بخش اول

مفاهیم مقدماتی مشتق

مفهوم مشتق

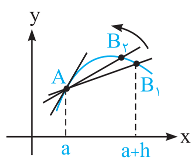
تعریف مشتق: فرض کنید f در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد. در این صورت اگر حد زیر موجود باشد، می‌گوییم تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است. مشتق تابع f در $x=a$ که آن را با $f'(a)$ نشان می‌دهیم برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

با تبدیل h به $x-a$، به تعریف دیگری از مشتق می‌رسیم. در این حالت اگر $h\to 0$، آن‌گاه $x\to a$. بنابراین داریم:

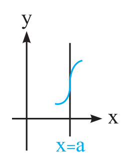
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق تابع $y=f(x)$ برحسب x را به‌صورت‌های $f'(x)$، y'_x، $\frac{dy}{dx}$، $D_x(y)$ و یا به شکل ساده‌ی y' نمایش می‌دهند.

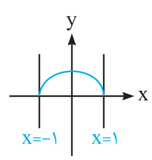


تعبیر هندسی مشتق: خطی که از نقطه‌ی A و نقطه‌ی دیگری مانند B_1 می‌گذرد را درنظر بگیرید. به این خط، خط قاطع می‌گوییم. شیب خط قاطع AB_1 برابر با $m_{AB_1}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ است. طرف راست این تساوی را خارج‌قسمت تفاضلی می‌نامیم. هنگامی که B_1 روی منحنی به سمت A حرکت می‌کند، h به سمت صفر میل می‌کند. در این حالت می‌گوییم خط به‌دست آمده بر نمودار مماس است و شیب آن برابر $f'(a)$ می‌باشد.

تعریف خط مماس: اگر f بر بازه‌ی بازی شامل a تعریف شده و $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد، آن‌گاه خطی که از نقطه‌ی $(a,f(a))$ گذشته و دارای شیب m می‌باشد، خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $(a,f(a))$ نامیده می‌شود.



هم‌چنین اگر f در a پیوسته بوده و $\left|\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right|=+\infty$، آن‌گاه $x=a$ خط مماس قائم بر نمودار f است. مانند شکل مقابل:



توجه داشته باشید اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، تعریف خط مماس قائم را می‌توان به نقاط انتهایی a و b نیز تعمیم داد. برای مثال در معادله‌ی نیم‌دایره‌ی $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ با توجه به نمودار آن، خطوط $x=1$ و $x=-1$، خطوط مماس قائم بر منحنی $f(x)$ هستند.

قضیه: اگر تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این نقطه پیوسته است.

عکس قضیه‌ی بالا صحیح نیست، یعنی ممکن است تابع پیوسته باشد، اما مشتق‌پذیر نباشد. به عبارت دیگر پیوستگی تابع در $x=a$ شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع است نه شرط کافی.

نتیجه: اگر تابع f در a ناپیوسته باشد، آن‌گاه در a مشتق‌ناپذیر است.

مشتق‌های یک‌طرفه

تعریف مشتق راست: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b)$ تعریف شده باشد، حد زیر را در صورت وجود، مشتق راست f در نقطه‌ی a می‌نامیم:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریف مشتق چپ: اگر تابع f در بازه‌ی $(b,a]$ تعریف شده باشد، حد زیر را در صورت وجود، مشتق چپ f در نقطه‌ی a می‌نامیم:

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

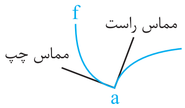
نکته: شرط لازم برای مشتق راست، پیوستگی راست و شرط لازم برای مشتق چپ، پیوستگی چپ است.

تعریف مشتق‌پذیری در نقطه‌ی درونی a : تابع f در نقطه‌ی درونی a مشتق‌پذیر است، هرگاه در این نقطه، مشتق چپ و راست با هم مساوی و برابر یک عدد حقیقی معین باشند. یعنی: $f'_-(a)=f'_+(a)=$ عدد معین

تعریف مشتق‌پذیری در نقاط انتهایی دو سر بازه: اگر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه در این نقطه مشتق راست داشته باشد و در $x=b$ مشتق‌پذیر است، هرگاه در این نقطه مشتق چپ داشته باشد. به عبارت بهتر، اگر f فقط در یک همسایگی چپ یا راست نقطه‌ای تعریف شده باشد، منظور از مشتق تابع در آن نقطه، مشتق یک طرفه‌ی آن می‌باشد.

تعبیر هندسی مشتق‌پذیری در نقطه‌ی درونی a : تابع f در نقطه‌ی درونی a مشتق‌پذیر است، هرگاه در این نقطه بتوان یک خط کامل مماس و غیرموازی با محور y ها بر منحنی رسم کرد.

تعبیر هندسی مشتق‌های چپ و راست: اگر $f'_+(a)$ موجود باشد، آن‌گاه منظور از $f'_+(a)$، شیب مماس راست و اگر $f'_-(a)$ موجود باشد، منظور از $f'_-(a)$ شیب مماس چپ در نقطه‌ی a می‌باشد. (مماس راست، خطی است که به شاخه‌ی سمت راست f در نقطه‌ی a مماس شده و مماس چپ، خطی است که به شاخه‌ی سمت چپ f در نقطه‌ی a مماس شده است.)



$f'_+(a) =$ شیب مماس راست

$f'_-(a) =$ شیب مماس چپ

پیوستگی تابع مشتق: اگر تابع مشتق f در نقطه‌ی a پیوسته باشد، آن‌گاه حد مشتق f با مقدار مشتق f در a برابر است، یعنی: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

قضیه: ۱ اگر f روی بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ موجود باشد، آن‌گاه: $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$.

۲ اگر f روی بازه‌ی $(b,a]$ پیوسته و در بازه‌ی (b,a) مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ موجود باشد، آن‌گاه: $f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$.

مشتق‌های یک طرفه در توابع چندضابطه‌ای

برای پیدا کردن مشتق‌های چپ و راست، در نقاط مرزی توابع چندضابطه‌ای، می‌توانیم از تعریف مشتق استفاده کنیم. اما گاهی اوقات استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری راحت‌تر است. ولی در این روش حتماً باید به پیوستگی تابع توجه کرد.

در تابع چندضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} g(x) & x > a \\ L & x = a \\ h(x) & x < a \end{cases}$ اگر تابع f در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد و a متعلق به دامنه‌ی g باشد، آن‌گاه: $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ و اگر تابع در $x = a$ پیوستگی چپ داشته باشد و a متعلق به دامنه‌ی h باشد، آن‌گاه: $f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$.

پس به‌طور کلی برای پیدا کردن تابع مشتق توابع چندضابطه‌ای، ابتدا مشتق هریک از ضابطه‌ها را محاسبه کرده و اگر تابع در نقطه‌ای مرزی مشتق‌پذیر نباشد، تساوی را در آن نقطه‌ی مرزی حذف می‌کنیم. اما اگر تابع در نقطه‌ی مرزی مشتق‌پذیر باشد، در یک ضابطه‌ی جداگانه آن را مشخص می‌کنیم.

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - x \ ; & x \le ۲ \\ x^۳ - ۲ \ ; & x > ۲ \end{cases}$ باشد، مشتق‌پذیری f را در $x = ۲$ بررسی کنید و درصورت وجود، $f'_+(۲)$ و $f'_-(۲)$ را تعیین نمایید.[1]

پاسخ: ابتدا بدون در نظر گرفتن نقطه‌ی مرزی $x = ۲$ از دو ضابطه مشتق می‌گیریم، سپس وضعیت مشتق را در $x = ۲$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x - ۱ \ ; & x < ۲ \\ ۳x^۲ \ ; & x > ۲ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f'(x) = ۷ \ , \ \lim_{x\to ۲^+} f'(x) = ۱۲$$

تابع در $x = ۲$ پیوسته است و $x = ۲$ متعلق به دامنه‌ی ضابطه‌های بالا و پایین f می‌باشد. بنابراین:

$$f'_-(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f'(x) = ۷ \ , \ f'_+(۲) = \lim_{x\to ۲^+} f'(x) = ۱۲$$

چون $f'_-(۲) \neq f'_+(۲)$، پس در $x = ۲$ مشتق وجود ندارد.

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - x & ; \ x \le ۲ \\ x^۲ + ۳x - ۴ & ; \ x > ۲ \end{cases}$ باشد، مشتق‌پذیری f را در $x = ۲$ بررسی کنید و در صورت وجود، $f'_+(۲)$ و $f'_-(۲)$ را تعیین نمایید.

پاسخ:

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x - ۱ \ ; & x < ۲ \\ ۲x + ۳ \ ; & x > ۲ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f'(x) = ۷ \ , \ \lim_{x\to ۲^+} f'(x) = ۷$$

تابع در $x = ۲$ پیوسته است و $x = ۲$ در دامنه‌ی ضابطه‌های بالا و پایین f می‌باشد. بنابراین:

$$f'_-(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f'(x) = ۷ \ , \ f'_+(۲) = \lim_{x\to ۲^+} f'(x) = ۷$$

پس تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر است و تابع مشتق آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x - ۱ \ ; & x < ۲ \\ ۷ \ ; & x = ۲ \\ ۲x + ۳ \ ; & x > ۲ \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - x \ ; & x \le ۲ \\ x^۲ + ۳x \ ; & x > ۲ \end{cases}$ باشد، مشتق‌پذیری f را در $x = ۲$ بررسی کنید و در صورت وجود، $f'_+(۲)$ و $f'_-(۲)$ را تعیین نمایید.

پاسخ:

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x - ۱ \ ; & x < ۲ \\ ۲x + ۳ \ ; & x > ۲ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f'(x) = ۷ \ , \ \lim_{x\to ۲^+} f'(x) = ۷$$

تابع در $x = ۲$ پیوستگی چپ دارد و $x = ۲$ در دامنه‌ی ضابطه‌ی بالای f است. بنابراین:

$$f'_-(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f'(x) = ۷$$

۱- در حل مثال‌ها و تست‌های این بخش ممکن است از فرمول‌های مشتق و مشتق تابع مرکب استفاده شده باشد که به صورت کامل در مباحث بعد خواهید آموخت.

تابع در $x=۲$ پیوستگی راست ندارد، بنابراین $f'_+(۲)$ موجود نیست:

$$f'_+(۲) \neq \lim_{x\to ۲^+} f'(x)$$

چون $f'_+(۲)$ موجود نیست، پس تابع در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است.

تست: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{۱}{x} & ; x\geq ۱ \\ x^۲+ax+b & ; x<۱ \end{cases}$، مقدار $f'(۱)$ موجود است. $f(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $۳-\sqrt{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۲}$ ۳) $۲-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

پاسخ: تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر است، پس در $x=۱$ پیوسته می‌باشد:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱) \Rightarrow ۰=۱+a+b \Rightarrow a+b=-۱$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۱+\dfrac{۱}{x^۲} & ; x>۱ \\ ۲x+a & ; x<۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱)=f'_-(۱) \Rightarrow ۱+۱=۲+a \Rightarrow a=۰ \xRightarrow{a+b=-۱} b=-۱ \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{۱}{x} & ; x\geq ۱ \\ x^۲-۱ & ; x<۱ \end{cases}$$

چون $۱-\sqrt{۲}<۱$ می‌باشد، پس برای محاسبه‌ی $f(۱-\sqrt{۲})$ از ضابطه‌ی پایین استفاده می‌کنیم:

$$f(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})^۲-۱=۲-۲\sqrt{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تـذکر: در این بخش، ممکن است به سؤال‌های حدی برخورد کنیم که معمولاً به کمک تعریف مشتق، می‌توان به آن‌ها پاسخ داد. ولی ما ترجیح می‌دهیم، در صورت برقراری شرایط اگر به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ رسیدیم، از قضیه‌ی هوپیتال استفاده کنیم.

تست: اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲-x & ; x\geq ۲ \\ ۲\cos(x-۲) & ; x<۲ \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f^۲(۲-h^۲)-f^۲(۲+۲h^۲)}{h^۲}$ کدام است؟

۱) -۲۴ ۲) -۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

پاسخ: حاصل حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ در می‌آید، پس می‌توانیم از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۲-h^۲)-f^۲(۲+۲h^۲)}{h^۲} \overset{\text{مبهم } \frac{۰}{۰}}{\underset{\text{Hop}}{=\!=}} \lim_{h\to ۰}\frac{۲(-۲h)f(۲-h^۲)f'(۲-h^۲)-۲(۴h)f(۲+۲h^۲)f'(۲+۲h^۲)}{۲h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\left(-۲f(۲-h^۲)f'(۲-h^۲)-۴f(۲+۲h^۲)f'(۲+۲h^۲)\right)=-۲f(۲^-)f'_-(۲)-۴f(۲^+)f'_+(۲)$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)=۲$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & ; x>۲ \\ -۲\sin(x-۲) & ; x<۲ \end{cases} \Rightarrow f'_+(۲)=۴-۱=۳ \ , \ f'_-(۲)=-۲(۰)=۰$$

$$\Rightarrow -۲f(۲^-)f'_-(۲)-۴f(۲^+)f'_+(۲)=۰-۴(۲)(۳)=-۲۴$$

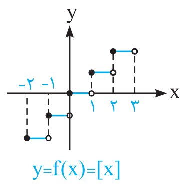
بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

نقاط مشتق‌ناپذیر

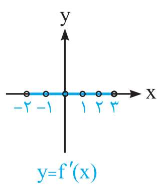
نقاط مشتق‌ناپذیر معمولاً در توابع ناپیوسته، اصم، قدرمطلقی، براکتی و چندضابطه‌ای وجود دارند. نقاط مشتق‌ناپذیر را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

۱ نقاط ناپیوسته: تابع در نقاط ناپیوسته، مشتق‌ناپذیر است و از دید هندسی در این نقاط، نمی‌توان یک خط کامل مماس بر منحنی رسم کرد.

مثال: نقاط مشتق‌ناپذیر $f(x)=[x]$ را بنویسید، سپس نمودار توابع $f(x)$ و $f'(x)$ را رسم کنید. ([ ] نماد جزء صحیح می‌باشد.)



y=f(x)=[x]

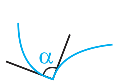


y=f′(x)

پاسخ: $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است و در نقاط غیرصحیح روی خط افقی $y=k$ قرار می‌گیرند که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است.

نکته: توابع به شکل کلی $y=[f(x)]$ در تمام نقاطی که پیوسته هستند، مشتق‌پذیر می‌باشند و مقدار مشتق آن‌ها صفر است. به عبارت بهتر در نقاط مشتق‌پذیر $[f(x)]'=۰$ می‌باشد و در نقاط ناپیوسته مشتق‌ناپذیر هستند.

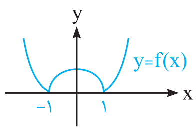
۲ نقاط زاویه دار (گوشه): نقاطی هستند که تابع در آن‌ها پیوسته بوده و مشتق چپ و راست در آن‌ها دو عدد حقیقی نابرابر است (یا یکی عدد و دیگری بی‌نهایت است). از دید هندسی در این نقاط یک مماس چپ و یک مماس راست بر منحنی رسم می‌شود که با هم زاویه می‌سازند. مانند شکل روبه‌رو:

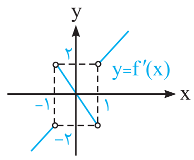


مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را در $x_{\circ}=۱$ بررسی کنید، سپس نمودار توابع $f(x)$ و $f'(x)$ را رسم نمایید.

پاسخ: ابتدا به کمک تعیین علامت، $f(x)$ را به‌صورت دوضابطه‌ای نوشته و سپس تابع $f'(x)$ را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x^{۲}+۱\ ;\ -۱\le x\le ۱\\ x^{۲}-۱\ \ ;\ x>۱ \text{ یا } x<-۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-۲x\ ;\ -۱<x<۱\\ ۲x\ \ ;\ x>۱ \text{ یا } x<-۱\end{cases}$$





تابع f در $x=۱$ پیوسته است، بنابراین داریم: $f'_{+}(۱)=۲(۱)=۲$ ، $f'_{-}(۱)=-۲(۱)=-۲$

چون $f'_{+}(۱)\ne f'_{-}(۱)$ می‌باشد، پس تابع در $x=۱$ مشتق‌ناپذیر و زاویه دار است. ($f'_{-}(۱)$ و $f'_{+}(۱)$ را به کمک تعریف مشتق نیز می‌توانستیم به‌دست آوریم.)

نکته: در توابع قدرمطلقی به شکل $y=|f(x)|$، تابع به‌ازای ریشه‌های ساده‌ی درون قدرمطلق مشتق‌ناپذیر و زاویه‌دار است.

توابع به شکل $y=g(x)|f(x)|$ در ریشه‌ی ساده‌ی درون قدرمطلق زمانی مشتق‌ناپذیر هستند که به‌ازای آن تابع $g(x)$ صفر نشود. (فرض می‌کنیم $f(x)$ یک تابع پیوسته باشد.)

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=[x](x-۲)$ را در $x_{\circ}=۲$ بررسی کنید. ([ ] نماد جزء صحیح می‌باشد.)

پاسخ: مشتق‌های چپ و راست را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{[x](x-۲)-\circ}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}[x]\Rightarrow\begin{cases}f'_{+}(۲)=۲\\ f'_{-}(۲)=۱\end{cases}$$

$f'_{+}(۲)\ne f'_{-}(۲)$ می‌باشد، بنابراین تابع در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر و زاویه‌دار است.

نکته: در توابع به شکل کلی $f(x)=(x-a)[x]$، تابع در $x=a$ $(a\in\mathbb{Z})$ زاویه‌دار است.

انواع ریشه‌ها

به خاطر اهمیت موضوع، تقسیم‌بندی ریشه‌ها و تعریف آن‌ها را یادآوری می‌کنیم.

اگر تابع $f(x)=(x-a)^{n}g(x)$ در $x=a$ تعریف شده باشد، به شرطی که n یک عدد طبیعی و $g(a)$ مخالف صفر باشد، آن‌گاه:

۱) اگر $n=۱$ باشد، $x=a$ ریشه‌ی ساده است.

۲) اگر $n\ge ۲$ باشد، $x=a$ ریشه‌ی مکرر است. در این حالت اگر n فرد باشد، به آن ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد و اگر n زوج باشد، به آن ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی زوج گویند. اگر $n=۲$ باشد، ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی ۲ داریم که به آن ریشه‌ی مضاعف گویند.

درحالتی که تابع تجزیه شده به صورت $(x-a)^{n}g(x)$ باشد، تقسیم‌بندی ریشه‌ها ساده است، در غیر این حالت به تعریف کامل‌تری نیاز داریم.

تعریف ریشه‌ی ساده: در معادله‌ی $f(x)=\circ$، $x=\alpha$ را ریشه‌ی ساده گویند، هرگاه:

۱) $f(\alpha)=\circ$ ۲) $f'(\alpha)$ موجود و مخالف صفر باشد.

تعریف ریشه‌ی مضاعف (مکرر مرتبه‌ی ۲): در معادله‌ی $f(x)=\circ$، $x=\alpha$ را ریشه‌ی مضاعف گویند، هرگاه:

۱) $f(\alpha)=\circ$ ۲) $f'(\alpha)=\circ$ ۳) $f''(\alpha)$ موجود و مخالف صفر باشد.

به همین ترتیب می‌توان ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی ۳ و یا بالاتر را تعریف کرد.

نکته: ریشه‌های معادلات زیر جزء ریشه‌های مضاعف محسوب می‌شوند:

$$\sin u=\pm ۱\ ,\ \cos u=\pm ۱\ ,\ \sin u+\cos u=\pm\sqrt{۲}$$

(دلیل مضاعف بودن این ریشه‌ها را به کمک تعریف ریشه‌ی مضاعف و همچنین رسم نمودارشان بررسی کنید.)

نکته: اگر تابع $g(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، آن‌گاه تابع $f(x)=g(x)[x]$ در $x=k$ $(k\in\mathbb{Z})$ زمانی مشتق‌پذیر است که $x=k$ ریشه‌ی مکرر حداقل از مرتبه‌ی ۲ برای $g(x)$ باشد. به‌عبارت دیگر تابع $f(x)=(x-k)^{n}[x]$ $(n\in\mathbb{N})$ در $x=k$ زمانی مشتق‌پذیر است که $n\ge ۲$ باشد.

تست: تابع $y=(x^{۳}+۳x^{۲}+ax+b)[x]$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، $a+b$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح می‌باشد.)

۱) ۵۲ ۲) -۵۲ ۳) -۴ ۴) ۴

پاسخ: با توجه به نکته‌ی بالا، $f(x)=(x^{۳}+۳x^{۲}+ax+b)$ در $x=۲$ ریشه‌ی مکرر دارد. پس باید $f(۲)=f'(۲)=\circ$ باشد، بنابراین داریم:

$$f(۲)=\circ\Rightarrow ۸+۱۲+۲a+b=\circ\Rightarrow ۲a+b=-۲\circ$$

$$f'(x)=۳x^{۲}+۶x+a\Rightarrow f'(۲)=\circ\Rightarrow ۱۲+۱۲+a=\circ\Rightarrow a=-۲۴\xrightarrow{۲a+b=-۲\circ}-۴۸+b=-۲\circ\Rightarrow b=۲۸\Rightarrow a+b=۴$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

روش به‌دست آوردن زاویه‌ی بین دو مماس چپ و راست در نقطه‌ی گوشه

فرض کنید منحنی f در $x=a$، نقطه‌ی گوشه داشته باشد. ابتدا مشتق چپ و راست را در $x=a$ تعیین می‌کنیم و $m_۱=f'_-(a)$ و $m_۲=f'_+(a)$ را در نظر می‌گیریم. اگر زاویه‌ی بین دو مماس چپ و راست در نقطه‌ی گوشه را با θ نشان دهیم، دو حالت برای محاسبه‌ی θ در نظر می‌گیریم:

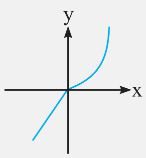
۱ اگر $m_۱m_۲=-۱$، آن‌گاه $\theta=۹۰^\circ$

۲ اگر $m_۱m_۲\neq -۱$، آن‌گاه زاویه‌ی حاده‌ی θ از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید:
$$\theta=\tan^{-۱}\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|$$

تست: اندازه‌ی زاویه‌ی ایجاد شده در نقطه‌ی گوشه‌ی تابع $f(x)=\begin{cases}x & ;\ x<۰\\ x^۲ & ;\ x\geq ۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

پاسخ: طول نقطه‌ی گوشه‌ی این تابع $x=۰$ است، زیرا مشتق‌های چپ و راست در آن، دو عدد مختلف و متمایز می‌باشند.



$$f(x)=\begin{cases}x & ;\ x<۰\\ x^۲ & ;\ x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۱ & ;\ x<۰\\ ۲x & ;\ x>۰\end{cases}\Rightarrow m_۱=f'_-(۰)=۱\ ,\ m_۲=f'_+(۰)=۰$$
$$\Rightarrow \theta=\tan^{-۱}\left|\frac{۱-۰}{۱+۰}\right|=\tan^{-۱}۱=\frac{\pi}{۴}$$

پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

تذکر بسیار مهم: قبلاً در کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در بحث نقطه‌ی گوشه به نیم مماس چپ و نیم مماس راست اشاره می‌شد، اما در کتاب درسی جدید، دیگر صحبت نیم مماس یا نیم خط نشده، پس هرگاه در یک نقطه‌ی گوشه بخواهیم زاویه‌ی بین مماس چپ و مماس راست را تعیین کنیم، هدف پیدا کردن **زاویه‌ی حاده‌ی بین دو خط** می‌باشد. (قبلاً پاسخ تست قبل را ۱۳۵° در نظر می‌گرفتیم که دیگر با مفاهیم جدید کتاب سازگار نیست)

تست: زاویه‌ی بین دو مماس چپ و راست بر منحنی $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\pi}\tan^{-۱}\frac{۱}{x} & ;\ x<۰\\ x^۲+۲x & ;\ x\geq ۰\end{cases}$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

پاسخ: باید $f'_-(۰)$ و $f'_+(۰)$ را به‌دست آوریم. برای محاسبه‌ی $f'_-(۰)$ از تعریف مشتق و برای $f'_+(۰)$ از فرمول مشتق کمک می‌گیریم:

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\frac{x}{\pi}\tan^{-۱}\frac{۱}{x}-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}(-\infty)=\frac{۱}{\pi}\left(\frac{-\pi}{۲}\right)\Rightarrow m_۱=-\frac{۱}{۲}$$

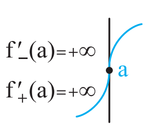
تذکر: چون $x=۰$ در دامنه‌ی تابع $y=\frac{x}{\pi}\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{x}\right)$ قرار ندارد، برای محاسبه‌ی $f'_-(۰)$، استفاده از فرمول‌های مشتق صحیح نیست و باید از تعریف مشتق استفاده کنیم.

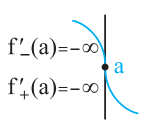
$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}(۲x+۲)=۲\Rightarrow m_۲=۲$$

چون $m_۱m_۲=-۱$، پس زاویه‌ی بین دو مماس برابر ۹۰° است. در نتیجه گزینه‌ی (۴) صحیح می‌باشد.

۳ نقاط عطف قائم:

نقاطی هستند که تابع در آن‌ها پیوسته و مشتق‌های چپ و راست تابع در آن‌ها بی‌نهایت و هم‌علامت است. از دید هندسی در این نقاط می‌توان یک خط کامل مماس به موازات محور yها رسم کرد. نمودار عطف قائم همواره به یکی از دو حالت مقابل می‌باشد:

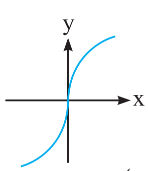




در نمودار سمت چپ، تابع در همسایگی a صعودی اکید است، پس $f'(a)>۰$ و در نمودار سمت راست، تابع در همسایگی a نزولی اکید است، پس $f'(a)<۰$ است.

برای مثال تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ در $x=۰$ عطف قائم دارد، زیرا: $f'_-(۰)=+\infty$ و $f'_+(۰)=+\infty \Leftarrow f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$

نمودار این تابع به‌صورت مقابل است:

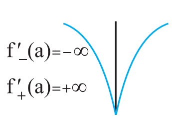


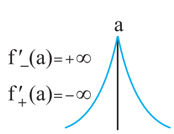
نکته: در توابع به شکل کلی $y=\sqrt[۲k+۱]{(x-a)^{۲n+۱}}$، $x=a$ طول نقطه‌ی عطف قائم منحنی است ($k,n\in\mathbb{N}$ و $n<k$).

برای تابع $y=\sqrt[۲k+۱]{(x-a)^{۲n+۱}}\,g(x)$ در شرایط بالا اگر $g(x)$ در $x=a$ پیوسته و مخالف صفر باشد، $x=a$ طول نقطه‌ی عطف قائم منحنی است.

۴ نقاط بازگشت:

نقاطی هستند که تابع در آن‌ها پیوسته و مشتق‌های چپ و راست تابع در آن‌ها بی‌نهایت و غیر هم‌علامت است. از دید هندسی در این نقاط یک مماس به موازات محور yها بر منحنی رسم می‌شود. نمودار نقاط بازگشت همواره به یکی از دو حالت مقابل می‌باشند:

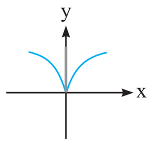




در نمودار سمت چپ، تابع در همسایگی چپ a نزولی اکید است $(f'_-(a)<۰)$ و در همسایگی راست a صعودی اکید می‌باشد $(f'_+(a)>۰)$. در نمودار سمت راست، تابع در همسایگی چپ a صعودی اکید است $(f'_-(a)>۰)$ و در همسایگی راست a نزولی اکید می‌باشد $(f'_+(a)<۰)$.

برای مثال تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$ در $x=۰$ نقطه‌ی بازگشت دارد، زیرا: $f'_-(۰)=-\infty$ و $f'_+(۰)=+\infty$ و $f'(x)=\dfrac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$

نمودار این تابع به‌صورت مقابل است:



نکته: هر نقطه‌ی بازگشت یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی[1] تابع محسوب می‌شود.

نکته: در توابع به شکل کلی $y=\sqrt[۲k+۱]{(x-a)^{۲n}}$ ، $x=a$ طول نقطه‌ی بازگشت منحنی است ($k،n\in\mathbb{N}$ و $۲n<۲k+۱$).

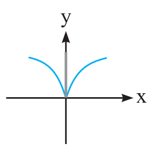
برای تابع $y=\sqrt[۲k+۱]{(x-a)^{۲n}}.g(x)$ در شرایط بالا اگر $g(x)$ در $x=a$ پیوسته و مخالف صفر باشد نیز $x=a$ طول نقطه‌ی بازگشت است. در این حالت اگر $g(a)>۰$ باشد، در $x=a$ یک نقطه‌ی بازگشت به‌صورت می‌نیمم و اگر $g(a)<۰$ باشد، یک نقطه‌ی بازگشت به صورت ماکزیمم خواهد داشت.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{|x|}$ را در $x_۰=۰$ بررسی کنید.

پاسخ: ابتدا تابع را به‌صورت دوضابطه‌ای نوشته و از آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\geq ۰\\ \sqrt{-x} & ; x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} & ; x>۰\\[2mm] \dfrac{-۱}{۲\sqrt{-x}} & ; x<۰\end{cases}$$

در نتیجه $f'_+(۰)=+\infty$ و $f'_-(۰)=-\infty$ است، پس f در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است و نمودار آن به‌صورت نقطه‌ی بازگشت درمی‌آید:



نکته: در توابعی که به شکل کلی $y=\sqrt[n]{|x-a|}$ هستند، $x=a$ نقطه‌ی بازگشت منحنی می‌باشد $(n\geq ۲،n\in\mathbb{N})$.

تست: برای تابع $y=\sqrt[۳]{x^۳+x^۲}$ نقطه‌ای به طول $x=۰$ چگونه است؟

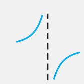
۱) ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی ۳) عطف افقی ۴) عطف قائم

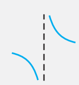
پاسخ: تابع را به‌صورت $y=\sqrt[۳]{x^۲}\sqrt[۳]{x+۱}$ می‌نویسیم. در $\sqrt[۳]{x^۲}$ توان زوج و فرجه فرد است، پس $x=۰$ طول نقطه‌ی بازگشت می‌باشد.

ازطرفی اگر $g(x)=\sqrt[۳]{x+۱}$ را در نظر بگیریم، $g(۰)=۱>۰$ است، پس $x=۰$ طول می‌نیمم نسبی است.

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

تست: نمودار مشتق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ در اطراف $x=۱$ کدام گزینه است؟

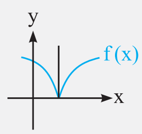
۱) 

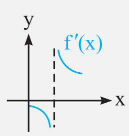
۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: برای رسم نمودار f' هم می‌توان از روی نمودار f آن را تشخیص داد و هم از روی مشتق‌های چپ و راست در $x=۱$.





$$f'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x-۱}}\Rightarrow f'_+(۱)=+\infty \ ,\ f'_-(۱)=-\infty$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

به تست‌های مهم‌ترین فصل کتاب خوش اومدی. این مطلب‌رو جدی بگیر. اگه می‌خوای فصل مشتق‌رو به خوبی تا آخر یاد بگیری، از همون ابتدا سؤال‌هارو مفهومی کار کن.

۱- تابع $f(x)=\begin{cases}۳x^۲+۲x+۱ & ; x>۱\\ ۶\cos(x-۱) & ; x=۱\\ ۸x+۵ & ; x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ چگونه است؟

۱) مشتق چپ دارد ـ مشتق راست ندارد. ۲) مشتق راست دارد ـ مشتق چپ ندارد.

۳) مشتق چپ و راست ندارد. ۴) مشتق‌پذیر است.

۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\sin^۳ x & ; x>۰\\ ۳x & ; x=۰\\ ۳x+۱ & ; x<۰\end{cases}$ مفروض است. کدام گزاره در مورد تابع f در $x=۰$ صحیح است؟

۱) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد. ۲) مشتق‌پذیر است.

۳) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد. ۴) نه مشتق چپ دارد و نه راست.

۱- تعریف دقیق اکسترمم نسبی را در مطالب بعدی به‌صورت مفصل خواهید خواند.

۳- در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[5]{x} & ; |x|<1\\ \frac{x}{5} & ; |x|\geq 1\end{cases}$، حاصل $f'_+(-1)$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f'(x)$ به‌ترتیب کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{5}$ و وجود ندارد. ۳) وجود ندارد و $\frac{1}{5}$ ۴) وجود ندارد و وجود ندارد.

۴- اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}1+a\cos\pi x & ; x>1\\ bx^2+x & ; x\leq 1\end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱- ۴) $\frac{1}{2}$

۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^3+bx & ; x<1\\ 2\sqrt{4x-3} & ; x\geq 1\end{cases}$ بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x-\cos 2x & ; 0<x\leq\frac{\pi}{4}\\ a\tan x+b\sin 2x & ; \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{4}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۱- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۷- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح می‌باشد.)

۱) $[0,1]$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1]$

۸- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[x+\frac{1}{3}\right]+[x]$ روی بازه‌ی $(0,3)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح می‌باشد.)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ریاضی خارج ۸۶

درس‌نامه‌رو که یادته، این سؤال‌ها رو هوپیتال بگیری خیلی راحت‌تری.

۹- اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ کدام است؟

۱) $f'(a)$ ۲) $\frac{1}{2}f'(a)$ ۳) $2f'(a)$ ۴) $-\frac{1}{2}f'(a)$

۱۰- اگر تابع f در x_0 مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-2$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0)-f(x_0-3h)}{2h}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۱۱- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x^3 & ; |x|\geq 1\\ 2x^2-1 & ; |x|<1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-1}{h}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲- اگر $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{4x-3} & ; x>1\\ x^3-2x & ; x\leq 1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f^2(1-h)-f^2(1)}{h}$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴

۱۳- در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & ; |x|\geq 1\\ x^2-3x+6 & ; |x|<1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h^2)}{h^2}$ چه‌قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۴

۱۴- با فرض $f(x)=\sqrt[9]{x^2}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^3(-1+h)-f^3(-1)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $-\frac{2}{9}$

۱۵- اگر $f(x)=(x^2-4)[x]$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(2-2h)+f(2+h)}{2h}$ کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح می‌باشد.)

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) ۴- ۴) ۶-

۱۶- اگر $g(x)=\sqrt{2x}$ و $f(x)=x^2-x$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)g(2+\Delta x)-f(2)g(2)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۷- مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=2$ به‌صورت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{2(2+h)^2+k(2+h)-2k-8}{h}=12$ بیان شده است. k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۸- اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-3h)}{3h}=2\sin x$، آن‌گاه $f'(\cos^{-1}\frac{1}{3})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۱۹- اگر $f(x)=|x^2-5x+6|$، حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(f\left(2+\frac{1}{n^3}\right)-f(2)\right)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۲۰- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ;\ x\geq 1\\ x^2-x^3 & ;\ x<1\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1+h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

این‌جا بیشتر سؤال‌ها مربوط به نقاط زاویه داره، البته کتاب جدید دیفرانسیل اسمش‌رو گذاشته نقاط گوشه.

۲۱- به‌ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x|x-1|+a|x-1|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) همه‌ی مقادیر

۲۲- اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(2x^2+ax+b)|(x-1)(x-2)|$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، ab کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲- ۳) ۲۴- ۴) ۲۴

۲۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & ;\ |x|\leq 2\\ 4x-1 & ;\ |x|>2\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴- اگر مماس چپ و مماس راست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|(x+a)$ در نقطه‌ی زاویه‌دار آن عمود بر هم باشند، مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟ ریاضی داخل ۹۰

۱) $\{-1\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\varnothing$

۲۵- تابع $f(x)=|x^4-|x||$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۶- تابع $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)|1+2\cos x|$ در چند نقطه از بازه‌ی $(-2\pi,2\pi)$ مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1+|x|}$ در نقطه‌ی $x=\alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha)-f'_-(\alpha)$ کدام است؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

۲۸- اگر $f(x)=x[2x+1]$، مقدار $f'_+(1)-f'_-(1)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۲۹- اگر $f(x)=|\sin x|\left[\cos\frac{x}{2}\right]$ باشد، حاصل $f'_+(\pi)-f'_-(\pi)$ کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۲-

۳۰- تابع $y=(x^3+ax+b)[x+1]$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است، ab کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۸ ۴) ۸-

۳۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x[\sin x]$ روی بازه‌ی $\left(-\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ کدام وضعیت را دارد؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) پیوسته ـ مشتق‌پذیر ۲) ناپیوسته ـ مشتق‌پذیر ۳) پیوسته ـ مشتق‌ناپذیر ۴) ناپیوسته ـ مشتق‌ناپذیر

۳۲- تابع f با ضابطه‌ی مقابل در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;\ x<0\\ x+1 & ;\ 0\leq x<1\\ 2x+2 & ;\ 1\leq x<2\\ x^2+2 & ;\ x\geq 2\end{cases}$$

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر

۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر

۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

۳۳- کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳x}{۵+۷^{\frac{۱}{x}}} & ; x\neq ۰\\ ۱-\cos x & ; x=۰\end{cases}$ در $x=۰$ صحیح است؟

۱) مشتق چپ دارد اما مشتق راست ندارد. ۲) مشتق راست دارد اما مشتق چپ ندارد.
۳) مشتق چپ و راست دارد. ۴) مشتق‌پذیر است.

۳۴- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(-۱)^{[x]}\cos\frac{\pi x}{۲}$ روی بازه‌ی $[۰،۴]$ دارای چند نقطه‌ی زاویه‌دار است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵- زاویه‌ی بین خطوط مماس در نقطه‌ی گوشه‌ی تابع $f(x)=\max\{\tan x، -\tan x\}$ در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}،\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۳۶- تانژانت زاویه‌ی بین مماس چپ و راست منحنی $y=\frac{|x|-۱}{|x|+۱}$ در نقطه‌ی $(۰،-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۷- اگر θ زاویه‌ی بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[۲+\cos\frac{x}{۲}]\sin ۲x$ در نقطه‌ی $x=\pi$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.) ریاضی خارج ۹۴

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۳۸- اگر θ زاویه‌ی بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x+\frac{۱}{۲}](x-\frac{۱}{۲})+x^۲$ در نقطه‌ی $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟([ ] نماد جزءصحیح می‌باشد.) ریاضی داخل ۹۴ با کمی تغییر

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۹- اندازه‌ی زاویه‌ی ایجاد شده در نقطه‌ی گوشه، برای تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x} & ; x<۱\\ x^۲ & ; x\geq ۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۴۰- مماس‌های رسم شده بر منحنی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\geq ۰\\ -x^۲-x & ; x<۰\end{cases}$ در مبدأ مختصات با هم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) ۹۰° ۲) ۶۰° ۳) ۳۰° ۴) ۴۵°

۴۱- در تابع $f(x)=\frac{۲|x^۲-۱|}{x-۱}$، سینوس زاویه‌ی بین دو مماس چپ و راست در نقطه‌ی گوشه کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۴۲- مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در نقطه‌ی $x=۰$ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۹

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

نمی‌دونم چرا بچه‌ها با تابع هوی‌ساید و دیریکله میونه‌ی خوبی ندارن. این چند تا تست رو با دقت حل کن.

۴۳- اگر $H(x)$ تابع هوی‌ساید باشد، آن‌گاه تابع $f(x)=(۵x-۲)H(۴x^۲-x^۴)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۴۴- اگر $H(x)$ تابع هوی‌ساید باشد، تابع $y=H(\sin x+\cos x)$ در بازه‌ی $(۰،۲\pi)$ چند نقطه‌ی مشتق‌ناپذیر دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۴۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^۲ & ; \text{x گویا}\\ ۰ & ; \text{x گنگ}\end{cases}$ در چند نقطه مشتق دارد؟ ریاضی داخل ۸۸

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) هیچ نقطه

۴۶- اگر تعداد نقاط پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع $y=\begin{cases}x^۳ & ; x\in Q\\ x^۲ & ; x\in \mathbb{R}-Q\end{cases}$ به‌ترتیب برابر m و n باشد، حاصل $m-n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

حالا چند تا تست متنوع رو حل کن.

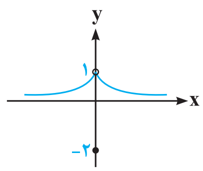
۴۷- اگر $f(x)=\begin{cases} 2 & ; \ [x] \text{ فرد} \\ -1 & ; \ [x] \text{ زوج} \end{cases}$ باشد، دوره‌ی تناوب توابع $f(x)$ و $f'(x)$ به‌ترتیب کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲، ۱ ۲) ۲، ۲ ۳) ۲ و ندارد. ۴) ندارد و ندارد.

۴۸- تابع $f(x)=(1+\cos x)[\sin x]$ روی بازه‌ی $(0,2\pi)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴۹- اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، مشتق تابع $g(x)=\dfrac{x}{2f(x)+x^2}$ در $x=0$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) وجود ندارد.

۵۰- تابع $f(x)=(x^3+2x^2+3x-7)\operatorname{sgn}(x^3+2x^2+3x-7)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵۱- تابع $f(x)=|x^3-3x+1|\operatorname{sgn}(x^3-3x+1)+\operatorname{sgn}(x^2-4)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۲- کدام‌یک از توابع زیر در $x=\pi$ پیوسته اما مشتق‌ناپذیر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $f(x)=(1+\cos x)[x-\pi]$ ۲) $f(x)=(\sin x)[x-\pi]$

۳) $f(x)=(1-\cos x)[x-\pi]$ ۴) $f(x)=(\cos x)[x-\pi]$

۵۳- تابع $f(x)=\sin^{-1}(\sin 2x)$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$ چند نقطه‌ی مشتق‌ناپذیر دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۴- کدام گزینه در $x=1$ مشتق‌پذیر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

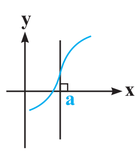
۱) $y=[(x-1)^3]$ ۲) $y=(x-1)[\sqrt[3]{x-1}]$ ۳) $y=[\sqrt[3]{(x-1)^2}]$ ۴) $y=\sqrt[3]{x-1}[(x-1)^3]$

۵۵- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} (x-1)^k \sin\dfrac{1}{x-1} & ; \ x\neq 1 \\ 0 & ; \ x=1 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$ در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، تمام مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) $k\geq 1$ ۲) $k\geq 2$ ۳) $|k|\geq 2$ ۴) $|k|\leq 1$

نقاط مشتق‌ناپذیر رو با بررسی عطف قائم و بازگشتی تموم می‌کنیم.

۵۶- اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $\begin{cases} f'_-(a)=-\infty \\ f'_+(a)=+\infty \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f'_-(a)=+\infty \\ f'_+(a)=-\infty \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} f'_-(a)=+\infty \\ f'_+(a)=+\infty \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f'_-(a)=-\infty \\ f'_+(a)=-\infty \end{cases}$

۵۷- چه تعداد از توابع زیر خط مماس قائم دارند؟

الف) $f(x)=\sqrt[7]{(x-1)^3}$ ب) $g(x)=\sqrt[3]{|x-1|}$ پ) $h(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ ت) $t(x)=\dfrac{1}{x-1}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸- چه تعداد از توابع زیر در نقطه‌ی داده شده دارای خط مماس هستند؟

الف) $f(x)=|x|$ در $x=1$ ب) $g(x)=|x^2-1|$ در $x=1$

پ) $h(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ ت) $t(x)=x\operatorname{sgn}(x)$ در $x=0$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)(x+1)^3} & ; \ x\geq 0 \\ |(x+1)(x+2)^2| & ; \ x<0 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۰- نقطه‌ای به طول $x=1$ برای توابع $f(x)=\sqrt[3]{|x-1|}$ و $g(x)=\sqrt[3]{|x|-1}$ به‌ترتیب چگونه است؟

۱) گوشه ـ عطف قائم ۲) بازگشتی ـ عطف قائم ۳) گوشه ـ بازگشتی ۴) عطف قائم ـ گوشه