{-\frac{4}{5}}$ (تعریف‌نشده) $\Rightarrow\ (\frac{f}{g})(2)$ تعریف‌نشده

بنابراین: $\frac{f}{g}=\{(-7,0)\,,\,(-1,3)\}$

پاسخ ۴۸

دامنه‌ی تابع f مساوی $\mathbb{R}$ و دامنه‌ی تابع g مساوی $\mathbb{R}-\{-1\}$ است؛ پس دامنه‌ی تابع $f\cdot g$ می‌شود: $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

ضابطه‌ی تابع $f\cdot g$ هم این است: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x^2-1)\times\frac{x}{x+1}=(x-1)(x+1)\times\frac{x}{x+1}=(x-1)x=x^2-x$



باید نمودار $y=x^2-x\,,\,x\neq-1$ را رسم کنیم. یعنی یک سهمی که گودی آن رو به بالاست (چون ضریب x^2 مثبت است) و محور xها را در دو نقطه به طول‌های $x=0$ و $x=1$ قطع می‌کند ($y=x(x-1)=0\ \Rightarrow\ x=0,1$). هم‌چنین نمودار در نقطه‌ی به طول $x=-1$ سوراخ است، یعنی نقطه‌ی $(-1,2)$.

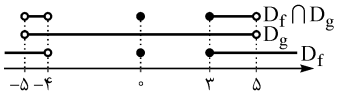
پاسخ ۴۹

$\frac{x^3-3x^2}{x+4}\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{x^2(x-3)}{x+4}\geq 0\ \Rightarrow\ x<-4$ یا $x=0$ یا $3\leq x\ \Rightarrow\ D_f=(-\infty,-4)\cup\{0\}\cup[3,+\infty)$

	-4		0		3	
$+$	$\|$	$-$	0	$-$	0	$+$

دقت کنید که $x=0$ از $x^2=0$ به دست آمد، که توان زوج دارد، به همین خاطر عبارت در آن تغییر علامت نداد. ضمناً ممکن است بعضی دوستان قبل از تعیین دامنه نوشته باشند $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-3x^2}{x+4}}=\sqrt{\frac{x^2(x-3)}{x+4}}=|x|\sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$ و بعد تعیین علامت را شروع کرده باشند. این دوستان احتمالاً $x=0$ را در دامنه نمی‌بینند، چون فقط به $\frac{x-3}{x+4}\geq 0$ فکر می‌کنند! هیچ‌وقت قبل از تعیین دامنه به ضابطه دست نزنید!

حالا دامنه‌ی g: $0<5-|x|\ \Rightarrow\ |x|<5\ \Rightarrow\ -5<x<5\ \Rightarrow\ D_g=(-5,5)$



بنابراین $D_f\cap D_g=(-5,-4)\cup\{0\}\cup[3,5)$. ببینید:

برای $\frac{f}{g}$، باید $g(x)\neq 0$ باشد؛ از طرفی $x=-4$؛ $g(x)=0\ \Rightarrow\ x^2-16=0\ \Rightarrow\ x=\pm 4$ که در $D_f\cap D_g$ دیده نمی‌شود اما $x=4$ در آن هست و باید حذف شود. یعنی: $D_{\frac{f}{g}}=\{x\in D_f\cap D_g\,|\,g(x)\neq 0\}=(-5,-4)\cup\{0\}\cup[3,4)\cup(4,5)$

هم‌چنین برای $\frac{g}{f}$ باید $f(x)\neq 0$. از طرفی: $f(x)=0\ \Rightarrow\ x^3-3x^2=0\ \Rightarrow\ x^2(x-3)=0\ \Rightarrow\ x=0$ یا $x=3$

$x=0$ و $x=3$ باید از $D_f\cap D_g$ حذف شوند. یعنی: $D_{\frac{g}{f}}=\{x\in D_f\cap D_g\,|\,f(x)\neq 0\}=(-5,-4)\cup(3,5)$

پاسخ ۵۰

الف) $D_f=[0,1]$، چون باید: $0\leq 1-x\ \Rightarrow\ x\leq 1\ \ ,\ \ 0\leq 1-\sqrt{1-x}\ \Rightarrow\ \sqrt{1-x}\leq 1\ \Rightarrow\ (\sqrt{1-x})^2\leq 1^2\ \Rightarrow\ 1-x\leq 1\ \Rightarrow\ 0\leq x$

هم‌چنین $D_g=(-\infty,1]$، چون از نامنفی‌بودن $1-x$ نتیجه می‌شود $x\leq 1$ و $1+\sqrt{1-x}$ هم که نامنفی هست. پس: $D_{f-g}=D_f\cap D_g=[0,1]$

ب) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{1-\sqrt{1-x}})(\sqrt{1+\sqrt{1-x}})=\sqrt{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}=\sqrt{1^2-(\sqrt{1-x})^2}=\sqrt{1-1+x}=\sqrt{x}$

حالا لابد می‌گویید $(f\cdot g)(2)=\sqrt{2}$! اما حواستان باشد که دامنه‌ی تابع $f\cdot g$ بازه‌ی $[0,1]$ است (همان $D_f\cap D_g$) و در نتیجه تابع $f\cdot g$ در $x=2$ تعریف نشده. در مورد $x=3-2\sqrt{2}$ این مشکل را نداریم ($\sqrt{2}\simeq 1/4$ و در نتیجه $3-2\sqrt{2}\simeq 3-2/8=0/2\in[0,1]$) و:

$(f\cdot g)(3-2\sqrt{2})=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$

پاسخ ۵۱

$D_f = D_g = \mathbb{R}$، پس $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$. برای دامنه‌ی $\frac{f}{g}$، شرط $g(x) \neq 0$ را هم باید اضافه کرد؛ $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$، چون:

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

حالا برویم سراغ ضابطه‌ها:

$$f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \quad , \quad g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

بنابراین:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x) - (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \tan x + 1$$

پاسخ ۵۲

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} \xrightarrow{D_f = D_g = \mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin 2x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(سینوس به ازای مضارب صحیح π صفر می‌شود، یعنی $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$) ضابطه‌ی $\frac{f}{g}$ را هم حساب می‌کنیم:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\cos x}{\sin 2x} = \frac{\cancel{\cos x}}{2\sin x \cancel{\cos x}} = \frac{1}{2\sin x}$$

(اگر می‌خواستیم از روی ضابطه‌ی $y = \frac{1}{\sin x}$ تعیین ضابطه کنیم، احتمالاً می‌نوشتیم $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ و در نتیجه به اشتباه $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ را به عنوان دامنه معرفی می‌کردیم!)

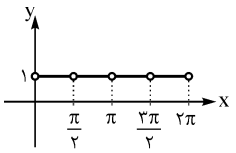
پاسخ ۵۳

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ , \ \cos x = 0 \xrightarrow{0<x<2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \ , \ \sin x = 0 \xrightarrow{0<x<2\pi} x = \pi$$

بنابراین:

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = (0, 2\pi) - \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$$

هم‌چنین $(f \cdot g)(x) = \tan x \cot x = 1$؛ پس نمودار $f \cdot g$ خط افقی $y = 1$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ است که در سه نقطه سوراخ شده:



پاسخ ۵۴

اول دقت کنید که $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$؛ حالا:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x} + 1) = ((\sqrt[3]{x} + 1) - 1)^3 = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

پاسخ ۵۵

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\tan x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$$

پاسخ ۵۶

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(4 - 6x) \xrightarrow{f(x) = 5x + 3} = 5(4 - 6x) + 3 = -30x + 23$$

حالا برای داشتن $(fog)(1+x)$، در ضابطه‌ی بالا به جای x قرار می‌دهیم $1+x$:

$$(fog)(1+x) = -30(1+x) + 23 = -30x - 7$$

هم‌چنین:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(5x + 3) \xrightarrow{g(x) = 4 - 6x} = 4 - 6(5x + 3) = -30x - 14$$

حالا برای داشتن $(gof)(1-x)$، در ضابطه‌ی بالا به جای x قرار می‌دهیم $1-x$:

$$(gof)(1-x) = -30(1-x) - 14 = 30x - 44$$

بنابراین:

$$(fog)(1+x) - (gof)(1-x) = (-30x - 7) - (30x - 44) = -60x + 37$$

پاسخ ۵۷

$f(\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = -\frac{1}{4}$، پس:

$$(gof)(\frac{\pi}{3}) = g(f(\frac{\pi}{3})) = g(-\frac{1}{4}) = \sqrt{3 - 4(-\frac{1}{4})} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

پاسخ ۵۸

از $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$ مقدار -2 خارج شده؛ ببینیم ورودی آن چه بوده:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x}} = -2 \Rightarrow x - 3 = -2\sqrt{x} \Rightarrow x + 2\sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1) = 0 \xrightarrow{0 \leq \sqrt{x}} \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

ورودی $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$ همان خروجی $\sqrt[3]{x}+3$ است؛ یعنی از $\sqrt[3]{x}+3$ مقدار ۱ خارج شده: $\sqrt[3]{x}+3=1 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=-2 \Rightarrow x=-8$

۸- ورودی ماشین است. ماشینی که طرز کار یک تابع مرکب را به ما نشان می‌دهد!

پاسخ ۵۹

الف) مثلاً اگر $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$ و $g(x)=x^2$، آن‌گاه $(fog)(x)=f(g(x))=\frac{x^2-3}{x^2+1}$.

ب) مثلاً اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=(x-3)^5$، آن‌گاه $(fog)(x)=f(g(x))=\frac{1}{(x-3)^5}$.

جواب‌های بالا منحصر به فرد نیستند و ممکن است شما توابع دیگری را مثال زده باشید.

پاسخ ۶۰

الف) $D_f=[-\frac{1}{3},+\infty)$ (چون باید $0\le 3x+1 \Rightarrow -1\le 3x \Rightarrow -\frac{1}{3}\le x$)؛ دامنه‌ی g هم که $\mathbb{R}$ است. حالا:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{1}{3}\le g(x)\}=\mathbb{R}$$

چون: $-\frac{1}{3}\le g(x) \Rightarrow -\frac{1}{3}\le 3x^2-2x \Rightarrow 0\le 3x^2-2x+\frac{1}{3} \xrightarrow{\div 3} 0\le x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9} \Rightarrow 0\le (x-\frac{1}{3})^2 \rightarrow$ همیشه برقرار است

$f(x)=\sqrt{3x+1}$ و $g(x)=3x^2-2x$، پس: $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{3(3x^2-2x)+1}=\sqrt{9x^2-6x+1}=\sqrt{(3x-1)^2}=|3x-1|$

ب) $D_g=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\}$، چون: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (مضارب صحیح و فرد پی‌دوم!)

دامنه‌ی f هم که $\mathbb{R}$ است؛ حالا: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\ne k\pi+\frac{\pi}{2} \mid \tan x\in\mathbb{R}\}=D_g=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\}$

این هم ضابطه: $(fog)(x)=f(g(x))=f(\tan x)=\frac{|\tan x|}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\frac{|\tan x|}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}=\frac{|\tan x|}{\frac{1}{|\cos x|}}=|\tan x|\cdot|\cos x|=|\frac{\sin x}{\cos x}|\cdot|\cos x|=|\sin x|$

پاسخ ۶۱

$D_f=D_g=\mathbb{R}$، پس: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

هم‌چنین: $(gof)(x)=g(f(x))=g(1-3x+x^2)=|(1-3x+x^2)+2|=|x^2-3x+3|=x^2-3x+3$

x^2-3x+3 به این دلیل بدون تغییر از قدرمطلق بیرون آمد که دلتایش منفی است ($\Delta=9-12$)، در نتیجه ریشه ندارد و همیشه مثبت است (هم‌علامت با ضریب x^2).

پاسخ ۶۲

الف) $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \xrightarrow{D_f=(0,+\infty),\ D_g=\mathbb{R}-\{0\}} D_{gof}=\{x\in(0,+\infty) \mid f(x)\in\mathbb{R}-\{0\}\}=(0,+\infty)$

($f(x)$ به ازای تمام x های دامنه‌اش، عضو $\mathbb{R}-\{0\}$ است، چون $\frac{1}{\sqrt{x}}$ هیچ‌وقت صفر نمی‌شود)

ضابطه‌ی gof هم این است: $(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{1}{\sqrt{x}})=-1-\sin(\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{x}})^2})=-1-\sin\frac{1}{\frac{1}{x}}=-1-\sin x$

ب) $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{0\} \mid 0<g(x)\}$

اما $0<g(x)\Rightarrow 0<-1-\sin\frac{1}{x^2}\Rightarrow \sin\frac{1}{x^2}<-1$ و سینوس هیچ‌وقت کم‌تر از ۱- نمی‌شود، پس $D_{fog}=\varnothing$. این یعنی ترکیب fog ممکن نیست.

پاسخ ۶۳

$f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}}$، پس $f(9)=\frac{1+\sqrt{9}}{\sqrt{9-5}}=\frac{4}{2}=2$؛ در نتیجه: $(fof)(9)=f(f(9))=f(2)=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2-5}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{-3}} \rightarrow$ تعریف‌نشده

پاسخ ۶۴

$f(x)=x(2x-1)=2x^2-x$، بنابراین ضابطه‌ی fof به صورت زیر است:

$$(fof)(x)=f(f(x))=f(2x^2-x)=2(2x^2-x)^2-(2x^2-x)=2(4x^4-4x^3+x^2)-2x^2+x=8x^4-8x^3+x$$

$D_f=[-3,3]$، پس: $D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{x \mid -3\le x\le 3,\ -3\le f(x)\le 3\}=[-1,\frac{3}{2}]$

دقت کنید که: $-3\le f(x) \Rightarrow -3\le 2x^2-x \Rightarrow 0\le 2x^2-x+3 \rightarrow$ همیشه برقرار است

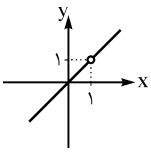
(دلتای $2x^2 - x + 3$ منفی است: $\Delta = 1 - 24$، پس این عبارت صفر نمی‌شود و هم‌علامت با ضریب x^2 است، یعنی مثبت)

$$f(x) \le 3 \Rightarrow 2x^2 - x \le 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 \le 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \le 0 \Rightarrow (x+1)(x-\frac{3}{2}) \le 0 \Rightarrow -1 \le x \le \frac{3}{2}$$

	-1		$\frac{3}{2}$	
$+$	0	$-$	0	$+$

پاسخ ۶۵

$$(fof)(x) = f(f(x)) = f(\frac{x}{x-1}) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = x$$



اما یادتان نرود دامنه را هم تعیین کنید؛ تعیین دامنه با استفاده از تعریف، ایمن‌تر است:

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \ne 1 \mid \frac{x}{x-1} \ne 1\} = \{x \ne 1 \mid x \ne x - 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

($x \ne x - 1$ همیشه برقرار است) پس نمودار تابع fof خط $y = x$ است که در نقطه‌ی $x = 1$ سوراخ شده:

کلاً در توابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$، اگر a و d قرینه باشند، fof تابع همانی $y = x$ با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ است.

پاسخ ۶۶

$$f(x) = 2x - a \Rightarrow f(g(x)) = 2g(x) - a$$

اما سؤال گفته $(fog)(x) = 4x^2 + 3x - 5$، پس:

$$2g(x) - a = 4x^2 + 3x - 5 \Rightarrow 2g(x) = 4x^2 + 3x - 5 + a \Rightarrow g(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{a-5}{2}$$

از مقایسه‌ی ضابطه‌ی بالا با $g(x) = ax^2 + bx + c$، نتیجه می‌شود:

$$a = 2 \quad , \quad b = \frac{3}{2} \quad , \quad c = \frac{a-5}{2} = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$$

پاسخ ۶۷

$g(x) = \frac{x+1}{2x-3} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2f(x)-3}$، اما سؤال گفته $(gof)(x) = x^2$؛ بنابراین:

$$\frac{f(x)+1}{2f(x)-3} = x^2 \Rightarrow f(x)+1 = 2x^2f(x) - 3x^2 \Rightarrow f(x) - 2x^2f(x) = -3x^2 - 1 \Rightarrow f(x)(1-2x^2) = -3x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{-3x^2-1}{1-2x^2} = \frac{3x^2+1}{2x^2-1}$$

بنابراین $f(2) = \frac{3 \times 2^2 + 1}{2 \times 2^2 - 1} = \frac{13}{7}$.

پاسخ ۶۸

الف) $3 \xrightarrow{g} -2 \xrightarrow{f} 1$ ، $0 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 5$ ، $-1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 5$ ، $2 \xrightarrow{g} -4 \xrightarrow{f} 0$

بنابراین $fog = \{(2,0), (-1,5), (0,5), (3,1)\}$.

ب) $3 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} -$ ، $1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -$ ، $0 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} -2$ ، $-2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} -$ ، $-4 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 1$

بنابراین $gof = \{(-4,1), (0,-2)\}$.

ج) $3 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 5$ ، $1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} -$ ، $0 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 1$ ، $-2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 5$ ، $-4 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 3$

بنابراین $fof = \{(-4,3), (-2,5), (0,1), (3,5)\}$.

د) $3 \xrightarrow{g} -2 \xrightarrow{g} -$ ، $0 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{g} -$ ، $-1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{g} -$ ، $2 \xrightarrow{g} -4 \xrightarrow{g} -$

بنابراین $gog = \varnothing$.

پاسخ ۶۹

الف) $0 \le \frac{4}{5} \le 1$، پس $f(\frac{4}{5}) = \sqrt{\frac{4}{5} - (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{4}{5} - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$؛ حالا:

$$(fof)(\frac{4}{5}) = f(f(\frac{4}{5})) = f(\frac{2}{5}) \xrightarrow{0 \le \frac{2}{5} \le 1} = \sqrt{\frac{2}{5} - (\frac{2}{5})^2} = \sqrt{\frac{6}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

ب) $1 < \frac{5}{3}$، پس $f(\frac{5}{3}) = \frac{\frac{5}{3}+2}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{5}$؛ حالا:

$$(fof)(\frac{5}{3}) = f(f(\frac{5}{3})) = f(\frac{11}{5}) \xrightarrow{1 < \frac{11}{5}} = \frac{\frac{11}{5}+2}{\frac{11}{5}} = \frac{\frac{21}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{21}{11}$$

ج) $-4 < 0$، پس $f(-4) = \frac{-4+2}{-4} = \frac{1}{2}$؛ حالا:

$$(fof)(-4) = f(f(-4)) = f(\frac{1}{2}) \xrightarrow{0 \le \frac{1}{2} \le 1} = \sqrt{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

پاسخ ۷۰

الف)

$$(\frac{f}{g} - gof)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} - g(f(2)) \xrightarrow{f(2) = 3 \times 2 + 4 = 10} = \frac{10}{g(2)} - g(10) = \frac{10}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10} = 20 - 0/1 = 19/9$$

ب) $f(2) = 3 \times 2 + 4 = 10$، پس:

$$((f+2g)of)(2) = (f+2g)(f(2)) = (f+2g)(10) = f(10) + 2g(10) = (3 \times 10 + 4) + 2 \times \frac{1}{10} = 34 + 0/2 = 34/2$$

۱۰۲- گزینه‌ی «۴»

$\sqrt{x+1}$ همیشه از $\sqrt{x+3}$ کوچک‌تر است و در نتیجه زیر رادیکال همیشه منفی است. پس دامنه‌ی تابع $\varnothing$ است.

۱۰۳- گزینه‌ی «۳»

زیر رادیکال قرینه‌ی عبارتی را داریم که مربع کامل و در نتیجه نامنفی است. به عبارت دیگر، زیر رادیکال اگر صفر نباشد، منفی خواهد بود. پس دامنه‌ی تابع فقط شامل ریشه‌های عبارت زیر رادیکال یعنی اعداد ۰، ۲- و ۲ است.

۱۰۴- گزینه‌ی «۳»

$$«0 \le x^2-1 \Rightarrow 1 \le x^2 \Rightarrow 1 \le |x| \quad , \quad 0 < 4-x^2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2» \quad \Rightarrow 1 \le |x| < 2$$

۱۰۵- گزینه‌ی «۴»

دامنه‌ی تابع، بازه‌ی $[1,11)$ است. چون به خاطر لگاریتم، باید $0 < x-1$ و در نتیجه $1 < x$؛ به خاطر رادیکال هم باید:

$$0 \le 1-\log(x-1) \Rightarrow \log(x-1) \le 1 \Rightarrow \log(x-1) \le \log 10 \Rightarrow x-1 \le 10 \Rightarrow x \le 11$$

۱۰۶- گزینه‌ی «۲»

وقتی $f(x)=x^2 , x \ne 0$ تمام مقدارهای نامنفی جز صفر را اختیار می‌کند؛ یعنی تمام مقدارهای مثبت را! به ازای $x=0$ هم مقدار تابع می‌شود ۲ که چون مثبت است، قبلاً اختیار شده! پس برد تابع، مقادیر مثبت یعنی $(0,+\infty)$ است.

۱۰۷- گزینه‌ی «۱»

$$x > 1 \Rightarrow f(x)=(x+5)^2-4 > (1+5)^2-4 \Rightarrow f(x) > 32$$

$$-1 \le x \le 1 \Rightarrow f(x)=|x+1|-2=(x+1)-2=x-1 \Rightarrow -1-1 \le f(x) \le 1-1 \Rightarrow -2 \le f(x) \le 0$$

$$x < -1 \Rightarrow f(x)=(x+3)^2-3 \Rightarrow f(x) \ge 0-3=-3$$

دقت کنید که در حالت سوم یعنی وقتی $x < -1$ است، $x+3$ کوچک‌تر از $-1+3=2$ می‌شود؛ پس چون $x+3$ تمام مقادیر منفی را اختیار می‌کند، مربع آن تمام مقادیر نامنفی را می‌گیرد. بنابراین کم‌ترین مقدار تابع ۳- است (که به ازای $x=-3$ هم اتفاق می‌افتد).

۱۰۸- گزینه‌ی «۱»

$D_f = D_g = (-3,+\infty)$، پس:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \ne 0\} = \{x \in (-3,+\infty) \mid \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} \ne 0\} = \{x \in (-3,+\infty) \mid x \ne 1\} = (-3,+\infty)-\{1\}$$

۱۰۹- گزینه‌ی «۲»

اگر $x \le 0$ آن‌گاه $f(x)=x-1$، پس $f(0)=0-1=-1$. ما مقدار $(f+2g)(x)$ را به ازای $x=f(0)=-1$ می‌خواهیم: $(f+2g)(-1)=f(-1)+2g(-1)$

حاصل، $-2+2(-1)=-4$ است، چون:

$$x \le 0 \Rightarrow f(x)=x-1 \Rightarrow f(-1)=-1-1=-2 \quad , \quad -2 \le x \Rightarrow g(x)=x \Rightarrow g(-1)=-1$$

۱۱۰- گزینه‌ی «۴»

$(6,5) \in g$، پس $g(6)=5$ و در نتیجه $f(a)=6$؛ بنابراین $f(a)=a+\sqrt{a}=6$ که با امتحان‌کردن گزینه‌ها می‌فهمیم $a=4$.

۱۱۱- گزینه‌ی «۳»

$$A=\{1,2,3,4,5\} \quad , \quad f=\{(x,2x-1), x \in A\}=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9)\}$$

حالا: تعریف نشده $f(f(5))=f(9)$, تعریف نشده $f(f(4))=f(7)$, $f(f(3))=f(5)=9$, $f(f(2))=f(3)=5$, $f(f(1))=f(1)=1$

یعنی تابع fof فقط سه عضو دوتایی دارد: $fof=\{(1,1),(2,5),(3,9)\}$

۱۱۲- گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g(x)=x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow (gof)(\frac{\pi}{4})=g(f(\frac{\pi}{4}))=g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

۱۱۳- گزینه‌ی «۳»

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x)=\tan x$، پس:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\tan x)=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}=\frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}}=|\cos x|\tan x$$

در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ یعنی ربع دوم و سوم، کسینوس منفی است؛ بنابراین:

$$(fog)(x)=-\cos x\tan x=-\cos x\times\frac{\sin x}{\cos x}=-\sin x$$

۱۱۴- گزینه‌ی «۱»

$f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$، پس:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f((x+1)^2)=|(x+1)^2|=(x+1)^2 \Rightarrow (fog)(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2}+1)^2=(2-\sqrt{2})^2=4+2-4\sqrt{2}=6-4\sqrt{2}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(|x|)=(|x|+1)^2 \Rightarrow (gof)(1-\sqrt{2})=(|1-\sqrt{2}|+1)^2=(\sqrt{2}-1+1)^2=2$$

بنابراین:

$$fog(1-\sqrt{2})-gof(1-\sqrt{2})=(6-4\sqrt{2})-2=4-4\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})$$

۱۱۵- گزینه‌ی «۴»

$f(x)=|x|-x \Rightarrow f(f(x))=f(|x|-x)=||x|-x|-(|x|-x)=0$

چون اگر $x\ge 0$ آن‌گاه $f(f(x))=|x-x|-(x-x)=0$ و اگر $x<0$ آن‌گاه $f(f(x))=|-x-x|-(-x-x)=|-2x|+2x=-2x+2x=0$.

۱۱۶- گزینه‌ی «۲»

$f(x)=\sqrt{x+2|x|} \Rightarrow f(-144)=\sqrt{-144+2|-144|}=\sqrt{-144+2(144)}=\sqrt{144}=12$

بنابراین: $f(f(-144))=f(12)=\sqrt{12+2\times 12}=\sqrt{36}=6$

۱۱۷- گزینه‌ی «۱»

$f(x)=\sqrt{2-x-x^2} \Rightarrow f(-1)=\sqrt{2-(-1)-(-1)^2}=\sqrt{2}$

بنابراین: $f(f(-1))=f(\sqrt{2})=\sqrt{2-\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}-2}=\sqrt{-\sqrt{2}}$ تعریف‌نشده

۱۱۸- گزینه‌ی «۱»

$f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$، پس: $(gof)(x)=g(f(x))=g(x^2+3x)=-\frac{1}{2}(x^2+3x)+2$

حالا می‌خواهیم مقادیر gof بالای محور xها یعنی مثبت باشد:

$-\frac{1}{2}(x^2+3x)+2>0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2+3x-4<0 \Rightarrow (x+4)(x-1)<0 \Rightarrow -4<x<1 \Rightarrow x\in(-4,1)$

	-4		1	
$+$	0	$-$	0	$+$

۱۱۹- گزینه‌ی «۳»

$$f(x^2)-2f(x)+1=\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{2x}{x-1}+1=\frac{x^2-2x(x+1)+(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{x^2-2x^2-2x+x^2-1}{x^2-1}=\frac{-2x-1}{x^2-1}=\frac{2x+1}{1-x^2}$$

۱۲۰- گزینه‌ی «۱»

با توجه به این‌که $f(x)=x^2(2-x)^2$، خیلی راحت می‌شود فهمید $f(1+x)-f(1-x)=0$، چون $f(1+x)=f(1-x)$؛ ببینید:

$f(1+x)=(1+x)^2(2-1-x)^2=(1+x)^2(1-x)^2 \quad , \quad f(1-x)=(1-x)^2(2-1+x)^2=(1-x)^2(1+x)^2$

۱۲۱- گزینه‌ی «۴»

جواب، $7+2=9$ است: $f(5)=5-\sqrt{5+4}=2 \quad , \quad f(f(5))=f(2)=2\times 2+3=7 \quad , \quad f(1)=2\times 1+3=5 \quad , \quad f(f(1))=f(5)=2$

۱۲۲- گزینه‌ی «۲»

از $\tan 200^\circ+\cot 200^\circ$ نترسید؛ این‌ها فیلمشان است! 200° در ربع سوم است (بین 180° و 270°)، آن‌جا هم تانژانت و کتانژانت مثبت‌اند؛ از طرفی، $f(x)$ به ازای تمام ایکس‌های نامنفی مساوی ۲ است، پس $f(\tan 200^\circ+\cot 200^\circ)=2$. حالا: $g(f(\tan 200^\circ+\cot 200^\circ))=g(2)=2+1=3$

۱۲۳- گزینه‌ی «۴»

$\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}+1$ همیشه از ۱ بزرگ‌تر است، بنابراین $f(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x})=1$. اما $1-\cos^2 x$ هیچ‌وقت از ۱ بزرگ‌تر نمی‌شود، پس $f(1-\cos^2 x)=-1$.
با این حساب، حاصل عبارت موردنظر یعنی جمع این دو، می‌شود صفر.

۱۲۴- گزینه‌ی «۱»

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

$D_f=\mathbb{R}$، چون در واقع $f(x)=\sqrt{x+|x|}=\begin{cases}\sqrt{x+x}=\sqrt{2x} & 0\le x\\ \sqrt{x-x}=0 & x<0\end{cases}$. هم‌چنین:

$x^2-4x\ne 0 \Rightarrow x(x-4)\ne 0 \Rightarrow x\ne 0,4 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0,4\}$

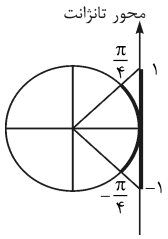
بنابراین $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\ne 0,4\}$. از طرفی به ازای تمام xهای منفی و هم‌چنین به ازای خود صفر، $f(x)$ مساوی صفر می‌شود. پس تا این‌جا باید بازه‌ی $(-\infty,0]$ را از $\mathbb{R}$ حذف کنیم. هم‌چنین: $f(x)=4 \Rightarrow \sqrt{2x}=4 \Rightarrow 2x=16 \Rightarrow x=8$

پس $x=8$ هم باید حذف شود. یعنی: $D_{gof}=(0,+\infty)-\{8\}=(0,8)\cup(8,+\infty)$

۱۲۵- گزینه‌ی «۳»

$x\ne 0 \ , \ 0\le 1-x^2 \Rightarrow x^2\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1 \Rightarrow D_f=[-1,1]-\{0\}$

در مورد $g(x)$، سؤال گفته $|x|<\frac{\pi}{2}$؛ در این فاصله هم تانژانت تعریف شده، پس $D_g=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. حالا:



$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \mid -1\le g(x)\le 1, g(x)\ne 0\}$

با توجه به شکل روبه‌رو، از $-1\le g(x)\le 1$ نتیجه می‌شود $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$. تانژانت هم در $x=0$ صفر می‌شود، پس:

$D_{fog}=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]-\{0\}=[-\frac{\pi}{4},0)\cup(0,\frac{\pi}{4}]$

۱۲۶- گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=2x+1 \Rightarrow f(f(x))=2(2x+1)+1=4x+3 \Rightarrow f(f(f(x)))=2(4x+3)+1=8x+7 \Rightarrow f(f(f(f(x))))=2(8x+7)+1=16x+15$$

۱۲۷- گزینه‌ی «۲»

$$-81\le 0 \Rightarrow f(-81)=\sqrt{-(-81)}=9 \quad , \quad f(f(-81))=f(9) \xrightarrow{0<9} =-\frac{1}{9} \quad , \quad f(f(f(-81)))=f(-\frac{1}{9}) \xrightarrow{-\frac{1}{9}<0} =\sqrt{-(-\frac{1}{9})}=\frac{1}{3}$$

۱۲۸- گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)-1}$$

اما سؤال گفته $f(g(x))=\frac{x^2+2}{x^2+1}$، پس:

$$\frac{g(x)+1}{g(x)-1}=\frac{x^2+2}{x^2+1} \xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1}=\frac{1^2+2}{1^2+1}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1)+2=3g(1)-3 \Rightarrow g(1)=5$$

۱۲۹- گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=2x^2+4 \Rightarrow f(g(x))=2g^2(x)+4$$

اما سؤال گفته $f(g(x))=4x^2+6x$، پس:

$$2g^2(x)+4=4x^2+6x \xrightarrow{x=-2} 2g^2(-2)+4=4(-2)^2+6(-2)=4 \Rightarrow 2g^2(-2)=0 \Rightarrow g(-2)=0$$

۱۳۰- گزینه‌ی «۴»

راه اول: برای رسیدن از $x-3$ به $1-t$ کافی است x را به $4-t$ تبدیل کنیم:

$$f(x-3)=x^2-4x+5 \xrightarrow{x=4-t} f(1-t)=(4-t)^2-4(4-t)+5=(16-8t+t^2)-(16-4t)+5=t^2-4t+5$$

یعنی $f(1-x)=x^2-4x+5$.

راه دوم:

$$f(x-3)=x^2-4x+5 \xrightarrow{x=0} f(-3)=0-0+5=5 \quad , \quad 1-x=-3 \Rightarrow x=4$$

در بین گزینه‌ها، فقط مقدار گزینه‌ی چهارم به ازای $x=4$ می‌شود ۵، یعنی همان نتیجه‌ی $f(-3)=5$ را می‌دهد.

۱۳۱- گزینه‌ی «۳»

راه اول:

$$f(\sqrt{x})=x+\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2+\sqrt{x} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} f(t)=t^2+t \Rightarrow f(2)+f(1)=(2^2+2)+(1^2+1)=8$$

راه دوم:

$$f(2)+f(1)=f(\sqrt{4})+f(\sqrt{1})=(4+\sqrt{4})+(1+\sqrt{1})=8$$

۱۳۲- گزینه‌ی «۱»

$$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+2=((\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+1)+1=(\sqrt{x}+1)^2+1 \xrightarrow{\sqrt{x}+1=t} f(t)=t^2+1 \Rightarrow f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2+1=3$$

۱۳۳- گزینه‌ی «۲»

یک نگاه کوچک به $x^4+2x^3+x^2$، به شما می‌فهماند که این عبارت همان $(x^2+x)^2$ است، پس به فرض $t=x^2+x$، نتیجه می‌شود: $f(t)=t^2$

بنابراین $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$. به همین سادگی!

پاسخ امتحان‌های نهایی فصل ۲

پاسخ ۱۳۴

الف) مخرج نباید صفر باشد، یعنی $x^۲-۴\neq ۰$ و در نتیجه $x^۲\neq \pm ۲$. پس دامنه‌ی تابع، $\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$ است.

ب) $\frac{x}{x-۱}+\frac{۳}{x^۲-۱}=\frac{x-۲}{x+۱} \Rightarrow \frac{x}{x-۱}+\frac{۳}{(x-۱)(x+۱)}-\frac{x-۲}{x+۱}=۰ \Rightarrow \frac{x(x+۱)+۳-(x-۲)(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=۰ \Rightarrow x^۲+x+۳-x^۲+۳x-۲=۰$

$\Rightarrow ۴x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}$

پاسخ ۱۳۵

$f(x)=ax^۲+bx+c \quad , \quad f(۰)=۱ \Rightarrow ۰+۰+c=۱ \Rightarrow c=۱$

$f(x)=ax^۲+bx+۱ \begin{cases} f(-۱)=۰ \Rightarrow a-b+۱=۰ \Rightarrow a-b=-۱ \\ f(۱)=۴ \Rightarrow a+b+۱=۴ \Rightarrow a+b=۳ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲a=۲ \Rightarrow a=۱$

$b=a+۱=۱+۱=۲$

پاسخ ۱۳۶

$۲\geq ۰ \Rightarrow f(۲)=۱-۲^۲=-۳ \quad , \quad f(f(۲))=f(-۳) \xrightarrow{-۳<۰} =-۳-۳=-۶$

پاسخ ۱۳۷

الف) دامنه‌ی تابع f که چندجمله‌ای است، مساوی $\mathbb{R}$ است. درتابع g، باید $۰\leq x+۲$ و در نتیجه $-۲\leq x$؛ یعنی دامنه‌ی تابع g مساوی $[-۲,+\infty)$ است.

ب) $D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap[-۲,+\infty)=[-۲,+\infty)$

ج) $(gof)(x)=g(f(x))=g(x-۱)=\sqrt{(x-۱)+۲}=\sqrt{x+۱}$

پاسخ ۱۳۸

$\cos ۷۵^\circ=\cos(۳۰^\circ+۴۵^\circ)=\cos ۳۰^\circ\cos ۴۵^\circ-\sin ۳۰^\circ\sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$

پاسخ ۱۳۹

$x-۲\geq\frac{۲x-۱}{x+۲} \Rightarrow x-۲-\frac{۲x-۱}{x+۲}\geq ۰ \Rightarrow \frac{(x-۲)(x+۲)-(۲x-۱)}{x+۲}\geq ۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۲x-۳}{x+۲}\geq ۰ \Rightarrow \frac{(x+۱)(x-۳)}{x+۲}\geq ۰$

$\Rightarrow -۲<x\leq -۱$ یا $۳\leq x$

برای فهمیدن جواب نامعادله، $\frac{(x+۱)(x-۳)}{x+۲}$ را تعیین علامت کردیم؛ این‌طوری:

	-۲		-۱		۳	
$-$	$\Vert$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

اگر بخواهیم مجموعه جواب را به کمک بازه‌ها نشان دهیم، اجتماع دو بازه را خواهیم داشت: $(-۲,-۱]\cup[۳,+\infty)$

پاسخ ۱۴۰

کلاً $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$، پس:

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)-(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)=۲\sin\beta\cos\alpha$

پاسخ ۱۴۱

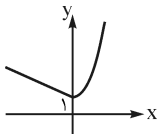
$f(x)=ax^۲+bx+c$ و می‌خواهیم این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند؛ یعنی $f(۰)=۴$: $a(۰)^۲+b(۰)+c=۴ \Rightarrow c=۴$

محور x ها را هم در نقطه‌ای به طول ۱- باید قطع کند، یعنی $f(-۱)=۰$: $a(-۱)^۲+b(-۱)+c=۰ \xrightarrow{c=۴} a-b=-۴$

از نقطه‌ی (۱,۲) هم که می‌گذرد، پس $f(۱)=۲$: $a(۱)^۲+b(۱)+c=۲ \xrightarrow{c=۴} a+b=-۲$

حالا با جمع دو رابطه‌ی آخر، به $۲a=-۶$ می‌رسیم، پس $a=-۳$. با جاگذاری $a=-۳$ در $a+b=-۲$ هم نتیجه می‌شود $b=۱$.

پاسخ ۱۴۲



نمودار $y=۱+x^۲, x\geq ۰$ همان نمودار $y=x^۲$ است که یک واحد رفته بالا و سمت چپ محور y هایش حذف شده. نمودار $y=۱-\frac{x}{۲}, x<۰$ هم همان نمودار $y=-x$ (نیمساز نواحی دوم و چهارم) است که به خاطر ضریب $\frac{۱}{۲}$ خوابیده‌تر شده، یک واحد رفته بالا و سمت راست محور y هایش حذف شده.

حالا اگر $x<۰$ آن‌گاه $f(x)=۱-\frac{x}{۲}$، پس $f(-۴)=۱-\frac{-۴}{۲}=۳$ و اگر $x\geq ۰$ آن‌گاه $f(x)=۱+x^۲$، پس: $f(f(-۴))=f(۳)=۱+۳^۲=۱۰$

پاسخ ۱۴۳

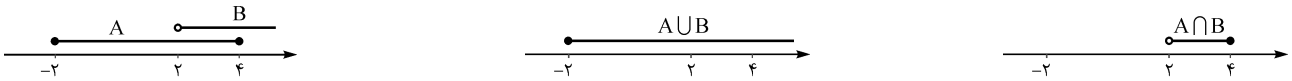
الف) دامنه‌ی تابع f مساوی $\mathbb{R}$ است. برای تابع g، باید $0 \le 1-x$ و در نتیجه $x \le 1$؛ یعنی دامنه‌ی g بازه‌ی $(-\infty,1]$ است.

ب) $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \le 1\} = \{x \mid x+3 \le 1\} = \{x \mid x \le -2\} = (-\infty,-2]$

ج) $f(x) = x+3 \ , \ g(x) = \sqrt{1-x} \ \Rightarrow \ fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-x}+3$

پاسخ ۱۴۴

$A=[-2,4]$ و $B=(2,+\infty)$، پس $A\cup B=[-2,+\infty)$ و $A\cap B=(2,4]$.



پاسخ ۱۴۵

$$\frac{3}{x-4}+\frac{5}{x+4} > \frac{8}{x^2-16} \Rightarrow \frac{3(x+4)+5(x-4)}{(x-4)(x+4)} > \frac{8}{x^2-16} \Rightarrow \frac{8x-8}{x^2-16} > \frac{8}{x^2-16} \Rightarrow \frac{8x-8}{x^2-16} - \frac{8}{x^2-16} > 0 \Rightarrow \frac{8x-16}{x^2-16} > 0$$

	-4		2		4	
$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

$\Rightarrow -4 < x < 2$ یا $4 < x \ \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-4,2)\cup(4,+\infty)$

پاسخ ۱۴۶

الف) $D_f = \mathbb{R}-\{-2\}$، چون سینوس همه‌جا تعریف شده است و فقط باید: $x+2 \ne 0 \Rightarrow x \ne -2$

ب) $D_g = \mathbb{R}-\{-1\}$، چون فقط باید: $\sqrt[3]{x+1} \ne 0 \Rightarrow x+1 \ne 0 \Rightarrow x \ne -1$

پاسخ ۱۴۷

الف) $f(x)=\sqrt{x+7}$ و $g(x)=x^2-1$، پس: $(g+2f)(2) = g(2)+2f(2) = (2^2-1)+2\sqrt{2+7} = 9$

ب) $D_f=[-7,+\infty)$، چون باید $0 \le x+7$ و در نتیجه $-7 \le x$. هم‌چنین $D_g=\mathbb{R}$؛ حالا:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \ne 0\} = \{x \in [-7,+\infty)\cap\mathbb{R} \mid x^2-1 \ne 0\} = \{x \in [-7,+\infty) \mid x \ne \pm 1\} = [-7,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

پاسخ ۱۴۸

$f(x)=2x+4$، پس $f(g(x))=2g(x)+4$؛ از طرفی سؤال گفته $f(g(x))=8x+12$. با این حساب، برای هر عدد حقیقی x، داریم:

$2g(x)+4 = 8x+12 \Rightarrow 2g(x) = 8x+8 \Rightarrow g(x) = 4x+4$

پاسخ ۱۴۹

$$\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x} \ge -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}+1 \ge 0 \Rightarrow \frac{x^2-(x-1)(x+1)+x(x+1)}{x(x+1)} \ge 0 \Rightarrow \frac{x^2-(x^2-1)+(x^2+x)}{x(x+1)} \ge 0 \Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} \ge 0$$

x^2+x+1 ریشه ندارد (دلتایش منفی است) و همیشه مثبت است. پس کسر بالا زمانی مثبت است (این کسر هیچ‌وقت صفر نمی‌شود) که مخرجش مثبت باشد. مخرج هم که بین دو ریشه‌اش منفی و خارج آن‌ها مثبت است. پس مجموعه جواب نامعادله، $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ است.

پاسخ ۱۵۰

در $g=\{(-1,-b+3),(7,1),(-1,4-a),(7,a)\}$ دو زوج مرتب می‌بینیم که مؤلفه‌ی اول آن‌ها ۷ است؛ پس برای آن‌که g تابع باشد، باید مؤلفه‌ی دوم آن‌ها هم مساوی باشد، یعنی $a=1$. هم‌چنین دو زوج مرتب می‌بینیم که مؤلفه‌ی اول آن‌ها -1 است، پس برای آن‌که g تابع باشد، باید مؤلفه‌ی دوم آن‌ها هم مساوی باشد: $-b+3 = 4-a \xrightarrow{a=1} -b+3 = 3 \Rightarrow b=0$

پاسخ ۱۵۱

تانژانت که نسبت سینوس به کسینوس است، همه‌جا تعریف شده جز جاهایی که کسینوس صفر می‌شود. کسینوس هم در مضارب صحیح و فرد $\frac{\pi}{2}$ صفر می‌شود (در $k\pi+\frac{\pi}{2}$). از طرفی: $x+\frac{\pi}{3} = k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} = k\pi+\frac{\pi}{6}$

پس دامنه‌ی تابع $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{3})$، برابر است با: $\{x \mid x \ne k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}\}$

پاسخ ۱۵۲

الف) $f(x)=3x^2-1$ و $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$، پس: $(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x^2-1) = \frac{3x^2-1}{(3x^2-1)^2-4}$

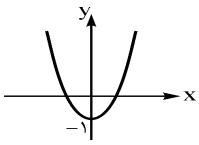
در ضمن، $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{-2,2\}$ و: $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \ne \pm 2\} = \{x \mid 3x^2-1 \ne \pm 2\} = \mathbb{R}-\{-1,1\}$

چون: $3x^2-1=2 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x=\pm 1 \ , \ 3x^2-1=-2 \Rightarrow 3x^2=-1$ (غیرممکن)

ب) $(f-3g)(1) = f(1)-3g(1) = (3\times 1^2-1)-3\times\frac{1}{1^2-4} = 2-3(-\frac{1}{3}) = 2+1 = 3$

پاسخ ۱۵۳

الف) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-2+(x^2+1)=x^2-1$، پس برای رسم نمودار $f+g$، باید نمودار $y=x^2$ را یک واحد بیاوریم پایین:



ب) $(f\cdot g)(-3)=f(-3)\cdot g(-3)=(-2)\cdot((-3)^2+1)=-20$

پاسخ ۱۵۴

الف) $D_f=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$، چون عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد: $x^2-2x-3>0 \Rightarrow (x+1)(x-3)>0 \Rightarrow x<-1$ یا $3<x$

ب) $D_g=(\frac{1}{2},+\infty)$، چون باید زیر رادیکال نامنفی و مخرج غیرصفر باشد، پس: $2x-1>0 \Rightarrow 2x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

پاسخ ۱۵۵

الف) $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$، پس:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{x-1})=\frac{\frac{1}{x-1}+2}{\frac{1}{x-1}-3}=\frac{\frac{1+2(x-1)}{\cancel{x-1}}}{\frac{1-3(x-1)}{\cancel{x-1}}}=\frac{2x-1}{-3x+4}$$

ب) $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$، پس:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{1\} \mid g(x)\neq 3\}$$

از طرفی، اگر $g(x)=\frac{1}{x-1}=3$ آن‌گاه $x-1=\frac{1}{3}$ و در نتیجه $x=\frac{4}{3}$، پس:

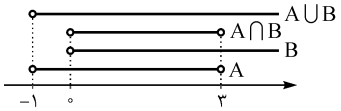
$$D_{fog}=\mathbb{R}-\{1,\frac{4}{3}\}$$

پاسخ ۱۵۶

کاملاً شبیه سؤال ۸ (خرداد ۹۱) است؛ خودتان حل کنید! جواب نهایی $a=1$، $b=0$ و $c=-1$ است.

پاسخ ۱۵۷

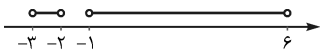
$A=(-1,3)$ و $B=(0,+\infty)$، پس $A\cup B=(-1,+\infty)$ و $A\cap B=(0,3)$. ببینید:



پاسخ ۱۵۸

$$\frac{2x^2-16}{x^2+3x+2}<1 \Rightarrow \frac{2x^2-16}{x^2+3x+2}-1<0 \Rightarrow \frac{(2x^2-16)-(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2}<0 \Rightarrow \frac{x^2-3x-18}{x^2+3x+2}<0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-6)}{(x+2)(x+1)}<0$$

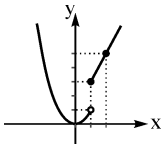
		-3		-2		-1		6	
+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	



مجموعه جواب: $(-3,-2)\cup(-1,6)$

پاسخ ۱۵۹

الف) نمودار تابع را آن روبه‌رو می‌بینید!



(برای رسم $f(x)=2x+1, 1\le x$ دو نقطه را پیدا و به هم وصل می‌کنیم: $\begin{array}{cc}1 & 2\\ 3 & 5\end{array}$)

ب) اگر $x<1$ آن‌گاه $f(x)=x^2$، پس $f(-1)=(-1)^2=1$. حالا اگر $x\ge 1$ آن‌گاه $f(x)=2x+1$، پس $f(f(-1))=f(1)=2\times1+1=3$.

پاسخ ۱۶۰

الف) $f(x)=x-2$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$، پس:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x-2)=\sqrt{(x-2)+1}=\sqrt{x-1}$$

ب) $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=[-1,+\infty)$، پس:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\le x-2\}=\{x\in\mathbb{R} \mid 1\le x\}=[1,+\infty)$$

پاسخ ۱۶۱

$f(x)=3x+5$ و $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$، پس:

$$(\frac{f}{g})(x)=(3x+5)\div\frac{x}{x^2-4}=(3x+5)\times\frac{x^2-4}{x}=\frac{(3x+5)(x^2-4)}{x}=\frac{3x^3+5x^2-12x-20}{x}$$

$D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{-2,2\}$، پس:

$$D_{\frac{f}{g}}=\{x\in D_f\cap D_g \mid g(x)\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}-\{-2,2\} \mid x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$$