پاسخ آزمون های کتاب ریاضیات پایه انتشارات خوشخوان

آزمون (۱) : معادله درجه دوم

۱- گزینه‌ی «۱»

برای آن که عبارت درجه‌ی دوم همواره نامنفی باشد باید داشته باشیم:

$$1)\ a>0$$

$$2)\ \Delta=b^2-4ac\leq 0$$

بنابراین در این پرسش داریم:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ a>0\\ 2)\ \Delta'=1-a.4a\leq 0\ \Rightarrow 4a^2\geq 1\Rightarrow |a|\geq \frac{1}{2}\end{array}\right\}\xrightarrow{\ \cap\ } a\geq\frac{1}{2}$$

۲- گزینه‌ی «۲»

شرط داشتن ریشه‌ی مضاعف $\Delta=0$ است.

$$\Delta'=0\Rightarrow (3b)^2-9a.c=0\Rightarrow 9b^2-9ac=0\Rightarrow b^2=ac$$

بنابراین b واسطه‌ی هندسی بین a و c می‌باشد.

۳- گزینه‌ی «۴»

فرض کنیم x_0 ریشه‌ی مشترک باشد؛ پس در هر دو معادله صدق می‌کند. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}x_0^2+2x_0-m=0\ \Rightarrow x_0^2+2x_0=m\\ x_0^2+5x_0+2m=0\Rightarrow x_0^2+2x_0=-3x_0-2m\end{array}\right\}\Rightarrow -3x_0-2m=m\Rightarrow x_0=-m$$

$$\Rightarrow x_0^2+2x_0-m=x_0^2+2x_0+x_0=0\Rightarrow x_0(x_0+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x_0=0\Rightarrow m=0\\ x_0=-3\Rightarrow m=3\end{cases}$$

۴- گزینه‌ی «۲»

ریشه‌های معادله جدید را y در نظر می‌گیریم:

$$y=-x\Rightarrow x=-y$$

$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow\ a(-y)^2+b(-y)+c=0\Rightarrow ay^2-by+c=0$$

۵- گزینه‌ی «۴»

دلتای معادله باید مثبت باشد:

$\Delta'>0\Rightarrow m^2+4>0$ به ازای هر m برقرار است.

در صورتی که دو ریشه‌ی این معادله به صورت $\cos\theta,\sin\theta$ باشند داریم:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\ x_1^2+x_2^2=1\Rightarrow\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1\Rightarrow S^2-2P=1$$

$$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{2m}{4}=\frac{m}{2}$$

$$P=x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{-1}{4}$$

بنابراین: $(\frac{m}{2})^2-2(\frac{-1}{4})=1\Rightarrow\frac{m^2}{4}+\frac{1}{2}=1\Rightarrow\ m^2=2\Rightarrow\ m=\pm\sqrt{2}$

۶- گزینه‌ی «۴»

طبق رابطه‌ی داده شده تفاضل ریشه‌ها با حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است:

$$x'-x''=x'x''\ \Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{c}{a}\xrightarrow{\ a>0\ }\sqrt{\Delta}=c\qquad (*)$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\xrightarrow{(*)}x=\frac{-b\pm c}{۲a}$$

۷- گزینه‌ی «۴»

x'، m و x'' دنباله‌ی هندسی تشکیل می‌دهند. بنابراین:

$$m^۲=x'.x''\Rightarrow m^۲=\frac{c}{a}=\frac{۲m-۱}{۱}\Rightarrow m^۲-۲m+۱=۰\Rightarrow(m-۱)^۲=۰\Rightarrow m=۱$$

۸- گزینه‌ی «۳»

$$x_۱=x_۲^۲$$

حاصل ضرب دو ریشه: $P=x_۱.x_۲=\frac{c}{a}\Rightarrow x_۲^۲.x_۲=۲۷\Rightarrow x_۲^۳=۲۷\Rightarrow x_۲=۳\Rightarrow x_۱=۹$

مجموع ریشه‌ها: $S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}\Rightarrow ۳+۹=۴m\Rightarrow m=۳$

۹- گزینه‌ی «۱»

$S=x_۱+x_۲=m$ و $P=x_۱.x_۲=-m^۲$

$$S'=x'_۱+x'_۲=\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{x_۱x_۲}=\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{m^۲+۲m^۲}{-m^۲}=-۳$$

$$P'=x'_۱.x'_۲=\frac{x_۱}{x_۲}.\frac{x_۲}{x_۱}=۱$$

اکنون با استفاده از معادله مشخصه داریم:

$$x^۲-S'x+P'=۰\Rightarrow x^۲+۳x+۱=۰$$

۱۰-گزینه‌ی «۴»

$$x_۲=\frac{۱}{x_۱}\Rightarrow x_۱.x_۲=x_۱.\frac{۱}{x_۱}=۱\Rightarrow P=\frac{c}{a}=۱\Rightarrow\frac{c}{۲}=۱\Rightarrow c=۲$$

۱۱-گزینه‌ی «۱»

دلتای معادله باید منفی باشد:

$$\Delta<۰\Rightarrow(m+۱)^۲-۴\times۲\times(\frac{۱}{۲}m+۲)<۰\Rightarrow m^۲+۲m+۱-۴m-۱۶<۰\Rightarrow m^۲-۲m-۱۵<۰$$

$$\Rightarrow(m-۵)(m+۳)<۰\Rightarrow -۳<m<۵$$

۱۲-گزینه‌ی «۱»

در واقع نمودار این تابع از سه نقطه‌ی $(۱,۰)$، $(۰,-۶)$ و $(-۲,-۶)$ می‌گذرد؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{ll}(۱,۰)\in f & \Rightarrow ۰=a+b+c\\(۰,-۶)\in f & \Rightarrow -۶=۰+۰+c\\(-۲,-۶)\in f & \Rightarrow -۶=۴a-۲b+c\end{array}\right\}\Rightarrow c=-۶,\ a=۲,\ b=۴\Rightarrow f(x)=۲x^۲+۴x-۶\Rightarrow f(-۱)=۲-۴-۶=-۸$$

۱۳-گزینه‌ی «۲»

$$S=x_۱+x_۲=\frac{-۹}{۲}\Rightarrow\frac{-a}{۲}=\frac{-۹}{۲}\Rightarrow a=۹$$

$$۲x^۲+۹x+۴=۰\Rightarrow(۲x+۱)(x+۴)=۰\Rightarrow x_۱=-۴,\ x_۲=\frac{-۱}{۲}$$

۱۴-گزینه‌ی «۲»

دو شرط زیر باید برقرار باشد:

$$۱)\ \Delta<۰ \Rightarrow \Delta'<۰ \Rightarrow ۹-(m-۱)(۲m+۱)<۰ \Rightarrow -۲m^۲+m+۱۰<۰ \Rightarrow -(۲m-۵)(m+۲)<۰ \Rightarrow m<-۲ \text{ یا } m>\frac{۵}{۲}$$

$$۲)\ a>۰ \Rightarrow m-۱>۰ \Rightarrow m>۱ \xrightarrow{(۱)\cap(۲)} m>\frac{۵}{۲}$$

۱۵-گزینه‌ی «۲»

$$۲x^۲-۳x-۱=۰\ ,\ S=\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\ ,P=\alpha\beta=\frac{-۱}{۲}$$

$$S'=\alpha\beta^۲+\alpha^۲\beta=\alpha\beta(\beta+\alpha)=P.S=\frac{-۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{-۳}{۴}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله‌ی $۸x^۲+kx-۱=۰$ برابر $\frac{-۳}{۴}$ است. یعنی: $\frac{-k}{۸}=\frac{-۳}{۴} \Rightarrow k=۶$

۱۶-گزینه‌ی «۲»

ریشه‌ها معکوس یکدیگرند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها برابر یک خواهد بود:

$$P=x_۱.x_۲=۱ \Rightarrow \frac{m^۲-۲}{m}=۱ \Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰ \Rightarrow m=-۱ \text{ یا } m=۲$$

برای هر کدام از دو مقدار به دست آمده شرط $\Delta>۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$m=-۱ : -x^۲+۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۹-۴=۵>۰ \text{ ق ق}$$

$$m=۲ : ۲x^۲+۳x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۹-۱۶=-۷<۰ \text{ غ ق ق}$$

۱۷-گزینه‌ی «۲»

بنابر صورت پرسش داریم:

$$x_۱.x_۲=(\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x_۱.x_۲=۲ \Rightarrow \frac{m^۲-۳}{m}=۲ \Rightarrow m^۲-۲m-۳=۰$$
$$\Rightarrow (m-۳)(m+۱)=۰ \Rightarrow m=-۱ \text{ یا } m=۳$$

برای هر کدام از دو مقدار به دست آمده شرط $\Delta>۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$m=-۱ : -x^۲-۵x-۲=۰ \Rightarrow \Delta=۲۵-۸=۱۷>۰ \text{ ق ق}$$

$$m=۳ : ۳x^۲-۵x+۶=۰ \Rightarrow \Delta=۲۵-۷۲=-۴۷<۰ \text{ غ ق ق}$$

۱۸-گزینه‌ی «۴»

روش اول:

طول طناب را L در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x+۲y=L \\ S=xy \end{array}\right\} \Rightarrow S=(L-۲y)y=-۲y^۲+Ly$$

ماکزیمم تابع درجه دوم فوق برابر $\frac{-\Delta}{۴a}$ می‌باشد که طبق صورت سؤال برابر ۶۴۸ است:

$$Max=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(L^۲-۰)}{-۸}=۶۴۸ \Rightarrow L^۲=۸\times۶۴۸=۲^۶\times۳^۴ \Rightarrow L=۷۲$$

روش دوم:

طول این زمین را برابر x و عرض آن را y در نظر می‌گیریم. با توجه به این که جمع دو عبارت (x) و $(2y)$ مقدار ثابتی است، حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی ماکزیمم می‌شود که این دو مقدار با هم برابر بوده و مساوی نصف طول طنابی باشند. بنابراین:

$$x=2y=\frac{L}{2} \Rightarrow x=\frac{L}{2},\ y=\frac{L}{4},\ \mathrm{Max}(x.y)=\frac{L}{2}.\frac{L}{4}=648 \Rightarrow L^2=8\times 648=2^6\times 3^4 \Rightarrow L=72$$

۱۹-گزینه‌ی «۴»

باید ضریب x^2 مثبت و دلتای معادله منفی باشد:

$$\left.\begin{array}{l} m+2>0 \Rightarrow m>-2 \\ \Delta'<0 \quad \Rightarrow m^2-(m+2)<0 \Rightarrow (m-2)(m+1)<0 \Rightarrow -1<m<2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} -1<m<2$$

۲۰-گزینه‌ی «۳»

$$4x^2-12x+1=0\ ,\ S=\alpha+\beta=\frac{12}{4}=3, \quad P=\alpha.\beta=\frac{1}{4}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} \Rightarrow A^2=\frac{\beta+\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}=\frac{S+2\sqrt{P}}{P}=\frac{3+2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=16 \Rightarrow A=4$$

۲۱-گزینه‌ی «۱»

برای آن که سهمی داده شده از هر چهار ناحیه عبور کند، این تابع باید دو ریشه‌ی مختلف العلامهٔ داشته باشد. برای این منظور باید داشته باشیم:

$$P=x_1.x_2=\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{1}{m+2}<0 \Rightarrow m+2<0 \Rightarrow m<-2$$

دقت کنید وقتی $\frac{c}{a}<0$ باشد، دلتای معادله مثبت خواهد بود و داشتن دو ریشه قطعی است.

۲۲-گزینه‌ی «۱»

$$x^2-3x+1=0\ ,\ S=x_1+x_2=3\ ,\ P=x_1.x_2=1$$

$$x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}=\sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})=1\times(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})$$

$$A=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \Rightarrow A^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=3+2 \Rightarrow A=\sqrt{5}$$

۲۳-گزینه‌ی «۱»

$$16x^2-12x-3=0\ ,\ S=x_1+x_2=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}\ ,\ P=x_1.x_2=\frac{-3}{16}$$

$$\frac{27}{x_1}+\frac{27}{x_2}=\frac{27(x_2+x_1)}{x_1.x_2}=\frac{27\times\frac{3}{4}}{\frac{-3}{16}}=-4\times 27=-108$$

۲۴-گزینه‌ی «۱»

روش اول:

$$2x+y=6 \Rightarrow y=6-2x \Rightarrow xy=x(6-2x)=-2x^2+6x$$

ماکزیمم مقدار تابع $y=-2x^2+6x$ به ازای $x=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{2}$ به دست می‌آید:

$$\mathrm{Max}(xy)=-2\left(\frac{3}{2}\right)^2+6\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}+\frac{18}{2}=\frac{9}{2}$$

روش دوم: می‌دانیم اگر جمع دو متغیر مقداری ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی ماکزیمم می‌شود که این دو متغیر با هم برابر باشند:

$$۲x+y=۶ \Rightarrow ۲x=y=\frac{۶}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۳}{۲} \\ y=۳ \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Max}(xy)=\frac{۳}{۲}\times ۳=\frac{۹}{۲}$$

۲۵- گزینه‌ی «۳»

$$x^{۲}-۲۰x+۶۴=۰ \ , \ S=x_{۱}+x_{۲}=۲۰ \ , \ P=x_{۱}.x_{۲}=۶۴$$

$$A=\sqrt{x_{۱}}+\sqrt{x_{۲}} \Rightarrow A^{۲}=x_{۱}+x_{۲}+۲\sqrt{x_{۱}x_{۲}}=S+۲\sqrt{P}=۲۰+۲\times ۸=۳۶ \Rightarrow A=۶$$

آزمون (۲) معادلات، نامعادلات، قدر مطلق و جزء صحیح

۱- گزینه‌ی «۴»

اول باید $x\ge -1$ برقرار باشد تا رادیکال داده شده تعریف شده باشد.

$$x\le 2\sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 0 \ : \ x\le 0\le 2\sqrt{x+1} \quad \text{همواره برقرار است} \\ 0<x \ : \ x^2\le 4(x+1) \Rightarrow x^2-4x-4\le 0 \Rightarrow (x-2)^2\le 8 \Rightarrow -2\sqrt{2}+2\le x\le 2\sqrt{2}+2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x>0} 0<x\le 2\sqrt{2}+2$$

با اجتماع دو جواب به دست آمده داریم:

$$[-1,0]\cup(0,2\sqrt{2}+2]=[-1,2\sqrt{2}+2] \Rightarrow b-a=2\sqrt{2}+2-(-1)=3+2\sqrt{2}$$

۲- گزینه‌ی «۱»

$$|x|<(2x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \ : x<4x^2-4x+1 \Rightarrow 4x^2-5x+1>0 \Rightarrow (4x-1)(x-1)>0 \Rightarrow x>1 \text{ یا } x<\frac{1}{4} \xrightarrow{x\ge 0} 0\le x<\frac{1}{4} \text{ یا } x>1 \\ x<0 : -x<4x^2-4x+1 \Rightarrow 4x^2-3x+1>0 \xrightarrow{\Delta<0} x\in\mathbb{R} \xrightarrow{x<0} x<0 \end{cases}$$

اجتماع دو جواب فوق برابر است با:

$$x>\frac{1}{4} \text{ یا } x>1 \Rightarrow 8x<2 \text{ یا } 8x>8 \quad \left|8x-\frac{2+8}{2}\right|>\frac{8-2}{2} \Rightarrow |8x-5|>3 \Rightarrow B=3$$

۳- گزینه‌ی «۴»

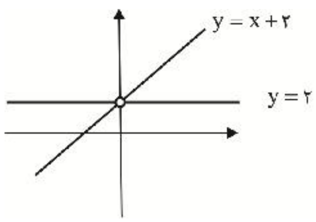
معادله‌ی حاصل از تساوی دو تابع باید فاقد ریشه باشد:

$$\frac{2x+a}{x}=x+2 \xrightarrow{x\neq 0} 2x+a=x^2+2x \Rightarrow x^2-a=0$$

$$\Delta<0 \Rightarrow 0-4(-a)<0 \Rightarrow 4a<0 \Rightarrow a<0$$

دقت کنید در صورتی که $a=0$ باشد داریم:

$$\begin{cases} y=\frac{2x}{x}=2 \ , \ x\neq 0 \\ y=x+2 \end{cases}$$



این دو خط یکدیگر را قطع نمی‌کنند. پس $a\le 0$ پاسخ است.

۴- گزینه‌ی «۱»

با توجه به دامنه‌ی $D=[0,+\infty)-\{4\}$ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{1}{\sqrt{x}-2}=2 \Rightarrow \frac{\cancel{\sqrt{x}}-2-\cancel{\sqrt{x}}-2}{x-4}=2 \Rightarrow -4=2x-8 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

۵- گزینه‌ی «۳»

$$x=\sqrt{3}-\sqrt{2} \Rightarrow x^2=3+2-2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}$$

هر چهار معادله‌ی داده شده دارای ضرائب گویا هستند. پس مقدار دیگر x^2 برابر $5+2\sqrt{6}$ باید باشد.

$$\left.\begin{array}{l} S=5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}=10 \\ P=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=25-24=1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x^2)^2-10(x^2)+1=0 \Rightarrow x^4-10x^2+1=0$$

۶- گزینه‌ی «۱»

با فرض $A=3x^2+2x$ داریم:

$$A+\frac{۱}{A}=۲$$

می‌دانیم جمع یک عدد با معکوسش زمانی برابر ۲ می‌شود که آن عدد برابر ۱ باشد. بنابراین:

$$A=۳x^۲+۲x=۱ \Rightarrow ۳x^۲+۲x-۱=۰ \Rightarrow (x+۱)(۳x-۱)=۰ \Rightarrow x=-۱, x=\frac{۱}{۳}$$

۷- گزینه‌ی «۱»

روش اول:

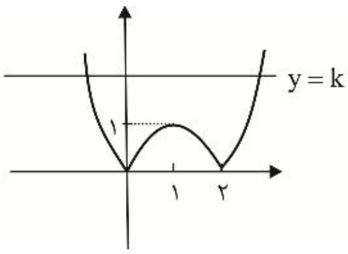
$$|x^۲-۲x| \le k \Rightarrow |(x-۱)^۲-۱| \le k \Rightarrow -k+۱ \le (x-۱)^۲ \le k+۱$$

جواب نامعادله‌ی فوق زمانی تنها برابر یک بازه می‌شود که $(-k+۱)$ نامثبت باشد؛

$$-k+۱ \le ۰ \Rightarrow k \ge ۱$$

روش دوم: نمودار تابع $y=|x^۲-۲x|$ را رسم می‌کنیم:

داریم:



$$\begin{cases} k<۰: & \text{نامعادله جواب ندارد} \\ ۰\le k<۱: & \text{پاسخ نامعادله شامل دو بازه است} \\ ۱\le k: & \text{پاسخ نامعادله شامل یک بازه به صورت } [a,b] \text{ است} \end{cases}$$

۸- گزینه‌ی «۴»

داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\ge\frac{۱}{۲}: ۲x-۱<x+۲ \Rightarrow x<۳ \xrightarrow{\cap} \frac{۱}{۲}\le x<۳ \\ x<\frac{۱}{۲}: -۲x+۱<x+۲ \Rightarrow x>\frac{-۱}{۳} \xrightarrow{\cap} \frac{-۱}{۳}<x<\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

اجتماع دو بازه‌ی فوق جواب نامعادله است:

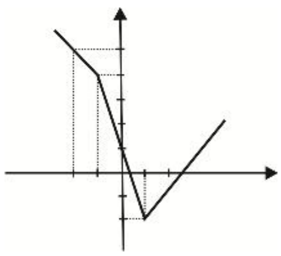
$$-\frac{۱}{۳}<x<۳ \Rightarrow -۱<۳x<۹ \Rightarrow -۶<۳x-۵<۴ \Rightarrow |۳x-۵|<۶$$

۹- گزینه‌ی «۳»

با یافتن نقاط شکست نمودار (ریشه‌های عبارات داخل قدر مطلق) و دو نقطه قبل اولین ریشه و بعد آخرین ریشه و وصل کردن آن‌ها به هم نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

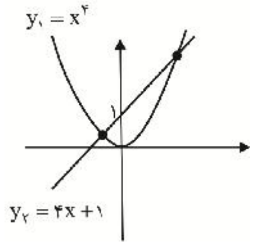
$$y=۲|x-۱|-|x+۱| \qquad \begin{array}{|l} ۱ \\ -۲ \end{array} \quad \begin{array}{|l} -۱ \\ ۴ \end{array} \quad \begin{array}{|l} -۲ \\ ۵ \end{array} \quad \begin{array}{|l} ۲ \\ -۱ \end{array}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید نمودار از ربع سوم عبور نمی‌کند.



۱۰-گزینه‌ی «۲»

$$\frac{۱}{x}>\frac{۱}{x-۲} \Rightarrow \frac{۱}{x}-\frac{۱}{x-۲}>۰ \Rightarrow \frac{x-۲-x}{x(x-۲)}>۰ \Rightarrow \frac{-۲}{x(x-۲)}>۰ \Rightarrow x(x-۲)<۰ \Rightarrow ۰<x<۲$$



۱۱-گزینه‌ی «۴»

اگر معادله‌ی داده شده را به صورت $x^۴=۴x+۱$ بازنویسی کنیم، تعداد نقاط تلاقی نمودار توابع $x^۴$ و $۴x+۱$ تعداد جواب‌های معادله است. بنابراین آن‌ها را رسم می‌کنیم:

این دو نمودار در دو نقطه متقاطع‌اند.

۱۲-گزینه‌ی «۳»

$x^۲-mx+۱-m=۰$, $S=x_۱+x_۲=m$ و $P=x_۱.x_۲=۱-m$

طبق فرض مسئله داریم:

$$x_۱^۲+x_۲^۲=۱ \Rightarrow (x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲=۱ \Rightarrow S^۲-۲P=۱ \Rightarrow m^۲-۲(۱-m)=۱$$

$$m^۲+۲m-۳=۰ \Rightarrow (m+۳)(m-۱)=۰ \Rightarrow m=۱, m=-۳$$

اما $m=-۳$ غیر قابل قبول است، چون به ازای آن دلتای معادله منفی شده و معادله فاقد ریشه خواهد بود!

۱۳-گزینه‌ی «۳»

دو شرط زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} a-۱>۰ \Rightarrow a>۱ \\ \Delta'<۰ \Rightarrow ۲-(a-۱)a<۰ \Rightarrow -a^۲+a+۲<۰ \Rightarrow a^۲-a-۲>۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۱)>۰ \Rightarrow a<-۱ \text{ یا } a>۲ \end{cases}$$

اجتماع دو بازه‌ی فوق $(۲\ ,\ +\infty)$ است.

۱۴-گزینه‌ی «۳»

طبق فرض داریم: $f(۲)=۰ \Rightarrow ۲\times۸-۵\times۴-۲+m=۰ \Rightarrow m=۶$

$$:f(x)=۲x^۳-۵x-x+۶ \;\Big|\; \begin{array}{l} x-۲ \\ \hline ۲x^۲-x-۳ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ۲x^۳-۴x^۲ \\ \hline -x^۲-x+۶ \\ -x^۲+۲x \\ \hline -۳x+۶ \\ -۳x+۶ \\ \hline ۰ \end{array}$$

اکنون ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-x-۳=۰$ دو ریشه‌ی دیگر $f(x)$ هستند:

$$۲x^۲-x-۳=۰ \Rightarrow (۲x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=-۱\ ,\ x=\frac{۳}{۲}$$

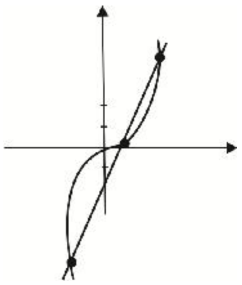
۱۵-گزینه‌ی «۲»

$$\left|\frac{x-۳}{۲x-۱}\right|>۱ \Rightarrow |x-۳|>|۲x-۱| \Rightarrow x^۲-۶x+۹>۴x^۲-۴x+۱$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۲x-۸<۰ \Rightarrow (۳x-۴)(x+۲)<۰ \Rightarrow -۲<x<\frac{۴}{۳}$$

نقطه‌ی میانی بازه‌ی فوق برابر $\frac{-۲+\frac{۴}{۳}}{۲}=\frac{-۱}{۳}$ می‌باشد که همان خواسته‌ی مسئله است.

۱۶-گزینه‌ی «۲»



معادله‌ی داده شده را به صورت $x^{۵}=۳x-۱$ بازنویسی می‌کنیم. تعداد نقاط تلاقی نمودارهای توابع $x^{۵}$ و $۳x-۱$ برابر تعداد جواب‌های این معادله است. پس آن‌ها را رسم می‌کنیم:

طبق نمودار این معادله سه جواب خواهد داشت.

۱۷-گزینه‌ی «۲»

$$۲y+x=۵ \Rightarrow y=\frac{۵-x}{۲}$$

$$۴-|x|>\frac{۵-x}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ : ۴-x>\frac{۵-x}{۲} \Rightarrow ۸-۲x>۵-x \Rightarrow x<۳ \xrightarrow{\cap} ۰\leq x<۳ \\ x<۰ : ۴+x>\frac{۵-x}{۲} \Rightarrow ۸+۲x>۵-x \Rightarrow ۳x>-۳ \Rightarrow x>-۱ \xrightarrow{\cap} -۱<x<۰ \end{cases}$$

اجتماع دو بازه‌ی فوق بازه‌ی $(-۱,۳)$ است. پس $b-a=۳-(-۱)=۴$.

۱۸-گزینه‌ی «۳»

$$x+|x|\leq\frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ : ۲x\leq\frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x\leq۳ \Rightarrow x\leq۲ \xrightarrow{\cap} ۰\leq x\leq۲ \\ x<۰ : ۰\leq\frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow -۶\leq x \xrightarrow{\cap} -۶\leq x<۰ \end{cases}$$

پس مجموعه جواب این نامعادله به صورت $[-۶,۲]$ است.

۱۹-گزینه‌ی «۲»

$x=۲$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$۲(۴a-۲-۵)=۲ \Rightarrow ۴a-۷=۱ \Rightarrow a=۲$$

بنابراین معادله به صورت مقابل در می‌آید:

$$۲x^{۳}-x^{۲}-۵x-۲=۰$$

اما برای پیدا کردن مجموع دو ریشه‌ی دیگر دو روش داریم:

روش اول:

نکته: مجموع ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d=۰$ برابر $\frac{-b}{a}$ است. بنابراین:

$$۲+x_{۲}+x_{۳}=\frac{-(-۱)}{۲} \Rightarrow x_{۲}+x_{۳}=\frac{۱}{۲}-۲=\frac{-۳}{۲}$$

روش دوم: با تقسیم $(۲x^{۲}-x^{۲}-۵x-۲)$ بر $(x-۲)$ داریم:

$$۲x^{۳}-x^{۲}-۵x-۲=(۲x^{۲}+۳x+۱)(x-۲)$$

مجموع ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم به دست آمده برابر $\frac{-۳}{۲}$ است که همان پاسخ پرسش است.

۲۰-گزینه‌ی «۲»

چون x_1 , x_2 در معادله‌ی $x^2-x-3=0$ صدق می‌کنند داریم:

$$x^2=x+3$$
$$(x_1^2-3)(x_2^2-3)=(x_1+3-3)(x_2+3-3)=x_1.x_2=-3$$

۲۱-گزینه‌ی «۱»

$$f(x-f(x))-f(x-[x])=[x-[x]]=[x]-[x]=0$$

به عبارت دیگر چون $0 \leq x-[x]<1$، پس جزء صحیح آن مساوی صفر می‌شود.

۲۲-گزینه‌ی «۴»

معادله‌ی حاصل از تلاقی دو تابع داده شده باید فاقد ریشه باشد:

$$-x^2+2x=mx+4 \Rightarrow -x^2+(2-m)x-4=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow (2-m)^2-4\times4<0 \Rightarrow |2-m|<4$$
$$\Rightarrow -4<m-2<4 \Rightarrow -2<m<6$$

۲۳-گزینه‌ی «۴»

ریشه‌های معادله‌ی جدید را y فرض می‌کنیم. طبق فرض داریم:

$$y=x+1 \Rightarrow x=y-1$$

$$3x^2-4x-1=0 \xrightarrow{x=y-1} 3(y-1)^2-4(y-1)-1=0 \Rightarrow 3y^2-6y+3-4y+4-1=0$$

$$\Rightarrow 3y^2-10y+6=0 \Rightarrow a=-10 , b=6$$

۲۴-گزینه‌ی «۲»

$$-2\leq x<6 \Rightarrow -1\leq \frac{x}{2}<3 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=-1 \text{ یا } 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2$$

طول بازه‌ای که $\frac{x}{2}$ در آن تغییر می‌کند برابر $3-(-1)=4$ است و ۴ نقطه از این بازه وجود دارد که $\frac{x}{2}$ در آن‌ها صحیح می‌شود. پس نمودار این تابع از چهار پاره‌خط افقی به طول ۱ تشکیل می‌شود. برای درک بهتر این موضوع می‌توانید با بازه‌بندی نمودار تابع را رسم کنیم.

۲۵-گزینه‌ی «۴»

ابتدا دامنه‌ی معادله را تعیین می‌کنیم:

$$\sqrt{4x-3}=-3x+2$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{3}{4} \\ -3x+2\geq 0 \Rightarrow 3x\leq 2 \Rightarrow x\leq \frac{2}{3} \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} \frac{2}{3}\leq x\leq \frac{3}{4}$$

اکنون با به توان دو رساندن دو طرف به حل معادله می‌پردازیم:

$$4x-3=9x^2-12x+4 \Rightarrow 9x^2-16x+7=0$$

$$\Delta'=8^2-9\times7=64-63=1$$

پس این معادله جواب ندارد.

۲۶-گزینه‌ی «۲»

با فرض $x^2+x+1=A$ داریم:

$$A^2+3A-4=0 \Rightarrow (A+4)(A-1)=0 \Rightarrow A=1 \text{ یا } A=-4$$

$$\begin{cases} x^۲+x+۱=۱ \Rightarrow x^۲+x=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=-۱ \\ x^۲+x+۱=-۴ \Rightarrow x^۲+x+۵=۰ \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

۲۷-گزینه‌ی «۲»

$$\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}<۲ \Rightarrow \frac{۳x^۲-۲x-۲x^۲-۸}{x^۲+۴}<۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۲x-۸}{x^۲+۴}<۰ \xrightarrow{x^۲+۴>۰}$$
$$(x-۴)(x+۲)<۰ \Rightarrow -۲<x<۴ \Rightarrow b-a=۶$$

۲۸-گزینه‌ی «۴»

این خط به صورت $y=mx$ می‌باشد. طبق فرض معادله‌ی حاصل از تلاقی این خط با منحنی باید ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشد:

$$(x+۱)(x+۴)=mx \Rightarrow x^۲+(۵-m)x+۴=۰ \Rightarrow \Delta=۰ \Rightarrow (۵-m)^۲-۱۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۵-m=۴ \Rightarrow m=۱ \\ ۵-m=-۴ \Rightarrow m=۹ \end{cases}$$

$$m=۱: x^۲+۴x+۴=۰ \Rightarrow (x+۲)^۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \quad \text{غ ق ق}$$

$$m=۹: x^۲-۴x+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

پس شیب این خط $m=۹$ بوده و در نقطه‌ی $\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱۸ \end{vmatrix}$ بر منحنی مماس است.

۲۹-گزینه‌ی «۳»

با فرض $\sqrt{x}=A$ داریم:

$$A^۲-۲A+m-۱=۰$$

این معادله باید دو جواب متمایز نامنفی داشته باشد تا شرایط مسئله برقرار شود. برای این منظور باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta'>۰ \Rightarrow ۱-(m-۱)>۰ \Rightarrow ۲-m>۰ \Rightarrow m<۲ \\ \frac{c}{a}\geq ۰ \Rightarrow m-۱\geq ۰ \Rightarrow m\geq ۱ \\ \frac{-b}{a}>۰ \Rightarrow ۲>۰ \text{ همواره برقرار است.} \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} ۱\leq m<۲$$

۳۰-گزینه‌ی «۱»

$$x^۲+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۰$$

بنابراین داریم:

$$-۱<x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ , [x^۲]=۰ , [x^۳]=-۱, [x^۴]=۰$$

$\Rightarrow$ عبارت = -۲

آزمون (۳): بخش‌پذیری چند جمله‌ای‌ها و بسط دو جمله‌ای

۱- گزینه‌ی «۴»

طبق صورت پرسش داریم:

$$ax^{6}+bx^{3}+1=(x^{3}+1)Q(x)+1 \xrightarrow{x^{3}=-1} a(-1)^{2}+b(-1)+1=1 \Rightarrow a=b$$

حال باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)=x^{2}+ax+2b$ بر $(x+2)$ همان $f(-2)$ است:

$$f(-2)=(-2)^{2}-2a+2b=4-2a+2a=4$$

۲- گزینه‌ی «۴»

عبارت باید به ازای $x=1$ و $x=-1$ برابر صفر شود:

$$\left.\begin{array}{l}1+a+b+1=0\\1-a+b+1=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0\ ,\ b=-2 \Rightarrow a-2b=0-2(-2)=4$$

۳- گزینه‌ی «۳»

با یک عبارت درجه‌ی چهار روبرو هستیم که بر $(x+1)^{3}$ بخش‌پذیر بوده و ضریب x^{4} آن برابر ۱ است. پس این عبارت به صورت زیر می‌باشد:

$$x^{4}+2ax^{3}+bx+c=(x+1)^{3}(x+c)=(x^{3}+3x^{2}+3x+1)(x+c)=x^{4}+(3+c)x^{3}+(3+3c)x^{2}+(3c+1)x+c$$

بنابراین ضریب x^{2} یعنی $(3+3c)$ باید صفر باشد؛ در نتیجه $c=-1$:

$$x^{4}+2x^{3}-2x-1=x^{4}+2ax^{3}+bx-1 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$$

۴- گزینه‌ی «۱»

روش اول: مقسوم‌علیه از درجه‌ی ۳ است بنابراین $R(x)$ حداکثر از درجه‌ی ۲ خواهد بود:

$$R(x)=ax^{2}+bx+c$$

$$x+x^{7}+x^{21}-x^{41}+x^{81}=(x^{3}-x)Q(x)+ax^{2}+bx+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0\ :\ 0=0+0+c \Rightarrow c=0 \\ \left.\begin{array}{l} x=1\ :3=a+b+c \Rightarrow a+b=3 \\ x=-1:-3=a-b+c \Rightarrow a-b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=3\ ,\ b=0 \end{cases} \Rightarrow R(x)=3x^{2} \Rightarrow R(1)=3$$

روش دوم: در معادله تقسیم $x=1$ را جایگزین می‌کنیم:

$$x+x^{7}+x^{21}-x^{41}+x^{81}=(x^{3}-x)Q(x)+R(x) \xrightarrow{x=1} 3=0+R(1) \Rightarrow R(1)=3$$

۵- گزینه‌ی «۲»

با فرض $f(x)=x^{4}-x^{3}+mx^{2}+x+1$ باید $f(1)$ و $f(-1)$ برابر سفر شوند:

$$f(1)=1-1+m+1+1=0 \Rightarrow m=-2$$

$$f(-1)=1+1+m-1+1=0 \Rightarrow m=-2$$

۶- گزینه‌ی «۴»

$$\begin{cases} x=1\ :\ f(-1)+2f(1)=1 \\ x=-1:f(1)+2f(-1)=-1 \end{cases} \Rightarrow - \begin{cases} 4f(1)+2f(-1)=2 \\ f(1)+2f(-1)=-1 \end{cases}$$
$$3f(1)=3 \Rightarrow f(1)=1$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)$ همان $f(1)$ است که برابر ۱ می‌باشد.

۷- گزینه‌ی «۱»

تنها عبارت درجه‌ی سومی که مقسوم‌علیه $(x-۲)^۴$ است، $(x-۲)^۳$ می‌باشد:

$$(x-۲)^۳=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸=x^۳+ax^۲+bx+c \Rightarrow c=-۸$$

۸- گزینه‌ی «۲۴»

عبارت درجه‌ی سومی که مقسوم‌علیه $(x+۱)^۳$ باشد یا $(x+۱)^۳$ است و یا $x(x+۱)^۲$. با توجه به این که $ax^۳+bx^۲+cx+۱$ بر x بخش‌پذیر نیست پس حتماً برابر $(x+۱)^۳$ است:

$$(x+۱)^۳=x^۳+۳x^۲+۳x+۱=ax^۳+bx^۲+cx+۱ \Rightarrow a=۱\ , b=۳ , c=۳ \Rightarrow a+b+c=۷$$

۹- گزینه‌ی «۲»

طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$x^{۱۰}=(x^۲+x+۱)Q(x)+R(x)$$

دو طرف معادله را در $(x-۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-۱)x^{۱۰}=(x^۳-۱)Q(x)+(x-۱).R(x)$$

$$\xrightarrow{x^۳=۱} \cancel{(x-۱)}x(x^۳)^۳=\cancel{(x-۱)}.R(x) \Rightarrow R(x)=x$$

۱۰-گزینه‌ی «۳»

$$f(x)=(x-۵)(x+۲)Q(x)+۲x+۴ \xrightarrow{x=۵} f(۵)=۰+۲\times۵+۴=۱۴$$

$f(۵)$ همان باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(m-۵)$ است.

۱۱-گزینه‌ی «۳»

طبق فرض $f(۱)=۳$ است:

$$f(۱)=۲ \Rightarrow a+b+۲+d=۲ \Rightarrow a+b+d=۰$$

اکنون داریم:

$$a(\frac{d}{a})^۲+b(\frac{d}{a})+d=\frac{d^۲}{a}+\frac{bd}{a}+d=\frac{d}{a}(d+b+a)=\frac{d}{a}\times۰=۰$$

پس باقیمانده‌ی تقسیم برابر صفر است.

۱۲-گزینه‌ی «۲»

$$f(x^۳)=(x-۱)Q(x)+R(x) \xrightarrow{x=۱} f(۱)=R(۱)$$

از طرفی طبق صورت پرسش $f(۱)=۲$. پس باقیمانده‌ی مطلوب هم برابر ۲ است.

۱۳-گزینه‌ی «۲»

$$f(x^۲-۱)=(x-۲)Q(x) \xrightarrow{x=۲} f(۳)=۰$$

$$f(x)=x+m \xrightarrow{x=۳} f(۳)=m+۳=۰ \Rightarrow m=-۳$$

۱۴-گزینه‌ی «۲»

$$x^{۱۰۰}-۱۰۰x^۳+۹۶=(x+۱)Q(x)+R(x) \xrightarrow{x=-۱} ۱+۱۰۰+۹۶=R(-۱) \Rightarrow R(-۱)=۱۹۷$$

۱۵-گزینه‌ی «۴»

$$(x-\alpha)(x-\beta)+k=(x-\alpha-\beta)Q(x) \xrightarrow{x=\alpha+\beta} (\alpha+\beta-\alpha)(\alpha+\beta-\beta)+k=۰$$
$$\Rightarrow \alpha\beta+k=۰ \Rightarrow k=-\alpha\beta$$

۱۶-گزینه‌ی «۱»

طبق صورت پرسش $f(1)=4$ و $f(-1)=2$ است. ضمناً باقیمانده $f(x)$ بر x^2-1 عبارتی حداکثر از درجه‌ی یک است. بنابراین:

$$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=4 \Rightarrow a+b=4 \\ f(-1)=2 \Rightarrow -a+b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b=6 \Rightarrow b=3 \Rightarrow a=1 \Rightarrow R(x)=x+3$$

۱۷-گزینه‌ی «۳»

برای آن که باقیمانده‌ی خواسته شده را به دست آوریم باید قرار دهیم $x^2=-1$:

$$(x^4-1)(x^2+x+1)+x^3-x+2 \overset{x^2=-1}{=\!=\!=} ((-1)^2-1)(-1+x+1)+x(-1)-x+2=-2x+2$$

۱۸-گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)Q(x)+3x^3+5x+1 \xrightarrow{x=-1} f(-1)=-7$$
$$\xrightarrow{x=-2} f(-2)=-33$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x+1)(x+2)+ax+b \xrightarrow{x=-1} f(-1)=-a+b=-7 \\ \xrightarrow{x=-2} f(-2)=-2a+b=-33 \end{array}\right\} \Rightarrow a=26, b=19 \Rightarrow a-b=7$$

۱۹-گزینه‌ی «۱»

نکته: جمله‌ی $(k+1)$ اُم از بسط $(a+b)^n$ به صورت $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ می‌باشد.

در بسط داده شده با فرض $b=\frac{-x}{2}$ و $a=1$، جمله‌ی شامل x^3 به ازای $k=3$ به دست می‌آید. پس داریم:

$$\binom{8}{3}1^{8-3}\times(-\frac{x}{2})^3=\frac{\cancel{8}\times 7\times\cancel{6}}{\cancel{3\times 2}}\times\frac{-x^3}{\cancel{8}}=-7x^3$$

۲۰-گزینه‌ی «۳»

نکته: تعداد جملات بسط $(a+b)^n$ برابر $n+1$ است.

پس این بسط ۷ جمله دارد.

آزمون (۴) : تابع (۱)

۱- گزینه‌ی «۳»

وقتی y تابعی از x خواهد بود که به ازای هر x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

مثال نقض گزینه ۱: $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

مثال نقض گزینه ۲: $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-2 \end{cases}$

مثال نقض گزینه ۴: $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=4 \end{cases}$

اما در گزینه ۳ داریم:

$$x_1=x_2 \Rightarrow {y_1}^3+9y_1={y_2}^3+9y_2 \Rightarrow {y_1}^3-{y_2}^3=9y_2-9y_1$$

$$\Rightarrow (y_1-y_2)({y_1}^2+y_1y_2+{y_2}^2)=-9(y_1-y_2) \Rightarrow \begin{cases} y_1=y_2 \\ {y_1}^2+y_1y_2+{y_2}^2=-9 \Rightarrow {y_1}^2+y_1y_2+{y_2}^2+9=0 \end{cases}$$

$$\Delta=1-4({y_2}^2+9)=-4{y_2}^2-35<0$$

پس این معادله جواب ندارد و از $x_1=x_2$ تنها $y_1=y_2$ نتیجه شد. پس این در رابطه y تابعی از x است.

۲- گزینه‌ی «۱»

$$f(-x)-xf(x)=x^2+1 \Rightarrow \begin{cases} x=2: f(-2)-2f(2)=5 \\ x=-2: f(2)+2f(-2)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f(2)-2f(-2)=-10 \\ f(2)+2f(-2)=5 \end{cases}$$

$$5f(2)=-5 \Rightarrow \quad f(2)=-1$$

$$f(-2)=3$$

۳- گزینه‌ی «۱»

محدودیت لگاریتم: $\dfrac{5x-2-x^2}{2}>0 \Rightarrow x^2-5x+2<0 \Rightarrow \Delta=25-4\times 2=17 \Rightarrow \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$

محدودیت رادیکالی: $\log\dfrac{5x-2-x^2}{2}\geq 0 \Rightarrow \dfrac{5x-2-x^2}{2}\geq 1 \Rightarrow x^2-5x+4\leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4)\leq 0 \Rightarrow 1\leq x\leq 4$

اشتراک دو بازه‌ی فوق: $1\leq x\leq 4$

این بازه شامل ۴ عدد صحیح است.

۴- گزینه‌ی «۱»

دامنه‌ی این تابع $[-2,2]$ است. داریم:

$$-2\leq x\leq 2 \Rightarrow 0\leq x^2\leq 4 \Rightarrow -4\leq -x^2\leq 0 \Rightarrow 0\leq 4-x^2\leq 4 \Rightarrow 0\leq\sqrt{4-x^2}\leq 2$$

اکنون با توجه به این که $x\sqrt{4-x^2}$ ضرب دو عبارت کراندار است، پس حاصل آن نیز کراندار بوده و بُرد تابع نمی‌تواند گزینه‌های ۳ یا ۴ باشد. حال چون اختلاف گزیه‌های (۱) و (۲) فقط در وجود ± 2 است و به ازای $x=\pm\sqrt{2}$ به دست می‌آید. $y=\pm 2$، گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۵- گزینه‌ی «۳»

با فرض $x>0$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=۳\sqrt{x}-۲ \\ f(-x)=g(-x) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{شرط فرد بودن } f} f(-x)=-f(x) \Rightarrow g(-x)=-۳\sqrt{x}+۲ \Rightarrow g(-x)=-۳\sqrt{-(-x)}+۲ \Rightarrow g(x)=-۳\sqrt{-x}+۲$$

۶- گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم: $(fogoh)^{-۱}(x)=(h^{-۱}og^{-۱}of^{-۱})(x)$

بنابراین با فرض $h(x)=۲x+۱$ و $S(x)=۳x-۱$ داریم:

$$f(x)=(hogos)(x) \Rightarrow f^{-۱}(x)=(s^{-۱}og^{-۱}oh^{-۱})(x)$$

$$h(x)=۲x+۱ \Rightarrow h^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}\ ,\ S(x)=۳x-۱ \Rightarrow S^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۳}$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{g^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})+۱}{۳}$$

۷- گزینه‌ی «۳»

$$(fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)$$

$$f(x)=\frac{x-۲}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=۳x+۲ \Rightarrow (g^{-۱}of^{-۱})(x)=۲(۳x+۲)+۱=۶x+۵$$

۸- گزینه‌ی «۲»

برای فرد بودن f، باید ضرایب عبارات با درجه‌ی زوج آن برابر صفر باشد:

$$\left.\begin{array}{l} x^۴: a+b=۰ \\ x^۲: b+c=۰ \\ x^۰: a+c+۲=۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع سه عبارت}} ۲(a+b+c)+۲=۰ \Rightarrow a+b+c=-۱$$

۹- گزینه‌ی «۴»

$$۵-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۵ \Rightarrow -\sqrt{۵} \leq x \leq \sqrt{۵} \Rightarrow D_f=[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$$

$$-\sqrt{۵} \leq [x] \leq \sqrt{۵} \Rightarrow -۲ \leq [x] \leq ۲ \Rightarrow -۲x<۳$$

۱۰-گزینه‌ی «۳»

$$f(f(x))=f(۲-|x-۲|)=۲-|(\cancel{۲}-|x-۲|)\cancel{-۲}|=۲-|x-۲|=f(x)$$

۱۱-گزینه‌ی «۱»

$$f(g(x))=۲g^۲(x)+۴=۴x^۲+۶x \Rightarrow g^۲(x)=۲x^۲+۳x-۲$$

$$\Rightarrow g^۲(-۲)=۸-۶-۲=۰ \Rightarrow g(-۲)=۰$$

۱۲-گزینه‌ی «۳»

$$y=\frac{x^۲+۱+۱}{\sqrt{x^۲+۱}}=\sqrt{x^۲+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

نکته: اگر $a>۰$ آن‌گاه $a+\frac{۱}{a} \geq ۲$.

بنابراین با توجه به این که $\sqrt{x^۲+۱}$ عددی مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است پس $y \geq ۲$ خواهد بود.

دقت کنید به ازای $x=۰$ مقدار $y=۲$ به دست می‌آید. (در واقع چون $\sqrt{x^۲+۱}$ نمی‌تواند بین صفر و یک باشد، بازه‌ای که با استفاده از نکته‌ی فوق به دست می‌آید ممکن است بزرگ‌تر از بُرد تابع باشد و نیاز به بررسی دقیق‌تر دارد.)

۱۳-گزینه‌ی «۴»

توابعی معکوس‌پذیرند که یک به یک باشند:

مثال نقض گزینه ۱: $y=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=\pm\sqrt{2}$

مثال نقض گزینه ۲: $y=0 \Rightarrow 0\leq x<1$

مثال نقض گزینه ۳: $y=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=3$

یک به یک بودن گزینه ۴ بر سادگی قابل اثبات است.

۱۴-گزینه‌ی «۴»

$$D_{(\frac{2f}{g})}=D_f \cap D_g-\{x|g(x)=0\}=\{1,2,3\}-\{3\}=\{1,3\}$$

$$\frac{2f}{g}=\{(1,\frac{2\times2}{5}),(2,\frac{2\times3}{6})=\{(1,\frac{4}{5}),(2,1)\}$$

۱۵-گزینه‌ی «۴»

بررسی گزینه ۱: $\begin{cases} D_f=(0,+\infty) \\ D_g=\mathbb{R}-\{0\} \end{cases} \Rightarrow f(x)\neq g(x)$

بررسی گزینه ۲: $\begin{cases} D_f=\mathbb{R}-\{0\} \\ D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f(x)\neq g(x)$

بررسی گزینه ۳: $\begin{cases} D_f=[0,+\infty) \\ D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f(x)\neq g(x)$

بررسی گزینه ۴: $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\}, f(x)=g(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

۱۶-گزینه‌ی «۱»

برای دامنه‌ی f داریم:

$$\sin\pi x-1\geq 0 \Rightarrow \sin\pi x\geq 1 \Rightarrow \sin\pi x=1 \Rightarrow \sin\pi x=\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k+\frac{1}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$x=2k+\frac{1}{2} \Rightarrow [x]+[-x]=-1 \Rightarrow f(x)=-1+\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}-1}=-1+0=-1$$

$$f(-\frac{1}{2}f(x))=f(-\frac{1}{2}\times(-1))=f(\frac{1}{2})=-1$$

۱۷-گزینه‌ی «۲»

$$g^{-1}(6)=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=6 \Rightarrow f(\alpha)+\sqrt{f(\alpha)}=6 \xrightarrow{\sqrt{f(\alpha)}=A} A^2+A-6=0 \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \Rightarrow \sqrt{f(\alpha)}=-3 & \text{غ ق ق} \\ A=2 \Rightarrow \sqrt{f(\alpha)}=2 \Rightarrow f(\alpha)=4 \end{cases}$$

$$f(\alpha)=4 \Rightarrow f^{-1}(4)=\alpha \Rightarrow \sqrt[3]{2\times4}=\alpha \Rightarrow \alpha=2$$

۱۸-گزینه‌ی «۳»

$$f(x^2)-2f(x)+1=\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{2x}{x-1}+1=\frac{x^2-2x(x+1)+x^2-1}{x^2-1}=\frac{-2x-1}{x^2-1}=\frac{2x+1}{1-x^2}$$

۱۹-گزینه‌ی «۱»

$$f(۱+\sqrt{۲})+f(۱-\sqrt{۲})=(۱+\cancel{\sqrt{۲}}+\frac{۲}{۱+\sqrt{۲}})+(۱-\cancel{\sqrt{۲}}+\frac{۲}{۱-\sqrt{۲}})=۲+۲(\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}})=۲+۲(\frac{۱-\cancel{\sqrt{۲}}+۱+\cancel{\sqrt{۲}}}{۱-۲})=۲-۴=-۲$$

۲۰-گزینه‌ی «۴»

$$g^{-۱}of^{-۱}=(fog)^{-۱}$$

$$fog=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}\Rightarrow (fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

۲۱-گزینه‌ی «۱»

$D_g=\mathbb{R}:$

$D_f:-۱\le ۲x-۱\le ۱\Rightarrow ۰\le ۲x\le ۲\Rightarrow D_f=[۰,۱]$

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}\Rightarrow ۰\le\frac{x^۲}{۱+x^۲}\le ۱\xrightarrow{۱+x^۲>۰} ۰\le x^۲\le ۱+x^۲$$

این نامعادله به ازای $x\in\mathbb{R}$ برقرار است پس دامنه‌ی fog برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۲۲-گزینه‌ی «۳»

نکته: نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ عموماً روی نیمساز $y=x$ است؛ اما اگر f صعودی اکید باشد تمام نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ دقیقاً همان ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=x$ هستند.

در این پرسش هم چون $f'(x)\ge ۰$ و f صعودی اکید است کافی است تعداد ریشه‌های $f(x)=x$ را در بازه‌ی $[-۱,۹]$ بیابیم:

$$f(x)=x \Rightarrow x+\sin(\frac{\pi}{۴}x)=x\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۴}x)=۰\Rightarrow\frac{\pi}{۴}x=k\pi\Rightarrow m=۴k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

بنابراین پاسخ مسئله $\{۰,۴,۸\}$ است.

۲۳-گزینه‌ی «۲»

$$f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲-۲[\sqrt{۳}]=۳-۲\times ۱=۱$$

$$f(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳}))=f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}-۲[-\frac{۱}{۲}]=\frac{۱}{۴}+۲=۲/۲۵$$

۲۴-گزینه‌ی «۱»

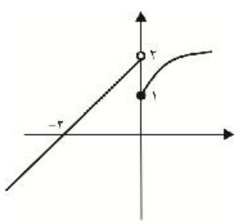
$$f(g(x))=g^۲(x)-g(x)\cancel{-۲}=x^۲+x\cancel{-۲}\Rightarrow (g(x)-\frac{۱}{۲})^۲=x^۲+x+\frac{۱}{۴}=(x+\frac{۱}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases} g(x)-\frac{۱}{۲}=x+\frac{۱}{۲} \Rightarrow g(x)=x+۱ \Rightarrow (f+g)(x)=x^۲-x-۲+x+۱=x^۲-۱\\ g(x)-\frac{۱}{۲}=-x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=-x\Rightarrow (f+g)(x)=x^۲-x-۲-x=x^۲-۲x-۲\end{cases}$$

تنها $x^۲-۱$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۵-گزینه‌ی «۴»

از رسم نمودار بهره می‌گیریم:



چنان چه مشاهده می‌شود تابع غیر یکنوا و غیر یک به یک است.

۲۶-گزینه‌ی «۱»

$$(gof)(x)=g(\frac{x}{۲-x})=\frac{۱}{۲}x$$

$$\frac{x}{۲-x}=t\xrightarrow{\text{ترکیب در زوج}}\frac{x}{۲-x+x}=\frac{t}{۱+t}\Rightarrow x=\frac{۲t}{۱+t}\Rightarrow g(t)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲t}{۱+t}\Rightarrow g(x)=\frac{x}{x+۱}$$

۲۷-گزینه‌ی «۱»

مجموعه‌های $(f\cap g)$ و $(f-g)$ زیر مجموعه‌ی f هستند، پس قطعاً تابع خواهند بود. برای fog داریم:

$$x_1=x_2 \xrightarrow{\text{تابع } g} g(x_1)=g(x_2) \xrightarrow{\text{تابع } f} fog(x_1)=fog(x_2)$$

اما مجموعه‌ی $(f\cup g)$ ممکن است تابع نباشد. به عنوان مثال:

$$\begin{matrix} f=\{(1,2)\} \\ g=\{(1,3)\} \end{matrix} \rightarrow fog=\{(1,2),(1,3)\} \text{ تابع نیست.}$$

۲۸-گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{matrix} (3,2)\in f \\ (3,a^2-a)\in f \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تابع } f} a^2-a=2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=2 \text{ یا } a=-1$$

$$a=2 \Rightarrow f=\{(3,2),(2,5),(b,2),(-1,4)\} \xrightarrow{\text{یک به یک } f} (3,2)=(b,2) \Rightarrow b=3$$

$$a=-1 \Rightarrow f=\{(3,2),(-1,5),(b,2),(-1,4)\} \qquad f \text{ تابع نیست.}$$

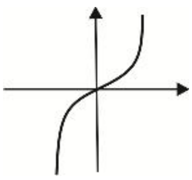
۲۹-گزینه‌ی «۱»

$$g(x)=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1 \Rightarrow (gof)(x)=\frac{1}{x-[x]}-1 \quad , D_{fog}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

$$\text{می‌دانیم: } x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow 0<x-[x]<1 \Rightarrow 1<\frac{1}{x-[x]} \Rightarrow 0<\frac{1}{x-[x]}-1 \Rightarrow R_{fog}=(0,+\infty)$$

۳۰-گزینه‌ی «۱»

تابع f را رسم می‌کنیم:



چنان چه مشاهده می‌شود این تابع یک به یک و یکنوا می‌باشد.

آزمون (۵): تابع (۲)

۱- گزینه‌ی «۴»

ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می‌کنیم:

$$۲|x|-x^۲\geq ۰ \Rightarrow |x|(۲-|x|)\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} |x|\leq ۲ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \\ x=۰ \end{cases}$$

اکنون داریم:

$$y=\sqrt{۲|x|-x^۲}=\sqrt{-x^۲+۲|x|-۱+۱}=\sqrt{-(|x|-۱)^۲+۱}$$

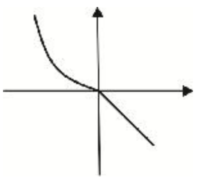
$$۰\leq |x| \leq ۲ \Rightarrow -۱ \leq |x|-۱ \leq ۱ \Rightarrow ۰\leq (|x|-۱)^۲\leq ۱ \Rightarrow ۰\geq -(|x|-۱)^۲\geq -۱ \Rightarrow ۱\geq -(|x|-۱)^۲+۱\geq ۰ \Rightarrow R=[۰,۱]$$

۲- گزینه‌ی «۴»

نکته: $D_{fof^{-۱}}=D_{f^{-۱}}=R_f\ ,fof^{-۱}(x)=x$

بنابراین: $fof^{-۱}=\{(۱,۱),(۳,۳)\}$

۳- گزینه‌ی «۴»



در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ به ازای $y=۱$ دو مقدار $x=\pm ۱$ به دست می‌آید. پس هیچ کدام یک به یک نیستند. تابع داده شده در گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودار روبه‌رو یک به یک است.

۴- گزینه‌ی «۳»

$$۱)\ \frac{x-۱}{x+۱}>۰ \Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۱$$

$$۲)\log\frac{x-۱}{x+۱}\geq ۰ \Rightarrow \frac{x-۱}{x+۱}\geq ۱ \Rightarrow \frac{\cancel{x}-۱-\cancel{x}-۱}{x+۱}\geq ۰ \Rightarrow \frac{-۲}{x+۱}\geq ۰ \Rightarrow x+۱<۰ \Rightarrow x<-۱$$

با اشتراک در بازه‌ی به دست آمده، دامنه‌ی تابع به صورت $(-\infty,-۱)$ خواهد بود.

۵- گزینه‌ی «۱»

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R}|x^۲+۴x\leq ۵\}$$

$$x^۲+۴x-۵\leq ۰ \Rightarrow (x+۵)(x-۱)\leq ۰ \Rightarrow -۵\leq x\leq ۱ \Rightarrow D_{fog}=[-۵,۱]$$

۶- گزینه‌ی «۳»

$$y=\frac{۱+x^۲}{۲x} \Rightarrow ۲xy=۱+x^۲ \Rightarrow x^۲-۲yx+۱=۰$$

$$\Delta' \geq ۰ \Rightarrow y^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow y\geq ۱ \text{ یا } y\leq -۱ \Rightarrow R_f-\mathbb{R}-(-۱,۱)$$

۷- گزینه‌ی «۴»

$$fog(x)=\sin^{-۱}(x-[x])$$

$$۰ \leq x-[x]<۱ \Rightarrow ۰\leq \sin^{-۱}(x-[x])<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow R_{fog}=[۰\ ,\frac{\pi}{۲}]$$

۸- گزینه‌ی «۱»

$$\left.\begin{array}{l}g(f(۲))=g(۳)=۴\\ g(f(۳))=g(۴)=۵\\ g(f(۵))=g(۶)\ \text{تعریف نشده}\end{array}\right\}\Rightarrow gof=\{(۲,۴),(۳,۵)\}$$

۹- گزینه‌ی «۲»

$$fog(x)=\frac{g(x)+۱}{g(x)-۱}=x^۲\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{g(x)+۱}{-۲}=\frac{x^۲}{۱-x^۲}\Rightarrow g(x)=\frac{-۲x^۲}{۱-x^۲}-۱$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{-۲x^۲-۱+x^۲}{۱-x^۲}=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$$

۱۰-گزینه‌ی «۱»

تنها در صورتی این تابع غیر یک به یک خواهد بود که صورت مضربی از مخرج باشد که در این حالت تابع به صورت معادله‌ی یک خط افقی در می‌آید که یک به یک نیست.

$$\frac{۲x-b}{۳x+۴}=k\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{-b}{۴}\Rightarrow b=\frac{-۸}{۳}$$

۱۱-گزینه‌ی «۲»

$$f(۱)=۲\Rightarrow ۱+a=۲\Rightarrow a=۱\Rightarrow f(x)=x^۳+x\Rightarrow f(۲)=۱۰\Rightarrow f^{-۱}(۱۰)=۲$$

۱۲-گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ در توابع صعودی حتماً روی $y=x$ قرار دارد؛ پس کافی است ریشه‌ی $f(x)=x$ را پیدا کنیم:

$$x^۵+x-۱=x\Rightarrow x^۵=۱\Rightarrow x=۱\Rightarrow M(۱,۱)\Rightarrow OM=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}$$

۱۳-گزینه‌ی «۱»

دامنه‌ی تابع داده شده عبارت است از:

$$D=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\ \text{یا}\ g(x)=۰\}$$

$$\left.\begin{array}{l}D_f=\{۱,۲,۳\}\\ D_g=\{۱,۲,۴\}\end{array}\right\}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{۱,۲\},f(۱)=۰\ ,\ g(۲)=۰$$

بنابراین دامنه‌ی تابع داده شده $\varnothing$ است.

۱۴-گزینه‌ی «۲»

روش اول: معکوس تابع f را پیدا می‌کنیم و برابر آن قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{۲x+۳}{x+k}\Rightarrow yx+ky-۲x-۳=۰\Rightarrow(y-۲)x=۳-ky\Rightarrow x=\frac{۳-ky}{y-۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-kx+۳}{x-۲}$$

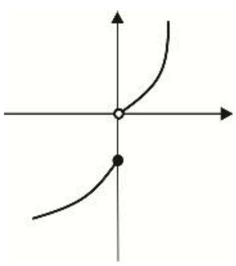
$$f(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow\frac{۲x+۳}{x+k}=\frac{-kx+۳}{x-۲}\Rightarrow k=-۲$$

روش دوم: f یک تابع هموگرافیک است که اگر $O(x_۰,y_۰)$ مرکز تقارن آن باشد، نسبت به خط $y-y_۰=x-x_۰$ متقارن است. از طرفی این نمودار زمانی بر معکوس خود منطبق است که نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد. بنابراین مرکز تقارن این تابع هموگرافیک باید روی خط $y=x$ قرار داشته باشد.

$$O\left|\begin{array}{l}-k\\ ۲\end{array}\right.\in(y=x)\Rightarrow -k=۲\Rightarrow k=-۲$$

۱۵-گزینه‌ی «۲»

نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید این تابع یک به یک با بُرد $R-(-۱,۰]$ است.

۱۶-گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم: $x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow -x^{۲}\leq ۰ \Rightarrow ۱۷-x^{۲}\leq ۱۷ \xrightarrow{x^{۲}\leq ۱۷} ۰\leq\sqrt{۱۷-x^{۲}}\leq\sqrt{۱۷}$

این بازه شامل اعداد صحیح $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ می‌باشد.

۱۷-گزینه‌ی «۳»

برای آن که این تابع فرد باشد باید ضرایب عبارات با درجه‌ی زوج صفر باشد تا از بین بروند:

$$\left.\begin{array}{l} x^{۴}\ \text{ضریب}: A-۳=۰\Rightarrow A=۳ \\ x^{۲}\ \text{ضریب}: B+۱=۰\Rightarrow B=-۱ \end{array}\right\}\Rightarrow A+B=۳-۱=۲$$

۱۸-گزینه‌ی «۱»

$$y=x^{۲}-۴x=(x-۲)^{۲}-۴$$

$$x<۲:(x-۲)^{۲}>۰ \Rightarrow (x-۲)^{۲}-۴>-۴\Rightarrow R_{y}=(-۴,+\infty)=D_{y^{-۱}}$$

$$y=(x-۲)^{۲}-۴\Rightarrow y+۴=(x-۲)^{۲} \xrightarrow{y>-۴} \sqrt{y+۴}=|x-۲| \xrightarrow{x<۲} \sqrt{y+۴}=۲-x$$

$$x=۲-\sqrt{y+۴} \Rightarrow y^{-۱}=۲-\sqrt{x+۴}$$

۱۹-گزینه‌ی «۱»

$$y=\sin^{-۱}\frac{۲x+۱۱}{x+۱}$$

$$-۱\leq\frac{۲x+۱۱}{x+۱}\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq\frac{۲x+۲+۹}{x+۱}\leq ۱\Rightarrow -۱\leq ۲+\frac{۹}{x+۱}\leq ۱$$

$$\Rightarrow -۳\leq\frac{۹}{x+۱}\leq -۱\Rightarrow -۱\leq\frac{x+۱}{۹}\leq\frac{-۱}{۳}\Rightarrow -۹\leq x+۱\leq -۳\Rightarrow -۱۰\leq x\leq -۴$$

این بازه شامل ۷ عدد صحیح است.

۲۰-گزینه‌ی «۱»

F یک به یک با برد B است. پس هر عضو از A دقیقاً به یک عضو از B نظیر می‌شود.

بنابراین دو عضو دیگر f به یکی از دو صورت $\{(d,d),(c,b)\}$ یا $\{(d,b),(c,d)\}$ است.

$$\begin{array}{lcl} \underline{A} & & \underline{B} \\ a & \longrightarrow & a \\ b & \searrow & b \\ c & & c \\ d & & d \end{array}$$

۲۱-گزینه‌ی «۲»

$$\left.\begin{array}{l}(۳,m^{۲})\in f\\(۳,m+۲)\in f\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^{۲}=m+۲\Rightarrow m^{۲}-m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \ \text{یا}\ m=-۱$$

$m=۲: f=\{(۳,۴),(۲,۱),(-۲,۲),(۲,۴)\}$ تابع نیست.

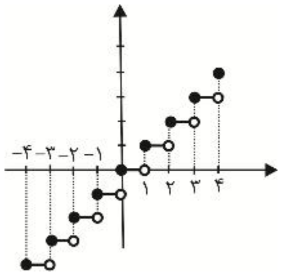
$m=-۱: f=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۲,-۱),(-۱,۴)\}$ تابع است.

۲۲-گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{array}{l}۱)\ x-۱>۰ \Rightarrow x>۱\\ ۲)\ ۱-\log(x-۱)\geq ۰ \Rightarrow \log(x-۱)\leq ۱\Rightarrow x-۱\leq ۱۰\Rightarrow x\leq ۱۱\end{array}\right\}\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} D=(۱,۱۱]$$

۲۳-گزینه‌ی «۲»

$[x]$ غیر یک به یک و یکنوا است. به نمودار آن توجه کنید:



۲۴-گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+x}=\sqrt{۲x} & x\geq ۰\\ \sqrt{x-x}=۰ & x<۰\end{cases}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{۰,۴\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\neq ۰ \text{ یا } ۴\}$$

$$f(x)\neq ۰\Rightarrow x>۰$$

$$f(x)\neq ۴\Rightarrow \sqrt{۲x}\neq ۴\Rightarrow ۲x\neq ۱۶\Rightarrow x\neq ۸$$

بنابراین: $D_{gof}=(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$

۲۵-گزینه‌ی «۲»

ریشه‌های $f(x)=x$ را پیدا می‌کنیم؛ چون $f(x)$ در $x\geq ۱$ صعودی اکید بوده و نقاط تقاطع f و $f^{-۱}$ حتماً روی $y=x$ قرار دارند.

$$x^۳-۳x=x\Rightarrow x^۳-۴x=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=\pm ۲\xrightarrow{x\geq ۱}x=۲$$

۲۶-گزینه‌ی «۱»

$$f(f(-۱))=f(\sqrt{۲-(-۱)-(-۱)^۲})=f(\sqrt{۲})=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-۲}=\sqrt{-\sqrt{۲}} \text{ تعریف نشده}$$

۲۷-گزینه‌ی «۳»

$$۴-|x-۱|\geq ۰\Rightarrow |x-۱|\leq ۴\Rightarrow -۴\leq x-۱\leq ۴\Rightarrow -۳\leq x\leq ۵$$

این بازه شامل ۹ عدد صحیح است.

۲۸-گزینه‌ی «۳»

نقطه‌ای پاسخ است که اگر مختصات آن را جابه‌جا کنیم در تابع داده شده صدق کند.

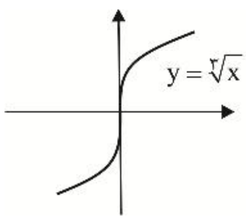
$$(۶۶,۴)\in f^{-۱}\Leftrightarrow (۴,۶۶)\in f\Leftrightarrow ۶۶=۴^۳+\sqrt{۴}$$

۲۹-گزینه‌ی «۱»

$$f(f(f(x)))=f(f(x+۲))=f(x+۲+۲)=f(x+۴)=x+۴+۲=x+۶$$

۳۰-گزینه‌ی «۳»

با فرض $y=۱$ در سه تابع داده شده در گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ برای x دو مقدار ± ۱ به دست می‌آید. پس هیچ کدام یک به یک نیستند. اما $y=\sqrt[۳]{x}$ صعودی اکید بوده و یک به یک می‌باشد. به نمودار آن توجه کنید:



آزمون (۶): دوره‌ی تناوب

۱- گزینه‌ی «۲»

نکته: دوره تناوب اصلی $\sin^{2k} ax$ برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$.

$$f(x+T)=f(x) \Rightarrow \begin{cases} x\notin Q: \text{T هر مقدار گویایی میتواند باشد} \\ x\in Q: T=\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2 \end{cases}$$

دو ضابطه‌ای که f را تشکیل داده‌اند، هر کدام در دامنه‌ی خود متناوب‌اند. پس دوره‌ی تناوب اصلی f، ک، م، م دوره‌ی تناوب آن‌هاست.

۲- گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=\sin(\cos 2x)$$

دوره‌ی تناوب اصلی $\cos 2x$ برابر $\frac{2\pi}{2}=\pi$ می‌باشد. بنابراین $T_1=\pi$.

$$g(x)=\cos(2\sin x)$$

دوره‌ی تناوب اصلی *sinx* برابر 2π است. ولی $T_2=\pi$ چون *cos* زوج است.

لذا $\frac{T_1}{T_2}=1$.

۳- گزینه‌ی «۳»

$$\tan ax-\cot ax=-2\cot 2ax \Rightarrow T=\frac{\pi}{|2a|}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow |a|=2$$

۴- گزینه‌ی «۲»

$$y_1=\sin^2 4x: T_1=\frac{\pi}{4}\ ,\ y_2=\cos 6x: T_2=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{ک.م.م}}[T_1,T_2]=\pi$$

۵- گزینه‌ی «۳»

$$f(x)=\frac{\tan(ax)}{1-\tan^2(ax)}=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan(ax)}{1-\tan^2(ax)}=\frac{1}{2}\tan(2ax)\ \Rightarrow\ T=\frac{\pi}{|2a|}=\frac{3}{2}\xrightarrow{a>0}3a=\pi\Rightarrow a=\frac{\pi}{3}$$

۶- گزینه‌ی «۳»

$$y_1=\sin ax: T_1=\frac{2\pi}{|a|}\ ,\ y_2=\cos 2ax: T_2=\frac{2\pi}{|2a|}=\frac{\pi}{|a|}\xrightarrow{\text{ک . م . م}}[\frac{2\pi}{|a|},\frac{\pi}{|a|}]=\frac{2\pi}{|a|}$$

$$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow |a|=8$$

۷- گزینه‌ی «۱»

نکته: دوره تناوب اصل $(-1)^{[ax]}$ برابر است با $\frac{2}{|a|}$.

$$y_1=(-1)^{[\frac{x}{\pi}]}\quad :T_1=\frac{2}{\frac{1}{\pi}}=2\pi\qquad ,\qquad y_2=\cos x\quad :T_2=\frac{2\pi}{1}=2\pi$$

بنابراین 2π یک دوره‌ی تناوب برای f است که با کمی دقت $x=\pi$ دوره تناوب اصلی می‌باشد.

۸- گزینه‌ی «۳»

$$y=\frac{۱}{۲}(\sin(۶k-\frac{\pi}{۴})+\sin(۴x+\frac{\pi}{۴}))\Rightarrow T=[\frac{۲\pi}{۶},\frac{۲\pi}{۴}]=\pi$$

۹- گزینه‌ی «۲»

$$y=\frac{\sin(۴x-\frac{\pi}{۴})}{\tan(۲x)+\cot(۲x)}=\frac{\sin(۴x-\frac{\pi}{۴})}{\frac{\sin^{۲}(۲x)+\cos^{۲}(۲x)}{\sin(۲x)\cos(۲x)}}=\frac{۱}{۲}\sin(۴x).\sin(۴x-\frac{\pi}{۴})$$

$$=\frac{۱}{۴}(\sin(۸x-\frac{\pi}{۴})+\frac{\sqrt{۲}}{۲})\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۸}=\frac{\pi}{۴}$$

۱۰-گزینه‌ی «۴»

$$y=\sin ۲x\cos ۴x$$

$$y_{۱}=\sin ۲x:T_{۱}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\ ,\ \ y_{۲}=\cos ۴x:T_{۲}=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{\text{ک.م.م}}[\pi,\frac{\pi}{۲}]=\pi$$

۱۱-گزینه‌ی «۲»

$$y_{۱}=(-۱)^{[x]}\qquad :T_{۱}=۲\qquad ,\qquad y_{۲}=x-[x]\qquad :T_{۲}=۱\xrightarrow{\text{ک.م.م}}[۲,۱]=۲$$

۱۲-گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=\sin\frac{\pi[x]}{۲}=\begin{cases}۰ & [x]=۲k\\ ۱ & [x]=۴k+۱\\ -۱ & [x]=۴k+۳\end{cases}\Rightarrow T_{۱}=۴$$

$$g(x)=\sin\frac{\pi x}{۲}\Rightarrow T_{۲}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$$

۱۳-گزینه‌ی «۲»

$$\cos|x|=\begin{cases}\cos x & x\geq ۰\\ \cos(-x) & x<۰\end{cases}\quad ,\ \cos(-x)=\cos|x|\ \Rightarrow\ \cos|x|=\cos x$$ که تابعی متناوب است.

۱۴-گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\sqrt{(|\sin ۲x|+|\cos ۲x|)^{۲}}=\sqrt{\sin^{۲}(۲x)+\cos^{۲}(۲x)+|۲\sin(۲x).\cos(۲x)|}=\sqrt{۱+|\sin ۴x|}$$

دوره‌ی تناوب اصلی $|\sin ۴x|$ برابر $\frac{\pi}{۴}$ است، پس دوره تناوب اصلی f نیز همین مقدار می‌باشد.

۱۵-گزینه‌ی «۴»

$$y=(\sin x+\cos x)^{۴}-۲\sin ۲x=(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x)^{۲}-۲\sin ۲x=(۱+\sin ۲x)^{۲}-۲\sin ۲x=$$

$$۱+\sin^{۲}۲x+۲\sin ۲x-۲\sin ۲x=۱+\sin^{۲}۲x\ \Rightarrow\ T=\frac{\pi}{۲}$$

آزمون (۷): مثلثات (اتحادها)

۱- گزینه‌ی «۳»

$$\frac{۱+\tan ۱۵}{۱-\tan ۱۵}=\frac{\tan ۴۵+\tan ۱۵}{۱-\tan ۴۵.\tan ۱۵}=\tan(۴۵+۱۵)=\tan ۶۰=\sqrt{۳}$$

۲- گزینه‌ی «۱»

$$\cancel{\sin ۷۰^\circ}\sin ۶۵^\circ\times\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cancel{\cos ۲۰^\circ}}+\sin ۷۰^\circ\cancel{\sin ۶۵^\circ}\times\frac{\sin ۲۵^\circ}{\cancel{\cos ۲۵^\circ}}=\sin ۶۵^\circ\cos ۷۰^\circ+\cos ۶۵^\circ.\sin ۷۰^\circ=\sin(۶۵^\circ+۷۰^\circ)=\sin(۱۳۵^\circ)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳- گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$؛ بنابراین داریم:

$$\tan^۲ x+۴\tan^۲ y=(\frac{۱}{\cos^۲ x}-۱)+۴(\frac{۱}{\cos^۲ y}-۱)=(\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}-۱)+۴(\frac{۱}{\frac{۴}{۹}}-۱)=۳+۴\times\frac{۵}{۴}=۸$$

۴- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{۲\sin ۲۰^\circ-۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ}{۲\sin ۲۰^\circ+۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ}=\frac{۱-\cos ۲۰^\circ}{۱+\cos ۲۰^\circ}=\frac{۲\sin^۲ ۱۰^\circ}{۲\cos^۲ ۱۰^\circ}=\tan^۲ ۱۰^\circ$$

۵- گزینه‌ی «۲»

$$۲\tan ۲۰^\circ-(\cot ۱۰^\circ-\tan ۱۰^\circ)=۲\tan ۲۰^\circ-۲\cot ۲۰^\circ=-۲(\cot ۲۰^\circ-\tan ۲۰^\circ)=-۲\times ۲\cot ۴۰^\circ=-۴\cot ۴۰^\circ=-۴\tan ۵۰^\circ$$

۶- گزینه‌ی «۴»

$$\sqrt{۲}\sin ۷۵^\circ\sin ۱۳۵^\circ\sin ۱۶۵^\circ=\sqrt{۲}\cos ۱۵^\circ\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\sin ۱۵^\circ=\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۴}$$

۷- گزینه‌ی «۱»

$$\cos^۴\frac{\pi}{۸}-\sin^۴\frac{\pi}{۸}=(\cos^۲\frac{\pi}{۸}-\sin^۲\frac{\pi}{۸})\overbrace{(\cos^۲\frac{\pi}{۸}+\sin^۲\frac{\pi}{۸})}^{۱}=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۸- گزینه‌ی «۳»

$$\tan ۲x=\tan((x+y)+(x-y))=\frac{\tan(x+y)+\tan(x-y)}{۱-\tan(x+y).\tan(x-y)}=\frac{(a+۱)+(۱-a)}{۱-(a+۱)(۱-a)}=\frac{۲}{۱+(a^۲-۱)}=\frac{۲}{a^۲}$$

۹- گزینه‌ی «۳»

$$\sin ۱۶۵^\circ\cos ۳۴۵^\circ=\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۴}$$

۱۰- گزینه‌ی «۳»

$$\frac{۲\sin(A+B)-۱}{۴\cos A.\cos B}=\frac{\sin(A+B)-\frac{۱}{۲}}{۲\cos A.\cos B}=\frac{\sin(A+B)-\sin(A-B)}{۲\cos A.\cos B}=\frac{۲\sin B.\cos A}{۲\cos A.\cos B}=\tan B$$

۱۱- گزینه‌ی «۳»

$$\sin(\frac{\pi}{۳}+a).\cos(\frac{\pi}{۶}+a)+\sin^۲ a=\frac{۱}{۲}(\sin(\frac{\pi}{۲}+۲a)+\sin\frac{\pi}{۶})+\sin^۲ a=\frac{۱}{۲}(\cos ۲a+\frac{۱}{۲})+\sin^۲ a=\cancel{\frac{۱}{۲}\cos ۲a}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}-\cancel{\frac{۱}{۲}\cos ۲a}=\frac{۳}{۴}$$

۱۲- گزینه‌ی «۱»

$$\tan ۷۵^\circ-\tan ۶۰^\circ=\frac{\sin(۷۵^\circ-۶۰^\circ)}{\cos ۷۵^\circ \cos ۶۰^\circ}=\frac{\cancel{\sin ۱۵^\circ}}{\cancel{\cos ۷۵^\circ}\ \cos ۶۰^\circ}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

۱۳- گزینه‌ی «۳»

روش اول:

$$\text{می‌دانیم}:\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\tan\frac{۵\pi}{۴}=۱\Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta=۱-\tan\alpha.\tan\beta$$

$$\Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=۱$$

$$\text{اکنون داریم}:(۱+\tan\alpha)(۱+\tan\beta)=۱+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=۱+۱=۲$$

روش دوم: با فرض $\alpha=۰$ و $\beta=\frac{۵\pi}{۴}$ داریم:

$$(۱+\tan\alpha)(۱+\tan\beta)=(۱+\tan ۰)(۱+\tan\frac{۵\pi}{۴})=۱\times(۱+۱)=۲$$

۱۴- گزینه‌ی «۲»

$$\frac{\cos^۲ ۵x-\cos^۲ x}{\sin ۴x}=\frac{\frac{۱+\cos ۱۰x}{۲}-\frac{۱+\cos ۲x}{۲}}{\sin ۴x}=\frac{\frac{۱}{۲}(\cos ۱۰x-\cos ۲x)}{\sin ۴x}=\frac{\frac{۱}{۲}\times(-۲)\sin ۴x\sin ۶x}{\sin ۴x}=-\sin ۶x$$

۱۵- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{\sin x.\cos ۳x}{\sin ۲x}-\cos ۲x=\frac{\sin x.\cos ۳x-\sin ۲x\cos ۲x}{\sin ۲x}=\frac{\frac{۱}{۲}(\sin ۴x+\sin(-۲x))-\frac{۱}{۲}\cancel{\sin ۴x}}{\sin ۲x}=\frac{-\frac{۱}{۲}\sin ۲x}{\sin ۲x}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۶- گزینه‌ی «۲»

$$\frac{۱}{۱+\tan\frac{\pi}{۹}}+\frac{۱}{۱+\cot\frac{\pi}{۹}}=\frac{۱+\cot\frac{\pi}{۹}+۱+\tan\frac{\pi}{۹}}{۱+\tan\frac{\pi}{۹}+\cot\frac{\pi}{۹}+\underbrace{\tan\frac{\pi}{۹}.\cot\frac{\pi}{۹}}_{۱}}=\frac{۲+\tan\frac{\pi}{۹}+\cot\frac{\pi}{۹}}{۲+\tan\frac{\pi}{۹}+\cot\frac{\pi}{۹}}=۱$$

۱۷- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{\sin^۲ ۴۰^\circ-\sin^۲ ۱۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ+\cos ۱۰^\circ}=\frac{\frac{۱-\cos ۸۰^\circ}{۲}-\frac{۱-\cos ۲۰^\circ}{۲}}{۲\cos ۴۰^\circ\cos ۳۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}(\cos ۲۰^\circ-\cos ۸۰^\circ)}{۲\cos ۴۰^\circ\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times(-۲)\sin(-۳۰^\circ)\sin ۵۰^\circ}{\sqrt{۳}\cos ۴۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۵۰^\circ}{\sqrt{۳}\sin ۵۰^\circ}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

۱۸- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{۱+\cos\theta}{\sin^۳\theta}-\frac{۱}{\sin\theta(۱-\cos\theta)}=\frac{(۱-\cos^۲\theta)-\sin^۲\theta}{\sin^۳\theta(۱-\cos\theta)}=\frac{\sin^۲\theta-\sin^۲\theta}{\sin^۳\theta(۱-\cos\theta)}=۰$$

۱۹- گزینه‌ی «۴»

$$\frac{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}=\frac{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta).\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos ۱۳۵^\circ.\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta).\sin ۱۳۵^\circ}=$$

$$\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos(\alpha-\beta)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin(\alpha-\beta)}=\frac{-۱}{\tan(\alpha-\beta)}=\frac{-۴}{۳}$$

۲۰-گزینه‌ی «۲»

$$\frac{\sin ۵a-\sin ۳a}{\cos ۵a-\cos ۳a}=\frac{۲\sin a\cos ۴a}{-۲\sin a\sin ۴a}=-\cot ۴a=-\cot ۳۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

۲۱-گزینه‌ی «۴»

$$\frac{۴\cos ۴۰^\circ\cos ۲۰^\circ-۱}{\cos ۲۰^\circ}=\frac{۴\times\frac{۱}{۲}(\cos ۶۰^\circ+\cos ۲۰^\circ)-۱}{\cos ۲۰^\circ}=\frac{۲(\frac{۱}{۲}+\cos ۲۰^\circ)-۱}{\cos ۲۰^\circ}=۲$$

۲۲-گزینه‌ی «۳»

$$\frac{\sqrt{۱+\sin ۵۰^\circ}}{\sin ۵۰^\circ+\sin ۱۰^\circ}=\frac{\sqrt{۱+\cos ۴۰^\circ}}{۲\sin ۳۰^\circ\cos ۲۰^\circ}=\frac{\sqrt{۲\cos^۲ ۲۰^\circ}}{\cos ۲۰^\circ}=\frac{\sqrt{۲}|\cos ۲۰^\circ|}{\cos ۲۰^\circ}=\sqrt{۲}$$

۲۳-گزینه‌ی «۱»

$$\sin^۲ x+۲\cos^۲ x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۱+\cos^۲ x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۱}{۲}$$

$$۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲\Rightarrow \tan^۲ x=۱$$

۲۴-گزینه‌ی «۴»

$$۲+\sin x\cos x=۲+\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

می‌دانیم: $-۱\le\sin ۲x\le ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le\frac{۱}{۲}\sin ۲x\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{۳}{۲}\le ۲+\frac{۱}{۲}\sin ۲x\le\frac{۵}{۲}$

۲۵-گزینه‌ی «۲»

$$A=\sin x\cos x+\sin^۲ x-\cos^۲ x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x-\cos ۲x$$

نکته: $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^۲+b^۲}$

طبق این نکته داریم:

$$|\frac{۱}{۲}\sin ۲x-\cos ۲x|\le\sqrt{\frac{۱}{۴}+۱}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۲۶-گزینه‌ی «۳»

$$\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan\alpha}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}.\tan\alpha}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}$$

می‌دانیم: $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow ۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow \cot^۲\alpha=\frac{۱۶}{۹}\xrightarrow{\alpha\ \text{منفرجه}}\cot\alpha=\frac{-۴}{۳}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{-۳}{۴}$

بنابراین: $\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{۱+\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۷}{۴}}=\frac{۱}{۷}$

۲۷-گزینه‌ی «۱»

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{A}{۳}=\cos B \Rightarrow \frac{A}{۳}+B=۹۰^\circ \\ A+B+C=۱۸۰^\circ \xrightarrow{C=۶۰^\circ} A+B=۱۲۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۲A}{۳}=۳۰^\circ \Rightarrow A=۴۵^\circ \Rightarrow B=۷۵^\circ$$

۲۸-گزینه‌ی «۳»

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-\pi)=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow ۵-۵\tan\alpha=۱+\tan\alpha \Rightarrow ۶\tan\alpha=۴ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۲}{۳}$$

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲\times\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۲۹-گزینه‌ی «۲»

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۲}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{۱-\frac{۳}{۲}}{۱+\frac{۳}{۲}}=\frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{۵}{۲}}=\frac{-۱}{۵}$$

۳۰-گزینه‌ی «۴»

$$۴\sin ۸^\circ \cos ۸^\circ \cos ۱۶^\circ=۲\sin ۱۶^\circ \cos ۱۶^\circ=\sin ۳۲^\circ$$

آزمون (۸): معادلات مثلثاتی

۱- گزینه‌ی «۴»

$$۲\sin(\pi\cos x)=-۱ \Rightarrow \sin(\pi\cos x)=\sin(-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow \begin{cases} \pi\cos x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \cos x=۲k-\frac{۱}{۶} \xrightarrow{|\cos x|\le ۱} \cos x=\frac{-۱}{۶} \\ \pi\cos x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \cos x=۲k+\frac{۷}{۶} \xrightarrow{|\cos x|\le ۱} \cos x=\frac{-۵}{۶} \end{cases}$$

هر کدام از دو معادله‌ی به دست آمده در $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارند؛ بنابراین در مجموع معادله در این بازه دارای ۴ جواب است.

۲- گزینه‌ی «۳»

$$\cos ۲x=\cos x+۲ \Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱=\cos x+۲ \Rightarrow ۲\cos^۲ x-\cos x-۳=۰ \Rightarrow (۲\cos x-۳)(\cos x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{۳}{۲} \quad \text{غ ق ق} \\ \cos x=-۱ \xrightarrow{-\pi\le x\le\pi} x=\pm\pi \Rightarrow \text{مجموع جواب ها}=\pi-\pi=۰ \end{cases}$$

۳- گزینه‌ی «۱»

$$۲\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۳\sin(x-\frac{\pi}{۸})-۵=۰ \Rightarrow (۲\sin(x-\frac{\pi}{۸})+۵)(\sin(x-\frac{\pi}{۸})-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x-\frac{\pi}{۸})=\frac{-۵}{۲} \quad \text{غ ق ق} \\ \sin(x-\frac{\pi}{۸})=۱ \Rightarrow x-\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۸} \xrightarrow{-\pi\le x\le\pi} x=\frac{۵\pi}{۸} \end{cases}$$

۴- گزینه‌ی «۴»

$$\cos ۲x=\sin x-\cos x \Rightarrow \cos^۲ x-\sin^۲ x=-(\cos x-\sin x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x-\sin x=۰ \Rightarrow \cos x=\sin x \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴} \\ \cos x+\sin x=-۱ \Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=-۱ \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=-\frac{\pi}{۲} \\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

پس نهایتاً ۴ جواب دارد.

۵- گزینه‌ی «۳»

$$\underline{\cos ۲x}+\cos ۴x+\underline{\cos ۶x}=۰ \Rightarrow ۲\cos ۴x\cos ۲x+\cos ۴x=۰ \Rightarrow \cos ۴x(۲\cos ۲x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۴x=۰ \Rightarrow ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸} \xrightarrow{۰\le x\le \frac{\pi}{۲}} x=\frac{\pi}{۸},\frac{۳\pi}{۸} \\ \cos ۲x=\frac{-۱}{۲} \Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{۰\le x\le \frac{\pi}{۳}} x=\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

لذا این معادله ۳ جواب در بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ دارد.

۶- گزینه‌ی «۳»

$$-\frac{۱۱\pi}{۶}<x<-\frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<\sin x\le ۱$$

معادله‌ی داده شده با فرض $A=\sin x$ یک معادله‌ی درجه‌ی دوم بر حسب A است که با توجه به بازه‌ی به دست آمده برای $sinx$، ریشه (ها)ی این معادله باید در بازه‌ی $(\frac{۱}{۲},۱]$ قرار گیرند. داریم:

$$A^{۲}-۲(a+۱)A+۴a=۰$$

$\Delta'=(a+۱)^{۲}-۴a=a^{۲}-۲a+۱=(a-۱)^{۲}\geq ۰$ همواره دارای ریشه است.

$$A=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=(a+۱)\pm|a-۱|\Rightarrow\begin{cases}A=a+۱-(a-۱)=۲ & \text{غ ق ق}\\ A=a+۱+(a-۱)=۲a\Rightarrow\frac{۱}{۲}<۲a\leq ۱\Rightarrow\frac{۱}{۴}<a\leq\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

۷- گزینه‌ی «۱»

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})+\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۸- گزینه‌ی «۱»

$$(x+\frac{\pi}{۳})-(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۳})=\cos(x-\frac{\pi}{۶})$$

این رابطه به ازای $x\in\mathbb{R}$ برقرار است.

۹- گزینه‌ی «۴»

$$۱+\cos x=۴(۲\cos^{۲}x-۱)\Rightarrow ۸\cos^{۲}x-\cos x-۵=۰\Rightarrow\cos x=\frac{۱\pm\sqrt{۱۶۱}}{۱۶}$$

هر دو جواب فوق در بازه‌ی $(-۱,۱)$ قرار دارند. پس برای هر کدام در یک دور مثلثاتی دو جواب یافت می‌شود. پس در بازه‌ی $[۰,۴\pi]$، ۸ جواب برای این معادله وجود دارد.

۱۰-گزینه‌ی «۳»

$$\cos ۶x=-\sin ۴x\Rightarrow\sin(۶x+\frac{\pi}{۲})=\sin(-۴x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۶x+\frac{\pi}{۲}=۲k\pi-۴x\Rightarrow ۱۰x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}-\frac{\pi}{۲۰}\xrightarrow{۰\leq x\leq\pi}x=\frac{۳\pi}{۲۰},\frac{۷\pi}{۲۰},\frac{۱۱\pi}{۲۰},\frac{۱۵\pi}{۲۰},\frac{۱۹\pi}{۲۰}\\ ۶x+\frac{\pi}{۲}=۲k\pi+\pi+۴x\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{۰\leq x\leq\pi}x=\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

پس در این بازه ۶ جواب دارد.

۱۱-گزینه‌ی «۴»

روش اول:

$$\sin ۳x=۲\sin x\Rightarrow\sin(۲x+x)=۲\sin x\Rightarrow\sin ۲x\cos x+\cos ۲x.\sin x=۲\sin x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\xrightarrow{۰\leq x\leq ۲\pi}x=۰,\pi,۲\pi\Rightarrow \text{۳ جواب}\\ ۲\cos^{۲}x+\cos ۲x=۲\Rightarrow ۲\cos^{۲}x-۱+\cos ۲x=۱\Rightarrow ۲\cos ۲x=۱\Rightarrow\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow \text{۴ جواب}\end{cases}$$

بنابراین مجموعه ۷ جواب در بازه دارد.

روش دوم:

$$\sin ۳x=۲\sin x\xrightarrow{\times\cos x\neq ۰}\sin ۳x\cos x=۲\sin x\cos x\Rightarrow\frac{۱}{۲}(\sin ۴x+\sin ۲x)=\sin ۲x$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sin ۴x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x=\sin ۲x\Rightarrow\begin{cases}\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\\ \cos ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} x=۰,\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi$$

$$\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶},\frac{۷\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}$$

اما توجه داشته باشید در ابتدای حل ما دو طرف معادله را با شرط $\cos x\neq ۰$ در $\cos x$ ضرب کردیم. پس از میان جواب‌های به دست آمده $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ قابل قبول نیستند. بنابراین تعداد جواب‌ها ۷ است.

۱۲-گزینه‌ی «۴»

$$\cos ۲x-۵\cos x+۳=۰\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۵\cos x+۲=۰\Rightarrow \cos x=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۱۶}}{۴}=\frac{۵\pm۳}{۴}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۲ & \text{غ ق ق}\\ \cos x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۳-گزینه‌ی «۴»

$$\cos(x+\frac{\pi}{۳})\cos(x-\frac{\pi}{۳})=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow \frac{۱}{۲}(\cos ۲x+\cos\frac{۲\pi}{۳})=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow \cos ۲x-\frac{۱}{۲}=-۱\Rightarrow \cos ۲x=\frac{-۱}{۲}$$

$$\Leftrightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۴-گزینه‌ی «۴»

$$\sin ۳x-\sin x=۱-۲\sin^۲ x\Rightarrow ۲\sin x\cos ۲x=\cos ۲x\Rightarrow\begin{cases}\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}\end{cases}$$

پس در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ مجموعاً ۶ جواب دارد.

۱۵-گزینه‌ی «۳»

$$(\sin x-\tan x)\cot x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow \cos x-۱=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۶-گزینه‌ی «۲»

$$\underline{\sin x}+\sin ۲x+\underline{\sin ۳x}=۰\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos x+\sin ۲x=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\\ \cos x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

۱۷-گزینه‌ی «۳»

$$۲\sin x\cos ۳x=۱+\cos(\frac{\pi}{۲}+۲x)\Rightarrow \sin ۴x+\cancel{\sin(-۲x)}=۱-\cancel{\sin ۲x}\Rightarrow ۴x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$

۱۸-گزینه‌ی «۱»

روش اول:

$$\tan x+\cot x=\sqrt{۳}\Rightarrow \frac{۲}{\sin ۲x}=\sqrt{۳}\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}>۱\quad \text{غ ق ق}$$

پس این معادله فاقد جواب است.

روش دوم: $\tan x , \cot x$ معکوس یکدیگرند. می‌دانیم: $|a+\frac{1}{a}|\geq ۲$. پس امکان ندارد این معادله برقرار شود؛ چرا که $\sqrt{۳}$ در بازه‌ی $(-۲,۲)$ قرار دارد.

۱۹-گزینه‌ی «۴»

$$\cos^{۲} x+۳\sin(\frac{\pi}{۲}+x)+۲=۰ \Rightarrow \cos^{۲} x+۳\cos x+۲=۰ \Rightarrow (\cos x+۱)(\cos x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=-۲ \quad \text{غ ق ق} \\ \cos x=-۱ \Rightarrow x=۲k\pi+\pi \end{cases}$$

۲۰-گزینه‌ی «۲»

$$۲\frac{\sin x}{\cos x}.\cos^{۲} x=۱ \xrightarrow{\cos x\neq ۰} \sin ۲x=۱ \Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۲۱-گزینه‌ی «۱»

$$\cos ۳x.\sin x-\sin ۳x(-\cos x)=۰ \Rightarrow \sin x\cos ۳x+\cos x\sin ۳x=۰ \Rightarrow \sin(x+۳x)=۰$$

$$\Rightarrow \sin ۴x=۰ \Rightarrow ۴x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}$$

۲۲-گزینه‌ی «۲»

$$\sin x\cos ۶x+\cos x\sin ۶x=۱ \Rightarrow \sin ۷x=۱ \Rightarrow ۷x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۷}+\frac{\pi}{۱۴} \xrightarrow{k=۱} x=\frac{۵\pi}{۱۴}$$

۲۳-گزینه‌ی «۱»

$$\cos ۵x\cos ۳x=\cos^{۲} x \Rightarrow \frac{۱}{۲}(\cos ۸x+\cos ۲x)=\cos^{۲} x \Rightarrow \cos ۸x+\cancel{۲\cos^{۲} x}-۱=\cancel{۲\cos^{۲} x}$$

$$\Rightarrow \cos ۸x=۱ \Rightarrow ۸x=۲k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}$$

۲۴-گزینه‌ی «۱»

$$۴\sin^{۲} x\cos^{۲} x=۴\sqrt{۲} \Rightarrow \sin^{۲} ۲x=۴\sqrt{۲}$$

$\sin^{۲}\alpha \leq ۱$:می‌دانیم

با توجه به این که $۴\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر از ۱ است، این معادله جواب ندارد.

۲۵-گزینه‌ی «۴»

$$\cos^{۳} x+۳\cos x-۴=۰ \xrightarrow{\text{جمع ضرائب برابر صفر}} (\cos x-۱)(\cos^{۲} x+\cos x+۴)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi \xrightarrow{۰\leq x\leq ۲\pi} x=۰ , ۲\pi \\ \cos^{۲} x+\cos x+۴=۰ \quad \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

آزمون (۹): معکوس مثلثاتی

۱- گزینه‌ی «۱»

$$\sin^{-1}\frac{۳}{۵}=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۳}{۵}\ ,۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha} \Rightarrow \cot^{۲}\alpha=\frac{۲۵}{۹}-۱ \xrightarrow{۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}} \cot\alpha=\frac{۴}{۳} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۴}$$

۲- گزینه‌ی «۴»

$$\cos^{-۱}(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\underbrace{\tan^{-۱}\frac{۳}{۷}}_{\alpha}+\underbrace{\tan^{-۱}\frac{۲}{۵}}_{\beta})=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{\frac{۳}{۷}+\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۶}{۳۵}}=\frac{۲۹}{۲۹}=۱$$

$\text{حاصل عبارت}=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$

۳- گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم: $۲\cos^{۲}\alpha=۱+\cos ۲\alpha \Rightarrow ۲\cos^{۲}(\frac{۱}{۲}\cos^{-۱}x)=۱+\cos(\cos^{-۱}x)=۱+x$

۴- گزینه‌ی «۲»

فرض می‌کنیم $\tan^{-۱}۲=\alpha$؛ بنابراین $\tan\alpha=۲$. داریم:

$$\tan(\frac{۳\pi}{۴}-۲\alpha)=\frac{\tan\frac{۳\pi}{۴}-\tan ۲\alpha}{۱+\tan\frac{۳\pi}{۴}.\tan ۲\alpha}=\frac{-۱-\tan ۲\alpha}{۱-\tan ۲\alpha}\stackrel{(*)}{=}\frac{-۱+\frac{۴}{۳}}{۱+\frac{۴}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۷}{۳}}=\frac{۱}{۷}$$

$$(*):\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}=\frac{۲\times۲}{۱-۴}=-\frac{۴}{۳}$$

۵- گزینه‌ی «۱»

$$\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{۴}{۵} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۴}$$

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan.\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}+۱}{۱-\frac{۳}{۴}}=\frac{۷}{۱}=۷$$

۶- گزینه‌ی «۱»

$$\underbrace{A=\tan^{-۱}(۱-m)}_{\alpha}+\underbrace{\tan^{-۱}(\frac{m}{۲-m})}_{\beta} \Rightarrow \tan A=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\Rightarrow \tan A=\frac{(۱-m)+(\frac{m}{۲-m})}{۱-(۱-m)(\frac{m}{۲-m})}=\frac{۲-۲m-\cancel{m}+m^{۲}+\cancel{m}}{۲-m-m+m^{۲}}=\frac{m^{۲}-۲m+۲}{m^{۲}-۲m+۲}=۱ \Rightarrow A=\tan^{-۱}۱=\frac{\pi}{۴}$$

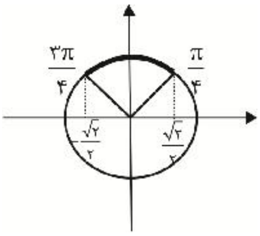
۷- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{\sin x+\cos x}{۲}=\frac{\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{۲}$$

می‌دانیم: $-1 \le \sin(x+\frac{\pi}{4}) \le 1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{2}) \le \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow a=\frac{\pi}{4}, b=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow b-a=\frac{\pi}{2}$

برای درک بهتر به شکل زیر توجه کنید.



۸- گزینه‌ی «۲»

نکته: $\tan^{-1} x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2} \quad (x>0)$

بنابراین به ازای $a=\frac{1}{2}$ مقدار عبارت برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌شود. اما اگر a بیشتر از $\frac{1}{2}$ اختیار شود مقدار عبارت بیش از $\frac{\pi}{2}$ خواهد شد. پس جواب $a<\frac{1}{2}$ است.

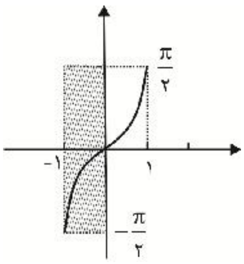
۹- گزینه‌ی «۲»

نکته: $\tan^{-1} x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{-\pi}{2} \quad (x<0)$

پس اولاً $x<0$ و ثانیاً باید داشته باشیم: $3x=\frac{1}{x} \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{x<0} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۰-گزینه‌ی «۴»

مساحت خواسته شده با مساحت مستطیل مقابل برابر است یعنی $S=1\times\pi=\pi$



۱۱-گزینه‌ی «۲»

$\sin^{-1}\frac{12}{13}=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{12}{13} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{5}{13}$

$\cos(x-\alpha)=0/3 \Rightarrow \cos x.\cos\alpha+\sin x.\sin\alpha=0/3 \Rightarrow \frac{5}{13}\cos x+\frac{12}{13}\sin x=\frac{3}{10} \Rightarrow 5\cos x+12\sin x=3/9$

۱۲-گزینه‌ی «۳»

$$\tan^{-1} x=\alpha \Rightarrow \sin 3\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{18} \xrightarrow{-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}} \alpha=\frac{\pi}{18} \\ 3\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{3}+\frac{5\pi}{18} \xrightarrow{-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}} \alpha=\frac{-7\pi}{18}, \frac{5\pi}{18} \end{cases}$$

به ازای هر یک جواب‌های به دست آمده برای α، با توجه تساوی $\alpha=\tan^{-1} x$ یک جواب برای x به دست می‌آید پس ۳ جواب برای x به دست می‌آید.

۱۳-گزینه‌ی «۲»

$$\sin^{-1} x=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=x \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

با توجه به مثبت بودن x کمان در ربع اول قرار داشته و tan آن مثبت است.

۱۴-گزینه‌ی «۲»

$$\pi+2\cos^{-1} x=2\sin^{-1} x \Rightarrow \sin^{-1} x-\cos^{-1} x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1} x-(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1} x)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin^{-1} x=\frac{\pi}{2}\to x=1$$

۱۵-گزینه‌ی «۴»

$$\tan^{-1}\frac{1}{3}=\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{3} \ , 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{9}{10}$$

$$\cos(2\tan^{-1}\frac{1}{3})=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\frac{9}{10}-1=\frac{9}{5}=\frac{4}{5}=0/8$$

۱۶-گزینه‌ی «۱»

توابع $y_1=(1+\sqrt{x})$ ، $y_2=\tan^{-1} x$ ، $y_3=2x$ همگی صعودی‌اند، بنابراین P صعودی بوده و با توجه به دامنه که برابر $D_P=[0,+\infty)$ است، حداقل مقدار آن به ازای $x=0$ به دست می‌آید:

$$x=0 \Rightarrow P=0+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}(1)=\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}$$

۱۷-گزینه‌ی «۲»

$$\cos^{-1}(\sin\frac{5\pi}{3})=\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{5\pi}{6}$$

۱۸-گزینه‌ی «۴»

روش اول:

نکته: تساوی $\sin^{-1}\sin x=x$ به شرطی برقرار است که $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

لذا قبل از آن که از دو طرف معادله $\sin^{-1}$ بگیریم، کمان را در بازه‌ی $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}\le\pi x\le\frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{2}\le-\pi x\le\frac{-\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}\le\pi-\pi x\le\frac{\pi}{2}$$

$$y=\sin(\pi x)=\sin(\pi-\pi x) \Rightarrow \sin^{-1} y=\pi-\pi x \Rightarrow \pi x=\pi-\sin^{-1} y\Rightarrow x=1-\frac{1}{\pi}\sin^{-1} y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=1-\frac{1}{\pi}\sin^{-1} x$$

روش دوم:

$f(1)=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=1 \Rightarrow$ حذف گزینه‌های ۱ و ۳

$f(\frac{1}{2})=1 \Rightarrow f^{-1}(1)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ حذف گزینه‌ی ۲

۱۹-گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\min \to \frac{a+b}{1-2}=-1 \to a+b=1 \\ f(3)=\max\to\frac{3a+b}{3-2}=1\to 3a+b=1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

۲۰-گزینه‌ی «۳»

$$\sin(\sin^{-1}\frac{۲}{۳}+\underbrace{\sin^{-1}\frac{۲}{۳}+\cos^{-1}\frac{۲}{۳}}_{\frac{\pi}{۲}})=\sin(\frac{\pi}{۲}+\sin^{-1}\frac{۲}{۳})=\cos(\sin^{-1}\frac{۲}{۳})=\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

آزمون (۱۰): مثلثات

۱- گزینه‌ی «۲»

با توجه به این که $۳۶۰^\circ>۲۸۳^\circ>۲۷۰^\circ$، پس x در ربع سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار داشته و sin و tan آن منفی و cos و cot آن مثبت است. هم‌چنین می‌دانیم همواره $|\sin x|\leq|\tan x|$؛ بنابراین: $-(\sin x)<-(\tan x)\Rightarrow \sin x>\tan x$

۲- گزینه‌ی «۱»

در نیمه‌ی اول ربع اول دایره‌ی مثلثاتی مقدار کسینوس زاویه از سینوس آن بیشتر است و هر دو مثبت‌اند؛ پس گزینه ۱ نادرست است.

۳- گزینه‌ی «۲»

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۲}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱-\frac{۳}{۲}}{۱+\frac{۳}{۲}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۵}{۲}}=\frac{-۱}{۵}$$

۴- گزینه‌ی «۲»

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\cos x\sin\frac{\pi}{۴}+\cos x\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x+\cos x)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۵- گزینه‌ی «۴»

$$\sin x+\cos x=۱\Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi\\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

فرض می‌کنیم $x=۰$: $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$

۶- گزینه‌ی «۲»

$$(\tan ۳۵^\circ+\tan ۲۰^\circ)\sin ۲۰^\circ=\frac{\sin(۳۵^\circ+۲۰^\circ)}{\cos ۳۵^\circ.\cos ۲۰^\circ}\times\sin ۲۰^\circ=\frac{\sin ۵۵^\circ.\sin ۲۰^\circ}{\sin ۵۵^\circ.\cos ۲۰^\circ}=\tan ۲۰^\circ$$

۷- گزینه‌ی «۳»

$$\sin\alpha=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\sqrt{۱-(\frac{۳}{۵})^{۲}}=\frac{-۴}{۵}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{۱+\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۷}{۴}}=\frac{۱}{۷}$$

۸- گزینه‌ی «۲»

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}=\frac{\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۱}{۹}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۸}{۹}}=\frac{۳}{۴}$$

$$\tan(۲x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan ۲x+۱}{۱-\tan ۲x}=\frac{\frac{۳}{۴}+۱}{۱-\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۷$$

۹- گزینه‌ی «۱»

روش اول:

$$\sin x+\cos x=-\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=-1 \Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$$

$$x=-\frac{3\pi}{4} : \sin^3 x+\cos^5 x=(-\frac{\sqrt{2}}{2})^3+(-\frac{\sqrt{2}}{2})^5=-\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{-4\sqrt{2}}{32}=\frac{-3\sqrt{2}}{8}$$

روش دوم:

$$\sin x+\cos x=-\sqrt{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=2 \Rightarrow 1+\sin 2x=2 \Rightarrow \sin 2x=1$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \xrightarrow{(\sin x+\cos x)<0} x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$$

ادامه‌ی حل مشابه روش قبل است.

۱۰-گزینه‌ی «۳»

نکته: $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)=1+\cos x \Rightarrow \cos x-\sin=1+\cos x \Rightarrow \sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

۱۱-گزینه‌ی «۲»

با توجه به این که $\tan$ و $\cot$ معکوس یکدیگرند و می‌دانیم $|a+\frac{1}{a}|\geq 2$، پس حدود $k-1$ به صورت زیر است:

$$k-1\geq 2 \text{ یا } k-1\leq -2 \Rightarrow k\geq 3 \text{ یا } k\leq -1$$

۱۲-گزینه‌ی «۲»

$$\left.\begin{array}{l} -1\leq \sin^3 x\leq 1 \\ -2\leq 2\sin x\leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow -3\leq \sin^3 x+2\sin x\leq 3$$

پس امکان ندارد این عبارت برابر ۴ شود و گزینه‌ی ۲ نادرست است.

در گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ به ترتیب با قرار دادن مقادیر ۱، ۱- و صفر به جای *sinx* معادله برقرار می‌شود.

۱۳-گزینه‌ی «۳»

$$\text{عبارت}=(-\sin x)(-\sin x)-2\sin x+1=\sin^2 x-2\sin x+1=(\sin x-1)^2=0 \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۱۴-گزینه‌ی «۴»

$$\cos^3 x+3\cos x-4=0 \xrightarrow{\cos x=A} A^3+3A-4=0$$

جمع ضرایب معادله‌ی فوق برابر صفر است. پس $A=1$ ریشه‌ی آن بوده و با تقسیم آن بر $A-1$ داریم:

$$A^3+3A-4=0 \Rightarrow (A-1)(A^2+A+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} A-1=0 \Rightarrow A=1 \Rightarrow \cos x=1 \xrightarrow{0\leq x\leq 2\pi} x=0, 2\pi \\ A^2+A+4=0 \rightarrow \Delta<0 \text{ ریشه ندارد} \end{cases}$$

۱۵-گزینه‌ی «۱»

نکته: $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$$\tan(x+\frac{\pi}{4})+\tan(x-\frac{\pi}{4})=$$

$$\frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴}+x-\frac{\pi}{۴})}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})}=\frac{\sin ۲x}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})\sin(x-\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۲})}=\frac{۲\sin ۲x}{۲\sin(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x+\frac{\pi}{۴})}=\frac{۲\sin ۲x}{\sin(۲x+\frac{\pi}{۲})}$$

$$=\frac{۲\sin ۲x}{\cos ۲x}=۲\tan ۲x=۲\sqrt{۳} \Rightarrow \tan ۲x=\sqrt{۳} \Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$$

۱۶-گزینه‌ی «۱»

۱۷-گزینه‌ی «۲»

۱۸-گزینه‌ی «۴»

۱۹-گزینه‌ی «۳»

$$\frac{(\sin x+\cos x)^۲}{(\sin x-\cos x)^۲}=\frac{۱+\sin ۲x}{۱-\sin ۲x}=\frac{۱+\sin\frac{\pi}{۶}}{۱-\sin\frac{\pi}{۶}}=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۳$$

۲۰-گزینه‌ی «۳»

$$\frac{\tan ۳x+\tan x}{\tan ۳x-\tan x}=\frac{\frac{\sin(۳x+x)}{\cos ۳x\cos x}}{\frac{\sin(۳x-x)}{\cos ۳x\cos x}}=\frac{\sin ۴x}{\sin ۲x}=\frac{۲\sin ۲x\cos ۲x}{\sin ۲x}=۲\cos ۲x$$

۲۱-گزینه‌ی «۴»

$$\cos ۱۲^\circ+\cos ۴۸^\circ=۲\cos ۳۰^\circ\cos ۱۸^\circ=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times a\sqrt{۳}=۳a$$

۲۲-گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{aligned}&\cos\frac{۵\pi}{۱۴}=\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۱۴})=\sin\frac{\pi}{۷}\\&\sin\frac{۶\pi}{۷}=\sin(\pi-\frac{۶\pi}{۷})=\sin\frac{\pi}{۷}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{عبارت}=\sin\frac{\pi}{۷}+\sin\frac{\pi}{۷}-۲\sin\frac{\pi}{۷}=۰$$

۲۳-گزینه‌ی «۳»

$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\Rightarrow x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$x=\frac{\pi}{۴}\quad :\sin ۳x=\sin\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۴-گزینه‌ی «۳»

$$\tan y=\tan((y-\frac{x}{۳})+\frac{x}{۳})=\frac{\tan(y-\frac{x}{۳})+\tan\frac{x}{۳}}{۱-\tan(y-\frac{x}{۳}).\tan\frac{x}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۴}.\frac{۱}{۳}}=\frac{۷}{۱۱}$$

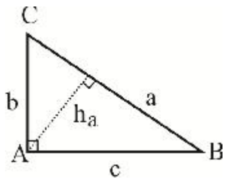
$$\tan(y+\frac{x}{۳})=\frac{\frac{۷}{۱۱}+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۷}{۱۱}.\frac{۱}{۳}}=\frac{۳۲}{۲۶}=\frac{۱۶}{۱۳}$$

۲۵-گزینه‌ی «۴»

۲۶-گزینه‌ی «۳»

$$\tan(y-x)=\frac{(\sqrt{۲}+۱)-(\sqrt{۲}-۱)}{۱+(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}=\frac{۲}{۱+۲-۱}=۱ \Rightarrow y-x=\frac{\pi}{۴}$$

۲۷-گزینه‌ی «۲»



قضیه فیثاغورس: $a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$

$\overset{\Delta}{ABC}$ مساحت مثلث: $S=\frac{bc}{۲}=\frac{a.h_a}{۲}\Rightarrow \sin x.\cos x=۱\times h_a \Rightarrow h_a=\frac{\sin ۲x}{۲}$

ماکزیمم $\frac{\sin ۲x}{۲}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است که به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ به دست می‌آید.

۲۸-گزینه‌ی «۱»

$$\sin ۲x+\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱+\sin ۴x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \sin ۴x=\frac{-۳}{۴} \Rightarrow |\cos ۴x|=\sqrt{۱-\frac{۹}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}\Rightarrow|\tan ۴x|=\frac{۳}{\sqrt{۷}}$$

۲۹-گزینه‌ی «۲»

با فرض $\tan x=a$ داریم:

$$۲a+\frac{۳}{a}=۵ \xrightarrow{\times a} ۲a^۲+۳=۵a \Rightarrow ۲a^۲-۵a+۳=۰$$

$$\Rightarrow (a-۱)(۲a-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases} a=۱ \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow \text{دو جواب در } [۰,۲\pi] \text{ دارد} \\ a=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \tan x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \text{دو جواب در } [۰,۲\pi] \text{ دارد}\end{cases}$$

بنابراین مجموعاً ۴ جواب دارد.

۳۰-گزینه‌ی «۴»

$$\sin x+۲m\cos x=۲m \Rightarrow \sin x=۲x(۱-\cos x)$$

به ازای $x=۲k\pi$ دو طرف معادله برابر صفر می‌شود و مستقل از مقدار m است.

۳۱-گزینه‌ی «۳»

$$\tan(x+۳۰^\circ)=\frac{۱+\tan ۲۵^\circ}{۱-\tan ۲۵^\circ} \Rightarrow \tan(x+۳۰^\circ)=\tan(۴۵^\circ+۲۵^\circ)=\tan(۷۰^\circ)$$

$x=۴۰^\circ$ در معادله‌ی فوق صدق می‌کند.

۳۲-گزینه‌ی «۱»

دقت کنید که $\cot^{-۱}$ همواره مثبت است پس x مثبت است.

$$\tan^{-۱} x+\tan^{-۱} ۲x=\tan^{-۱}\frac{۱}{۳x}$$

از دو طرف این معادله $\tan$ می‌گیریم:

$$\frac{x+۲x}{۱-۲x^۲}=\frac{۱}{۳x} \Rightarrow ۹x^۲=۱-۲x^۲=۱-۲x^۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۱۱}}$$

۳۳-گزینه‌ی «۴»

با فرض $\tan x=m$ داریم:

$$(۲a-۳)m+(a-۱)\frac{۱}{m}=۲ \Rightarrow (۲a-۳)m^۲-۲m+a-۱=۰$$

$$\Delta'=۰ \Rightarrow ۱-(۲a-۳)(a-۱)=۰ \Rightarrow ۲a^۲-۵a+۲=۰ \Rightarrow (۲a-۱)(a-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{۱}{۲} \\ a=۲\end{cases}$$

۳۴-گزینه‌ی «۴»

$$\cos^{۲} x=\tan(x+\frac{\pi}{۴})\cot(x+\frac{\pi}{۴})\xrightarrow{x+\frac{\pi}{۴}\neq\frac{k\pi}{۲}}\cos^{۲} x=۱$$

$$\Rightarrow \cos x=\pm ۱ \Rightarrow x=k\pi$$

۳۵-گزینه‌ی «۱»

$$\tan x-۱=\cos ۲x \Rightarrow -(۱-\tan x)=\frac{۱-\tan^{۲} x}{۱+\tan^{۲} x} \Rightarrow \begin{cases} ۱-\tan x=۰ \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ -۱=\frac{۱+\tan x}{۱+\tan^{۲} x} \Rightarrow \tan^{۲} x+\tan x+۲=۰ \Rightarrow \Delta<۰ \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

آزمون (۱۱): دنباله‌های حسابی و هندسی

۱- گزینه‌ی «۱»

$$a_1=8a_4 \Rightarrow a_1=8a_1q^3 \Rightarrow q^3=\frac{1}{8} \Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_{12}}{a_{10}}=\frac{aq^{11}}{a_1q^9}=q^2=\frac{1}{4}$$

۲- گزینه‌ی «۳»

$$a_1=81a_5 \Rightarrow a_1=81a_1q^4 \Rightarrow q^4=\frac{1}{81} \Rightarrow q=\pm\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{دنباله نزولی}} q=\frac{1}{3}$$

$$\frac{S_4}{a_5}=\frac{a_1\frac{1-q^4}{1-q}}{a_1q^4}=\frac{1-\frac{1}{81}}{\frac{1}{81}(1-\frac{1}{3})}=\frac{\frac{80}{81}}{\frac{2}{3}}=120$$

۳- گزینه‌ی «۴»

$$a_1a_2a_3=1 \Rightarrow a_1(a_1q)(a_1q^2)=1 \Rightarrow (a_1q)^3=1 \Rightarrow a_1q=1 \Rightarrow a_2=1$$

$$a_2+a_3=8 \Rightarrow a_3=7 \Rightarrow a_1q^2=7 \xrightarrow{a_1q=1} q=7 \Rightarrow a_1=\frac{1}{7}$$

$$a_1+a_2+a_3=\frac{1}{7}+8=\frac{57}{7}$$

۴- گزینه‌ی «۳»

$$\left.\begin{array}{l} a_7+a_{17}=60 \Rightarrow a_1+6d+a_1+16d=60 \Rightarrow a_1+11d=30 \\ \text{بنا به فرض}:\ a_4=a_1+3d=16 \end{array}\right\} \Rightarrow 8d=14 \Rightarrow d=\frac{7}{4} \Rightarrow a_1=\frac{43}{4}$$

$$a_{20}=a_1+19d=\frac{43}{4}+19\times\frac{7}{4}=\frac{176}{4}=44$$

۵- گزینه‌ی «۴»

$$t_3.t_9=a \Rightarrow t_1q^2.t_1q^8=a \Rightarrow t_1^2q^{10}=a \Rightarrow t_1q^5=\sqrt{a}$$

$$t_6+a=\frac{10}{9} \Rightarrow t_1q^5+a=\frac{10}{9} \Rightarrow \sqrt{a}+a=\frac{10}{9} \Rightarrow 9a+9\sqrt{a}-10=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}=\frac{-9\pm\sqrt{81+360}}{2\times9}=\frac{-9\pm\sqrt{441}}{18}=\frac{-9\pm21}{18} \xrightarrow{\sqrt{a}>0} \sqrt{a}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3} \Rightarrow a=\frac{4}{9}$$

۶- گزینه‌ی «۲»

$$S_{12}=17S_6 \Rightarrow a_1\frac{q^{12}-1}{q-1}=17a_1\frac{q^6-1}{q-1} \Rightarrow q^6+1=17 \Rightarrow q^6=16 \Rightarrow q=\pm\sqrt[3]{4}$$

۷- گزینه‌ی «۴»

با فرض اینکه قدر نسبت این دنباله برابر q باشد جملات آن بدین ترتیب‌اند:

$$2,\ 2q,\ 2q^2,\ 2q^3,\ 162$$

$$۱۶۲=a_۵=۲q^۴ \Rightarrow q^۴=۸۱ \Rightarrow q=\pm ۳ \Rightarrow \begin{cases} q=۳: ۲,۶,۱۸,۵۴,۱۶۲ \xrightarrow{\text{جمع سه واسطه}} ۷۸ \\ q=-۳: ۲,-۶,۱۸,-۵۴,۱۶۲ \xrightarrow{\text{جمع سه واسطه}} -۴۲ \end{cases}$$

۸- گزینه‌ی «۱»

$$a_۷-a_{۱۱}=۱۲ \Rightarrow (a_۱+۶d)-(a_۱+۱۰d)=۱۲ \Rightarrow -۴d=۱۲ \Rightarrow d=-۳$$

$$a_{۱۰}=a_۱+۹d=۵-۲۷=-۲۲$$

۹- گزینه‌ی «۱»

$$۴^x=۲^{۲x}\ ,\ \sqrt{۲^y}=۲^{\frac{y}{۲}}\ ,\ \sqrt[۳]{۸^z}=\sqrt[۳]{۲^{۳z}}=۲^z$$

$$\Rightarrow ۲^{۲x}.۲^z=(۲^{\frac{y}{۲}})^۲ \Rightarrow ۲^{۲x+z}=۲^y \Rightarrow ۲x+z=y$$

۱۰-گزینه‌ی «۳»

حاصل این عبارت مجموع ۲۱ جمله از دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $-x$ و جمله‌ی اول ۱ است.

$$S_{۲۱}=a_۱\frac{q^{۲۱}-۱}{q-۱}=\frac{(-x)^{۲۱}-۱}{-x-۱}=\frac{x^{۲۱}+۱}{x+۱}$$

۱۱-گزینه‌ی «۳»

$$a_۵-a_۳=۲۴ \Rightarrow a_۱q^۴-a_۱q^۲=۲۴ \Rightarrow a_۱q^۲(q^۲-۱)=۲۴$$

با توجه به صحیح بودن جملات این دنباله، قدر نسبت نیز مقداری صحیح است. تنها مربع کاملی که در تجزیه‌ی ۲۴ وجود دارد (به جز ۱) ۴ است. پس $q=۲$ و داریم:

$$a_۱\times ۴(۴-۱)=۲۴ \Rightarrow a_۱=۲$$

$$a_۳+a_۵=a_۱q^۲+a_۱q^۴=۲\times ۴+۲\times ۱۶=۸+۳۲=۴۰$$

۱۲-گزینه‌ی «۲»

$$\left.\begin{array}{l} S_۴=۱۰ \quad \Rightarrow a_۱\frac{q^۴-۱}{a-۱}=۱۰ \\ a_۵-a_۱=۱۰ \Rightarrow a_۱q^۴-a_۱=۱۰ \Rightarrow a_۱(q^۴-۱)=۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱۰}{q_{-۱}}=۱۰ \Rightarrow q_{-۱}=۱ \Rightarrow q=۲$$

۱۳-گزینه‌ی «۳»

این سه عدد را به صورت $(a+d)$، a ، $(a-d)$ در نظر می‌گیریم.

$$(a-d)+a+(a+d)=۲۷ \Rightarrow ۳a=۲۷ \Rightarrow a=۹$$

$$(a-d).a.(a+d)=۶۴۸ \Rightarrow ۹(۸۱-d^۲)=۶۴۸ \Rightarrow ۸۱-d^۲=۷۲ \Rightarrow d=\pm ۳$$

لذا این سه عدد عبارتند از ۱۲، ۹، ۶، که کوچک‌ترین آن‌ها عدد ۶ است.

۱۴-گزینه‌ی «۳»

$$S_۵=a_۱\frac{q^۵-۱}{q-۱}=\frac{۲۱۱}{۲۷} \xrightarrow{q=\frac{۲}{۳}} a_۱\frac{\frac{۳۲}{۲۴۳}}{\frac{۲}{۳}-۱}=\frac{۲۱۱}{۲۷} \Rightarrow a_۱\frac{\frac{\cancel{۲۱۱}}{۲۴۳}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{\cancel{۲۱۱}}{۲۷} \Rightarrow \frac{a_۱}{۸۱}=\frac{۱}{۲۷} \Rightarrow a_۱=۳$$

۱۵-گزینه‌ی «۴»

$$۹=a_۳=a_۱q^۲=۴q^۲ \Rightarrow q^۲=\frac{۹}{۴} \xrightarrow{\text{دنباله صعودی}} q=\frac{۳}{۲}$$

$$S_{۶}=a_{۱}\frac{q^{۶}-۱}{q-۱}=۴\frac{\frac{۷۲۹}{۶۴}-۱}{\frac{۳}{۲}-۱}=۴\ \frac{۶۶۵}{۳۲}=\frac{۶۶۵}{۸}=۸۳\frac{۱}{۸}$$

۱۶-گزینه‌ی «۴»

جمع جملات خواسته شده در واقع تفاضل $S_{۲۴}$ از $S_{۳۵}$ است:

$$S_{۳۵}-S_{۲۴}=\frac{۳۵\times۳۲}{۴}-\frac{۲۴\times۲۱}{۴}=۲۸۰-۱۲۶=۱۵۴$$

۱۷-گزینه‌ی «۳»

$$۱۶\sqrt{۲}=a_{۸}=a_{۱}q^{۷}=۲q^{۷}\Rightarrow q^{۷}=۸\sqrt{۲}=۲^{\frac{۷}{۲}}=(\sqrt{۲})^{۷}\Rightarrow q=\sqrt{۲}$$

$$S_{۸}=a_{۱}\frac{q^{۸}-۱}{q-۱}=۲\times\frac{۱۶-۱}{\sqrt{۲}-۱}=۳۰(\sqrt{۲}+۱)$$

۱۸-گزینه‌ی «۴»

$$a_{۷}=\frac{۱}{۲}a_{۳}\Rightarrow a_{۱}+۶d=\frac{۱}{۲}(a_{۱}+۲d)\Rightarrow ۲a_{۱}+۱۲d=a_{۱}+۲d\Rightarrow a_{۱}=-۱۰d$$

$$S_{n}=\frac{n}{۲}(۲a_{۱}+(n-۱۱d)=۰\Rightarrow ۲a_{۱}=-(n-۱)d\Rightarrow -۲۰d=-(n-۱)d\Rightarrow n=۲۱$$

۱۹-گزینه‌ی «۴»

$$a_{۱}+a_{۲}+a_{۱۲}=a_{۱}+a_{۱}+d+a_{۱}+۱۱d=۳a_{۱}+۱۲d=۳۰\Rightarrow a_{۱}+۴d=۱۰\Rightarrow a_{۵}=۱۰$$

۲۰-گزینه‌ی «۴»

جمع جملات خواسته شده به عبارتی برابر است با:

$$S_{۱۸}-S_{۶}=\frac{۱۸\times۳}{۶}-\frac{۶\times(-۹)}{۶}=۹+۹=۱۸$$

۲۱-گزینه‌ی «۴»

$$\frac{S_{۱۴}}{S_{۷}}=\frac{a_{۱}\frac{q^{۱۴}-۱}{q-۱}}{a_{۱}\frac{q^{۷}-۱}{q-۱}}=\frac{q^{۱۴}-۱}{q^{۷}-۱}=q^{۷}+۱\overset{q=۲}{=\!=\!=}۱۲۸+۱=۱۲۹$$

۲۲-گزینه‌ی «۳»

جملات دسته‌ی nاُم به صورت $((n-۱)^{۲}+۱,\dots,n^{۲}-۱,n^{۲})$ هستند. بنابراین دسته‌ی دهم به این ترتیب می‌باشد:

$$۸۲\ ,۸۳,\dots,۹۹,۱۰۰$$

این اعداد دنباله حسابی با قدر نسبت ۱ تشکیل می‌دهند و مجموعشان برابر است با:

$$S=\frac{n}{۲}(a_{۱}+a_{n})=\frac{۱۹}{۲}(۸۲+۱۰۰)=۱۹\times۹۱=۱۷۲۹$$

۲۳-گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases}a_{۱۲}-a_{۱۰}=+۲d=۵\\ a_{۱۰}+a_{۱۲}=۲a_{۱}+۲۰d=۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=\frac{۵}{۲}\\ a_{۱}=\frac{-۲۵}{۲}\end{cases}\qquad a_{۲۱}=a_{۱}+۲۰d=-\frac{۲۵}{۲}+\frac{۱۰۰}{۲}=\frac{۷۵}{۲}$$

۲۴-گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} S_۴=\frac{۴}{۲}(۲a_۱+۳d)=۴a_۱+۶d=۱۵ \\ S_۹=۱۵+۳۰ \Rightarrow \frac{۹}{۲}(۲a_۱+۸d)=۴۵ \Rightarrow ۲a_۱+۸d=۱۰ \Rightarrow ۴a_۱+۱۶d=۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۰d=۵ \Rightarrow d=\frac{۱}{۲} \\ ۴a_۱+۳=۱۵ \Rightarrow a_۱=۳ \end{cases}$$

$$a_{۱۱}=a_۱+۱۰d=۳+۵=۸$$

۲۵-گزینه‌ی «۳»

$$\frac{۵}{۲}=a_۴=a_۱+۳d=۱+۳d \Rightarrow ۳d=\frac{۳}{۲} \Rightarrow d=\frac{۱}{۲}$$

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)=\frac{۱۵}{۲}(۲+۷)=۶۷/۵$$

۲۶-گزینه‌ی «۴»

$$a_۱.a_{۱۱}=(a_۵)^۲ \Rightarrow a_۱(a_۱+۱۰d)=(a_۱+۱۰d)=(a_۱+۴d)^۲ \Rightarrow \cancel{a_۱^۲}+۱۰a_۱d=\cancel{a_۱^۲}+۸a_۱d+۱۶d^۲$$

$$\Rightarrow ۲a_۱=۱۶d \Rightarrow a_۱=۸d$$

$$q=\frac{a_۵}{a_۱}=\frac{a_۱+۴d}{۸d}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

۲۷-گزینه‌ی «۳»

$$a_۳=a_۱+۲d \Rightarrow ۹=۵+۲d \Rightarrow d=۲$$

$$a_۷+a_۸+a_۹=۳a_۱+۲۱d=۱۵+۴۲=۵۷$$

۲۸-گزینه‌ی «۴»

$$\begin{cases} a_۵+a_۶=۳ \Rightarrow ۲a_۱+۹d=۳ \\ a_۸+a_۹=-۲ \Rightarrow ۲a_۱+۱۵d=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=\frac{-۵}{۶} \\ ۲a_۱-\frac{۱۵}{۲}=۳ \Rightarrow a_۱=\frac{۲۱}{۴} \end{cases}$$

$$a_{۱۳}+a_{۱۵}=۲a_۱+۲۶d=\frac{۲۱}{۲}-\frac{۶۵}{۳}=\frac{۶۳-۱۳۰}{۶}=-\frac{۶۷}{۶}$$

۲۹-گزینه‌ی «۱»

ده جمله‌ی فرد داریم و ده جمله‌ی زوج. قدر نسبت هر دو دنباله‌ی جملات زوج و جملات فرد دو برابر قدر نسبت دنباله‌ی اصلی است. داریم:

$$\text{مجموع جملات فرد}=\frac{۱۰}{۲}(۲a_۱+(۱۰-۱)\times ۲d)=۵(۲a_۱+۱۸d)=۱۳۵$$

$$\text{مجموع جملات زوج}=\frac{۱۰}{۲}(۲a_۲+(۱۰-۱)\times ۲d)=۵(۲(a_۱+d)+۱۸d)=۵(۲a_۱+۲۰d)=۱۵۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۰a_۱+۹۰d=۱۳۵ \\ ۱۰a_۱+۱۰۰d=۱۵۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=\frac{۳}{۲} \\ a_۱=۰ \end{cases}$$

۳۰-گزینه‌ی «۳»

با توجه به اعداد داده شده قدر نسبت این دنباله برابر ۲ است.

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲\times ۱+(n-۱)\times ۲)=۶۴ \Rightarrow n(۱+n-۱)=۶۴ \Rightarrow n^۲=۶۴ \Rightarrow n=۸$$

آزمون (۱۲): لگاریتم

۱- گزینه‌ی «۴»

$$\log_b^{a^۲}=A \Rightarrow ۲\log_b^a=A \Rightarrow \log_b^a=\frac{A}{۲} \Rightarrow \log_a^b=\frac{۲}{A}$$

$$\log_{a^۲b}^a=\frac{۱}{\log_a^{a^۲b}}=\frac{۱}{\log_a^{a^۲}+\log_a^b}=\frac{۱}{۲+\frac{۲}{A}}=\frac{A}{۲A+۲}$$

۲- گزینه‌ی «۴»

$$\log_{۲۷}^{۲۵}=\log_{۳^۳}^{۵^۲}=\frac{۲}{۳}\log_۳^۵=\frac{۲}{۳}\times\frac{\log^۵}{\log^۳}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱-\log^۲}{\log^۳}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱-۰/۳}{۰/۵}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۷}{۵}=\frac{۱۴}{۱۵}$$

۳- گزینه‌ی «۳»

$$\begin{vmatrix}\log^۳ & \log^{۱۲}\\ \log^{۱۲} & \log^۳\end{vmatrix}=(\log^۳)^۲-(\log ۱۲)^۲=(\log^۳-\log^{۱۲})(\log^۳+\log^{۱۲})$$

$$-(\log^{\frac{۱۲}{۳}})(\log^{۳۶})=(-۲\log ۲)(۲\log ۶)=-۴(\log ۲)(\log ۶) \Rightarrow k=-۴$$

۴- گزینه‌ی «۳»

$$\log_۴^{ab}=\log_۴^a+\log_۴^b=y+\frac{۱}{\log_b^۴}=y+\frac{۱}{۲x}=\frac{۱+۲xy}{۲x}$$

۵- گزینه‌ی «۳»

$$\log_{b^m}^x=۱ \Rightarrow x=(b^m)^۱ \Rightarrow b^m=x \Rightarrow (b^m)^{\frac{۱}{m}}=x^{\frac{۱}{m}} \Rightarrow b=x^{\frac{۱}{m}}$$

۶- گزینه‌ی «۱»

$$\left.\begin{array}{ll}۱)\ -x^۲+۹>۰ \Rightarrow x^۲<۹ \Rightarrow -۳<x<۳ & \\ ۲)\ \frac{x}{۲}>۰ & \Rightarrow x>۰\\ ۳)\ \frac{x}{۲}\neq ۱ & \Rightarrow x\neq ۲\end{array}\right\} \xrightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)} (۰,۳)-\{۲\}$$

تنها عدد صحیح ۱ در بازه‌ی فوق وجود دارد.

۷- گزینه‌ی «۱»

$$=\log_{۱۰۰!}^۲+\log_{۱۰۰!}^۳+\dots+\log_{۱۰۰!}^{۱۰۰}=\log_{۱۰۰!}^{۱۰۰!}=۱$$

۸- گزینه‌ی «۴»

فقط گزینه ۴ در شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-۱$ صدق می‌کند.

۹- گزینه‌ی «۲»

$$\log_۲^{x^۲-۵}-۳\log_{۲^۳}^x=۱ \Rightarrow \log_۲^{x^۲-۵}-\log_۲^x=۱ \Rightarrow \log_۲^{\frac{x^۲-۵}{x}}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲-۵}{x}=۲ \Rightarrow x^۲-۲x-۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۵}}{۱} \xrightarrow{x>۰} x=۱+\sqrt{۶}$$

۱۰-گزینه‌ی «۳»

$$\log_x^{(x-1)} < \log_x^{(7-x)} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 : x-1>7-x \Rightarrow 2x>8 \Rightarrow x>4 \xrightarrow{\cap} x\in\varnothing \\ x>1 \quad : x-1<7-x \Rightarrow 2x<8 \Rightarrow x<4 \xrightarrow{\cap} 1<x<4 \end{cases}$$

۱۱-گزینه‌ی «۴»

$$\log x^2 - \log(x+\frac{12}{5}) = 1 \Rightarrow \log^{\frac{x^2}{x+\frac{12}{5}}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+\frac{12}{5}} = 10 \Rightarrow x^2 - 10x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-12)(x+2)=0 \xrightarrow{x>0} x=12$$

$$\log_5^{(2x+1)} = \log_5^{25} = 2$$

۱۲-گزینه‌ی «۴»

$$(\log^{(6x-1)})^2 - (\log^{(1-x)})^2 = (\log^{\frac{6x-1}{1-x}})(\log^{(6x-1)(1-x)}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{6x-1}{1-x} = 1 \Rightarrow 6x-1 = 1-x \Rightarrow 7x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \\ (6x-1)(1-x) = 1 \Rightarrow -6x^2+7x-1 = 1 \Rightarrow 6x^2-7x+2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12} = \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \end{cases}$$

هر سه جواب به دست آمده در دامنه‌ی لگاریتم قرار داشته و حاصل دترمینان را صفر می‌کند.

۱۳-گزینه‌ی «۳»

$$x = 8\log_4^{2\sqrt{2}} = 8\log_{2^2}^{2^{\frac{3}{2}}} = 8\times\frac{\frac{3}{2}}{2} = 8\times\frac{3}{4} = 6$$

$$\log_x^{4(x+3)} = \log_6^{36} = 2$$

۱۴-گزینه‌ی «۲»

$$\log_5^8 = a \Rightarrow 3\log_5^2 = a \Rightarrow \log_5^2 = \frac{a}{3} \Rightarrow \log_2^5 = \frac{3}{a}$$

$$\log_{10}^2 = \frac{1}{\log_2^{10}} = \frac{1}{\log_2^2 + \log_2^5} = \frac{1}{1+\frac{3}{a}} = \frac{a}{a+3}$$

۱۵-گزینه‌ی «۳»

$$2^{-x} < 10^{-6} \Rightarrow \log^{2^{-x}} < \log^{10^{-6}} \Rightarrow -x.\log^2 < -6$$

$$\Rightarrow -x\times 0/301 < -6 \Rightarrow -x < \frac{-6}{0/301} \Rightarrow x > \frac{6}{0/301} \simeq 19/933 \Rightarrow \text{Min}(x) = 19/94$$

۱۶-گزینه‌ی «۳»

$$\log_2^{12} = \log_2^4 + \log_2^3 = 2 + \log_2^3 = \alpha \Rightarrow \log_2^3 = \alpha - 2$$

$$4^{\alpha-2} = 4^{\log_2^3} = 3^{\log_2^4} = 3^2 = 9$$

۱۷-گزینه‌ی «۳»

$$\log^{(y+2)} = 1 \Rightarrow y+2 = 10 \Rightarrow y = 8$$

$$\log^{(y-x)}+\log^{(4x+y)}=2 \Rightarrow \log^{(8-x)(4x+8)}=2 \Rightarrow 4(8-x)(x+2)=100 \Rightarrow$$

$$-x^2+6x+16=25 \Rightarrow x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$$

۱۸-گزینه‌ی «۱»

$$\log^{(x-1)(x-2)}=\log^{(x^3+2)} \Rightarrow x^2-3x+2=x^3+2 \Rightarrow x(x-3)=x^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x^2=x-3 \Rightarrow x^2-x+3=0 \Rightarrow \Delta<0 & \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

بنابراین معادله ریشه‌ای ندارد.

۱۹-گزینه‌ی «۱»

$$\log^{(2x-1)}+\log^{|x|}=\log^3 \xrightarrow{x>\frac{1}{2}} \log^{x(2x-1)}=\log^3 \Rightarrow 2x^2-x-3=0$$

$$\Rightarrow (2x-3)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_4^{\frac{x}{3}}=\log_4^{\frac{1}{2}}=\log_{2^2}^{2^{-1}}=\frac{-1}{2}$$

۲۰-گزینه‌ی «۱»

$$x^2-10x+0/1=0 \ ,S=a+b=10,\ P=ab=0/1$$

$$\log^{ab}-\log^{(a+b)}=\log^{0/1}-\log^{10}=-1-1=-2$$

۲۱-گزینه‌ی «۲»

$$\log_6^{2\sqrt{3}}+\log_6^{3\sqrt{2}}=\log_6^{6\sqrt{6}}=\log_6^{6^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}$$

۲۲-گزینه‌ی «۱»

$$\log_y^{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\log_y^x=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$$

۲۳-گزینه‌ی «۳»

$$\log_3^{3^3\times 3^{\frac{4}{3}}}+\log_7^{7^{-2}}+\log_{2^{\frac{1}{4}}}^{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{13}{3}-2+6=\frac{13}{3}+\frac{12}{3}=\frac{25}{3}$$

۲۴-گزینه‌ی «۳»

$$\log_2^x-\log_2^{(y+1)}=1 \Rightarrow \frac{x}{y+1}=2 \Rightarrow x=2y+2$$

$$x^2-y^2=32 \Rightarrow (2y+2)^2-y^2=32 \Rightarrow 3y^2+8y-28=0 \Rightarrow y=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{3} \xrightarrow{y>-1} y=\frac{-4+10}{3}=2$$

$$\Rightarrow x=6 \Rightarrow \log_4^{(x+y)}=\log_4^8=\log_{2^2}^{2^3}=\frac{3}{2}$$

۲۵-گزینه‌ی «۱»

$$\log^{\sqrt[۳]{۱/۶}} = \frac{۱}{۳}\log^{۱/۶} = \frac{۱}{۳}(\log^{۱۶} - \log^{۱۰}) = \frac{۱}{۳}(۴\log^{۲} - ۱) = \frac{۴}{۳}(۱ - \log^{۵}) - \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳} - ۴k - \frac{۱}{۳} = ۱ - ۴k$$

آزمون (۱۳): آمار و مدل سازی

۱- گزینه‌ی «۳»

$$\text{طول دسته} = C = x_۲ - x_۱ = ۴۹ - ۴۴ = ۵$$

$$۸۴ - ۴۴ = (k-۱)C \Rightarrow ۴۰ = ۵(k-۱) \Rightarrow k = ۹$$

۲- گزینه‌ی «۱»

$$\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C + \alpha_D = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha_A + ۲\alpha_A + ۲\alpha_A + ۴\alpha_A = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۹\alpha_A = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha_A = ۴۰^\circ$$

$$\alpha_D = ۴\alpha_A = ۴ \times ۴۰^\circ = ۱۶۰^\circ$$

۳- گزینه‌ی «۳»

اگر انحراف معیار داده‌هایی برابر صفر باشند، آن داده‌ها با هم برابرند.

$$۱۱ = ۳z - ۱ = y + ۴ = ۲x - ۵ \Rightarrow z = ۴\ ,\ y = ۷\ ,\ x = ۸$$

$$\text{میانگین} = \frac{x+y+z}{۳} = \frac{۸+۷+۴}{۳} = \frac{۱۹}{۳}$$

۴- گزینه‌ی «۳»

$$۱۲ = \frac{۱+۵+۱۰+x+y}{۵} \Rightarrow x+y = ۴۴$$

$$\frac{۷+۱۳+۳x+۳y}{۴} = \frac{۲۰+۳\times۴۴}{۴} = ۵+۳۳ = ۳۸$$

۵- گزینه‌ی «۳»

$$\text{درصد فراوانی دسته‌ی وسط} = \frac{\text{فراوانی دسته ی وسط}}{\text{فراوانی کل داده ها}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۳۰ = \frac{x}{۴۲+x} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۱۲۶ + ۳x = ۱۰x \Rightarrow x = ۱۸$$

۶- گزینه‌ی «۳»

اولاً فراوانی تجمعی باید یک عدد طبیعی باشد. ثانیاً فراوانی تجمعی هر طبقه از طبقه‌ی ماقبل خود بیشتر یا مساوی است. پس تنها عدد ۴۴ می‌تواند قابل قبول باشد.

۷- گزینه‌ی «۳»

$$\frac{۳}{a+۷} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow a = ۳$$

$$\bar{x} = \frac{۱\times۲+۲\times۳+۳\times۳+۴\times۲}{۲+۳+۳+۲} = \frac{۲۵}{۱۰} = ۲/۵$$

۸- گزینه‌ی «۲»

$$\frac{۱۵}{۱۰۰} = \frac{f_{\text{دسته وسط}}}{۲۴۰} \Rightarrow f_{\text{دسته وسط}} = ۳۶$$

۹- گزینه‌ی «۱»

$$\bar{x} = \frac{x_۱ + x_۲ + \dots + x_۸ + ۳۵ + ۴۰}{۱۰} = ۳۲/۵ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + \dots + x_۸ = ۲۵۰$$

$$\bar{x}' = \frac{x_۱ + x_۲ + \dots + x_۸}{۸} = \frac{۲۵۰}{۸} = ۳۱/۲۵$$

۱۰-گزینه‌ی «۲»

$$\delta^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|^۲}{n}$$

با توجه به این که در فرمول واریانس علامت انحرافات از میانگین اهمیتی ندارد (چون به توان دو می‌رسد) از اعداد داده شده استفاده می‌کنیم.

$$\delta^{۲}=\frac{۵^{۲}+۴^{۲}+۲\times۳^{۲}+۳\times۲^{۲}+۱^{۲}}{۸}=\frac{۲۵+۱۶+۱۸+۱۲+۱}{۸}=\frac{۷۲}{۸}=۹\Rightarrow\delta=۳$$

۱۱-گزینه‌ی «۲»

کران بالای دسته‌ی آخر - نشان دسته‌ی وسط = نصف دامنه تغییرات $\Rightarrow x-۳۲=۱۴\Rightarrow x=۴۶$

۱۲-گزینه‌ی «۴»

$$\text{میانگین}=\frac{x+x+۳x+۳x}{۴}=۲x$$

$$\delta=\sqrt{\frac{۲(x-۲x)^{۲}+۲(۳x-۲x)^{۲}}{۴}}=\sqrt{\frac{۴x^{۲}}{۴}}=x=۲\Rightarrow\quad \text{میانگین}=۲x=۴$$

۱۳-گزینه‌ی «۳»

از فرمول دوم واریانس استفاده می‌کنیم:

$$\delta^{۲}=\frac{\sum_{i=۱}^{۱۰}x_i^{۲}}{۱۰}-\bar{x}^{۲}\quad \frac{۹۶/۴}{۱۰}-۹=۰/۶۴\Rightarrow\delta=۰/۸$$

۱۴-گزینه‌ی «۱»

واریانس داده‌ها برابر صفر است، پس همگی با هم برابرند:

$$a=b=c=۴$$

$$\frac{(a+۱)+(b+۲)+(c+۳)+۸}{۴}=\frac{۵+۶+۷+۸}{۴}=\frac{۲۶}{۴}=۶/۵$$

۱۵-گزینه‌ی «۳»

حدود دسته‌ها به صورت زیر است:

$$(۲۲-۲۵),(۲۵-۲۸),(۲۸-۳۱),(۳۱-۳۴),(\underbrace{۳۴-۳۷}_{\text{دسته ی وسط}}),(۳۷-۴۰),(۴۰-۴۳),(۴۳-۴۶),(۴۶-۴۹)$$

۴۵٪ داده‌ها یعنی $۱۲۰\times\frac{۴۵}{۱۰۰}=۵۴$ داده کمتر از ۳۴ هستند. به علاوه $۱۲۰\times\frac{۲}{۱۰}=۲۴$ داده نیز در دسته‌ی وسط قرار دارند. بنابراین در مجموع $۵۴+۲۴=۷۸$ داده کمتر از ۳۷ هستند.

۱۶-گزینه‌ی «۱»

مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی	۳	۲	a	۶	۱

$$\bar{x}=\frac{۶\times۳+۸\times۲+۱۰a+۱۲\times۶+۱۴\times۱}{۳+۲+a+۶+۱}=\frac{۱۸+۱۶+۱۰a+۷۲+۱۴}{۱۲+a}=\frac{۱۲۰+۱۰a}{۱۲+a}=۱۰$$

$$\delta^{۲}=\frac{۳(۶-۱۰)^{۲}+۲(۸-۱۰)^{۲}+a(۱۰-۱۰)^{۲}+۶(۱۲-۱۰)^{۲}+(۱۴-۱۰)^{۲}}{۱۲+a}=\frac{۴۸+۸+۲۴+۱۶}{۱۲+a}=\frac{۹۶}{۱۲+a}=۶\Rightarrow۱۲+a=۱۶\Rightarrow a=۴$$

۱۷-گزینه‌ی «۱»

$$F_{۱}=\frac{f_{۱}}{n}\Rightarrow ۰/۱۱۲۵=\frac{f_{۱}}{۸۰}\Rightarrow f_{۱}=۹$$

$$F'_{۱}=\frac{f_{۱}}{n+۱۰}=\frac{۹}{۹۰}=۰/۱$$

۱۸-گزینه‌ی «۴»

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

$$۷\ ,۹\ ,۱۰\ ,\ ,۱۱\ ,\ ۱۲\ ,\ ۱۲\ ,\ ۱۳\ ,\ ۱۶\ ,\ ۱۷\ ,\ ۱۷\ ,\ ۱۸\ ,\ ۲۰\ ,\ ۲۱$$

$Q_۱=۱۰/۵$ $\qquad$ $Q_۲$ (میانه) $\qquad$ $Q_۳=۱۷/۵$

پس داده‌های داخل جعبه ۱۱,۱۲,۱۲,۱۳,۱۶,۱۷,۱۷ هستند. برای محاسبه‌ی میانگین از روش حدس داریم:

$$\bar{x}=۱۳+\frac{(-۲)+(-۱)+(-۱)+۳+۴+۴}{۷}=۱۳+\frac{۷}{۷}=۱۴$$

$$\delta^۲=\frac{(-۳)^۲+۲(-۲)^۲+(-۱)^۲+۲^۲+۲\times۳^۲}{۷}=\frac{۹+۸+۱+۴+۱۸}{۷}=\frac{۴۰}{۷}\simeq ۵/۷۱$$

۱۹-گزینه‌ی «۳»

از جدول داده شده استفاده می‌کنیم و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

مرکز دسته	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
فراوانی مطلق	۶	۱۱	$x-۱۷$	$۴۸-x$	۱۲

زاویه مرکزی دسته‌ی وسط در نمودار دایره‌ای $=\frac{f_۳}{n}\times۳۶۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ=\frac{x-۱۷}{۶۰}\times۳۶۰^\circ \Rightarrow x-۱۷=۱۵ \Rightarrow x=۳۲$

$$f_۴=۴۸-x=۴۸-۳۲=۱۶$$

۲۰-گزینه‌ی «۱»

با اضافه کردن مقداری ثابت به تمام داده‌ها انحراف معیار تغییری نمی‌کند، اما میانگین به همان اندازه افزایش می‌یابد:

$$\delta'=\delta,\ \bar{x}'=\bar{x}+\bar{x}=۲\bar{x}$$

$$CV'=\frac{\delta'}{\bar{x}'}=\frac{\delta}{۲\bar{x}}=\frac{۱}{۲}CV=\frac{۱}{۲}\times۱/۲=۰/۶$$

۲۱-گزینه‌ی «۴»

مراحل تحصیلی قابل شمارش نبوده و دارای ترتیب است، پس از نوع کیفی ترتیبی می‌باشد.

۲۲-گزینه‌ی «۲»

فرض می‌کنیم ۱۲ میانگین حدس ما بوده. برای محاسبه‌ی میانگین داریم:

$$\bar{x}=۱۲+\frac{۱\times(-۳)+۳(-۲)+(-۱)+۰+۶\times۱+۲\times۲}{۱+۳+۱+۳+۶+۲}=۱۲+\frac{-۳-۶-۱+۶+۴}{۱۶}=۱۲+۰=۱۲$$

بنابراین میانگین همان ۱۲ است و می‌توانیم واریانس را محاسبه کنیم:

$$\delta^۲=\frac{\sum(x_i-۱۲)^۲}{n}=\frac{۱\times(-۳)^۲+۳(-۲)^۲+۱(-۱)^۲+۰+۶\times۱+۲\times۲^۲}{۱۶}=\frac{۹+۱۲+۱+۶+۸}{۱۶}=\frac{۳۶}{۱۶}\Rightarrow \delta=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

$$CV=\frac{\delta}{\bar{x}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۱۲}=\frac{۱}{۸}$$

۲۳-گزینه‌ی «۳»

از روش میانگین حدسی (با فرض $\bar{x}=۲۲$) داریم:

$$\bar{x}=۲۲+\frac{۲(-۶)+۴(-۳)+۶\times۰+۳\times۳+۵\times۶}{۲+۴+۶+۳+۵}=۲۲+۳a \Rightarrow \frac{-۱۲-۱۲+۹+۳۰}{۲۰}=۳a \Rightarrow ۱۵=۶۰a \Rightarrow a=۰/۲۵$$

۲۴-گزینه‌ی «۴»

$$\delta=۲ \Rightarrow \delta^{۲}=۴$$

$$\delta^{۲}=\frac{\sum_{i=۱}^{۲۶}(x_i-\bar{x})^{۲}}{۲۶}=۴ \Rightarrow \delta^{۲}=\frac{\sum_{i=۱}^{۲۵}(x_i-\bar{x})^{۲}+(\bar{x}-\bar{x})^{۲}}{۲۶}=۴ \quad \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۲۵}(x_i-\bar{x})^{۲}=۱۰۴$$

$$\delta'^{۲}=\frac{\sum_{i=۱}^{۲۵}(x_i-\bar{x})^{۲}}{۲۵}=\frac{۱۰۴}{۲۵}=۴/۱۶$$

۲۵-گزینه‌ی «۴»

$$\bar{x}=\frac{(n+۱)+(n+۲)+...+(n+۱۳)}{۱۳}=\frac{۱۳n+\frac{۱۳\times۱۴}{۲}}{۱۳}=n+۷$$

۲۶-گزینه‌ی «۱»

واریانس داده‌هایی که همگی با هم برابرند مساوی صفر است.

۲۷-گزینه‌ی «۳»

$$\bar{x}_۱=\frac{۶\times۲+۲\times۶}{۸}=\frac{۲۴}{۸}=۳ \;,\; \delta_۱^{۲}=\frac{۶(۲-۳)^{۲}+۲(۶-۳)^{۲}}{۸}=\frac{۶+۱۸}{۸}=\frac{۲۴}{۸}=۳$$

$$\bar{x}_۲=\frac{۶\times۶\times۲\times۲}{۸}=\frac{۴۰}{۸}=۵ \;,\; \delta_۲^{۲}=\frac{۶(۶-۵)^{۲}+۲(۲-۵)^{۲}}{۸}=\frac{۶+۱۸}{۸}=\frac{۲۴}{۸}=۳$$

پس واریانس هر دو مجموعه از داده‌ها با هم برابر است.

۲۸-گزینه‌ی «۳»

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=۱}^{۸}x_i}{۸}=\frac{۴۸}{۸}=۶ \;,\; CV=\frac{\delta}{\bar{x}}\Rightarrow ۰/۵=\frac{\delta}{۶}\Rightarrow \delta=۳ \Rightarrow \delta^{۲}=۹$$

$$\delta^{۲}=\frac{\sum_{i=۱}^{۸}x_i^{۲}}{۸}-(\bar{x})^{۲} \Rightarrow ۹=\frac{\sum_{i=۱}^{۸}x_i^{۲}}{۸}-۳۶ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۸}x_i^{۲}=۳۶۰$$

۲۹-گزینه‌ی «۲»

درصد فراوانی داده‌های بین ۴۴ و ۴۷ برابر است با $۶۷-۵۵=۱۲$ داریم:

$$F_i=\frac{f_i}{n} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۰۰}=\frac{f_i}{۷۵} \Rightarrow f_i=۹$$

۳۰-گزینه‌ی «۲»

داده‌ها جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ۳ و جمله‌ی اول $(a+۳)$ هستند.

$$a+۱۰۵=(a+۳)+(n-۱)\times۳\Rightarrow۱۰۲=۳(n-۱) \Rightarrow n-۱=۳۴ \Rightarrow n=۳۵$$

پس $(a+۱۰۵)$ جمله‌ی ۳۵ اُم بوده و داریم:

$$S_{۳۵}=\frac{۳۵}{۲}((a+۳)+(a+۱۰۵))=\frac{۳۵}{۲}(۲a+۱۰۸)=۳۵a+۳۵\times۵۴$$

$$\bar{x}=\frac{S_{۳۵}}{۳۵}=a+۵۴$$