درسنامه ۱

زوج مرتب و تابع

زوج مرتب: به هر دو شیء که برای آن‌ها ترتیبی قائل شویم که کدام اول و کدام دوم باشد، یک زوج مرتب می‌گوییم.

در صورتی که به این دو شیء دو عدد نسبت دهیم و آن‌ها را x و y بنامیم، در زوج مرتب (x,y) به x عضو اول (مؤلفه‌ی اول) و به y عضو دوم (مؤلفه‌ی دوم) می‌گوییم. هر زوج مرتب نمایش یک نقطه در صفحه می‌باشد. مثلاً منظور از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ نقطه‌ای است که طول آن برابر ۲ و عرض آن برابر ۳ می‌باشد.

نکته ۱ *مجموعه‌ای که شامل دو عضو x و y می‌باشد با زوج مرتب (x,y) متفاوت است زیرا در مجموعه، ترتیب اعضا مهم نیست ولی در زوج مرتب ترتیب عضوها بسیار حائز اهمیت است. زیرا با عوض شدن ترتیب اعضای زوج مرتب، مکان نقطه روی صفحه عوض می‌شود.*

$\{x , y\} = \{y , x\}$ ولی $(x,y) \neq (y,x)$

❏ **مثال:** مجموعه‌های $\{۳,۵\}$ و $\{۵,۳\}$ با هم مساوی‌اند ولی زوج مرتب‌های $(۳,۵)$ و $(۵,۳)$ یکسان نیستند.

نکته ۲ *دو زوج مرتب را وقتی مساوی گوییم که مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم و مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند.*

$$(x,y) = (z,t) \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = t \end{cases}$$

مثال ۱

اگر دو زوج مرتب $(۳x+۱,۴)$ و $(۲x-۷,۵y-۳)$ با هم برابر باشند، x و y را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** مؤلفه‌ی اول زوج‌ها با هم و مؤلفه‌ی دوم هم با هم مساوی‌اند. لذا خواهیم داشت:

$$۳x+۱ = ۲x-۷ \Rightarrow ۳x-۲x = -۷-۱ \Rightarrow x = -۸$$

$$۵y-۳ = ۴ \Rightarrow ۵y = ۴+۳ \Rightarrow ۵y = ۷ \Rightarrow y = \frac{۷}{۵}$$

تعریف تابع از لحاظ زوج مرتب

یک تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن، هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند.

توجه طبق تعریف تابع، اگر در تابعی دو زوج مرتب، مؤلفه‌های اول مساوی داشته باشند، مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باید برابر باشند.

❏ **مثال:** رابطه‌ی $f = \{(\sqrt{۲},۴),(۳,۷),(\sqrt{۳},۹)\}$ بیان‌گر یک تابع است، چون مؤلفه‌های اول همگی با هم متفاوتند ولی رابطه‌ی $g = \{(۳,۹),(۴,۶),(۳,۷)\}$ معرف یک تابع نمی‌باشد؛ چون ملاحظه می‌شود که زوج مرتب‌های $(۳,۷)$ و $(۳,۹)$ دارای مؤلفه‌ی اول برابر هستند ولی مؤلفه‌ی دوم آن‌ها یکسان نیست.

مثال ۲

اگر مجموعه‌ی $A = \{(۱,a+b),(۲,a-b),(۱,۳),(۲,۵)\}$ بیان‌گر یک تابع باشد a و b را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** در زوج مرتب‌های $(۱,a+b)$ و $(۱,۳)$ عضوهای اول مساوی‌اند لذا برای این‌که مجموعه‌ی A تابع باشد عضوهای دومشان هم باید مساوی باشند. یعنی: $a+b=۳$

مطلب فوق در مورد زوج‌های $(۲,a-b)$ و $(۲,۵)$ نیز برقرار است. یعنی: $a-b=۵$، با حل دو معادله‌ی به دست آمده در یک دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a+b = ۳ \\ a-b = ۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

$$a+b = ۳ \xrightarrow{(a=۴)} ۴+b = ۳ \Rightarrow b = ۳-۴ = -۱$$

☆۱. اگر دو زوج مرتب $(۴,۲a-b)$ و $(a-۲b,۸)$ با هم برابر باشند، a و b را به‌دست آورید.

۲. اگر دو زوج مرتب $(m-۸,۱۰)$ و $(۱۱,۳n-۲)$ با هم برابر باشند، مقادیر m و n را محاسبه کنید.

۳. از مجموعه‌ها و جدول‌های زیر کدام‌یک معرف یک تابع می‌باشد؟ (با ذکر دلیل)

☆الف) $R_۱=\{(۲,۵),(۳,-۲),(-۲,۳),(۲,۵)\}$

☆ب) $R_۲=\{(۱,۳),(-۱,۰),(۲,۴),(۰,-۷)\}$

ج) $R_۳=\{(۲,۱),(۳,-۲),(-۱,۰),(۳,-۵)\}$

☆د)

x	۱	۲	۵	۹	۱۱
y	۱۱	۴	۷	۵	۶

هـ)

x	۱	۲	۵	۲
y	۳	۴	۴	۵

(دی ۸۹)

۴. اگر رابطه‌ی f یک تابع را نشان دهد، مقادیر x و y را به‌دست آورید.

$$f=\{(۴,۸),(۵,۱۲),(۳,۱),(۵,۲x-۴),(۴,y+۲)\}$$

☆۵. اگر f بیان‌گر یک تابع باشد، مقادیر m و n را به‌دست آورید.

$$f=\left\{(-۱,۷),(۵,\frac{۱}{۳}),(۵,۳n-۷),(-۱,m^۲-۲)\right\}$$

درسنامه ۲

تابع

متغیر مستقل ـ متغیر وابسته

اگر تغییرات یک متغیر بر متغیر دیگر تأثیر بگذارد ولی خود تحت تأثیر متغیر دوم نباشد، متغیر اول را **متغیر مستقل** و متغیر دوم را **متغیر وابسته** می‌گوییم.

❑ **مثال:** اگر y تابعی برحسب x باشد، مثلاً داشته باشیم $y=۵x-۳$، با تغییرات x مقدار y هم تغییر می‌کند، یعنی متغیر y به متغیر x وابسته است. پس x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است.

ضابطه‌ی (قانون) تابع

درسنامه‌ی قبل، تابع را از نظر زوج مرتب بیان نموده است. حال تعریف جامع‌تری را برای تابع به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

تابع: رابطه‌ای برحسب x و y را تابع گوییم هرگاه برای هر مقدار دلخواه x، **یک و فقط یک** مقدار برای y به‌دست آید که آن را به‌صورت $y=f(x)$ نمایش می‌دهیم. در این رابطه x متغیر مستقل است و چون مقدار y به مقدار x بستگی دارد، y متغیر وابسته می‌باشد.

مثال ۳

تابع بودن روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $y=\sin x+۳$ **ب)** $y^۴=۲x+۱$

☑ پاسخ: **الف)** می‌دانیم رابطه‌ای تابع است که به ازای هر مقدار دلخواه برای x، حداکثر یک مقدار برای y به‌دست آید. در این رابطه به ازای هر x دلخواه یک مقدار برای y به دست می‌آید، پس تابع است. به عنوان مثال: $y=\sin x+۳$

$x=۰\Rightarrow y=\underbrace{\sin ۰}_{۰}+۳=۳$ و $x=۹۰^\circ\Rightarrow y=\underbrace{\sin ۹۰^\circ}_{۱}+۳=۴$

ب) $y^۴=۲x+۱ \qquad x=۰\Rightarrow y^۴=۲(۰)+۱=۱\Rightarrow y^۴=۱\Rightarrow y=\pm\sqrt[۴]{۱}=\pm۱$

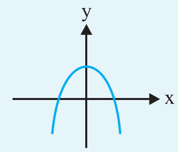
چون برای $(x=۰)$ دو مقدار برای y به‌دست آمده است لذا رابطه‌ی داده شده معرف یک تابع نمی‌باشد. معمولاً روابطی که در آن‌ها y توان زوج داشته باشد یا y داخل قدرمطلق باشد تابع نمی‌باشند (ولی برای اطمینان باید مانند مثال‌های ذکر شده، آن‌ها را بررسی کنیم).

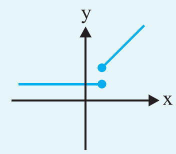
تشخیص تابع از روی نمودار

نمودار یک رابطه وقتی تابع می‌باشد که هر خط عمودی (موازی محور yها) نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند. (یعنی هر خط موازی محور yها، یا نمودار را قطع نکند و یا فقط در یک نقطه قطع کند.)

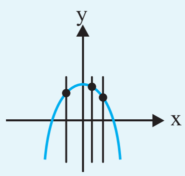
مثال ۴

کدام یک از نمودارهای زیر، بیانگر یک تابع است؟

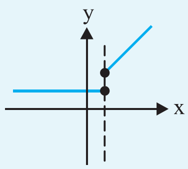
الف) 

ب) 

☑ پاسخ: نمودار «الف» نمایش یک تابع است، زیرا هر خط عمودی دلخواه که رسم کنیم این نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



نمودار «ب» تابع نیست، زیرا مطابق شکل زیر، خطی عمودی وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند:



۶. **متغیر مستقل و متغیر وابسته را تعریف کرده و در هر یک از قسمت‌های زیر متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید:**

☆الف) $h(x) = ۱۲ - ۳\sqrt{x-۲}$ ب) $g(t) = |۷t - ۱۵|$ ☆ج) $p(\theta) = \frac{\theta^۲ - ۳}{\sqrt{۳\theta}}$

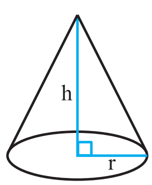
د) $y = \sin x + ۸x^۳$ هـ) $f = ۱۲g - ۲۳$

و) «بهره‌ی هوشی (IQ) دانش‌آموزان، یکی از عوامل مؤثر در پیشرفت تحصیلی آن‌هاست.»

☆ز) «مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده‌ی آن.»

۷. **الف) فرمول محاسبه‌ی حجم کره $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ است. در این رابطه متغیر مستقل و متغیر وابسته را مشخص کنید. (r شعاع کره است.)**

ب) دستور محاسبه‌ی حجم مخروط برابر است با $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$، که r شعاع قاعده‌ی مخروط و h ارتفاع مخروط می‌باشد. متغیر مستقل و متغیر وابسته را در این رابطه مشخص کنید.



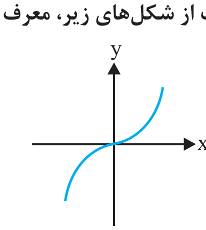
۸. **کدام‌یک از رابطه‌های زیر بیانگر یک تابع است؟ (با ذکر دلیل)**

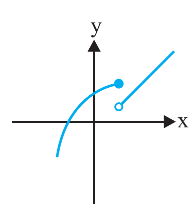
☆الف) $y = ۲x^۲ - ۱$ ☆ب) $y = \frac{۱}{|x| + ۲}$ ☆ج) $y^۲ = ۵x - ۱$ ☆د) $x = y^۲ - ۱$

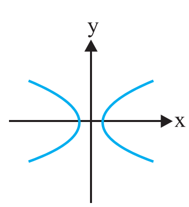
هـ) $|y| = |x + ۱|$ و) $x^۲ = y - ۱$ ز) $y^۲ = x^۴ + ۱۶$ ح) $|y| = ۱۲x + ۳$

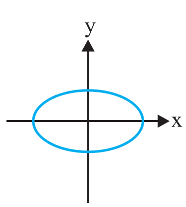
ط) $y^۲ = ۲x - ۷$ ☆ی) $y = \pm\sqrt{x} + ۲$ ☆ک) $y^۳ = x^۲ + ۸$

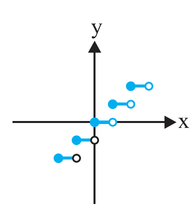
۹. **کدام‌یک از شکل‌های زیر، معرف یک تابع هستند؟**

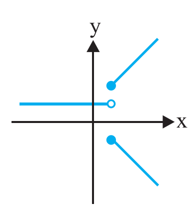
الف) 

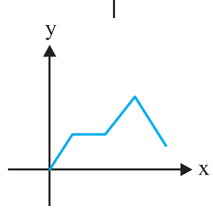
ب) 

ج) 

د) 

هـ) 

و) 

ز) 

(دی ۸۹)

درسنامه ۳

دامنه و برد تابع

دامنه‌ی تابع (حوزه‌ی تعریف): دامنه‌ی تابع، مجموعه‌ی مقادیری است که اگر به جای x قرار دهیم، مقدار y عددی حقیقی شده و نامعین نشود. مجموعه‌ی این مقادیر را با D_f نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، دامنه‌ی تابع، مجموعه‌ی مقادیری است که یک متغیر مستقل می‌تواند داشته باشد.

برد تابع (حوزه‌ی مقادیر): برد تابع، مجموعه‌ی مقادیری است که به ازای xهای دامنه برای y به‌دست می‌آید و آن را با R_f نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر، برد یک تابع، مجموعه‌ی مقادیری است که یک متغیر وابسته می‌تواند داشته باشد.

تذکر اگر تابع به‌صورت زوج‌های مرتب نمایش داده شده باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول را دامنه و مجموعه‌ی تمام مؤلفه‌های دوم را برد تابع می‌گوییم.

مثال ۵

دامنه و برد تابع $f=\{(-۱,۷),(۰,۶),(۴,۷)\}$ را بنویسید.

☑ پاسخ:

دامنه (حوزه‌ی تعریف) $D_f=\{-۱,۰,۴\}$

بُرد (حوزه‌ی مقادیر) $R_f=\{۷,۶,۷\}=\{۷,۶\}$

۱) تعیین دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای

دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای به فرم $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+L$ و $(n\in\mathbb{N})$ برابر $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) می‌باشد. به عبارت دیگر این توابع به ازای هر x دلخواه از اعداد حقیقی تعریف شده‌اند و مقداری که برای y به‌دست می‌آید معین می‌باشد.

۲) تعیین دامنه‌ی توابع کسری

دامنه‌ی توابع کسری برابر است با تمام اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به‌جز اعدادی که مخرج کسر را صفر می‌کنند، زیرا اگر مخرج کسر صفر باشد، آن کسر تعریف نشده است. پس اگر f تابعی کسری باشد، می‌توان نوشت:

$D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه(های) مخرج کسر}\}$

مثال ۶

دامنه‌ی تعریف توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=۴x^۲-۵x+۶$ ب) $g(x)=\dfrac{۲x-۷}{۴-۸x}$

☑ پاسخ: **الف)** تابع $f(x)$ یک چندجمله‌ای می‌باشد. (زیرا متغیر x توان منفی و کسری ندارد و در ضمن x در مخرج کسر و یا زیر رادیکال قرار ندارد) لذا دامنه‌ی تابع f برابر مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. یعنی برای هر مقدار دلخواه از $\mathbb{R}$ حتماً جوابی معین برای y به‌دست می‌آید. $D_f=\mathbb{R}$

ب) تابع $g(x)$ کسری است، لذا مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۴-۸x=۰\Rightarrow -۸x=-۴\Rightarrow x=\frac{-۴}{-۸}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\tfrac{۱}{۲}\}$$

به عبارت دیگر اگر $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، تابع $g(x)$ تعریف نشده است و اگر x هر عددی به غیر از $\frac{۱}{۲}$ باشد، حتماً جوابی برای $g(x)$ به‌دست می‌آید.

۳) تعیین دامنه‌ی توابع رادیکالی

برای توابع رادیکالی دو حالت در نظر می‌گیریم؛ یا عدد فرجه‌ی آن‌ها زوج است مانند $\sqrt{x}$ و یا عدد فرجه‌ی آن‌ها فرد است مانند $\sqrt[۳]{x}$.

حالت اول: برای تعیین دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد می‌توانیم از رادیکال صرفنظر کرده و دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال را به‌دست آوریم. به عبارت دیگر رادیکال با فرجه‌ی فرد، تأثیری در محاسبه‌ی دامنه ندارد.

❐ **مثال:** دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt[۵]{x^۳-۲x}$ برابر $\mathbb{R}$ است؛ زیرا با صرفنظر کردن از رادیکال با فرجه‌ی فرد (عدد ۵)، یک چندجمله‌ای به‌صورت $x^۳-۲x$ باقی می‌ماند و می‌دانیم دامنه‌ی تعریف چندجمله‌ای‌ها برابر $\mathbb{R}$ است.

حالت دوم: برای تعیین دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ زیرا اگر فرجه‌ی رادیکال زوج باشد، عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد.

مثال ۷

دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{۲x-۳۶}$ را محاسبه کنید.

☑ پاسخ: چون فرجه‌ی رادیکال زوج است (عدد ۲)، برای یافتن دامنه‌ی تابع، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم. پس می‌توان نوشت:

$$۲x-۳۶\geq ۰\Rightarrow ۲x\geq ۳۶\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر عدد ۲}} x\geq ۱۸\Rightarrow D_y=\{x\mid x\geq ۱۸\}$$

نکته *اگر یک رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج یک کسر قرار گیرد، برای محاسبه‌ی دامنه، باید عبارت زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم زیرا مخرج یک کسر هیچ‌گاه نباید مساوی صفر شود.*

مثال ۸

دامنه‌ی تابع $y=\frac{۵x-۱}{\sqrt[۴]{۳x-۲}}$ را محاسبه کنید.

☑ پاسخ: چون یک رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر واقع شده، برای یافتن دامنه، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم:

$$۳x-۲>۰ \Rightarrow ۳x>۲ \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر عدد ۳}} x>\frac{۲}{۳} \Rightarrow D_y=\{x \mid x>\frac{۲}{۳}\}$$

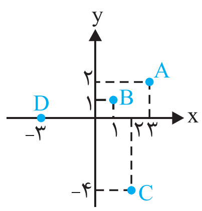
☆**۱۰.** **دامنه و برد توابع زیر را به‌دست آورید.**

الف) $f=\{(-۱,۶),(۲,۹),(۳,۵),(۰,۰)\}$

ب)

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱۲	۶	۴	۳	۲/۴	۲

۱۱. **با توجه به نمودار مقابل:**



الف) مجموعه‌ی زوج مرتب‌های مربوط به شکل مقابل را بنویسید.

ب) دامنه و برد مربوط به این تابع را مشخص کنید.

☆**۱۲.** **در جاهای خالی عبارات مناسب بگذارید.**

الف) به کمیتی که تغییر می‌کند، .... گفته می‌شود.

ب) .... ، مجموعه مقادیری است که یک متغیر مستقل می‌تواند داشته باشد.

ج) .... ، مجموعه مقادیری است که یک متغیر وابسته می‌تواند داشته باشد.

۱۳. **دامنه‌ی تعریف توابع زیر را به‌دست آورید.**

الف) $y=-۳x^{۲}+۷x-۴$ (خرداد - ۹۰)

☆ب) $y=\frac{۵}{۳x-۱}$ (خرداد ۹۰)

☆ج) $y=۵x^{۳}-۶x+۸$

د) $f(x)=۹x^{۵}+۵x^{۳}-۴x^{۲}-\frac{۵}{۷}x-۱$

☆هـ) $y=\frac{۵x}{۱۴-۷x}$

☆و) $y=\frac{-۶}{(x-۱)(۳-x)}$

ز) $g(x)=\frac{۳x}{|x|-۲}$

ح) $h(x)=\frac{۱۰x}{|x|+۵}$

ط) $h(x)=\frac{x+۵}{(x+۱)(x-۱)}$ (دی ۸۹ و مشابه شهریور ۸۹)

☆ی) $f(x)=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۵}{x-۲}$

ک) $h(x)=\frac{۱۲}{|x|+۲}-\frac{۱۳x}{|x|-۴}$

ل) $g(x)=\frac{۷x}{۴x^{۲}+۱}-\frac{۴x}{x^{۲}-۱}$

۱۴. **دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.**

الف) $y=\sqrt{۲x-۴}$ (خرداد ۸۹ و مشابه دی ۸۹)

☆ب) $y=\sqrt{۷-۲x}$

☆ج) $f(x)=\sqrt[۳]{۵x^{۲}-۱}$

☆د) $f(x)=\sqrt[۴]{۲-۵x}$

هـ) $h(x)=\sqrt[۵]{\frac{۲x+۳}{۵x-۱}}$

و) $f(x)=\sqrt[۴]{(x-۱)^{۲}-x^{۲}}$

☆ز) $f(x)=\frac{x^{۳}+۱}{\sqrt{۵x+۱۰}}$

☆ح) $g(x)=\sqrt{۲-|x|}$

ط) $k(x)=\frac{۱۰x^{۲}-۱۶x}{\sqrt{۲۰۰-۱۰۰x}}$

ی) $y=\sqrt{x-۷}$ (خرداد ۹۰)

ک) $h(x)=\sqrt{(۲x+۱)^{۲}-۴x^{۲}}$

ل) $g(x)=\sqrt[۵]{\frac{۲x-۱}{(x^{۲}+۱)(x^{۲}-۱)}}$

پاسخ پرسش‌های فصل ۱

۱ با توجه به نکته‌ی ۲ در درسنامه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\times(-۲)\begin{cases}a-۲b=۴\\ ۲a-b=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{-۲a}+۴b=-۸\\ \cancel{۲a}-b=۸\end{cases}$$

$$۳b=۰\Rightarrow b=۰\Rightarrow a-۲b=۴\Rightarrow a-۲(۰)=۴\Rightarrow a=۴$$

۲ دو زوج مرتب داده شده با هم مساوی‌اند پس مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم و مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}m-۸=۱۱\\ ۳n-۲=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=۱۱+۸\\ ۳n=۱۰+۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=۱۹\\ n=۴\end{cases}$$

۳ الف) مجموعه‌ی $R_۱$ معرف یک تابع است؛ زیرا زوج مرتب (۲،۵) دو بار تکرار شده و می‌دانیم تکرار یک عضو در مجموعه‌ها بی‌تأثیر است؛ یعنی می‌توانیم مجموعه‌ی $R_۱$ را به‌صورت زیر بنویسیم: $R_۱=\{(۲,۵),(۳,-۲),(-۲,۳)\}$

یعنی عضو (۲،۵) را فقط یک‌بار می‌نویسیم پس مجموعه‌ی $R_۱$ تابع است؛ زیرا تمام مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها با هم متفاوت‌اند.

ب) مجموعه‌ی $R_۲$ نیز تابع است؛ زیرا تمام زوج مرتب‌ها، عضوهای اول متفاوت دارند.

ج) مجموعه‌ی $R_۳$ تابع نیست؛ زیرا زوج مرتب‌های (۳،۲−) و (۳،۵−) دارای عضوهای اول یکسان هستند، در صورتی‌که عضوهای دوم آن‌ها یکسان نیست.

د) جدول مورد نظر را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها نوشت، پس خواهیم داشت:

$$A=\{(۱,۱۱),(۲,۴),(۵,۷),(۹,۵),(۱۱,۶)\}$$

ملاحظه می‌شود که تمام عضوهای اول زوج مرتب‌ها، با هم متفاوت‌اند، پس یک تابع خواهیم داشت.

هـ) این جدول نمایش یک تابع نمی‌باشد چون در زوج مرتب‌های (۲،۴) و (۲،۵) عضوهای اول مساوی‌اند ولی عضوهای دوم مساوی نیستند.

۴ اولاً زوج مرتب‌های (۴،۸) و (۴،y+۲) دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند، پس مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باید برابر باشد. ثانیاً زوج مرتب‌های (۵،۱۲) و (۵،۲x−۴) نیز عضوهای اول یکسان دارند، پس عضوهای دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

$$\begin{cases}y+۲=۸\Rightarrow y=۸-۲\Rightarrow y=۶\\ ۲x-۴=۱۲\Rightarrow ۲x=۱۶\Rightarrow x=۸\end{cases}$$

۵ می‌دانیم در یک تابع، اگر دو زوج مرتب، عضوهای اول مساوی داشته باشند عضوهای دوم آن‌ها نیز باید مساوی باشند، پس خواهیم داشت:

$$(-۱,۷)=(-۱,m^۲-۲)\Rightarrow m^۲-۲=۷\Rightarrow m^۲=۹\Rightarrow m=\pm۳$$

$$(۵,\frac{۱}{۳})=(۵,۳n-۷)\Rightarrow ۳n-۷=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳n=۷+\frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در عدد ۳}} ۹n=۲۱+۱\Rightarrow ۹n=۲۲\Rightarrow n=\frac{۲۲}{۹}$$

یادآوری ۱ اگر k عددی مثبت باشد همواره خواهیم داشت: $x^۲=k\Rightarrow x=\pm\sqrt{k}$

❑ مثال: $x^۲=۱۴۴\Rightarrow x=\pm\sqrt{۱۴۴}=\pm۱۲$

یادآوری ۲ برای حل معادلات کسری، می‌توانیم طرفین تساوی را در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها ضرب کنیم تا معادله به شکل ساده‌تری تبدیل شود.

❑ مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{x}{۲}+۳=\frac{۲x}{۳}+۵x\xrightarrow{\text{طرفین را در ک.م.م دو عدد ۲ و ۳ یعنی عدد ۶ ضرب می‌کنیم.}}۶(\frac{x}{۲})+۶\times۳=۶(\frac{۲x}{۳})+۶(۵x)$$

$$\Rightarrow ۳x+۱۸=۴x+۳۰x\Rightarrow ۳x+۱۸=۳۴x\Rightarrow ۳۴x-۳x=۱۸\Rightarrow ۳۱x=۱۸\Rightarrow x=\frac{۱۸}{۳۱}$$

۶ تعریف متغیر مستقل و متغیر وابسته در درسنامه آمده است.

الف) در تابع $\left.h(x)=۱۲-۳\sqrt{x-۲}:\begin{matrix} x & \text{متغیر مستقل} \\ h(x) & \text{متغیر وابسته}\end{matrix}\right\}$

ب) در تابع $\left.g(t)=|۷t-۱۵|:\begin{matrix} t & \text{متغیر مستقل} \\ g(t) & \text{متغیر وابسته}\end{matrix}\right\}$

ج) در تابع $\left.p(\theta)=\frac{\theta^۲-۳}{\sqrt{۳\theta}}:\begin{matrix} \theta & \text{متغیر مستقل} \\ p(\theta) & \text{متغیر وابسته}\end{matrix}\right\}$

د) در تابع $\left.y=\sin x+۸x^۳:\begin{matrix} x & \text{متغیر مستقل} \\ y & \text{متغیر وابسته}\end{matrix}\right\}$

هـ) در تابع $\left.f=۱۲g-۲۳:\begin{matrix} g & \text{متغیر مستقل} \\ f & \text{متغیر وابسته}\end{matrix}\right\}$

و) از جملهی مذکور این‌طور برداشت می‌شود که پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان به بهره‌ی هوشی آن‌ها وابسته است، پس **بهره‌ی هوشی** (IQ) دانش‌آموزان متغیر مستقل است و **پیشرفت تحصیلی** دانش‌آموزان متغیر وابسته است.

ز) اگر فرمول مساحت مثلث را بنویسیم خواهیم داشت: $\text{مساحت مثلث}=S=\frac{۱}{۲}(\text{قاعده})\times(\text{ارتفاع})$

یعنی مقدار مساحت (S) به مقدارهای قاعده و ارتفاع وابسته است، پس قاعده و ارتفاع متغیرهای مستقل و مساحت متغیر وابسته است.

---

۷ الف) در فرمول $V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ مقدار حجم (V) به مقدار شعاع (r) بستگی دارد، پس r متغیر مستقل و V متغیر وابسته است.

ب) در فرمول $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ مقدار حجم (V) به مقادیر شعاع (r) و ارتفاع (h) بستگی دارد، پس r و h متغیرهای مستقل و V متغیر وابسته است.

---

۸ در هر قسمت باید بررسی کنیم که به ازای هر x دلخواه، چند مقدار برای y به‌دست می‌آید؟

الف) این رابطه تابع است زیرا به ازای هر مقدار دلخواه x فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید. به عنوان مثال می‌توان نوشت:

$$y=۲x^۲-۱$$
$$\begin{cases} x=۰\Rightarrow y=-۱ \\ x=۱\Rightarrow y=۲(۱)^۲-۱=۱ \\ x=-۱\Rightarrow y=۲(-۱)^۲-۱=۱\end{cases}$$

ب) این رابطه یک تابع است، زیرا به ازای هر مقدار دلخواه x فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{۱}{|x|+۲}$$
$$\begin{cases} x=۰\Rightarrow y=\frac{۱}{۲} \\ x=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۳} \\ x=-۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

ج) این رابطه نیز تابع نمی‌باشد، زیرا اگر به x مقدار ۱ بدهیم، برای y دو مقدار به‌دست می‌آید:

$$x=۱\Rightarrow y^۲=۵(۱)-۱=۴\Rightarrow y=\pm۲$$

د) اگر به x، مقدار ۲ را بدهیم خواهیم داشت:

$$x=۲\Rightarrow ۲=y^۲-۱\Rightarrow y^۲=۳\Rightarrow y=\pm\sqrt{۳} \qquad (\text{دو مقدار})$$

بنابراین این رابطه تابع نمی‌باشد.

هـ) این رابطه نیز تابع نیست، به عنوان مثال:

$$x=۲\Rightarrow |y|=|۲+۱|\Rightarrow |y|=|۳|=۳\Rightarrow y=\pm۳ \qquad (\text{دو مقدار})$$

و) این رابطه، معرف یک تابع است زیرا به ازای هر x دلخواه فقط یک جواب برای y به‌دست می‌آید، به عنوان مثال:

$$\begin{cases} x=۰\Rightarrow ۰=y-۱\Rightarrow y=۱ \\ x=۱\Rightarrow ۱^۲=y-۱\Rightarrow y=۲ \\ x=-۱\Rightarrow (-۱)^۲=y-۱\Rightarrow y=۲\end{cases}$$

ز) این رابطه نیز یک تابع را مشخص نمی‌کند، زیرا:

$$x=۰\Rightarrow y^۲=۰+۱۶=۱۶\Rightarrow y=\pm\sqrt{۱۶}=\pm۴ \qquad (\text{دو مقدار})$$

ح) تابع نیست، به عنوان مثال:

(دو مقدار به‌دست می‌آید) $x=\circ \Rightarrow |y|=۱۲\times\circ+۳ \Rightarrow y=\pm۳$

ط) این رابطه نیز معرف یک تابع نیست، به عنوان مثال داریم:

(دو مقدار به‌دست می‌آید) $y^{۲}=۲x-۷, x=۴ \Rightarrow y^{۲}=۲(۴)-۷=۱ \Rightarrow y=\pm۱$

تذکر در رابطه‌ی $y^{۲}=۲x-۷$ اگر به جای x مثلاً عدد صفر را قرار دهیم رابطه‌ی $y^{۲}=-۷$ به‌دست می‌آید که از این رابطه نمی‌توان y را به‌دست آورد؛ زیرا هر عبارت که به توان زوج برسد جوابش بزرگ‌تر یا مساوی صفر است (نامنفی است) ، پس به x طوری عدد می‌دهیم که برای y بتوانیم جواب معینی به‌دست آوریم.

ببخشید؟ ما به x عدد ۱ داریم و به عبارت $y^{۲}=-۵$ رسیدیم. پس طبق تذکر شما باز هم برای y مقداری به‌دست نمی‌آید چون $y^{۲}$ هیچ وقت نمی‌تونه مساوی ۵− بشه، درست می‌گم؟

پاسخ: دقیقاً همین طوره. پس برای تشخیص تابع بودن یک رابطه به x طوری عدد می‌دهیم که برای y حتماً مقداری به‌دست بیاید.

ی) در رابطه‌ی $y=\pm\sqrt{x}+۲$ به ازای **بعضی** از مقادیر برای x دو مقدار برای y به‌دست می‌آید. پس این رابطه، تابع نخواهد بود، مثلاً داریم:

(دو مقدار برای y به‌دست می‌آید.) $x=۱ \Rightarrow y=\pm\sqrt{۱}+۲=\pm۱+۲=+۳$ یا $+۱$

ببخشید چرا به ازای بعضی مقادیر x دو مقدار برای y به‌دست می‌آید؟

پاسخ: چون x زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج قرار داره پس نمی‌تونه منفی باشد. مثلاً x نمی‌تونه ۳− باشه چون $\sqrt{-۳}$ بی‌معنیه. پس به x یا می‌تونیم صفر بدیم یا اعداد مثبت که ما در حل این مسئله به دلخواه عدد ۱ رو انتخاب کردیم.

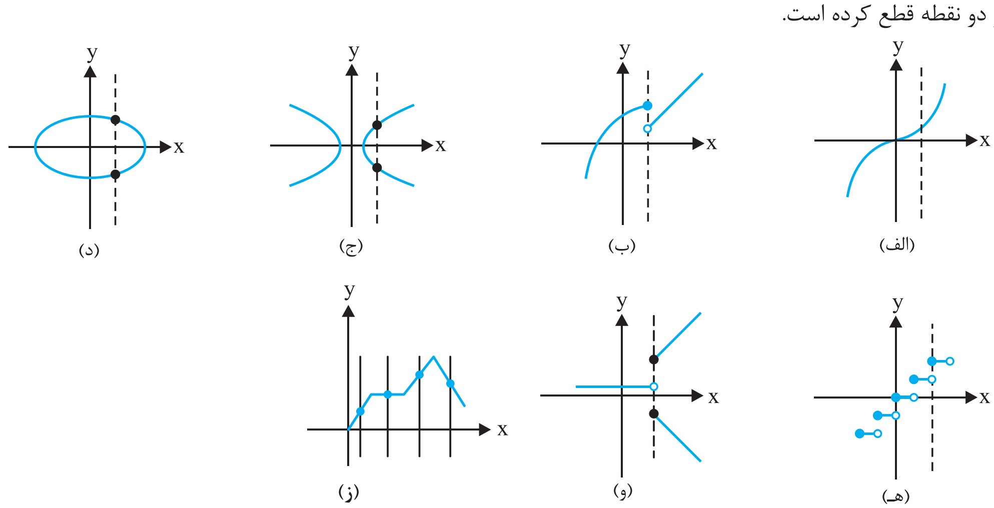
ک) چون y توان فرد دارد پس یک تابع خواهیم داشت. در واقع به x هر عدد دلخواهی که بدهیم فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید. به عنوان مثال:

$$y^{۳}=x^{۲}+۸ \quad , \quad x=\circ \Rightarrow y^{۳}=۸ \xrightarrow{\text{از طرفین، رادیکال با فرجه‌ی ۳ می‌گیریم}} \sqrt[۳]{y^{۳}}=\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{۲^{۳}} \Rightarrow y=۲$$

---

۹ ملاحظه می‌شود که در قسمت‌های «الف»، «ب»، «هـ» و «ز» هر خط موازی محور yها نمودارها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس نمودارهای «الف»، «ب»، «هـ» و «ز» معرف تابع هستند.

نمودارهای قسمت‌های «ج»، «د» و «و» معرف تابع نیستند، زیرا مطابق شکل‌های زیر، خطی موازی محور yها موجود است که این نمودارها را در دو نقطه قطع کرده است.



نقطه‌ی توخالی در نمودارهای «ب»، «هـ» و «و» به چه مفهومی است؟

پاسخ: نقطه‌ی توخالی یعنی به ازای x آن نقطه، مقداری برای y آن نقطه وجود ندارد. مثلاً در نمودار قسمت «و» دو نقطه‌ی توپُر و یک نقطه‌ی توخالی مشاهده می‌شود یعنی به ازای یک x دو مقدار برای y وجود دارد که مربوط به نقاط توپُر است. به عبارت ساده‌تر نقطه‌ی توخالی متعلق به تابع نیست.

۱۰ الف)

$$\begin{cases} D_f = \{-۱,۲,۳,۰\} \\ R_f = \{۶,۹,۵,۰\} \end{cases}$$

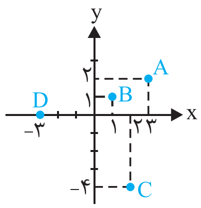
ب)

$$\begin{cases} D_y = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \\ R_y = \{۱۲,۶,۴,۳,۲/۴,۲\} \end{cases}$$

---

۱۱ الف) اگر مجموعه‌ی زوج مرتب‌های مربوط به نمودار را با f نمایش دهیم آن‌گاه داریم:

$$f = \left\{ \underbrace{(۳,۲)}_{A}, \underbrace{(۱,۱)}_{B}, \underbrace{(۲,-۴)}_{C}, \underbrace{(-۳,۰)}_{D} \right\}$$



ب) چون تمام عضوهای اول زوج مرتب‌ها با هم متفاوت هستند، پس مجموعه‌ی f نمایشگر یک تابع است و دامنه و برد f برابر است با:

$$D_f = \{۳,۱,۲,-۳\} \quad , \quad R_f = \{۲,۱,-۴,۰\}$$

---

۱۲ الف) به کمیتی که تغییر می‌کند **متغیر** می‌گوییم. مانند دستمزد یک کارگر که با توجه به تعداد ساعات کارکرد او، تغییر می‌کند.

ب) **دامنه‌ی تابع**، مجموعه مقادیری است که یک متغیر مستقل می‌تواند اختیار کند تا برای متغیر وابسته مقدارهایی معین به‌دست آید.

ج) **برد تابع**، مجموعه مقادیری است که یک متغیر وابسته می‌تواند اختیار کند.

---

۱۳ الف) تابع $y = -۳x^۲ + ۷x - ۴$ چندجمله‌ای می‌باشد، لذا دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. ($D_y = \mathbb{R}$)

ب)

$$y = \frac{۵}{۳x-۱}$$

$$\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{\tfrac{۱}{۳}\}$$

ج) چون $y = ۵x^۳ - ۶x + ۸$ چندجمله‌ای است، پس دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است: $D_y = \mathbb{R}$

د) تابع $f(x)$ یک چندجمله‌ای است، پس دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است: $D_f = \mathbb{R}$

هـ) می‌دانیم دامنه‌ی توابع کسری برابر است با مجموعه‌ی اعداد حقیقی به جز ریشه(های) مخرج کسر. پس داریم:

$$y = \frac{۵x}{۱۴ - ۷x} \Rightarrow ۱۴ - ۷x = ۰ \Rightarrow -۷x = -۱۴ \xrightarrow[\text{بر عدد } -۷]{\text{تقسیم طرفین}} x = ۲ \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{۲\}$$

و) ابتدا ریشه‌های مخرج را به‌دست آورده و از مجموعه‌ی اعداد حقیقی حذف می‌کنیم:

$$(x-۱)(۳-x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \\ ۳ - x = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۳ \end{cases} \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{۱,۳\}$$

یعنی x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد به غیر از ۱ و ۳، زیرا اگر در مخرج کسر به جای xها اعداد ۱ یا ۳ را بگذاریم مخرج صفر می‌شود و در نتیجه کسر تعریف نشده می‌شود.

ز) تابع $g(x)$ کسری است، پس مخرج آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه یا ریشه‌ها به‌دست آیند:

$$g(x) = \frac{۳x}{|x| - ۲}$$

$$\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow |x| - ۲ = ۰ \Rightarrow |x| = ۲ \Rightarrow x = \pm ۲ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{\pm ۲\}$$

> **یادآوری** اگر k عددی مثبت باشد، آن‌گاه: $|x| = k \Rightarrow x = \pm k$

ح) تابع $h(x)$ کسری است، پس مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$h(x) = \frac{۱۰x}{|x| + ۵}$$

$$\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow |x| + ۵ = ۰ \Rightarrow |x| = -۵$$

این معادله جواب ندارد. چون سمت چپ تساوی $|x|$ است و می‌دانیم جواب قدرمطلق هیچ‌گاه نمی‌تواند عددی منفی بشود، درصورتی‌که در این‌جا $|x|$ مساوی -۵ شده است. پس این معادله غیرممکن بوده و ریشه ندارد، وقتی مخرج یک کسر ریشه ندارد دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌باشد. زیرا مخرج هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. یعنی به ازای هر x از اعداد حقیقی کسر تعریف شده است:

$$D_h = \mathbb{R} - \{\text{ریشه(های) مخرج}\} = \mathbb{R} - \{\ \} = \mathbb{R}$$

ط)

$$h(x)=\frac{x+۵}{(x-۱)(x+۱)}$$

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow (x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰\Rightarrow x=۱ \\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱ \end{cases}\Rightarrow D_h=\mathbb{R}-\{-۱,+۱\}$$

ی) مخرج‌ها را جداگانه مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌ی آن‌ها به‌دست آید:

$$f(x)=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۵}{x-۲}\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \\ x-۲=۰ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۲ \end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱\,,\,۲\}$$

ک) تابع $h(x)$ از تفاضل دو کسر تشکیل شده است، پس ابتدا مخرج‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$h(x)=\frac{۱۲}{|x|+۲}-\frac{۱۳x}{|x|-۴}\Rightarrow \begin{cases} |x|+۲=۰ \\ |x|-۴=۰ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} |x|=-۲ \\ |x|=۴ \end{cases}$$

معادله‌ی $|x|=-۲$ جواب ندارد. زیرا عبارت سمت چپ تساوی یعنی $|x|$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است در صورتی‌که سمت راست تساوی عددی منفی است. به عبارت ساده‌تر جواب یک قدرمطلق هیچ‌گاه نمی‌تواند عددی منفی شود. حال معادله‌ی $|x|=۴$ را حل می‌کنیم:

$$|x|=۴\Rightarrow x=\pm۴\Rightarrow D_h=\mathbb{R}-\{-۴,۴\}$$

ل) تابع g از تفاضل دو کسر تشکیل شده است، می‌توان نوشت:

$$g(x)=\frac{۷x}{۴x^۲+۱}-\frac{۴x}{x^۲-۱}\Rightarrow \begin{cases} ۴x^۲+۱=۰ \\ x^۲-۱=۰ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} ۴x^۲=-۱ \\ x^۲=۱ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x^۲=-\frac{۱}{۴} \quad \text{معادله جواب ندارد.} \\ x=\pm۱ \end{cases}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$$

تذکر معادله‌ی $x^۲=-\frac{۱}{۴}$ جواب حقیقی ندارد. زیرا هر عبارتی به توان زوج برسد، جوابش صفر یا عددی مثبت می‌گردد. در حالی‌که در این معادله حاصل $x^۲$ برابر عددی منفی شده است که این غیرممکن است.

---

۱۴ الف)

$$y=\sqrt{۲x-۴}$$

چون فرجه‌ی رادیکال زوج است (عدد۲)، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۲x-۴\geq۰\Rightarrow ۲x\geq۴\Rightarrow x\geq۲\Rightarrow D_y=\{x\,|\,x\geq۲\}$$

ب) چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، عبارت زیر رادیکال باید همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، لذا خواهیم داشت:

$$y=\sqrt{۷-۲x}\Rightarrow ۷-۲x\geq۰\Rightarrow -۲x\geq-۷\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر عدد }-۲} x\leq\frac{۷}{۲}\Rightarrow D_y=\left\{x\,|\,x\leq\frac{۷}{۲}\right\}$$

یادآوری اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب و یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود. در نامساوی $-۲x\geq-۷$ نیز چون دو طرف را بر -۲ تقسیم کردیم جهت نامساوی عوض شد.

ج) چون فرجه‌ی رادیکال فرد است پس رادیکال تأثیری در تعیین دامنه ندارد. با حذف رادیکال چند جمله‌ای $۵x^۲-۱$ به‌دست می‌آید که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. پس: $D_f=\mathbb{R}$

د)

$$f(x)=\sqrt[۴]{۲-۵x}\Rightarrow ۲-۵x\geq۰\Rightarrow -۵x\geq-۲\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر عدد }-۵}\frac{-۵x}{-۵}\leq\frac{-۲}{-۵}\Rightarrow x\leq\frac{۲}{۵}\Rightarrow D_f=\left\{x\,|\,x\leq\frac{۲}{۵}\right\}$$

هـ) چون در تابع $h(x)=\sqrt[۵]{\frac{۲x+۳}{۵x-۱}}$ فرجه‌ی رادیکال فرد است، پس آن را نادیده می‌گیریم و دامنه‌ی $\frac{۲x+۳}{۵x-۱}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow ۵x-۱=۰\Rightarrow ۵x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۵}\ \text{ریشه‌ی مخرج}\Rightarrow D_h=\mathbb{R}-\left\{\frac{۱}{۵}\right\}$$

و) چون فرجه‌ی رادیکال زوج است عبارت زیر رادیکال باید همواره نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد:

$$(x-۱)^۲-x^۲\geq۰\Rightarrow \cancel{x^۲}-۲(x)(۱)+۱^۲-\cancel{x^۲}\geq۰\Rightarrow -۲x+۱\geq۰\Rightarrow -۲x\geq-۱\xrightarrow[\text{بر عدد }-۲]{\text{تقسیم طرفین}} x\leq\frac{۱}{۲}\Rightarrow D_f=\left\{x\,|\,x\leq\frac{۱}{۲}\right\}$$

یادآوری در محاسبه‌ی $(x-۱)^۲$ از اتحاد $(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$ استفاده کرده‌ایم:

$$(\underset{a}{x}-\underset{b}{۱})^۲=x^۲-۲(x)(۱)+۱^۲$$