فهرست

فصل ۱

هندسه و استدلال

بخش اول: زاویه و مثلث

حتماً انتظار دارید بحث زاویه را مثل همه‌ی کتاب‌ها با تعریف زاویه‌های متمم، مکمل، متقابل به رأس و ... شروع کنیم ولی فکر کنم هر کسی یک بار راهش به مدرسه افتاده باشد، همه‌ی این تعاریف رو بهتر از بنده می‌داند، پس بیایید با توجه به اهمیت زمان، مستقیم برویم سراغ این‌که رویکرد ما در حل این مسائل در کنکور و تست‌ها چی هست و چی باید باشه.

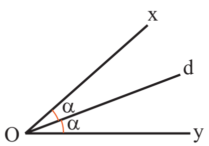
راهبرد حل مسائل ابتدایی زاویه

۱ نام‌گذاری زاویه‌ها (مثلاً با α، β، θ و ...)

۲ وقتی α و β مکمل‌اند، باید بنویسیم $\alpha+\beta=180^\circ$، پس حواسمان باشد که مکمل زاویه‌ی α را با $180^\circ-\alpha$ نمایش می‌دهیم.

۳ متمم α را با $90^\circ-\alpha$ نشان می‌دهیم.

۴ بلافاصله بعد از رسم نیمساز زاویه، زاویه‌های برابری که به وجود می‌آیند را با α نام‌گذاری کنید، مثلاً در شکل زیر Od نیمساز زاویه‌ی xOy است:



تست دو زاویه مکمل یکدیگرند. اگر اندازه‌ی یکی چهار برابر متمم دیگری باشد، زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) 30° ۲) 60° ۳) 75° ۴) 15°

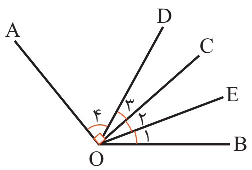
پاسخ گزینه‌ی (۲)، دو زاویه را α و β می‌نامیم. حالا بیایید فرض‌های مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم:

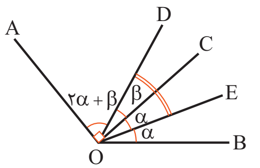
$$\left.\begin{array}{l}\beta \text{ و } \alpha \text{ مکمل‌اند}: \alpha+\beta=180^\circ \\ \alpha \text{ چهار برابر متمم } \beta \text{ است}: \alpha=4(90^\circ-\beta)\end{array}\right\} \Rightarrow 4(90^\circ-\beta)+\beta=180^\circ \Rightarrow 360^\circ-3\beta=180^\circ \Rightarrow 3\beta=180^\circ$$

$$\Rightarrow \beta=60^\circ \Rightarrow \alpha=120^\circ$$

پس زاویه‌ی کوچک‌تر β است که اندازه‌اش 60° است.

مسئله در شکل روبه‌رو OC بر OA عمود است، OD نیمساز زاویه‌ی AOB است و OE نیمساز زاویه‌ی COB است. اندازه‌ی $D\hat{O}E$ را بیابید.





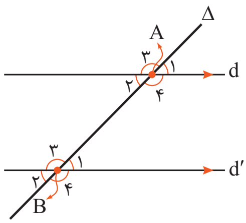
پاسخ اول سریع برویم سراغ نام‌گذاری زاویه‌ها. OE نیمساز زاویه‌ی BOC است، پس اسم $\hat{O}_۲$ و $\hat{O}_۱$ رو α می‌گذاریم، به جای $\hat{O}_۳$ بنویسیم β، یادتان نرفته که OD هم نیمساز زاویه‌ی AOB است، پس $\hat{O}_۴ = D\hat{O}B = ۲\alpha+\beta$ خواهد بود، از طرفی OC بر OA عمود است، در نتیجه:

$$OA \perp OC \Rightarrow A\hat{O}C = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۳+\hat{O}_۴ = ۹۰^\circ \Rightarrow \beta+(۲\alpha+\beta)=۹۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha+۲\beta=۹۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۴۵^\circ$$

حواستان هست که به جواب رسیدیم؟! چون زاویه‌ی DOE همون $\alpha+\beta$ یعنی ۴۵° است.

خطوط موازی و مورب

اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، آن‌گاه هشت زاویه پدید می‌آید که زوایای حاده با هم و زوایای منفرجه با هم برابرند.



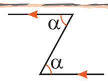
حاده‌ها : $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$

منفرجه‌ها : $\hat{A}_۳ = \hat{A}_۴ = \hat{B}_۳ = \hat{B}_۴$

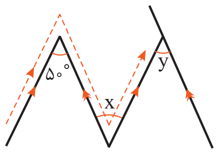
بدیهی است که جمع هر کدام از حاده‌ها با هر کدام از منفرجه‌ها، ۱۸۰° است.

راهبرد حل مسائل خطوط موازی

در این‌گونه سؤال‌ها باید به دنبال یک حرف Z انگلیسی باشیم

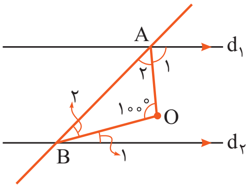


که البته ممکن است چرخیده باشد! به عنوان مثال در شکل مقابل:



با توجه به Z که البته کمی چرخیده است، $x=۵۰^\circ$ است و یک Z دیگر نیز ما را به $y=x=۵۰^\circ$ می‌رساند.

تست **در شکل زیر، اگر $d_۱ \parallel d_۲$، $\hat{A}_۱ = ۲\hat{A}_۲$، $\hat{B}_۲ = ۲\hat{B}_۱$ و $\hat{O}=۱۰۰^\circ$ باشد، $\hat{A}_۲ - \hat{B}_۱$ کدام است؟**



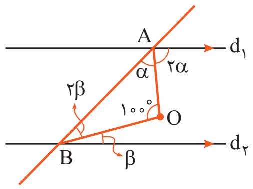
۱) صفر درجه

۲) ۱۰°

۳) ۲۰°

۴) ۳۰°

پاسخ گزینه‌ی (۳)، اول از همه نام‌گذاری زاویه‌ها:



$$\hat{A}_۲ = \alpha \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۲\alpha \quad , \quad \hat{B}_۱ = \beta \Rightarrow \hat{B}_۲ = ۲\beta$$

حالا دقت کنید که زاویه‌ی A منفرجه و زاویه‌ی B حاده است، پس جمع آن‌ها باید ۱۸۰° باشد، در نتیجه:

$$۳\alpha+۳\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۶۰^\circ \qquad (۱)$$

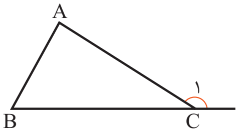
از طرفی در مثلث AOB داریم:

$$\hat{O}=100^\circ \Rightarrow \alpha+2\beta=180^\circ-100^\circ=80^\circ \xrightarrow{(1)} \underbrace{(\alpha+\beta)}_{60^\circ}+\beta=80^\circ \Rightarrow \beta=20^\circ \Rightarrow \alpha=40^\circ$$

حالا برویم سراغ جواب تست:

$$\hat{A}_2-\hat{B}_1=\alpha-\beta=40^\circ-20^\circ=20^\circ$$

مثلث



هر مثلث از سه‌تا زاویه و سه‌تا ضلع ساخته شده که اجزای اصلی مثلث نامیده می‌شوند. هر ضلع مثلث را که ادامه بدهیم، زاویه‌ای به وجود می‌آید که به آن «زاویه‌ی خارجی» گفته می‌شود، به عنوان مثال در شکل مقابل $\hat{C}_1$ زاویه‌ی خارجی C مثلث است.

قضیه ۱ مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است، یعنی:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

۲ هر زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور:

$$\hat{C}_1=\hat{A}+\hat{B}$$

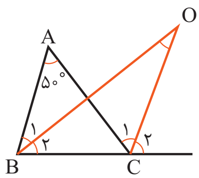
راهبرد حل مسائل زاویه در مثلث

۱ زاویه‌های مساوی را با نام‌های یکسان نام‌گذاری کنید.

۲ حواستان باشد که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

۳ به زاویه‌های خارجی خیلی خوب توجه کنید، گاهی اوقات فوق‌العاده در کوتاه‌شدن راه مسئله تأثیرگذار است.

بیایید مراحل بالا را در تست‌های زیر اجرا کنیم:

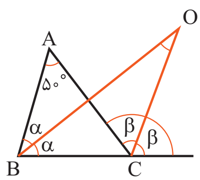


تست **در شکل مقابل، BO نیمساز داخلی زاویه‌ی B و CO نیمساز خارجی زاویه‌ی C است. اگر $\hat{A}=50^\circ$ باشد، زاویه‌ی O چند درجه است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۲۵

۳) ۵۰ ۴) ۷۵

پاسخ گزینه‌ی (۲)، زاویه‌های مساوی را نام‌گذاری کنیم:



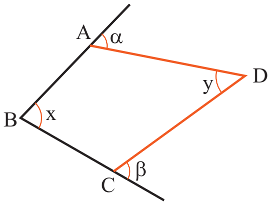
$$\hat{B}_1=\hat{B}_2=\alpha \quad , \quad \hat{C}_1=\hat{C}_2=\beta$$

حالا باید دنبال زاویه‌ی خارجی بگردیم، دوتا زاویه‌ی خارجی زیبا (!) داریم:

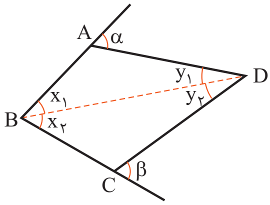
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{BOC} \text{ زاویه‌ی خارجی } \hat{C}_2 : \beta=\alpha+\hat{O} \\ \overset{\Delta}{ABC} \text{ زاویه‌ی خارجی } \hat{C}_1+\hat{C}_2 : 2\beta=2\alpha+\hat{A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\beta=2\alpha+2\hat{O} \\ 2\beta=2\alpha+\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}=2\hat{O} \Rightarrow 50^\circ=2\hat{O} \Rightarrow \hat{O}=25^\circ$$

مسئله در شکل روبه‌رو ثابت کنید: $\alpha+\beta=x+y$.



پاسخ از B به D وصل می‌کنیم، حالا از زاویه‌ی خارجی کمک می‌گیریم:

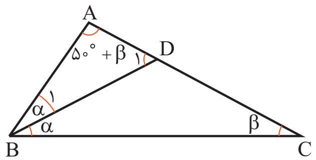


$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABD}\ \text{زاویه‌ی خارجی}\ \alpha:\alpha=x_1+y_1\\ \overset{\Delta}{BCD}\ \text{زاویه‌ی خارجی}\ \beta:\beta=x_2+y_2\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha+\beta=x+y$$

تست در مثلث ABC، $\hat{A}=50^\circ+\hat{C}$ است. نیمساز داخلی زاویه‌ی B، ضلع AC را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

۱) 65° ۲) 70° ۳) 60° ۴) 75°

پاسخ گزینه‌ی (۱)، زاویه‌ی C را β و در نتیجه $\hat{A}=50^\circ+\beta$ و هر کدام از زاویه‌هایی را که نیمساز $\hat{B}$ درون زاویه‌ی B ایجاد می‌کند را α می‌نامیم، در این صورت داریم:



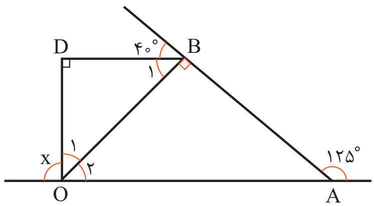
$$\overset{\Delta}{BDC}\ \text{زاویه‌ی خارجی}\ \hat{D}_1:\hat{D}_1=\alpha+\beta\Rightarrow \alpha=\hat{D}_1-\beta \quad (1)$$

و از طرفی در مثلث ABD داریم:

$$\overset{\Delta}{ABD}:\hat{A}+\hat{B}_1+\hat{D}_1=180^\circ \Rightarrow (50^\circ+\beta)+\alpha+\hat{D}_1=180^\circ \xrightarrow{(1)} 50^\circ+\beta+(\hat{D}_1-\beta)+\hat{D}_1=180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{D}_1=130^\circ \Rightarrow \hat{D}_1=65^\circ$$

تست در شکل زیر، $\hat{A}=125^\circ$ و $\hat{B}=40^\circ$ است. زاویه‌ی x چند درجه است؟ *(سراسری ریاضی ۸۷)*



۱) ۱۰۵
۲) ۱۱۰
۳) ۱۱۵
۴) ۱۲۵

پاسخ گزینه‌ی (۱)، زاویه‌ی A زاویه‌ی خارجی مثلث OAB است، بنابراین:

$$125^\circ=90^\circ+\hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_2=125^\circ-90^\circ=35^\circ$$

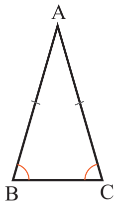
از طرفی واضح است که $\hat{B}_1=180^\circ-(90^\circ+40^\circ)=50^\circ$، در نتیجه در مثلث OBD داریم:

$$\hat{O}_1=180^\circ-(90^\circ+50^\circ)=40^\circ$$

حالا که $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ به دست آمدند، داریم:

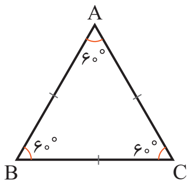
$$x=180^\circ-(\hat{O}_1+\hat{O}_2)=180^\circ-(40^\circ+35^\circ)=105^\circ$$

مثلث متساوی‌الساقین



به مثلثی که دارای دو ضلع برابر باشد، متساوی‌الساقین می‌گوییم، به دو ضلع برابر ساق و به ضلع سوم قاعده گفته می‌شود. رأس مشترک دو ساق را رأس اصلی یا بعضی اوقات به صورت مختصر «رأس» می‌نامند. مثلاً در شکل مقابل، A رأس و BC قاعده است.

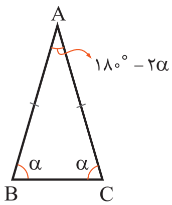
یادتان هست که مهم‌ترین اتفاق در مثلث متساوی‌الساقین این بود که زوایای پای ساق‌ها با هم برابرند. به بیان ریاضی داریم: $AB = AC \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$



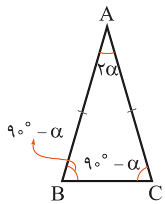
حالا اگر احیاناً قاعده هم با ساق‌ها مساوی شد، دیگه به این مثلث متساوی‌الساقینِ خاص، متساوی‌الاضلاع می‌گوییم که در پیش‌دبستانی بود که فکر کنم فهمیدیم همه‌ی زاویه‌هایش $60°$اند!

راهبرد حل مسائل زاویه در مثلث متساوی‌الساقین

۱ زاویه‌ها را به یکی از دو صورت زیر نام‌گذاری کنید:

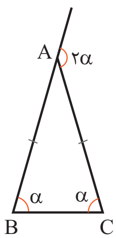


(۱)



(۲)

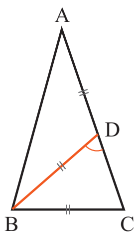
۲ در صورتی که نام‌گذاری به صورت شکل (۱) باشد، دقت کنید که زاویه‌ی خارجی رأس برابر 2α می‌شود.



۳ راهبردهای حل مسائل زاویه در مثلث را در این‌جا هم باید در نظر بگیریم. (میگی چرا؟ خب، مثلث متساوی‌الساقین هم یه نوع مثلثه دیگه!)

بیایید مراحل بالا را در تست زیر پیاده کنیم:

تست **در شکل زیر** $AB = AC$ **، زاویه‌ی** BDC **چند درجه است؟**



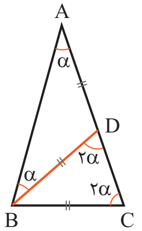
۱) ۳۶

۲) ۷۲

۳) ۳۰

۴) ۶۰

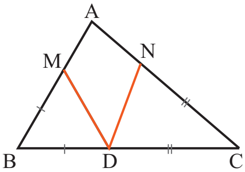
پاسخ گزینه‌ی (۲)، زاویه‌ی A را α بنامیم، در این صورت چون با توجه به شکل $AD = BD$، پس $\hat{A} = A\hat{B}D = \alpha$، در نتیجه $B\hat{D}C$ که زاویه‌ی خارجی $\overset{\Delta}{ABD}$ است برابر با ۲α می‌شود و چون $BD = BC$ است، پس $B\hat{D}C = \hat{C} = ۲\alpha$. خب حالا دقت کنید که $AB = AC$ یعنی $\hat{B} = \hat{C} = ۲\alpha$ می‌شود، از طرفی در مثلث ABC مجموع زوایا ۱۸۰° است، لذا:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + ۲\alpha + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$$

در نتیجه: $B\hat{D}C = ۲\alpha = ۷۲^\circ$.

تست **در شکل زیر $\hat{A} = ۵۸^\circ$، $BM = BD$ و $CN = CD$، زاویه‌ی MDN چند درجه است؟** *(سراسری ریاضی ۹۱)*



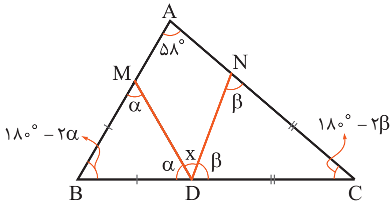
۱) ۵۸

۲) ۵۹

۳) ۶۱

۴) ۶۲

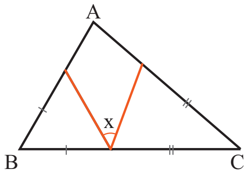
پاسخ گزینه‌ی (۳)، مطابق نام‌گذاری موجود در شکل داریم:



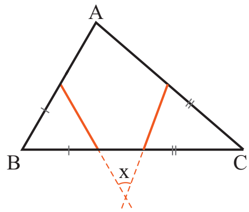
$$\overset{\Delta}{ABC} : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵۸^\circ + (۱۸۰^\circ - ۲\alpha) + (۱۸۰^\circ - ۲\beta) = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta = ۲۳۸^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۱۹^\circ \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - (\alpha + \beta) = ۱۸۰^\circ - ۱۱۹^\circ = ۶۱^\circ$$

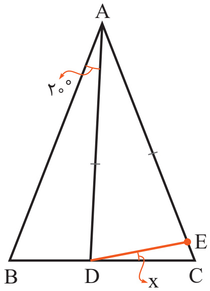
نکته به طور کلی اگر در مثلث ABC دو مثلث متساوی‌الساقین باشد که رأس‌های آن‌ها رئوس B و C بوده و ساق‌های مثلث‌های به وجود آمده، بر اضلاع ABC منطبق باشد، زاویه‌ی حاصل از برخورد قاعده‌ها (یا امتداد قاعده‌ها) همواره برابر است با: $x = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$.



(۱)



(۲)



تست در شکل مقابل $AB=AC$ و $AE=AD$، x چند درجه است؟

۱) ۵

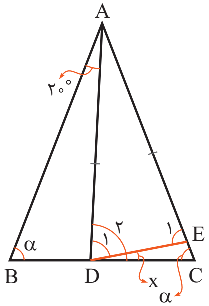
۲) ۱۰

۳) ۲۰

۴) ۴۰

پاسخ گزینه‌ی (۲)، چون $AB=AC$ است، پس $\hat{B}=\hat{C}=\alpha$، حالا سعی کنید زاویه‌ی خارجی بیابید.

به مثلث‌های DEC و ABD خوب دقت کنید:

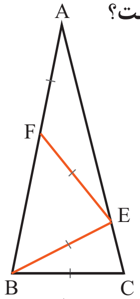


$$\overset{\Delta}{DEC} \text{ زاویه‌ی خارجی} : \hat{E}_۱=\alpha+x \xrightarrow{AD=AE} \hat{D}_۱=\hat{E}_۱=\alpha+x \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ABD} \text{ زاویه‌ی خارجی} : \hat{D}_۲=۲۰^\circ+\alpha \Rightarrow \hat{D}_۱+x=۲۰^\circ+\alpha$$

$$\xrightarrow{(۱)} (\alpha+x)+x=۲۰^\circ+\alpha \Rightarrow ۲x=۲۰^\circ \Rightarrow x=۱۰^\circ$$

تست در شکل زیر، مثلث ABC به رأس A متساوی‌الساقین است. زاویه‌ی A چند درجه است؟



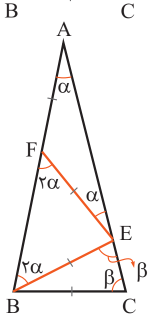
۱) ۳۰

۲) ۳۶

۳) ۲۵

۴) $\frac{۱۸۰}{۷}$

پاسخ گزینه‌ی (۴)، اگر $\hat{A}=\alpha$ را در نظر بگیریم، مطابق شکل داریم:

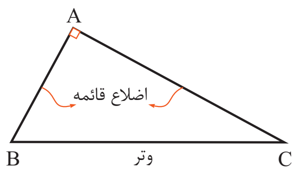


$$\overset{\Delta}{ABE} \text{ زاویه‌ی خارجی } B\hat{E}C : \beta=\alpha+۲\alpha=۳\alpha \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=\beta=۳\alpha$$

در مثلث ABC داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۳\alpha+۳\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۷\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{۱۸۰^\circ}{۷}$$

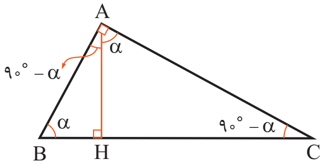
مثلث قائم‌الزاویه



یادتان هست که نام ضلع روبه‌روی زاویه‌ی قائمه در مثلث قائم‌الزاویه، وتر بود و به ضلع دیگر می‌گفتیم اضلاع قائمه. اگر یادتان رفته، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است، ایراد ندارد، خب! الان که یادتان آمد، پس حرف دیگری باقی نمی‌ماند.

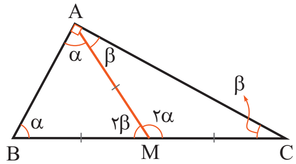
$\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$

راهبرد حل مسائل زاویه در مثلث قائم‌الزاویه



۱ یکی از زوایای حاده را α و دیگری را $۹۰^\circ - \alpha$ بنامید.

۲ با رسم ارتفاع وارد بر وتر، زاویه‌ها به صورت مقابل خواهند بود:



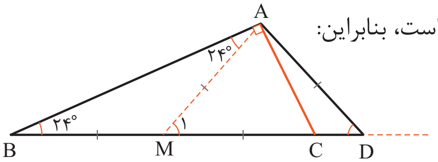
(در سه مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل فوق یعنی $\overset{\Delta}{ABC}$، $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{ACH}$، همه‌ی زاویه‌ها دوبه‌دو برابرند.)

۳ با رسم میانه‌ی وارد بر وتـر، مثلث قائم‌الزاویه به دو مثلث متـساوی‌الساقین تفکیک می‌شود.

تست **در مثلث ABC، $\hat{A} = ۹۰^\circ$، $\hat{B} = ۲۴^\circ$ و نقطه‌ی D در امتداد ضلع BC از طرف C چنان قرار دارد که AD نصف BC است. اندازه‌ی زاویه‌ی ADB کدام است؟**

۱) ۳۸° ۲) ۳۶° ۳) ۴۸° ۴) ۴۲°

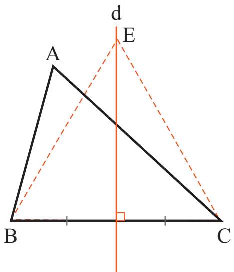
پاسخ گزینه‌ی (۳)، میانه‌ی وارد بر وتر را رسم می‌کنیم و چون $\hat{M}_۱$ زاویه‌ی خارجی $\overset{\Delta}{AMB}$ است، پس $\hat{M}_۱ = ۲(۲۴^\circ) = ۴۸^\circ$ خواهد بود. از طرفی AD نیز نصف BC است، بنابراین:



$$AM = AD \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{D} \Rightarrow \hat{D} = ۴۸^\circ$$

نکته در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰°، نصف وتر است.

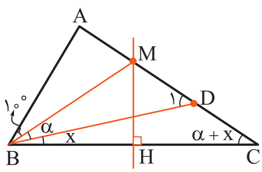
اجزای فرعی در مثلث



عمودمنصف خطی است که در وسط یک ضلع بر آن عمود می‌شود. مهم‌ترین ویژگی عمودمنصف یک ضلع این است که هر نقطه‌ای روی عمودمنصف در نظر بگیریم، فاصله‌اش از دو سر ضلع مساوی است، مثلاً در شکل مقابل E یک نقطه‌ی دلخواه بر روی عمودمنصف ضلع BC است، پس $EB = EC$ خواهد بود.

تست **در مثلث ABC، روی ضلع AC، نقطه‌ی D را طوری انتخاب می‌کنیم که $AB = AD$. اگر عمودمنصف ضلع BC ضلع AC را در M قطع کند و $A\hat{B}M = ۱۰^\circ$ باشد، $D\hat{B}C$ کدام است؟**

۱) ۵° ۲) ۱۰° ۳) ۲۰° ۴) قابل تعیین نیست.



پاسخ گزینه‌ی (۱)، M نقطه‌ای روی عمودمنصف BC است، پس داریم:

$$MB = MC \Rightarrow \hat{C} = \alpha + x$$

حالا خوب زاویه‌ی $\hat{D}_۱$ را نگاه کنید، بیایید اندازه‌ی $\hat{D}_۱$ را دو جور بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BDC} \text{ زاویه‌ی خارجی } \hat{D}_۱ : \hat{D}_۱ = x + \hat{C} = x + (\alpha + x) = ۲x + \alpha \\ AB = AD \Rightarrow \hat{D}_۱ = ۱۰^\circ + \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow ۲x + \alpha = ۱۰^\circ + \alpha \Rightarrow ۲x = ۱۰^\circ \Rightarrow x = ۵^\circ$$

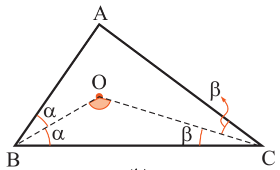
نیمساز درباره‌ی نیمسازها در مثلث دوتا نکته داریم که بد نیست هر دوتاشو بلد باشید اما اگر راستشو بخواهید نکات خیلی هم پرکاربردی نیست.

۱ در هر مثلث ABC:

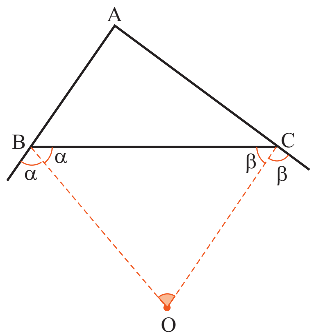
الف اگر نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی B و C یکدیگر را در O قطع کنند، داریم: $B\hat{O}C = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$. (شکل «۱»)

ب اگر نیمسازهای خارجی دو زاویه‌ی B و C یکدیگر را در O قطع کنند، داریم: $B\hat{O}C = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$. (شکل «۲»)

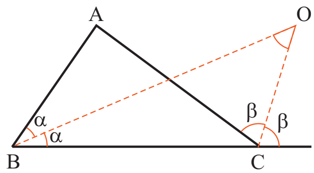
ج اگر یک نیمساز داخلی و یک نیمساز خارجی از زاویه‌های B و C یکدیگر را در O قطع کنند، داریم: $B\hat{O}C = \frac{\hat{A}}{۲}$. (شکل «۳»)



(۱)

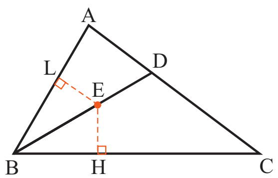


(۲)



(۳)

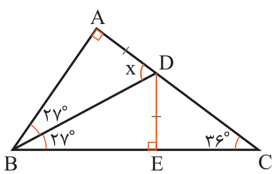
۲ فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه مساوی است، مثلاً در شکل مقابل E نقطه‌ای روی نیمساز BD است، پس فاصله‌اش از دو ضلع AB و BC برابر است، یعنی $EL = EH$.



تست در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و نقطه‌ی D روی ضلع AC از ضلع‌های AB و BC به یک فاصله است. اگر $\hat{C} = ۳۶^\circ$ باشد، آن‌گاه زاویه‌ی BDA چند درجه است؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۳ ۳) ۶۶ ۴) ۶۹

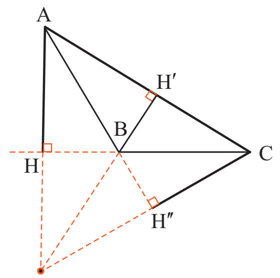
پاسخ گزینه‌ی (۲)، مطابق شکل، وقتی صورت سؤال می‌گوید فاصله‌ی D از AB و BC برابر است، یعنی $DA = DE$ و البته یعنی D روی نیمساز زاویه‌ی B قرار دارد، خُب کل $\hat{B}$ که $۹۰^\circ - ۳۶^\circ = ۵۴^\circ$ است، پس نصفش می‌شود ۲۷°، حالا برویم در مثلث ABD که یک زاویه‌ی ۹۰° و یک زاویه‌ی ۲۷° دارد و زاویه‌ی سومش مطلوب سؤال است:

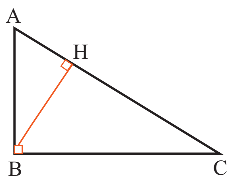


$$\overset{\Delta}{ABD}: x = ۱۸۰^\circ - (۲۷^\circ + ۹۰^\circ) = ۶۳^\circ$$

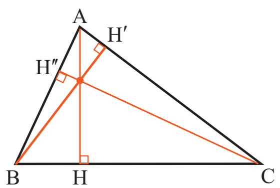
البته می‌شد که بگوییم x زاویه‌ی خارجی مثلث BDC است و نتیجه بگیریم که $x = ۲۷^\circ + ۳۶^\circ = ۶۳^\circ$.

ارتفاع اکثر مطالب مهم مربوط به ارتفاع به مساحت گره خورده است، اما خب اگر این‌جا نمی‌آوردیمش حتماً ناراحت می‌شدا! (خودتو بذار جای ارتفاع! درباره‌ی نیمساز، عمودمنصف و میانه صحبت بشه، بعد راجع به تو اصلاً حرفی زده نشه، ناراحت نمی‌شدی؟!) فقط درباره‌ی ارتفاع بد نیست این را بدانید که گاهی بیرون از مثلث می‌افتد، در این صورت نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها نیز خارج مثلث خواهد بود به طور کلی ۳ حالت دارد:





مثلث قائم‌الزاویه؛ در این‌جا AB ، BC و BH ارتفاع‌اند.



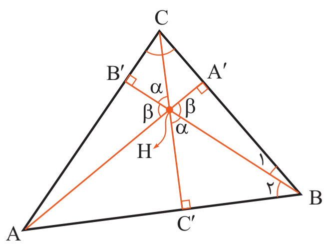
۳ زاویه‌ی مثلث حاده باشد.

تست در مثلث ABC ، زاویه‌ی $\hat{A}=۴۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$. اگر نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع، H باشد، زاویه‌ی CHA چند درجه است؟

۱) ۱۰۰   ۲) ۱۲۰

۳) ۱۴۰   ۴) ۸۰

پاسخ گزینه‌ی (۲)، با توجه به نام‌گذاری زاویه‌ها ما به دنبال $\alpha+\beta$ هستیم، مثلث‌های BHA' و BHC' که هر دوتا قائم‌الزاویه‌اند را نگاه کنید:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BHA'}:\beta=۹۰^\circ-\hat{B}_۱ \\ \overset{\Delta}{BHC'}:\alpha=۹۰^\circ-\hat{B}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta=۱۸۰^\circ-(\hat{B}_۱+\hat{B}_۲)=۱۸۰^\circ-\hat{B}$$

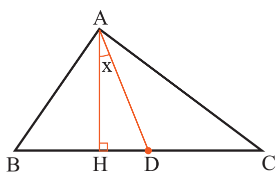
که چون $\hat{B}=۶۰^\circ$ است، پس $A\hat{H}C=\alpha+\beta=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$ می‌شود.

یه‌جور دیگه در چهارضلعی $A'BC'H$ داریم:

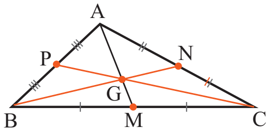
$$\hat{A'}+\hat{B}+\hat{C'}+(\alpha+\beta)=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ+۶۰^\circ+۹۰^\circ+\alpha+\beta=۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۲۰^\circ$$

بحث ارتفاع را با یک نکته برای دوستان عشق نکته به پایان می‌رسانیم:

نکته زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز رسم‌شده از یک رأس در مثلث ABC برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویه‌ی دیگر.



$$x=\frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$$

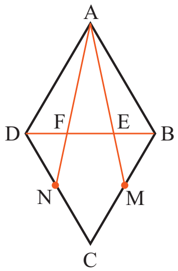


میانه میانه همان پاره‌خطی بود که هر رأس را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کرد. به محل تلاقی میانه‌ها، مرکز ثقل می‌گویند و با G نشان می‌دهند. مهم‌ترین نکته درباره‌ی میانه‌های یک مثلث این است که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند، یعنی در شکل مقابل که سه میانه‌ی مثلث ABC رسم شده است، داریم:

$$\frac{GM}{AG}=\frac{GN}{BG}=\frac{GP}{CG}=\frac{۱}{۲}$$

در واقع AG دو برابر GM و ... .

تست در لوزی شکل زیر، M و N وسط‌های BC و CD هستند. نسبت $\frac{EF}{BD}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ گزینه‌ی (۲)، بیایید قطر AC را هم رسم کنیم، (کیه که ندونه قطرهای لوزی همدیگه رو نصف می‌کنن؟!) خب حالا خوب به مثلث ABC نگاه کنید، AM یک میانه و BO نیز میانه‌ی دیگر آن است که اخلاق میانه‌ها را هم که می‌دانید یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند، یعنی: $EB=۲OE$ که در شکل نوشتیم x و ۲x. به همین ترتیب DF و OF هم می‌شود ۲y و y اما O وسط BD است، پس داریم:

$$OD=OB \Rightarrow ۳y=۳x \Rightarrow x=y \Rightarrow DF=EF=EB=۲x \Rightarrow \frac{EF}{BD}=\frac{۲x}{۶x}=\frac{۱}{۳}$$

تست در مثلث ABC با فرض $BC=۲AB$، میانه‌ی AM را از رأس A به اندازه‌ی خودش تا نقطه‌ی P امتداد می‌دهیم. کدام رابطه همواره درست است؟

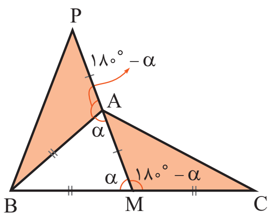
۱) $A\hat{B}C=۲\hat{C}$

۲) $\hat{C}=۲A\hat{B}C$

۳) $AC=PB$

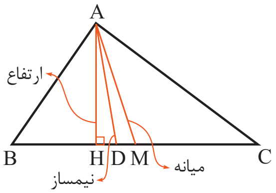
۴) $PB=PM$

پاسخ گزینه‌ی (۳)، نام‌گذاری زاویه‌ها را نگاه کنید، معلوم است که دوتا مثلث رنگی همنهشت‌اند (*حالتش هم میشه دو ضلع و زاویه‌ی بین!*)، در نتیجه داریم:



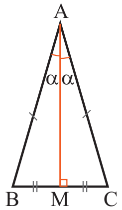
$$\overset{\Delta}{ABP}\cong\overset{\Delta}{AMC} \Rightarrow \begin{cases} AC=BP \\ C\hat{A}M=A\hat{P}B \\ M\hat{C}A=A\hat{B}P \end{cases}$$

حق تقدم در اجزای فرعی



همیشه یادتان باشد که در مثلث ABC که در آن $AB < AC$، ترتیب ایستادن اجزای فرعی به صورت مقابل است:

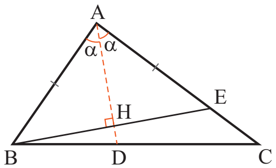
هر چه AC از AB بزرگ‌تر باشد، فاصله‌ی بین ارتفاع، نیمساز و میانه‌ها هم بیشتر می‌شود و هر چه اندازه‌ی AB و AC به هم نزدیک‌تر باشد، این سه‌تا هم به هم نزدیک‌تر می‌شوند تا جایی که در مثلث متساوی‌الساقین که $AB = AC$ است، ارتفاع، نیمساز و میانه بر هم منطبق می‌شوند. شکل روبه‌رو هم حرف ما را تأیید می‌کند، پس اگر در مثلثی، مثلاً ارتفاع و نیمساز بر هم منطبق شدند، می‌توانیم بگوییم حتماً دوتا ضلع مساوی بوده‌اند و مثلث متساوی‌الساقین است.



(۱)

تست **در مثلث ABC، از رأس B عمودی بر نیمساز زاویه‌ی A رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در E قطع کند. اگر $AC = ۹$ و $AB = ۵$ باشد، طول CE کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲/۵



پاسخ گزینه‌ی (۱)، به مثلث ABE خوب دقت کنید! AH هم ارتفاع است و هم نیمساز، پس $\overset{\Delta}{ABE}$ حتماً مثلث متساوی‌الساقین است یعنی $AB = AE = ۵$، در نتیجه EC هم می‌شود $۹ - ۵ = ۴$.

بخش دوم: چندضلعی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

بخش اول: زاویه و مثلث

۱- مجموع دو زاویه‌ی حاده °۸۰ است. مجموع متمم‌های آن چه‌قدر است؟

۱) °۱۰ ۲) °۹۰ ۳) °۱۰۰ ۴) °۱۱۰

۲- در دو زاویه‌ی مجاور و متمم، اندازه‌ی یکی سه برابر دیگری است. زاویه‌ی بین نیمساز آن‌ها چند درجه است؟

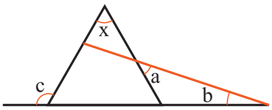
۱) ۱۵ ۲) ۳۰ *(آزمایشی سنجش تجربی ۸۸)*

۳) ۴۵ ۴) ۴۰

۳- دو زاویه‌ی A و B متمم‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر $\frac{۴}{۹}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۶ ۳) ۶۳ ۴) ۷۲

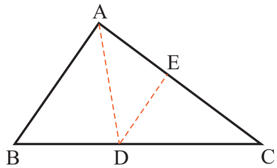
۴- در شکل روبه‌رو، مقدار x همواره برابر کدام است؟



۱) $c-a-b$ ۲) $a+c-b$

۳) $a+b-c$ ۴) $b+c-a$

۵- در شکل زیر، AD نیمساز زاویه‌ی A و $AB \parallel DE$ است. کدام تساوی درست است؟



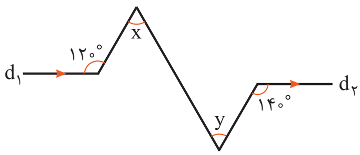
۱) $AD = AB$

۲) $AD = DB$

۳) $EC = DC$

۴) $DE = AE$

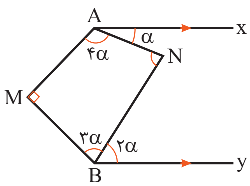
۶- در شکل زیر، $d_1 \parallel d_2$ است. تفاضل x و y چند درجه است؟



۱) ۲۰ ۲) ۳۰

۳) ۳۵ ۴) ۱۰

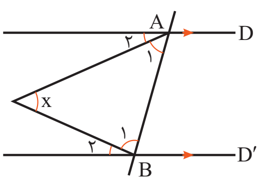
۷- مطابق شکل، $Ax \parallel By$ و $\widehat{M} = ۹۰^\circ$ است. زاویه‌ی N چند درجه است؟



۱) ۷۲ ۲) ۷۸

۳) ۸۱ ۴) ۷۵

۸- در شکل زیر داریم: $\hat{A}_1 = ۲\hat{A}_2$ ، $\hat{B}_1 = ۲\hat{B}_2$. مقدار x کدام است؟



۱) °۳۰

۲) °۴۵

۳) °۶۰

۴) °۷۵

۹- یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین ۱۰۰ درجه است. نیمساز خارجی زاویه‌ی دیگر مثلث ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

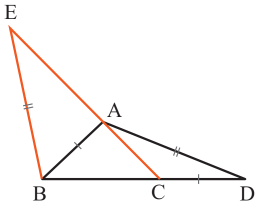
۱) ۲۵° ۲) ۲۰° ۳) ۳۰° ۴) ۴۰°

۱۰- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$ و $A = ۴۲^\circ$ است)، قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی E امتداد می‌دهیم. A را به E وصل می‌کنیم. کوچک‌ترین زاویه‌ی بزرگ‌ترین مثلث حاصل چند درجه است؟

(آزمایشی سنجش ریاضی ۸۹)

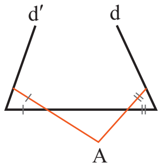
۱) ۳۴ ۲) ۳۴/۵
۳) ۳۵/۵ ۴) ۳۶

۱۱- با توجه به شکل زیر، کدام نتیجه‌گیری درست است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۵)*



۱) $AB = AC$
۲) $AB = BC$
۳) $AE = BC$
۴) $AE = AC$

۱۲- در شکل زیر، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و زاویه‌ی $\widehat{A} = ۱۰۰^\circ$. دو خط d و d' با زاویه‌ی چند درجه متقاطع‌اند؟ *(سراسری ریاضی ۸۸)*

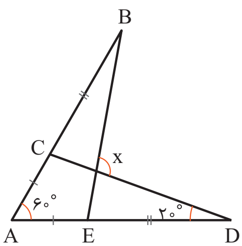


۱) ۲۰
۲) ۵۰
۳) ۴۵
۴) ۴۰

۱۳- در چهارضلعی $ABCD$، اگر $AB = AD$ و $CB = CD$، آن‌گاه روی قطر AC چند نقطه وجود دارد که از دو رأس B و D به یک فاصله باشند؟

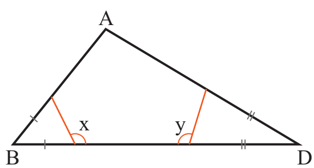
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۴- در شکل زیر، اندازه‌ی x چند درجه است؟



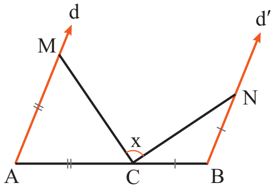
۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۱۰

۱۵- با توجه به شکل زیر، اگر $x + y = ۲۰۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $\widehat{A}$ چند درجه است؟



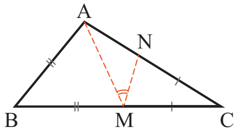
۱) ۱۳۰
۲) ۱۴۰
۳) ۱۵۰
۴) ۱۲۰

۱۶- در شکل زیر، $d \parallel d'$ است. x چند درجه است؟



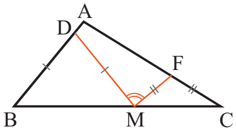
۱) ۹۰
۲) ۶۰
۳) ۷۵
۴) ۱۰۵

۱۷- در شکل زیر، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و $\widehat{M} = ۴۳^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\widehat{A}C$ چند درجه است؟
(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۲)



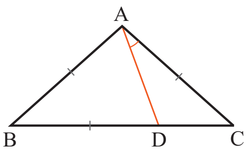
۱) ۹۳ ۲) ۹۴
۳) ۹۶ ۴) ۹۷

۱۸- در مثلث ABC از شکل زیر، اگر $\widehat{A} = ۸۴^\circ$ باشد، x چند درجه است؟



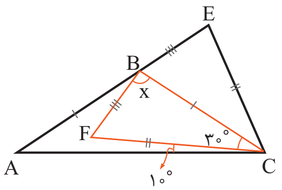
۱) ۸۴ ۲) ۹۶
۳) ۴۸ ۴) ۵۸

۱۹- در شکل مقابل، $AB = AC = BD$ و $C\widehat{A}D = ۱۸^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\widehat{D}C$ چند درجه است؟



۱) ۱۰۸ ۲) ۱۱۶
۳) ۱۲۶ ۴) ۱۱۴

۲۰- در شکل مقابل، x کدام است؟

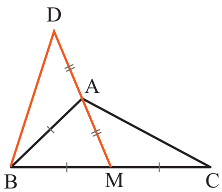


۱) ۸۰° ۲) ۷۰°
۳) ۶۰° ۴) ۵۰°

۲۱- در مثلثی با زوایای $\widehat{A} = ۴۰^\circ$ و $\widehat{B} = ۶۰^\circ$، زاویه‌ی حاده‌ی بین ارتفاع AH و ارتفاع BH' چه‌قدر است؟

۱) ۴۰° ۲) ۶۰° ۳) ۵۰° ۴) ۸۰°

۲۲- در شکل زیر، $\widehat{D} + \widehat{C} = ۶۱^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی ABC چند درجه است؟ *(سراسری تجربی ۸۹)*

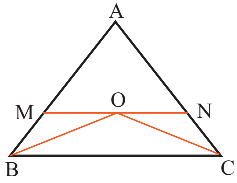


۱) ۳۹
۲) ۵۶
۳) ۵۸
۴) ۶۱

۲۳- یک مثلث متساوی‌الاضلاع به سه مثلث همنهشت تقسیم شده است. زاویه‌های هر مثلث همنهشت کدام است؟
(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۷)

۱) ۶۰ , ۶۰ , ۶۰ ۲) ۹۰ , ۳۰ , ۳۰
۳) ۹۰ , ۶۰ , ۳۰ ۴) ۱۲۰ , ۳۰ , ۳۰

۲۴- در مثلث شکل روبه‌رو، O محل تلاقی نیمسازهای داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ است و MN موازی BC است. اگر $MN=10$ و $BC=18$ باشد، محیط ذوزنقه‌ی MNCB چه‌قدر است؟



۱) ۳۲
۲) ۳۸
۳) ۴۳
۴) ۴۵

۲۵- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ضلع BC را از طرف C به اندازه‌ی خود تا D امتداد می‌دهیم. در مثلث ABD نسبت زاویه‌ها کدام است؟

۱) ۱, ۲, ۳
۲) ۱, ۲, ۴
۳) ۱, ۳, ۴
۴) ۲, ۳, ۵

۲۶- در مثلثی زوایای A، B و C به نسبت ۱، ۴ و ۷ شده‌اند. زاویه‌ای که نیمساز داخلی A با نیمساز خارجی B می‌سازد، چند درجه است؟

۱) ۳۵
۲) ۵۲/۵
۳) ۷۵
۴) ۱۵

۲۷- اندازه‌ی زاویه‌های مثلثی 35° و 55° است. زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع آن چند درجه است؟

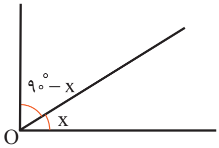
۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

بخش دوم: چندضلعی

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی فصل اول

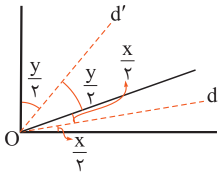
۱- گزینه‌ی «۳»

دو زاویه‌ی حاده را x و y در نظر می‌گیریم:



$$\begin{cases} x+y=80^\circ \\ (90^\circ - x)+(90^\circ - y)=180^\circ-(x+y)=180^\circ-80^\circ=100^\circ \end{cases}$$

۲- گزینه‌ی «۳»



دو زاویه را x و y در نظر می‌گیریم. با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\begin{cases} x+y=90^\circ \\ y=3x \end{cases}$$

مسئله زاویه‌ی بین نیمسازها یعنی $\frac{y}{2}+\frac{x}{2}$ را می‌خواهد، پس:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{x+y}{2}=\frac{90^\circ}{2}=45^\circ$$

همان‌طور که واضح است، زاویه‌ی بین نیمسازها همواره 45° است و ارتباطی به نسبت دو زاویه ندارد.

۳- گزینه‌ی «۴»

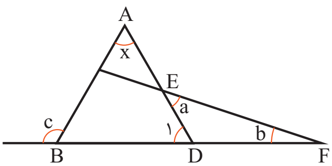
با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}+\hat{B}=90^\circ \\ [\hat{A}=\frac{4}{9}(180^\circ-\hat{B})]\times 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\hat{A}+\hat{B}=90^\circ]\times(-4) \\ 9\hat{A}+4\hat{B}=720^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\hat{A}-4\hat{B}=-360^\circ \\ 9\hat{A}+4\hat{B}=720^\circ \end{cases}$$

با جمع‌کردن دو معادله خواهیم داشت:

$$5\hat{A}=360^\circ \Rightarrow \hat{A}=72^\circ$$

۴- گزینه‌ی «۱»

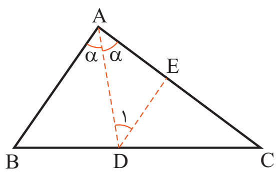


$\hat{D}_1$ و c زاویه‌های خارجی دو مثلث EDF و ABD هستند، پس:

$\overset{\Delta}{EDF}$: زاویه‌ی خارجی $\hat{D}_1=a+b$

$\overset{\Delta}{ABD}$: زاویه‌ی خارجی $c=x+\hat{D}_1 \xrightarrow{\hat{D}_1=a+b} c=x+a+b \Rightarrow x=c-a-b$

۵- گزینه‌ی «۴»

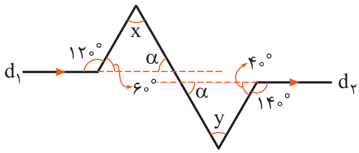


با توجه به قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:

$$\begin{cases} AB \parallel DE \\ \text{خط مورب } AD \end{cases} \Rightarrow \hat{D}_1=\frac{\hat{A}}{2}=\alpha$$

$$\overset{\Delta}{ADE}: D\hat{A}E=\hat{D}_1=\alpha \Rightarrow AE=DE$$

۶- گزینه‌ی «۱»

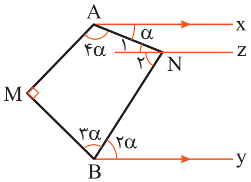


با توجه به شکل مقابل، جمع زاویه‌های دو مثلث ایجادشده با هم برابر و مساوی °۱۸۰ است، بنابراین:

$$x+\cancel{\alpha}+۶۰^\circ=\cancel{\alpha}+y+۴۰^\circ \Rightarrow y-x=۶۰^\circ-۴۰^\circ=۲۰^\circ$$

۷- گزینه‌ی «۳»

از N خطی به موازات Ax و By رسم می‌کنیم و طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:



$$\begin{cases} Nz \parallel Ax \\ \text{AN خط مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{N}_۱=\alpha$$

$$\begin{cases} Nz \parallel By \\ \text{BN خط مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{N}_۲=۲\alpha$$

$$\Rightarrow \hat{N}=\hat{N}_۱+\hat{N}_۲=\alpha+۲\alpha=۳\alpha$$

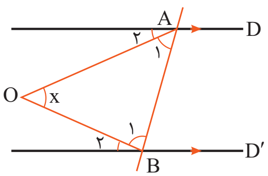
برای محاسبه‌ی α، می‌دانیم جمع زاویه‌های چهارضلعی ANBM برابر °۳۶۰ است، بنابراین:

$$\hat{A}+\hat{N}+\hat{B}+\hat{M}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۴\alpha+۳\alpha+۳\alpha+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۰\alpha=۲۷۰^\circ \Rightarrow \alpha=۲۷^\circ$$

$$\hat{N}=۳\alpha=۸۱^\circ$$

۸- گزینه‌ی «۳»

طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب می‌دانیم:



$$\begin{cases} D \parallel D' \\ \text{AB خط مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ$$

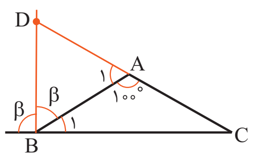
$$\xrightarrow[\hat{B}_۲=\frac{\hat{B}_۱}{۲}]{\hat{A}_۲=\frac{\hat{A}_۱}{۲}} \hat{A}_۱+\frac{\hat{A}_۱}{۲}+\hat{B}_۱+\frac{\hat{B}_۱}{۲}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۳\hat{A}_۱}{۲}+\frac{۳\hat{B}_۱}{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{B}_۱=۱۲۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AOB}: \hat{O}+\hat{A}_۱+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}=x=۶۰^\circ$$

۹- گزینه‌ی «۳»

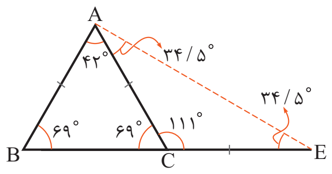
نیمساز خارجی رأس B را رسم می‌کنیم تا امتداد AC را در D قطع کند.



$$\text{متساوی‌الساقین } \overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} \hat{B}_۱=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{C}=۴۰^\circ \\ ۲\beta+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\beta+۴۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\beta=۱۴۰^\circ \Rightarrow \beta=۷۰^\circ \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: \hat{A}_۱+\hat{D}+\beta=۱۸۰^\circ \xrightarrow[\beta=۷۰^\circ]{\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ} ۸۰^\circ+\hat{D}+۷۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}=۳۰^\circ$$

۱۰- گزینه‌ی «۲»



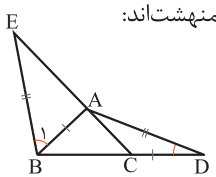
$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۴۲^\circ}{۲} = ۶۹^\circ$$ متساوی‌الساقین

$$\overset{\Delta}{ACE}: C\hat{A}E = \hat{E} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{C}}{۲} \Rightarrow C\hat{A}E = \hat{E} = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۱۱^\circ}{۲} = \frac{۶۹^\circ}{۲} = ۳۴/۵^\circ$$ متساوی‌الساقین

در مثلث ABE کوچک‌ترین زاویه $۳۴/۵^\circ$ می‌باشد.

۱۱- گزینه‌ی «۴»

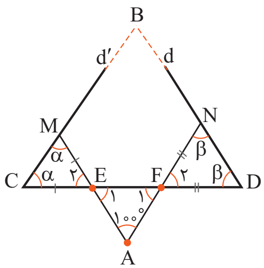
با توجه به اطلاعات موجود در شکل، می‌توان نتیجه گرفت مثلث‌های AEB و ACD همنهشت‌اند:



$$\left.\begin{matrix} AD = BE \\ \hat{B}_۱ = \hat{D} \\ AB = CD \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{ACD} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AE = AC$$

۱۲- گزینه‌ی «۴»

زاویه‌ی B زاویه‌ی مورد سؤال در مسئله است، بنابراین:



$$\overset{\Delta}{BCD}: \hat{B} + \alpha + \beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰^\circ - (\alpha + \beta)$$

حال کافی است مجموع زاویه‌های α و β را به دست آوریم.

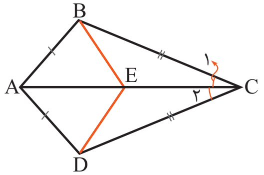
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{MCE}: ۲\alpha + \hat{E}_۲ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{E}_۲ = \hat{E}_۱} ۲\alpha + \hat{E}_۱ = ۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{NFD}: ۲\alpha + \hat{F}_۲ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{F}_۲ = \hat{F}_۱} ۲\beta + \hat{F}_۱ = ۱۸۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta + (\hat{E}_۱ + \hat{F}_۱) = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{\hat{E}_۱ + \hat{F}_۱ = ۸۰^\circ} ۲\alpha + ۲\beta + ۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta = ۲۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰^\circ - (۱۴۰^\circ) = ۴۰^\circ$$

۱۳- گزینه‌ی «۴»

نقطه‌ی دلخواه E را روی AC در نظر بگیرید. ابتدا ثابت می‌کنیم دو مثلث ABC و ACD همنهشت‌اند:



$$\left\{\begin{matrix} AB = AD \\ BC = CD \\ \text{AC مشترک} \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{ACD} \cong \overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$$

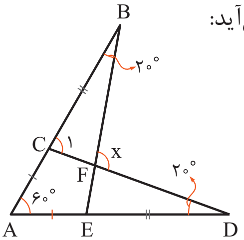
حال توجه کنید که نقطه‌ی E در هر مکان از قطر AC قرار گیرد، اندازه‌های BE و DE برابر خواهد بود، زیرا:

$$\left\{\begin{matrix} BC = CD \\ \text{CE ضلع مشترک} \\ \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{BEC} \cong \overset{\Delta}{CED} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} BE = DE$$

پس بی‌شمار نقطه مانند E روی AC می‌توان در نظر گرفت که از دو رأس B و D به یک فاصله‌اند.

۱۴- **گزینه‌ی «۳»**

با توجه به هم‌نهشت‌بودن مثلث‌های ABE و ACD اندازه‌ی زاویه‌ی B به دست می‌آید:



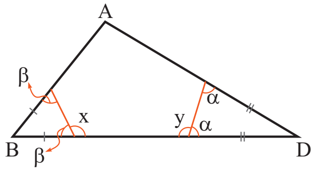
$$\left.\begin{matrix} AE = AC \\ \hat{A} = \hat{A} \\ AD = AB \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(ض\,ز\,ض)} \overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} = ۲۰^\circ$$

زاویه‌ی خارجی مثلث ACD $\hat{C}_۱ = \hat{A} + \hat{D} = ۸۰^\circ$

زاویه‌ی خارجی مثلث BCF $x = \hat{B} + \hat{C}_۱ = ۲۰^\circ + ۸۰^\circ = ۱۰۰^\circ$

۱۵- **گزینه‌ی «۲»**

زاویه‌های برابر در دو مثلث متساوی‌الساقین را α و β می‌نامیم، داریم:



$$(\alpha + y) + (x + \beta) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow (x + y) + (\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{x+y=۲۰۰^\circ} ۲۰۰^\circ + (\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۶۰^\circ$$

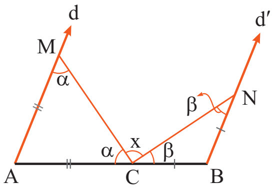
زاویه‌های x و y زاویه‌های خارجی دو مثلث متساوی‌الساقین هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} x = \beta + \hat{B} \\ y = \alpha + \hat{D} \end{cases} \Rightarrow x + y = (\alpha + \beta) + (\hat{B} + \hat{D}) \Rightarrow ۲۰۰^\circ = ۱۶۰^\circ + \hat{B} + \hat{D} \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = ۴۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABD} : \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{B}+\hat{D}=۴۰^\circ} \hat{A} + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۱۴۰^\circ$$

۱۶- **گزینه‌ی «۱»**

طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم: $\hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ$



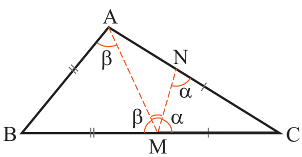
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ACM} : \alpha + \alpha + \hat{A} = ۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{BNC} : \beta + \beta + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta + (\hat{A} + \hat{B}) = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ} ۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۹۰^\circ$$

نیم‌صفحه است $A\hat{C}B : \alpha + x + \beta = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\alpha+\beta=۹۰^\circ} x + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۹۰^\circ$

۱۷- **گزینه‌ی «۲»**

زاویه‌های برابر در دو مثلث متساوی‌الساقین NMC و ABM را α و β می‌نامیم. با استفاده از زاویه‌ی نیم‌صفحه‌ی BMC داریم:



نیم‌صفحه است $B\widehat{M}C : \alpha + \beta + \widehat{M} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{M}=۴۳^\circ} \alpha + \beta + ۴۳^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۳۷^\circ$

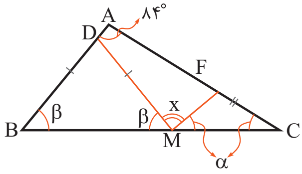
حال مجموع زاویه‌های B و C را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABM}: ۲\beta+\hat{B}=۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{NMC}: ۲\alpha+\hat{C}=۱۸۰^\circ\end{cases} \Rightarrow ۲\alpha+۲\beta+(\hat{B}+\hat{C})=۳۶۰^\circ \xrightarrow{\alpha+\beta=۱۳۷^\circ} ۲(۱۳۷^\circ)+\hat{B}+\hat{C}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۸۶^\circ$$

حال برای محاسبه‌ی $B\hat{A}C$ داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{B}+\hat{C}=۸۶^\circ} \hat{A}+۸۶^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۹۴^\circ=B\hat{A}C$$

۱۸- گزینه‌ی «۱»



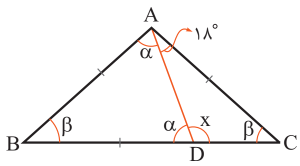
زاویه‌های برابر در دو مثلث متساوی‌الساقین FMC و DBM را α و β می‌نامیم.

ابتدا مجموع α و β را محاسبه می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \alpha+\beta+\hat{A}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۸۴^\circ} \alpha+\beta+۸۴^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۹۶^\circ$$

نیم‌صفحه است $B\hat{M}C=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta+x=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\alpha+\beta=۹۶^\circ} ۹۶^\circ+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۸۴^\circ$

۱۹- گزینه‌ی «۴»



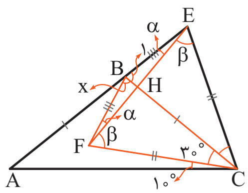
مثلث‌های ABC و ABD متساوی‌الساقین‌اند، بنابراین:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABD}: ۲\alpha+\beta=۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{ABC}: ۲\beta+\alpha+۱۸^\circ=۱۸۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳\alpha+۳\beta+۱۸^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha+۳\beta=۳۴۲^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۱۴^\circ$$

x، زاویه‌ی خارجی مثلث ABD است، پس: $\overset{\Delta}{ABD}: x=\alpha+\beta=۱۱۴^\circ$

۲۰- گزینه‌ی «۱»



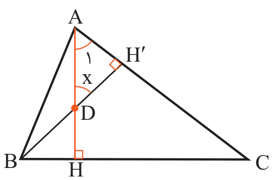
مثلث ABD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}=۴۰^\circ$ مثلث‌های EFC و EFB هم متساوی‌الساقین هستند و زاویه‌ها را مطابق شکل مشخص می‌کنیم. داریم:

زاویه‌ی خارجی مثلث ABC $\hat{B}=\hat{A}+B\hat{C}A=۴۰^\circ+۳۰^\circ+۱۰^\circ=۸۰^\circ$

دو مثلث EBC و FBC همنهشت‌اند، زیرا:

$$\begin{cases}\hat{F}=\hat{E}:\alpha+\beta \\ FB=EB \\ FC=EC\end{cases} \xrightarrow{(\text{ض زض})} \overset{\Delta}{BEC}\cong\overset{\Delta}{BFC} \Rightarrow x=\hat{B}_۱=۸۰^\circ$$

۲۱- گزینه‌ی «۴»



ابتدا زاویه‌ی C در مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \xrightarrow[\hat{B}=۶۰^\circ]{\hat{A}=۴۰^\circ} ۴۰^\circ+۶۰^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

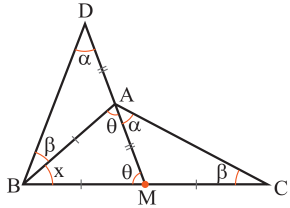
$$\Rightarrow ۱۰۰^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۸۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: \hat{A}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{C}=۸۰^\circ} \hat{A}_۱=۱۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ADH'}: \hat{A}_۱+x=۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}_۱=۱۰^\circ} ۱۰^\circ+x=۹۰^\circ \Rightarrow x=۸۰^\circ$$

۲۲- گزینه‌ی «۳»

دو مثلث AMC و ABD به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند، زیرا:



$$\begin{cases} AM = AD \\ CM = AB \\ B\hat{A}M = A\hat{M}B = \theta \Rightarrow ۱۸۰^\circ - \theta = A\hat{M}C = B\hat{A}D \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{ABD}$$

$$\hat{D} = M\hat{A}C = \alpha \ , \ A\hat{B}D = \hat{C} = \beta$$

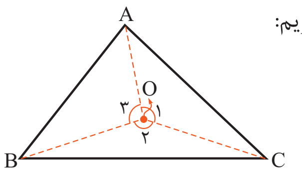
$$\hat{D} + \hat{C} = ۶۱^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۶۱^\circ$$

زاویه‌ی AMB زاویه‌ی خارجی مثلث AMC است، پس:

$$\overset{\Delta}{AMC} : A\hat{M}B = \theta = \alpha + \beta = ۶۱^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABM} : \theta + \theta + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶۱^\circ + ۶۱^\circ + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲۲^\circ + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۵۸^\circ$$

۲۳- گزینه‌ی «۴»



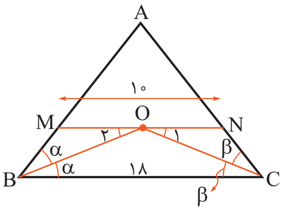
سه مثلث AOB ،AOC و BOC همنهشت‌اند، بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3$ و داریم:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = ۱۲۰^\circ$$

بنابراین O مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌باشد (چرا؟)، مثلث‌های تشکیل‌شده متساوی‌الساقین‌اند و دو زاویه‌ی دیگر آن‌ها برابر با ۳۰° می‌باشد.

۲۴- گزینه‌ی «۲»

با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی و مورب، زاویه‌های O_1 و O_2 را به دست می‌آوریم:



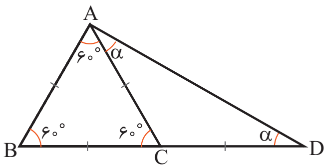
$$\begin{cases} MN \parallel BC \\ \text{خط مورب } OC \end{cases} : \hat{O}_1 = \beta \Rightarrow \overset{\Delta}{ONC} \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow ON = NC$$

$$\begin{cases} MN \parallel BC \\ \text{خط مورب } OB \end{cases} : \hat{O}_2 = \alpha \Rightarrow \overset{\Delta}{BMO} \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow OM = BM$$

$$\text{محیط ذوزنقه‌ی } MNCB : MN + NC + BC + BM \xrightarrow[MN=۱۰]{BC=۱۸} ۲p = ۱۰ + ۱۸ + (NC + BM) \Rightarrow ۲p = ۲۸ + MN = ۳۸$$

۲۵- گزینه‌ی «۱»

اندازه‌ی زاویه‌های برابر را در مثلث متساوی‌الساقین ACD، α در نظر می‌گیریم. زاویه‌ی ACB زاویه‌ی خارجی مثلث ACD است، بنابراین:

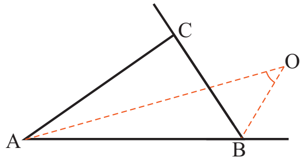


$$\overset{\Delta}{ACD} : A\hat{C}B = ۲\alpha \Rightarrow ۶۰^\circ = ۲\alpha \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

پس زاویه‌های مثلث ABD به ترتیب ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° می‌باشند.

۲۶- گزینه‌ی «۲»

ابتدا زاویه‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

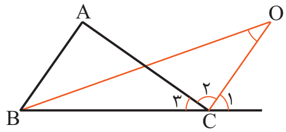


$$\begin{cases}\hat{A}=x\\ \hat{B}=۴x\\ \hat{C}=۷x\end{cases} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow x+۴x+۷x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۱۵^\circ \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=۱۵^\circ\\ \hat{B}=۶۰^\circ\\ \hat{C}=۱۰۵^\circ\end{cases}$$

حال از نکته‌ی زیر استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{O}=\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{۱۰۵^\circ}{۲}=۵۲/۵^\circ$$

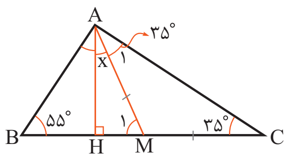
نکته در هر مثلث ABC زاویه‌ی بین نیمساز داخلی زاویه‌ی B و نیمساز خارجی C برابر است با: $\frac{\hat{A}}{۲}$



$$\hat{O}=\frac{\hat{A}}{۲}$$

۲۷- گزینه‌ی «۳»

زاویه‌های مثلث ۳۵°، ۵۵° و ۹۰° می‌باشد، بنابراین مثلث قائم‌الزاویه بوده، بزرگ‌ترین ضلع همان وتر و میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است، پس مثلث‌های AMC و ABM متساوی‌الساقین‌اند، پس:



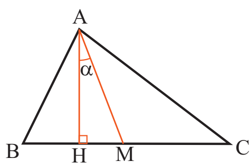
$$\overset{\Delta}{AMC}: \hat{A}_۱=\hat{C}=۳۵^\circ$$

$\widehat{M}_۱$ زاویه‌ی خارجی مثلث $\overset{\Delta}{AMC}$ بوده و برابر است با: $\widehat{M}_۱=۷۰^\circ$

$$\overset{\Delta}{AHM}: x+\widehat{M}_۱=۹۰^\circ \xrightarrow{\widehat{M}_۱=۷۰^\circ} x+۷۰^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow x=۲۰^\circ$$

یه‌جوردیگه از نکته‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

نکته زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:



$$\alpha=|\hat{B}-\hat{C}|$$

پس داریم:

$$x=|\hat{B}-\hat{C}|=|۵۵^\circ-۳۵^\circ|=۲۰^\circ$$

۲۸- گزینه‌ی «۲»

طبق تعریف خم ساده، یک خم مسطح است در صورتی که هیچ‌یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند. در رسم شکل‌های گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) خم‌ها خود را قطع کرده‌اند.

۲۹- گزینه‌ی «۳»

قضیه‌ی خم جردن مربوط به خم‌های ساده‌ی بسته است! گزینه‌ی (۳)، ویژگی خم ساده را ندارد.