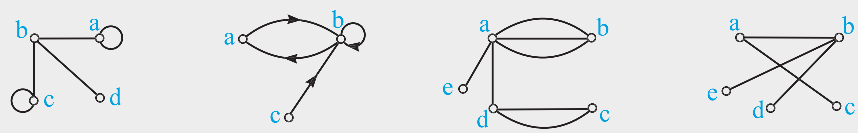
Detailed Solutions

پاسخ‌های تشریحی

A ۱ ۴

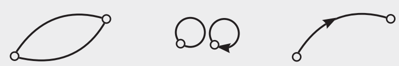
گـراف

به تعدادی نقطه که توسط پاره‌خط‌ها یا کمان‌هایی به هم وصل شده‌اند، گراف می‌گویند. به نقطه‌ها، رأس‌های گراف و به پاره‌خط‌ها یا کمان‌ها، یال‌های گراف می‌گویند. گراف‌ها را می‌توان به چهار دسته‌ی کلی تقسیم‌بندی کرد که در زیر آن‌ها را می‌بینید.



گراف ساده — گراف چندگانه — گراف جهت‌دار — گراف طوقه‌دار

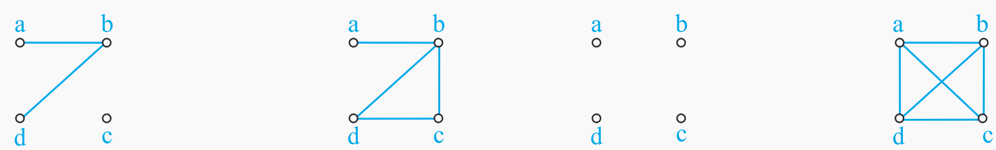
در این فصل فقط به معرفی گراف ساده می‌پردازیم. نمودار گراف ساده یال موازی، طوقه و یال جهت‌دار ندارد.



یال جهت‌دار — طوقه — یال موازی

گراف ساده: گراف ساده‌ی G، زوج مرتبی مانند $G=(V،E)$ است که در آن مجموعه‌ی V، مجموعه‌ای ناتهی و متناهی می‌باشد و مجموعه‌ی E زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. در این تعریف مجموعه‌ی V، مجموعه‌ی رأس‌های گراف و مجموعه‌ی E، مجموعه‌ی یال‌های گراف است.

مثال: به گراف‌های زیر دقت کنید که در همه‌ی آن‌ها مجموعه‌ی $V=\{a,b,c,d\}$ مجموعه‌ی رأس‌های گراف است:



$E=\{ab،ac،ad،bc،bd،cd\}$ — $E=\{\,\}$ — $E=\{ab،bd،bc،cd\}$ — $E=\{ab،bd\}$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در همه‌ی گراف‌ها مجموعه‌ی E، زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی $\{ab،ac،ad،bc،bd،cd\}$ می‌باشد که مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است.

منظور از صورت سؤال این است که کدام گزینه، گراف ساده است که فقط گزینه‌ی (۴) گراف ساده می‌باشد. چون در گزینه‌های (۱) و (۲) یال‌های موازی و در گزینه‌ی (۳) طوقه وجود دارد.

A ۲ ۲

نیم‌نگاه

گراف داده شده موسوم به گراف مشاغل است و یکی از کاربردهای گراف ساده در امور روزمره است. در این‌گونه مسائل برای واگذاری شغل‌ها کافی است از شغلی که کم‌ترین متقاضی را دارد شروع به واگذاری شغل‌ها کنیم و افرادی که شغلی دریافت می‌کنند را از گراف حذف کنیم.

یعنی شرکت به سه طریق می‌تواند افراد را استخدام کند. $\Rightarrow$ $A_1\to B_1$ ، $A_2\to B_3$ ، $A_4\to B_2$ ، $A_3 \to B_4$ یا B_5 یا B_6

B ۳ ۱

تعاریف مهم در گراف ساده

۱ مرتبه: به تعداد رأس‌های گراف، مرتبه‌ی گراف می‌گویند و با p نشان می‌دهند.

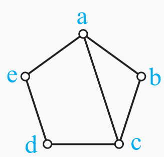
۲ اندازه: به تعداد یال‌های گراف، اندازه‌ی گراف می‌گویند و با q نشان می‌دهند.

۳ دو رأس مجاور: دو رأس متمایز a و b را مجاور گویند هرگاه یالی بین آن‌ها موجود باشد.

۴ درجه‌ی رأس: به تعداد یال‌هایی که به یک رأس از گراف متصل است، درجه‌ی آن رأس از گراف گویند. درجه‌ی رأس a را با $\deg a$ نشان می‌دهند.

۵ رأس زوج و فرد: اگر درجه‌ی یک رأس، زوج باشد آن را رأس زوج و اگر درجه‌ی یک رأس، فرد باشد آن را رأس فرد می‌نامند.

مثال: گراف $G=(V,E)$ با $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,bc,cd,ae,de\}$ مفروض است.



الف گراف G را رسم کنید.

پاسخ: رأس‌های گراف را دور هم می‌چینیم (به‌صورت دایره‌ای) و یال‌های داده شده را رسم می‌کنیم.

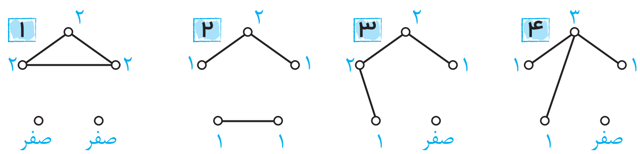
ب مرتبه و اندازه‌ی این گراف کدام است؟

پاسخ: مرتبه‌ی گراف تعداد رأس‌های آن می‌باشد، بنابراین مرتبه‌ی گراف برابر $p=۵$ است. اندازه‌ی گراف نیز تعداد یال‌های آن می‌باشد پس اندازه‌ی گراف G برابر $q=۶$ است.

ج رأس‌های زوج و فرد را مشخص کنید.

پاسخ: درجه‌ی رأس‌های گراف عبارتند از: $\deg(e)=۲$ ، $\deg(d)=۲$ ، $\deg(c)=۳$ ، $\deg(b)=۲$ ، $\deg(a)=۳$. بنابراین رأس‌های b، d و e رأس‌های زوج و رأس‌های a و c رأس‌های فرد می‌باشند.

گراف از مرتبه‌ی ۵ و اندازه‌ی ۳ را به شکل‌های مقابل می‌توان رسم کرد:



در حالت ۱ پنج رأس زوج، در حالت ۲ یک رأس زوج و چهار رأس فرد، در حالت ۳ سه رأس زوج و دو رأس فرد و در حالت ۴ یک رأس زوج و چهار رأس فرد وجود دارد. بنابراین حداقل اختلاف تعداد رأس‌های زوج و فرد در حالت ۳ اتفاق می‌افتد که برابر «۱» است. دقت کنید که اگر گراف‌های دیگری نیز رسم کنید، درجه‌ی رأس‌های آن‌ها خارج از این ۴ حالت نخواهد شد و در واقع شما گراف‌های تکراری رسم کرده‌اید.

A ۴ ۳

تعاریف دیگری از گراف ساده

۱ ماکسیمم و مینیمم درجه‌ها: بزرگ‌ترین عدد در بین درجه‌ی رأس‌های یک گراف را ماکسیمم درجه‌ی رأس‌ها گفته و با Δ نشان می‌دهند. هم‌چنین کوچک‌ترین عدد در بین درجه‌ها را مینیمم درجه‌ی رأس‌ها گفته و با δ نشان می‌دهند.

تذکر رابطه‌ی مقابل در بین تمام گراف‌های ساده برقرار است: $\boxed{۰\le\delta\le\Delta\le p-۱}$

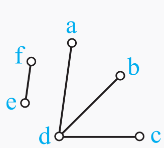
قرارداد در گراف از مرتبه‌ی p، به رأس درجه‌ی $(p-۱)$، رأس فول و به رأس درجه‌ی صفر رأس ایزوله (منفرد یا تنها) می‌گویند. واضح است که یک گراف نمی‌تواند هم رأس فول و هم رأس منفرد داشته باشد.

۲ تعداد بخش‌ها در گراف: به تعداد قسمت‌هایی از گراف که با هم ارتباطی ندارند تعداد بخش‌های گراف گویند.

مثال: گراف $G=(V,E)$ با $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $E=\{bd,dc,da,ef\}$ مفروض است.

الف این گراف چند بخش جدا از هم دارد؟

پاسخ: گراف را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$ گراف دو بخش جدا ازهم دارد

ب حاصل $\Delta^۲+\delta^۲$ کدام است؟

پاسخ: بزرگ‌ترین درجه‌ی رأس‌ها، $\Delta=۳$ و کوچک‌ترین درجه‌ی رأس‌ها، $\delta=۱$ است. پس:

$$\Delta^۲+\delta^۲=۹+۱=۱۰$$

۳ رابطه‌ی بین مرتبه و اندازه: در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داریم:

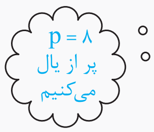
$$\circ \le q \le \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

تذکر برای سرعت در محاسبات، بهتر است اعداد زیر را در حافظه داشته باشید:

$\binom{۱۱}{۲}=۵۵$	$\binom{۱۰}{۲}=۴۵$	$\binom{۹}{۲}=۳۶$	$\binom{۸}{۲}=۲۸$	$\binom{۷}{۲}=۲۱$	$\binom{۶}{۲}=۱۵$	$\binom{۵}{۲}=۱۰$	$\binom{۴}{۲}=۶$	$\binom{۳}{۲}=۳$

مثال: **گراف G از مرتبه‌ی ۱۰، دارای سه بخش جدا از هم است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟**

پاسخ: برای ایجاد کردن سه بخش جدا از هم، دو بخش را با دو رأس ایزوله ایجاد می‌کنیم (هر رأس ایزوله یک بخش به حساب می‌آید) و ۸ رأس باقی‌مانده را تا جایی که می‌توانیم پر از یال می‌کنیم:



$$\Rightarrow q_{max} = \binom{۸}{۲} = \frac{۸\times۷}{۲} = ۲۸$$

مثال: **گراف G با اندازه‌ی ۳۰، دارای سه رأس درجه‌ی صفر است. این گراف حداقل چند رأس دارد؟**

پاسخ: برای جا دادن ۳۰ یال نیاز به حداقل ۹ رأس داریم چون $\binom{۸}{۲} \le ۳۰ \le \binom{۹}{۲}$ می‌باشد. از آن‌جایی که سه رأس درجه‌ی صفر هم باید داشته باشیم پس حداقل تعداد رأس‌ها برابر است با: $۹+۳=۱۲$.

در گراف داده شده $p=۶$، $q=۸$، $\Delta=۵$ و $\delta=۲$ می‌باشد. بنابراین:

$$(p+q)(\Delta^۲-\delta^۲)=(۶+۸)(۵^۲-۲^۲)=۱۴\times۲۱=۲۹۴$$

A ۵ ۴ با توجه به این‌که در گراف از مرتبه‌ی ۸، اندازه در نامساوی $\circ \le q \le \binom{۸}{۲} = ۲۸$ صدق می‌کند، لذا $q=۳۰$ غیر قابل قبول است.

A ۶ ۴ می‌دانیم $\binom{۹}{۲} \le ۴۱ \le \binom{۱۰}{۲}$ می‌باشد، بنابراین حداقل p برابر ۱۰ است.

B ۷ ۳ ۲۴ را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد می‌نویسیم:

$$pq=۲۴=۱\times۲۴=۲\times۱۲=۳\times۸=۴\times۶$$

حالت‌های $\begin{cases}p=۲۴\\q=۱\end{cases}$، $\begin{cases}p=۱۲\\q=۲\end{cases}$، $\begin{cases}p=۸\\q=۳\end{cases}$، $\begin{cases}p=۶\\q=۴\end{cases}$ و $\begin{cases}p=۴\\q=۶\end{cases}$ قابل قبول هستند، چون در شرط $\circ \le q \le \binom{p}{۲}$ صدق می‌کنند.

B ۸ ۱

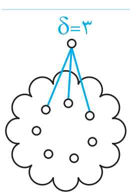
p	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

بیش از یک بخش دارند ← ۱ ۲ → ساده‌نیستند.

$$\Rightarrow \quad ۱\ \begin{cases}p=۵\\q=۵\end{cases} \Rightarrow pq=۲۵ \qquad ۲\ \begin{cases}p=۴\\q=۶\end{cases} \Rightarrow pq=۲۴$$

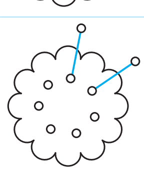
دقت کنید یک گراف از مرتبه‌ی p برای آن‌که یک بخشی باشد نیاز به حداقل $(p-۱)$ یال دارد. به چنین گراف‌هایی اصطلاحاً گراف همبند می‌گویند که در ادامه‌ی فصل با آن‌ها بیشتر آشنا می‌شویم.

A+ ۹ ۳ یک رأس را کنار می‌گذاریم تا با آن $\delta=۳$ را ایجاد کنیم. بقیه‌ی رأس‌ها را پر از یال می‌کنیم و سپس رأس کنار گذاشته شده را با ۳ یال به مجموعه‌ی ۷ رأسی پر از یال وصل می‌کنیم:



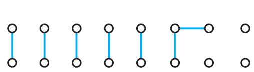
$$\Rightarrow Max(q)=\binom{۷}{۲}+۳=۲۴$$

A+ ۱۰ ۳ دو رأس را کنار می‌گذاریم و بقیه را پر از یال می‌کنیم، سپس دو رأس درجه‌ی ۱ را اضافه می‌کنیم:



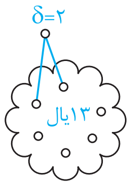
$$\Rightarrow Max(q)=\binom{۷}{۲}+۱+۱=۲۳$$

B ۱۱ ۲ سه رأس را کنار می‌گذاریم و ۱۳ رأس باقی‌مانده را با حداقل یال‌های ممکن به هم وصل می‌کنیم:



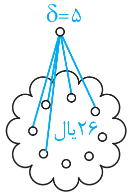
$\Rightarrow$ حداقل ۷ یال دارد.

A+ | ۱۲ | ۲ ابتدا یک رأس را با دو یال کنار می‌گذاریم تا $\delta = ۲$ را ایجاد کنیم. ۱۳ یال باقی می‌ماند. برای جا دادن ۱۳ یال باقی‌مانده دست کم ۶ رأس لازم است. یک رأس هم که برای $\delta = ۲$ کنار گذاشته بودیم پس حداقل ۷ رأس دارد.



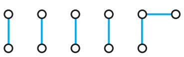
$\Rightarrow p_{min} = ۷$

B+ | ۱۳ | ۲ یک رأس را با ۵ یال کنار می‌گذاریم. برای جا دادن ۲۶ یال باقی‌مانده، دست کم ۸ رأس لازم است. پس حداقل ۹ رأس نیاز داریم:



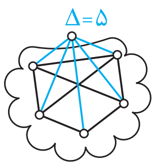
$\Rightarrow p_{min} = ۹$

B | ۱۴ | ۲ اگر یال‌ها را به صورت مقابل قرار دهیم، با حداقل یال ممکن، δ برابر ۱ می‌شود:



$\Rightarrow Min(q) = ۶$

B+ | ۱۵ | ۲ ابتدا ۵ یال را به یک رأس وصل می‌کنیم تا $\Delta = ۵$ ایجاد شود. حال ۷ یال دیگر داریم که برای داشتن آن‌ها باید حداقل ۵ رأس در نظر بگیریم:



$\Rightarrow Min(p) = ۶$

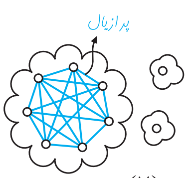
نیم‌نگاه

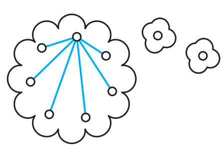
رابطه‌ای در بعضی از کتاب‌ها وجود دارد که می‌گوید $\delta \le \frac{۲q}{p} \le \Delta$ می‌باشد. این رابطه درست است، اما برای محاسبه‌ی حدود p و q همیشه مناسب نیست و جواب واقعی نمی‌دهد. مثلاً در همین سؤال:

$$\frac{۲q}{p} \le \Delta \Rightarrow \frac{۲\times ۱۲}{p} \le ۵ \Rightarrow p \ge \frac{۲۴}{۵} \simeq ۴/۰۰\cdots \Rightarrow Min(p) = ۵$$

در حالی‌که می‌دانیم در گراف با ۵ رأس، امکان ندارد $\Delta = ۵$ باشد!!! یعنی این رابطه می‌گوید $p \ge ۴/۰۰\cdots$ است که واقعاً هم همین‌طور است اما نمی‌گوید کدام عدد صحیح بزرگ‌تر از ۴/۰۰، کم‌ترین مقدار p است.

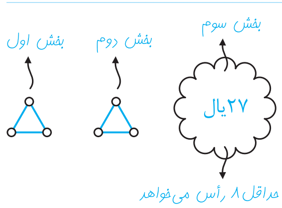
iQ | ۱۶ | ۳ کافی است حداکثر و حداقل تعداد یال‌های ممکن با این شرایط را پیدا کنیم:





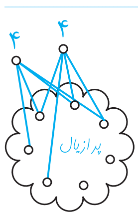
$$Max(q) = \binom{۷}{۲} = ۲۱ \quad و \quad Min(q) = ۶ \quad \Rightarrow \quad ۶ \le q \le ۲۱ \Rightarrow \text{تعداد } q \text{ ها} = ۲۱ - ۶ + ۱ = ۱۶$$

iQ | ۱۷ | ۳ ابتدا دو بخش را طوری ایجاد می‌کنیم که $\delta = ۲$ در گراف رعایت شود. در این صورت ۲۷ یال باقی می‌ماند که برای داشتن این ۲۷ یال نیاز به حداقل ۸ رأس داریم. بنابراین:



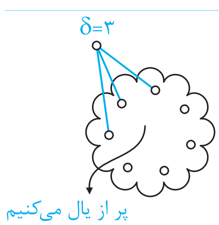
$\Rightarrow Min(p) = ۳ + ۳ + ۸ = ۱۴$

A+ | ۱۸ | ۳ دو رأس را کنار می‌گذاریم تا با آن‌ها دو رأس درجه‌ی ۴ ایجاد کنیم و ۷ رأس باقی‌مانده را پر از یال می‌کنیم. سپس دو رأس درجه‌ی ۴ را به آن‌ها وصل می‌کنیم:



$\Rightarrow Max(q) = \binom{۷}{۲} + ۴ + ۴ = ۲۹$

A+ | ۱۹ | ۴ یک رأس را کنار می‌گذاریم و ۷ رأس را پر از یال می‌کنیم، سپس رأس کنار گذاشته شده را قرار می‌دهیم و به سه تا از رأس‌ها وصل می‌کنیم:



$\Rightarrow Max(q) = \binom{۷}{۲} + ۳ = ۲۴$

A ۲۰ ۳

رابطه‌ی درجه و اندازه

۱ **رابطه‌ی درجه‌ها و اندازه در گراف:** در هر گراف ساده، مجموع درجات رئوس برابر $2q$ می‌باشد.

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$

تنبیه ۱. در هر گراف ساده، تعداد رأس‌های فرد همواره عددی زوج است. (لم دست دادن)

۲. در هر گراف ساده، تعداد رأس‌های زوج بستگی به مرتبه‌ی گراف دارد و از نظر زوج و فرد بودن هم‌نوع مرتبه است.

۲ **میانگین درجه‌ی رأس‌ها:** در هر گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، میانگین درجه‌ی رأس‌ها برابر است با:

$$\text{میانگین درجه‌ها} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \deg v_i}{p} = \frac{2q}{p}$$

تذکر همان‌طور که قبلاً هم اشاره شد، رابطه‌ی $\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$ همواره در همه‌ی گراف‌ها برقرار است، اما در حل بسیاری از تست‌ها منجر به جواب‌های نادرست و غیرواقعی می‌شود. بنابراین از به کار بردن آن در تست‌ها پرهیز کنید.

مثال: **در گرافی از مرتبه‌ی ۹، سه رأس از درجه‌ی ۴ و تعدادی رأس از درجه‌های ۱ و ۵ وجود دارد. اگر اندازه‌ی این گراف ۱۳ باشد، تعداد رأس‌های درجه‌ی ۵ را به‌دست آورید.**

پاسخ: فرض می‌کنیم x رأس درجه‌ی ۵ داریم، پس $(6-x)$ رأس درجه‌ی ۱ خواهیم داشت (دقت کنید از ۹ رأس، سه رأس از درجه‌ی ۴ هستند). بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow 3\times4+5x+(6-x)\times1 = 2\times13 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$$ ۲ رأس درجه‌ی ۵ وجود دارد.

مثال: **نشان دهید که در یک مهمانی ۱۳ نفره، امکان ندارد هر یک از افراد دقیقاً با ۳ نفر دیگر دست دهند.**

پاسخ: هر یک از افراد را به‌عنوان رأس‌های گراف در نظر می‌گیریم. در این صورت عمل دست دادن بین دو نفر معادل با وجود یک یال در گراف می‌باشد. بنابراین باید گرافی به‌وجود بیاید که ۱۳ رأس از درجه‌ی ۳ دارد که امکان‌پذیر نیست. زیرا تعداد رأس‌های فرد، عددی فرد می‌شود.

مرتبه‌ی گراف برابر ۱۸ می‌باشد که ۶ رأس درجه‌ی ۴ و ۱۲ رأس درجه‌ی ۳ دارد. پس:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow \underbrace{6\times4}_{24} + \underbrace{12\times3}_{36} = 2q \Rightarrow q = 30$$

بنابراین اختلاف مرتبه و اندازه برابر $30-18=12$ می‌باشد.

A ۲۱ ۳

$$q = \frac{3}{2}p \xrightarrow{p=8} q = \frac{3}{2}\times8 = 12$$

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow 5+4+4+3+2+a+b+c = 2\times12 \Rightarrow 18+a+b+c = 24 \Rightarrow a+b+c = 6$$

A ۲۲ ۴

فرض می‌کنیم x رأس درجه‌ی ۴ داریم، پس $11-x$ رأس درجه‌ی ۵ خواهیم داشت. بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow 4x+5(11-x) = 2\times24 \Rightarrow 4x-5x = 48-55 \Rightarrow x = 7$$

بنابراین $11-7=4$ رأس درجه‌ی ۵ داریم که اختلاف تعداد رأس‌های فرد و زوج برابر $7-4=3$ است.

B ۲۳ ۲

فرض می‌کنیم که x رأس درجه‌ی ۳ و y رأس درجه‌ی ۷ داریم. بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow 3\times4 + x\times3 + y\times7 = 2\times21 \Rightarrow 3x+7y = 30 \Rightarrow 7y = \underbrace{30-3x}_{\substack{\text{باید مضرب ۷ باشد} \\ \text{(به X عدد می‌دهیم)}}} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow p = 3+3+3 = 9$$

B+ ۲۴ ۳

میانگین درجه‌ی رأس‌ها برابر $\frac{2q}{p}$ است. پس:

$$\frac{2q}{p} = 4 \Rightarrow \frac{2q}{12} = 4 \Rightarrow q = 24$$

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow (\underbrace{0+0+0}_{\text{تا ۳}}) + (\underbrace{5+\cdots+5}_{\text{تا x}}) + (\underbrace{6+\cdots+6}_{\text{تا y}}) = 2\times24 \Rightarrow 5x+6y = 48 \Rightarrow 5x = \underbrace{48-6y}_{\text{مضرب ۵}} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\text{تعداد رأس‌های زوج} = 3+y = 3+3 = 6$$

iQ ۲۵ ۳

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q \Rightarrow (\underbrace{۳+۳+\cdots+۳}_{x\text{ تا}}) + (\underbrace{۵+\cdots+۵}_{y\text{ تا}}) + (\underbrace{۶+\ldots+۶}_{z\text{ تا}}) = ۲\times ۲۰$$

$$\Rightarrow ۳x+۵y+۶z=۴۰ \xRightarrow{x+y+z=۱۱} ۳(۱۱-y-z)+۵y+۶z=۴۰ \Rightarrow ۲y+۳z=۷ \Rightarrow ۲y=\underbrace{۷-۳z}_{\text{مضرب ۲}} \Rightarrow z=۱ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow x=۸$$

$\Rightarrow$ تعداد رأس‌های فرد $= x+y = ۸+۲ = ۱۰$

A ۲۶ ۴ افراد حاضر در کنفرانس ۹ نفر می‌باشند. اگر آن‌ها را با ۹ رأس متناظر کنیم، هر رأس باید به ۳ رأس دیگر وصل شود. در این صورت گراف ۹ رأس فرد خواهد داشت که امکان‌پذیر نیست.

A ۲۷ ۴ تعداد رأس‌های فرد، همواره عددی زوج است، اما تعداد رأس‌های زوج به خاطر زوج بودن ۱۶، عددی زوج است.

A+ ۲۸ ۴

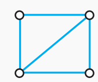
دنباله‌ی گرافی

تعریف: دنباله‌ی نزولی $d_۱, d_۲, \cdots, d_p$ را دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های یک گراف ساده می‌نامند، هرگاه این اعداد بتوانند درجه‌ی رأس‌های یک گراف ساده باشند.

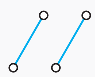
مثال: **برای هر یک از دنباله‌های زیر یک گراف ساده رسم کنید.**

پاسخ:

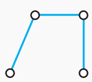
ج ۳,۳,۲,۲



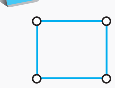
ب ۱,۱,۱,۱



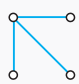
الف ۲,۲,۱,۱



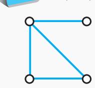
و ۲,۲,۲,۲



ه ۳,۱,۱,۱



د ۳,۲,۲,۱



نکات لازم برای تشخیص گرافی بودن یک دنباله:

۱ در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p، درجه‌ی رأس‌ها در بازه‌ی $۰ \le \deg v_i \le p-۱$ می‌باشند.

۲ تعداد رأس‌های فرد در هر دنباله‌ی گرافی باید زوج باشد.

۳ اگر گراف دارای k رأس از درجه‌ی $p-۱$ (رأس فول) باشد، باید $\delta \ge k$ باشد.

۴ حداقل دو رأس گراف دارای درجه‌ی یکسان هستند یعنی دنباله‌ای که جمله‌ی تکراری ندارد گرافی نیست.

تذکر *در تشخیص گرافی بودن یک دنباله، قبل از هر اقدامی جمله‌های صفر را نادیده می‌گیریم.*

مثال: **نشان دهید که هر یک از دنباله‌های زیر به چه دلیل مربوط به گراف ساده نیستند.**

الف ۵,۵,۴,۳,۲ ← چون گراف ۵ رأس دارد، نمی‌تواند رأس درجه‌ی ۵ داشته باشد.

ب ۴,۳,۲,۱,۱ ← تعداد رأس‌های فرد، عددی فرد است. پس دنباله گرافی نیست.

ج ۵,۵,۳,۳,۱,۱ ← چون مرتبه‌ی گراف $p=۶$ می‌باشد و دو رأس فول در گراف وجود دارد، پس δ باید بزرگ‌تر و یا مساوی ۲ باشد که این‌طور نیست.

د ۵,۴,۳,۲,۱,۰,۰ ← ابتدا رأس‌های درجه‌ی صفر را نادیده می‌گیریم. دنباله به‌صورت ۵,۴,۳,۲,۱ می‌شود. چون در دنباله جمله‌ی تکراری وجود ندارد پس دنباله گرافی نیست. (البته می‌شد گفت چون $p=۵$ است و رأس درجه‌ی ۵ در دنباله وجود دارد دنباله گرافی نیست.)

۵ **الگوریتم هاول ـ حکیمی:** اگر با چهار نکته‌ی اولیه، گرافی نبودن دنباله‌ای قابل تشخیص نبود از الگوریتم هاول ـ حکیمی استفاده می‌کنیم. به این صورت که دنباله را به‌صورت نزولی مرتب می‌کنیم. بزرگ‌ترین درجه را حذف کرده و به اندازه‌ی عدد آن، از رأس‌های بعدی یک واحد کم می‌کنیم. اگر دنباله‌ی حاصل قابل تشخیص بود، کار تمام است. در غیر این‌صورت می‌توان این کار را تا چندین مرحله ادامه داد.

مثال: گرافی بودن دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

الف ۵,۴,۳,۳,۲,۱

همان‌طور که ملاحظه می‌شود گرافی نبودن این دنباله با چهار نکته‌ی اولیه قابل تشخیص نیست. برای تأیید گرافی بودن مجبور به استفاده از الگوریتم هاول ـ حکیمی هستیم:

۵ رأس
۵,۴,۳,۳,۲,۱
۳ رأس
۳,۲,۲,۱,۰
۱ رأس
۱,۱,۰,۰
۰,۰,۰ ⇐ گرافی است.

تذکر *در هر مرحله از عملیات اگر متوجه گرافی بودن دنباله شدید می‌توانید کار را همان‌جا تمام کنید.*

ب ۵,۵,۴,۴,۲,۲,۱,۱

۵ رأس
۵,۵,۴,۴,۲,۲,۱,۱
۴ رأس
۴,۳,۳,۱,۱,۱,۱
۲,۲,۰,۰,۱,۱ ⇐ این گراف به راحتی قابل رسم است، پس کار را همین‌جا تمام می‌کنیم یعنی دنباله‌ی اولیه گرافی است.

ج ۵,۴,۳,۲,۱,۱

۵ رأس
۵,۴,۳,۲,۱,۱
۳,۲,۱,۰,۰ ⇐ گرافی نیست.

تنبیه اگر گراف از مرتبه‌ی p دارای یک رأس از درجه‌ی $p-1$ (رأس فول) و یک رأس از درجه‌ی $p-2$ (نیمه فول) باشد، آن‌گاه حداکثر می‌تواند یک رأس از درجه‌ی ۱ داشته باشد.

در گزینه‌ی (۱) اگر رأس درجه‌ی صفر را کنار بگذاریم ۵ رأس باقی می‌ماند پس رأس درجه‌ی ۵ نمی‌توانیم داشته باشیم. گزینه‌ی (۲) هم متأسفانه دارای ۳ رأس فرد می‌باشد. در گزینه‌ی (۳) هم، چون ۶ رأس داریم و یک رأس درجه‌ی ۵ و یک رأس درجه‌ی ۴ در گراف وجود دارد، نمی‌توانیم دو رأس درجه‌ی یک داشته باشیم.

B+ | ۲۹ | ۴ هیچ نشانه‌ی خاصی برای حذف گزینه‌ای وجود ندارد، بنابراین به سراغ الگوریتم هاول ـ حکیمی می‌رویم:

۱) ۵ رأس: ۵,۴,۳,۳,۲,۱
۳ رأس: ۳,۲,۲,۱,۰
۱ رأس: ۱,۱,۰,۰
۰,۰,۰ ✓

۲) ۴ رأس: ۴,۴,۳,۳,۳,۱
۳ رأس: ۳,۲,۲,۲,۱
۱ رأس: ۱,۱,۱,۱
۰,۱,۱ ✓

۳) ۴ رأس: ۴,۴,۴,۳,۲,۱
۳ رأس: ۳,۳,۲,۱,۱
۲,۱,۰,۱
نزولی
۲ رأس: ۲,۱,۱,۰
۰,۰,۰ ✓

بنابراین گزینه‌ی (۴) جواب است. چون:

۵ رأس: ۵,۵,۴,۴,۲,۲
۴ رأس: ۴,۳,۳,۱,۱
۲,۲,۰,۰ ✗

B | ۳۰ | ۴ در گزینه‌ی (۱) یک رأس فول (از درجه‌ی ۵) و یک رأس نیمه فول (از درجه‌ی ۴) وجود دارد. بنابراین می‌بایست حداکثر یک رأس از درجه‌ی ۱ وجود داشته باشد و اما سایر گزینه‌ها را به‌وسیله‌ی الگوریتم هاول ـ حکیمی بررسی می‌کنیم:

۲) ۵ رأس: ۵,۵,۴,۴,۲,۲
۴ رأس: ۴,۳,۳,۱,۱
۲,۲,۰,۰ ✗

۳) ۶ رأس: ۶,۶,۴,۴,۲,۲,۱,۱
۵,۳,۳,۱,۱,۰,۱
نزولی
۵ رأس: ۵,۳,۳,۱,۱,۱
۲,۲,۰,۰,۰ ✗

B ۳۱ ۳

پیدا کردن درجه‌های مجهول

۱ اگر درجه‌ی یک رأس از گراف مجهول بود، با توجه به این‌که تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد، جنس مجهول را از نظر زوج و فرد بودن مشخص می‌کنیم. هم‌چنین با توجه به مرتبه‌ی گراف و دقت به این نکته که $۰ \le \deg v_i \le p-۱$ است حدود آن را نیز مشخص می‌کنیم و حالات قابل قبول اولیه را پیدا کرده و در صورت لزوم توسط الگوریتم هاول_حکیمی آن‌ها را کنترل می‌کنیم که آیا می‌توانند با این درجه‌ها تشکیل دنباله‌ی گرافی بدهند یا نه؟

مثال: اگر درجه‌ی رأس‌های یک گراف ساده $۵,۴,۳,۳,۲,a$ باشد، برای a چند جواب وجود دارد؟

پاسخ: گراف ۳ رأس فرد دارد بنابراین باید a فرد باشد. چون مرتبه‌ی گراف ۶ $p=$ است، بنابراین $۰ \le a \le ۵$ و در نتیجه ۵ یا ۳ یا $a=۱$. حال باید بررسی کنیم کدام جواب‌ها قابل قبول است:

$a=۵ \Rightarrow ۵, \overrightarrow{۵,۴,۳,۳,۲}^{\text{۵ رأس}}$
$۴, \overrightarrow{۳,۲,۲,۱}^{\text{۴ رأس}}$
$۲,۱,۱,۰$ ✓

$a=۳ \Rightarrow ۵, \overrightarrow{۴,۳,۳,۳,۲}^{\text{۵ رأس}}$
$۳, \overrightarrow{۲,۲,۲,۱}^{\text{۴ رأس}}$
$۱,۱,۱,۱$ ✓

$a=۱ \Rightarrow ۵, \overrightarrow{۴,۳,۳,۲,۱}^{\text{۵ رأس}}$
$۳, \overrightarrow{۲,۲,۱,۰}^{\text{۳ رأس}}$
$۱,۱,۰,۰$ ✓

بنابراین برای a سه جواب قابل قبول وجود دارد.

۲ اگر درجه‌ی بیش از یک رأس از گراف مجهول بود، ابتدا به کمک قضیه‌ی $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q$ مقادیر ممکن برای مجموع مجهولات را به‌دست می‌آوریم. سپس حالات ممکن برای مجهولات را با توجه به شرایط مسأله بررسی می‌کنیم.

مثال: در گرافی با درجه‌ی رئوس $a,b,۴,۴,۳,۱$، اگر رابطه‌ی $q=\frac{۵}{۳}p$ بین مرتبه و اندازه برقرار باشد، برای حاصل‌ضرب ab چند جواب مختلف وجود دارد؟

پاسخ:

$$q=\frac{۵}{۳}p \xRightarrow{p=۶} q=\frac{۵}{۳}\times ۶=۱۰ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q \Rightarrow a+b+۴+۴+۳+۱=۲\times ۱۰ \Rightarrow a+b=۸$$

چون گراف ۶ رأس دارد، $۰ \le a,b \le ۵$ می‌باشند، بنابراین حالات زیر قابل بررسی است:

۱ $\begin{cases} a=۵ \\ b=۳ \end{cases} \Rightarrow ۵, \overrightarrow{۴,۴,۳,۳,۱}^{\text{۵ رأس}}$
$۳, \overrightarrow{۳,۲,۲,۰}^{\text{۳ رأس}}$
$۲,۱,۱,۰$ ✓

۲ $\begin{cases} a=۴ \\ b=۴ \end{cases} \Rightarrow ۴, \overrightarrow{۴,۴,۴,۳,۱}^{\text{۵ رأس}}$
$۴, \overrightarrow{۳,۳,۲,۱}^{\text{۳ رأس}}$
$۲,۲,۱,۱$ ✓

بنابراین $ab=۱۶$ یا $ab=۱۵$ می‌باشد. پس برای ab دو جواب مختلف وجود دارد.

مثال: در گرافی با درجه‌ی رئوس $۵,۳,۱,a,b,c$، اگر رابطه‌ی $p^۲=۴q$ بین مرتبه و اندازه برقرار باشد، برای حاصل‌ضرب abc چند جواب وجود دارد؟

پاسخ:

$$p^۲=۴q \xRightarrow{p=۶} ۳۶=۴q \Rightarrow q=۹ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q \Rightarrow a+b+c+۵+۳+۱=۲\times ۹ \Rightarrow a+b+c=۹$$

فول وایزوله باهم غیرممکن است.

در این حالت ۲ رأس فول وجود دارد و باید $\delta \ge ۲$ باشد.

$$a+b+c=۹=\underbrace{۵+۴+۰}_{\text{غ‌ق‌ق}}=\underbrace{۵+۳+۱}_{\text{غ‌ق‌ق}}=\underbrace{۵+۲+۲}_{۱}=\underbrace{۴+۴+۱}_{۲}=\underbrace{۴+۳+۲}_{۳}=\underbrace{۳+۳+۳}_{۴}$$

$۰ \le a,b,c \le ۵$

حال به بررسی این ۴ حالت می‌پردازیم:

۱ $۵,۵,۳,۲,۲,۱$ — ۲ رأس فول $\Rightarrow \delta \ge ۲$

۲ $۵,۴,۴,۳,\underline{۱,۱}$ ✗ — فول، نیمه‌فول، حداکثر یک رأس درجه‌ی یک

۳ $۵, \overrightarrow{۴,۳,۳,۲,۱}^{\text{۵ رأس}}$
$۳, \overrightarrow{۲,۲,۱,۰}^{\text{۳ رأس}}$
$۱,۱,۰,۰$ ✓

۴ $۵, \overrightarrow{۳,۳,۳,۳,۱}^{\text{۵ رأس}}$
$۲,۲,۲,۲,۰$ ✓

بنابراین برای حاصل‌ضرب abc تنها دو جواب قابل قبول وجود دارد.

چون گراف ۳ رأس فرد دارد، باید a فرد باشد، بنابراین a می‌تواند ۱ یا ۳ یا ۵ باشد. حال باید بررسی کنیم به‌ازای کدام مقادیر a، دنباله گرافی است:

$a=5 \Rightarrow S: 5,\overrightarrow{4,3,3,2,1}^{\text{۵ رأس}}$ ، $3,\overrightarrow{2,2,1,0}^{\text{۳ رأس}}$ ، $1,1,0$ ✓

$a=3 \Rightarrow S: 4,\overrightarrow{3,3,3,2,1}^{\text{۴ رأس}}$ ، $2,\overrightarrow{2,2,1,1}^{\text{۲ رأس}}$ ، $1,1,1,1$ ✓

$a=1 \Rightarrow S: 4,\overrightarrow{3,3,2,1,1}^{\text{۴ رأس}}$ ، $2,2,1,0,1$ نزولی $2,\overrightarrow{2,1,1}^{\text{۲ رأس}}$ ، $1,0,1$ ✓

بنابراین برای a سه جواب قابل قبول وجود دارد.

B ۳۲ ۴

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow a+b+\underbrace{5+4+3+2}_{14} = 2q \Rightarrow a+b = \text{زوج}$$

بنابراین یا گزینه‌ی (۲) جواب است یا گزینه‌ی (۴) که چون حداقل را می‌خواهد ابتدا $a+b=2$ را بررسی می‌کنیم:

$$a+b=2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \underset{\text{فول}}{5},\overset{\text{نیمه فول}}{4},3,2,\underbrace{1,1}_{\substack{\text{حداکثر یک رأس}\\\text{درجه‌ی یک}}} \times$$

بنابراین حداقل $a+b=4$ است.

B+ ۳۳ ۳

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow a+b+\underbrace{5+4+3+2}_{\text{زوج}} = 2q \Rightarrow a+b = \text{زوج} \Rightarrow \text{گزینه‌ی (۲) نادرست است}$$

حال چون حداکثر $a+b$ را می‌خواهیم از $a+b=10$ شروع می‌کنیم که تنها حالت قابل قبول $a=5$ و $b=5$ است. در این صورت دنباله به فرم ۵,۵,۵,۴,۳,۲ درمی‌آید که سه رأس فول دارد و باید $\delta \geq 3$ باشد ولی این‌طور نیست. بنابراین $a+b=8$ را امتحان می‌کنیم:

$$a+b=8=\underbrace{5+3}_{\boxed{1}}=\underbrace{4+4}_{\boxed{2}}$$

$\boxed{1}$ $5,\overrightarrow{5,4,3,3,2}^{\text{۵ رأس}}$ ، $4,\overrightarrow{3,2,2,1}^{\text{۴ رأس}}$ ، $2,1,1,0$ ✓

$\boxed{2}$ $5,\overrightarrow{4,4,4,3,2}^{\text{۵ رأس}}$ ، $3,\overrightarrow{3,3,2,1}^{\text{۳ رأس}}$ ، $2,2,1,1$ ✓

البته بعد از قابل قبول بودن حالت $\boxed{1}$ دیگر نیازی به چک کردن حالت $\boxed{2}$ نبود.

B+ ۳۴ ۲

$$q=p+3 \xrightarrow{p=6} q=9 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 18 \Rightarrow a+b+4+4+3+1=18 \Rightarrow a+b=6=\underbrace{5+1}_{\boxed{1}}=\underbrace{4+2}_{\boxed{2}}=\underbrace{3+3}_{\boxed{3}}$$

حال به بررسی این حالات می‌پردازیم:

$\boxed{1}$ $\overset{\text{فول}}{5},\underset{\text{نیمه فول}}{4},4,3,\underbrace{1,1}_{\text{حداکثر یک رأس درجه‌ی ۱}}$

$\boxed{2}$ $4,\overrightarrow{4,4,3,2,1}^{\text{۴ رأس}}$ ، $3,\overrightarrow{3,2,1,1}^{\text{۳ رأس}}$ ، $2,1,0,1$ ✓

$\boxed{3}$ $4,\overrightarrow{4,3,3,3,1}^{\text{۴ رأس}}$ ، $3,\overrightarrow{2,2,2,1}^{\text{۳ رأس}}$ ، $1,1,1,1$ ✓

بنابراین برای حاصل‌ضرب ab تنها دو جواب قابل قبول وجود دارد.

---

iQ ۳۵ ۲

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow a+b+\underbrace{5+5+4+3}_{17} = 2q \Rightarrow a+b = \text{فرد}$$

حال چون گراف مرتبه‌ی ۶ است، حداکثر اندازه‌ی آن $\binom{6}{2}=15$ می‌باشد. پس با توجه به سایر درجات، $a+b$ می‌تواند اعداد ۳,۵,۷,۹ باشد که باید بررسی کرد کدام‌ها قابل قبول هستند.

$a+b=9=5+4$ ✓ $\qquad a+b=7=4+3$ ✓

$a+b=5=3+2$ ✓ $\qquad a+b=3=2+1$ غ‌ق‌ق

iQ ۳۶ | ۳

$$q=\frac{۳}{۲}p \xRightarrow{p=۶} q=۹ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q=۱۸ \Rightarrow a+b+c+۴+۳+۱=۱۸$$

$$a+b+c=۱۰=\underbrace{۵+۳+۲}_{۱}=\underbrace{۵+۴+۱}_{۲}=\underbrace{۴+۴+۲}_{۳}=\underbrace{۴+۳+۳}_{۴}$$

۱) ۵ ، $\overset{\text{۵ رأس}}{\overrightarrow{۴,۳,۳,۲,۱}}$
۴ ، $\overset{\text{۳ رأس}}{\overrightarrow{۲,۲,۱,۰}}$
۱,۱,۰,۰ ✓

۲) ۵ ، $\overset{\text{۵ رأس}}{\overrightarrow{۴,۴,۳,۱,۱}}$
۳,۳,۲,۰,۰ ✗

۳) ۴ ، $\overset{\text{۴ رأس}}{\overrightarrow{۴,۴,۳,۲,۱}}$
۳ ، $\overset{\text{۳ رأس}}{\overrightarrow{۳,۲,۱,۱}}$
۲,۱,۰,۱ ✓

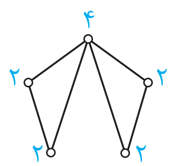
۴) ۴ ، $\overset{\text{۴ رأس}}{\overrightarrow{۴,۳,۳,۳,۱}}$
۳ ، $\overset{\text{۳ رأس}}{\overrightarrow{۲,۲,۲,۱}}$
۱,۱,۱,۱ ✓

بنابراین سه جواب قابل قبول به‌دست می‌آید. (توجه کنید که چون تعداد جواب‌های مجموعه‌ی $\{a,b,c\}$ را خواسته است و در مجموعه نباید عضو تکراری وجود داشته باشد از ۳ جواب به‌دست آمده تنها یکی قابل قبول است، اما ظاهراً طراح سؤال در سازمان سنجش و آموزش کشور اصلاً حواسش به این موضوع نبوده و گزینه‌ی (۳) را به‌عنوان جواب درست اعلام کرده است. بهتر بود به جای قرار دادن a، b، c درون مجموعه می‌پرسید برای حاصل‌ضرب abc چند جواب وجود دارد!!!!!)

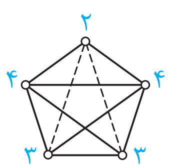
---

iQ ۳۷ | ۳

باتوجه به این‌که $\delta=۲$ است، بنابراین از یکی از رأس‌های گرافی که تمام رأس‌هایش فول است ۲ یال کنده شده است، یعنی اندازه‌ی گراف حداکثر ۸ است (شکل ۱). حداقل اندازه‌ی گراف هم ۶ است، چون گراف باید یک رأس درجه‌ی ۴ و چهار رأس درجه‌ی ۲ داشته باشد (شکل ۲) به شکل‌ها نگاه کنید:



شکل (۲)



شکل (۱)

بنابراین تعداد یال‌ها اعداد ۶، ۷ و ۸ می‌تواند باشد که در حالت $q=۸$ (یعنی شکل ۱) و $q=۶$ (یعنی شکل ۲) تنها یک حالت برای درجه‌ی سایر رأس‌ها وجود دارد. بنابراین $q=۷$ را بررسی می‌کنیم:

$$q=۷ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۵}\deg v_i=۱۴ \Rightarrow ۴+۲+a+b+c=۱۴ \Rightarrow a+b+c=۸=\underbrace{۴+۲+۲}_{۱}=\underbrace{۴+۳+۱}_{۲}=\underbrace{۳+۳+۲}_{۳}$$

۱) ۴ ، $\overset{\text{۴ رأس}}{\overrightarrow{۴,۲,۲,۲}}$
۳ ، $\overset{\text{۳ رأس}}{\overrightarrow{۱,۱,۱}}$
۰,۰,۰ ✓

۲) $\underline{۴,۴}$,۳,۲,۱
۲ رأس فول داریم $\Rightarrow \delta \geq ۲$ ✗

۳) ۴ ، $\overset{\text{۴ رأس}}{\overrightarrow{۳,۳,۲,۲}}$
۲ ، $\overset{\text{۳ رأس}}{\overrightarrow{۲,۱,۱}}$
۱,۰,۱ ✓

بنابراین ۴ جواب به‌دست آمده است که عبارتند از: ۴,۳,۳، ۴,۲,۲، ۲,۲,۲ و ۳,۳,۲. بنابراین چهار جواب متمایز برای $a^۲+b^۲+c^۲$ وجود دارد.

---

iQ ۳۸ | ۲

$$\frac{p}{q}=\frac{۶}{۱۰} \xRightarrow{p=۶} q=۱۰ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q \Rightarrow \underbrace{۵+۲+۲}_{۹}+a+b+c=۲۰ \Rightarrow a+b+c=۱۱$$

$$a+b+c=۱۱=\underbrace{۵+۵+۱}_{۱}=\underbrace{۵+۴+۲}_{۲}=\underbrace{۵+۳+۳}_{۳}=\underbrace{۴+۴+۳}_{۴}$$

۱) $\underbrace{۵,۵,۵}$,۲,۲,۱ ✗
سه رأس فول داریم $\Rightarrow \delta \geq ۳$

۲) ۵ ، $\overset{\text{۵ رأس}}{\overrightarrow{۵,۴,۲,۲,۲}}$
۴ ، $\overset{\text{۴ رأس}}{\overrightarrow{۳,۱,۱,۱}}$
۲,۰,۰,۰ ✗

۳) ۵ ، $\overset{\text{۵ رأس}}{\overrightarrow{۵,۳,۳,۲,۲}}$
۴ ، $\overset{\text{۴ رأس}}{\overrightarrow{۲,۲,۱,۱}}$
۱,۱,۰,۰ ✓

۴) ۵ ، $\overset{\text{۵ رأس}}{\overrightarrow{۴,۴,۳,۲,۲}}$
۳ ، $\overset{\text{۳ رأس}}{\overrightarrow{۳,۲,۱,۱}}$
۲,۱,۰,۱ ✓

اعداد قابل قبول برای a، b و c اعداد ۵,۳,۳ و ۴,۴,۳ می‌باشند که کوچک‌ترین عددی که می‌توان با این ارقام ساخت ۳۳۵ است که مضرب ۶۷ می‌باشد $(۳۳۵=۶۷\times۵)$

IQ ۳۹ ۴

$$p+q=۱۵ \xrightarrow{p=۶} q=۹ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۶}\deg v_i=۱۸ \Rightarrow ۴+۳+۱+a+b+c=۱۸ \Rightarrow a+b+c=۱۰$$

$$a+b+c=۱۰=\underbrace{۵+۴+۱}_{\boxed{۱}}=\underbrace{۵+۳+۲}_{\boxed{۲}}=\underbrace{۴+۴+۲}_{\boxed{۳}}=\underbrace{۴+۳+۳}_{\boxed{۴}}$$

حال باید بررسی کنیم دنباله‌ی ۵،۲،۱، a، b، c به‌ازای کدام‌یک از اعداد به‌دست آمده گرافی است؟

$\boxed{۱}$ $\underbrace{۵,۵},۳,۲,۲,۱$ ✗
۲ رأس فول داریم $\Rightarrow \delta \geq ۲$

$\boxed{۲}$ $\underbrace{۵,۵},۴,۲,۱,۱$ ✗
۲ رأس فول داریم $\Rightarrow \delta \geq ۲$

$\boxed{۳}$ $۵, \xrightarrow{\text{۵ رأس}} ۴,۴,۲,۲,۱$
$۳, \xrightarrow{\text{۳ رأس}} ۳,۱,۱,۰$ ✗
$۲,۰,۰,۰$

$\boxed{۴}$ $۵, \xrightarrow{\text{۵ رأس}} ۴,۳,۳,۲,۱$
$۳, \xrightarrow{\text{۳ رأس}} ۲,۲,۱,۰$
$۱,۱,۰,۰$ ✓

بنابراین تنها حالت $\boxed{۴}$ قابل قبول است که در آن abc برابر با ۳۶ است.

IQ ۴۰ ۳

$$q=۳p-۸ \xrightarrow{p=۵} q=۷ \Rightarrow ۲q=۱۴ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۵}\deg v_i=۱۴ \Rightarrow ۴+۲+a+b+c=۱۴$$

$$\underset{a,b,c\leq ۴}{a+b+c}=۸=\underbrace{۴+۳+۱}_{\boxed{۱}}=\underbrace{۴+۲+۲}_{\boxed{۲}}=\underbrace{۳+۳+۲}_{\boxed{۳}}$$

$\boxed{۱}$ $\underbrace{۴,۴},۳,۲,۱$ ✗
۲ رأس فول داریم $\Rightarrow \delta \geq ۲$

$\boxed{۲}$ $۴, \xrightarrow{\text{۴ رأس}} ۴,۲,۲,۲$
$۳, \xrightarrow{\text{۳ رأس}} ۱,۱,۱$
$۰,۰,۰$ ✓

$\boxed{۳}$ $۴, \xrightarrow{\text{۴ رأس}} ۳,۳,۲,۲$
$۲, \xrightarrow{\text{۲ رأس}} ۲,۱,۱$
$۱,۰,۱$ ✓

بنابراین برای حاصل‌ضرب abc تنها دو جواب وجود دارد، یکی ۱۶ و دیگری ۱۸ است.

IQ ۴۱ ۳

در گراف داده شده $p=۶$ می‌باشد و با توجه به رابطه‌ی $۲q=۳p-۴$ ، مقدار $q=۷$ است. بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q \Rightarrow a+b+c+۳+۲+۲=۲\times ۷ \Rightarrow a+b+c=۷=\underbrace{۵+۱+۱}_{\boxed{۱}}=\underbrace{۴+۲+۱}_{\boxed{۲}}=\underbrace{۳+۳+۱}_{\boxed{۳}}=\underbrace{۳+۲+۲}_{\boxed{۴}}$$

$\boxed{۱}$ $۵, \xrightarrow{\text{۵ رأس}} ۳,۲,۲,۱,۱$
$۲,۱,۱,۰,۰$ ✓

$\boxed{۲}$ $۴, \xrightarrow{\text{۴ رأس}} ۳,۲,۲,۲,۱$
$۲,۱,۱,۱,۱$ ✓

$\boxed{۳}$ $۳, \xrightarrow{\text{۳ رأس}} ۳,۳,۲,۲,۱$
$۲,۲,۱,۲,۱$ ✓

$\boxed{۴}$ $۴, \xrightarrow{\text{۴ رأس}} ۳,۲,۲,۲,۲$
$۲,۱,۱,۲,۲$ ✓

بنابراین برای حاصل‌ضرب abc ، چهار جواب غیر صفر وجود دارد.

IQ ۴۲ ۳

$$\sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q \Rightarrow \underbrace{۵+۳+۲}_{\text{زوج}}+a+b+c=۲q \Rightarrow a+b+c=\text{زوج}$$

با توجه به گزینه‌ها فرض کنیم $a+b+c=۱۴$ باشد در این صورت تنها حالت زیر قابل تصور است:

$$a+b+c=۱۴=۵+۵+۴ \Rightarrow \underbrace{۵،۵،۵}،۴،۳،۲$$ ✗
۳ رأس فول داریم $\Rightarrow \delta \geq ۳$

حال فرض کنیم $a+b+c=۱۲$ باشد. در این صورت:

$$a+b+c=۱۲=\underbrace{۵+۵+۲}_{\text{غ ق ق} \Rightarrow \delta\geq ۳ \text{ (۳ رأس)}}=۵+۴+۳ \xrightarrow{\text{بررسی می‌کنیم}} ۵, \xrightarrow{\text{۵ رأس}} ۵,۴,۳,۳,۲$$

$۴, \xrightarrow{\text{۴ رأس}} ۳,۲,۲,۱$
$۲,۱,۱,۰$ ✓

IQ ۴۳ ۳

$$۵+۳+۳+۳+۳+۳+۴ \leq ۲q \leq ۳+۴+۵+۵+۵+۵+۵ \Rightarrow ۲۴ \leq ۲q \leq ۳۲ \Rightarrow ۱۲ \leq q \leq ۱۶ \Rightarrow \text{۵ مقدار مختلف}$$

اگر همه را ۳ قرار می‌دادیم، تعداد رأس‌های فرد، فرد می‌شد.