بسم ا... الرّحمن الرّحیم

ریاضیات عمومی

و علوم پایه مرتبط با آن (جلد دوّم)

ویژه‌ی دانش‌آموزان ممتاز رشته‌ی تجربی

انتشارات خوشخوان

مؤلفان : حسین شفیع زاده ، رسول حاجی‌زاده

فهرست

عنوان | **صفحه**

فصل هشتم

جلسه‌ی اول

نقاط بحرانی، ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق

☜ ***نقطه بحرانی***

تابع f با دامنه $[a,b]$ را در نظر بگیرید. نقاطی از بازه باز (a,b) که در آن نقاط مشتق برابر صفر است و یا مشتق وجود ندارد را نقاط بحرانی f می‌نامیم.

نکته‌ی ۱. اگر $[a,b]$ دامنه‌ی f باشد آن‌گاه a و b نقاط بحرانی نمی‌باشند.

نکته‌ی ۲. در حالت کلی نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه بحرانی f می‌نامیم هرگاه $f'(c)=0$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد. (به‌جز ابتدا و انتهای بازه‌های بسته)

مثال ۱. نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

$1)\ y = x^3 - 3x + 5$

$2)\ y = x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$

$3)\ y = |x^3 + 2x^2 + x|$

$4)\ y = \begin{cases} x^2 - x & x \le 1 \\ x^3 - 4x & x > 1 \end{cases}$

$5)\ y = [x]$

حل:

$1)\ y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ نقاط بحرانی

$2)\ y' = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8x\sqrt[3]{x^2}}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{8x^2 - 2}{3\sqrt[3]{x}}$

در نقاط $x=\pm\frac{1}{2}$ مشتق برابر صفر است و در نقطه $x=0$ مشتق وجود ندارد. پس مجموعه‌ی نقاط بحرانی برابر است با $\left\{0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$

$$3)\ y=|x(x+1)^2|=\begin{cases}x(x+1)^2 & x\ge 0\\ -x(x+1)^2 & x<0\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}(x+1)^2+2x(x+1) & x>0\\ -(x+1)^2-2x(x+1) & x<0\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}(x+1)(3x+1) & x>0\\ -(x+1)(3x+1) & x<0\end{cases}$$

در نقاط ۱- و $x=-\frac{1}{3}$ مشتق برابر صفر است. در نقطه $x=0$ چون مشتق چپ و راست برابر نیستند پس مشتق وجود ندارد. بنابراین مجموعه نقاط بحرانی عبارت است از $\left\{0,-\frac{1}{3},-1\right\}$

$$4)\ y'=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ 3x^2-4 & x>1\end{cases}$$

در نقاط $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $x=\frac{1}{2}$ مشتق برابر صفر و در نقطه $x=1$ مشتق وجود ندارد. پس این تابع سه نقطه بحرانی دارد.

$$5)\ y'=\begin{cases}0 & x\notin Z\\ \text{وجود ندارد} & x\in Z\end{cases}$$

بنابراین تمام اعداد حقیقی نقاط بحرانی تابع‌اند.

نکته‌ی ۳. در تابع $y=|f(x)|$ نقاط بحرانی عبارتند از ریشه‌های $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ (f مشتق‌پذیر است)

***تست ۱.* مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+2}$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$y'=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2+2)^2}}$$

نقاط بحرانی : $3x^2-6x=0\ ,\ x^3-3x^2+2=0$

$3x(x-2)=0\ ,\ x^3-3x^2+2=0$

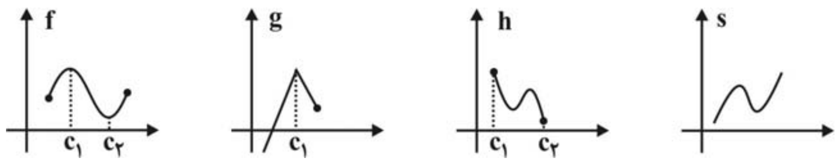
نقاط بحرانی عبارتند از صفر و ۲ و ۱ و $1\pm\sqrt{3}$ مجموع این نقاط برابر ۵ است.

ماکزیمم و مینیمم مطلق

تابع f با دامنه $[a,b]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $c\in[a,b]$ باشد. اگر برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\le f(c)$ گوئیم f در c ماکزیمم مطلق دارد و $f(c)$ را ماکزیمم مطلق f می‌نامیم. بطور مشابه اگر برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\ge f(c)$ گوئیم f در c مینیمم مطلق دارد و $f(c)$ را مینیمم مطلق f می‌نامیم.

نکته‌ی ۴. در حالت کلی بیش‌ترین عرض یک تابع را ماکزیمم مطلق آن تابع و کم‌ترین عرض یک تابع را مینیمم مطلق آن تابع می‌نامیم.

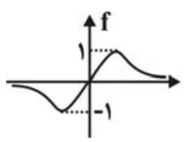
به شکل‌های زیر توجه کنید.



در توابع f و h ماکزیمم مطلق برابر $f(c_1)$ و $h(c_1)$ و مینیمم مطلق برابر $f(c_2)$ و $h(c_2)$ است. در تابع g ماکزیمم مطلق برابر $g(c_1)$ است. این تابع مینیمم مطلق ندارد و تابع s نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق.

نکته‌ی ۵. ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق در صورت وجود منحصر به فردند.

نکته‌ی ۶. اگر m و M به ترتیب مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع پیوسته f باشند آن‌گاه برد f برابر $[m,M]$ است. مانند شکل زیر.



$\Rightarrow$ برد $f = [-1, 1]$

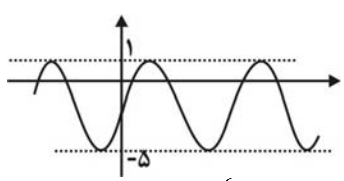
مثال ۲. ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را بیابید.

$1)\ y = 3\sin x - 1$ $\qquad$ $2)\ y = |x| - |x-1|$ $\qquad$ $3)\ y = x[x] \qquad -1 \le x \le 2$

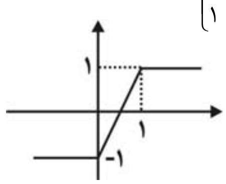
حل:

$-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\sin x \le 3 \Rightarrow -5 \le 3\sin x - 2 \le 1 \Rightarrow -5 \le y \le 1$

پس مینیمم مطلق برابر ۵- و ماکزیمم مطلق برابر ۱ است.



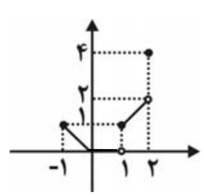
$$2)\ y = |x| - |x-1| = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ 2x-1 & 0 < x \le 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$



با توجه به نمودار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق به ترتیب برابر ۱ و ۱- است.

۳)

$$\begin{cases} -1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -x \\ 0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x \\ x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$



کم‌ترین مقدار تابع برابر صفر و بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۴ است.