۵۱- تابع $f(x)=[x]+[-x]$ در بازه‌ی $[-۲,۲]$ چند ماکزیمم نسبی دارد؟

۱) صفر ۲) کم‌تر از ۳ ۳) ۳ ۴) بیش‌تر از ۳

۵۲- تابع $y=[x]+[-x]$ در بازه‌ی $[-۲,۲]$ دارای چند نقطه‌ی ماکزیمم مطلق است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۵۳- تابع $y=[۲x]$ در فاصله‌ی $[۰,۲]$ چند نقطه‌ی اکسترمم مطلق دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۴- در تابع $f(x)=x[x]$، $x=۰$ طول چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی ۳) عطف ۴) عادی

۵۵- کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\begin{cases}(x+۵)^۲-۴ & ; \ x>۱\\ |x+۱|-۲ & ; \ -۱\le x\le ۱\\ (x+۳)^۲-۳ & ; \ x<-۱\end{cases}$ کدام است؟ (آزاد تجربی ۸۰)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) -۴

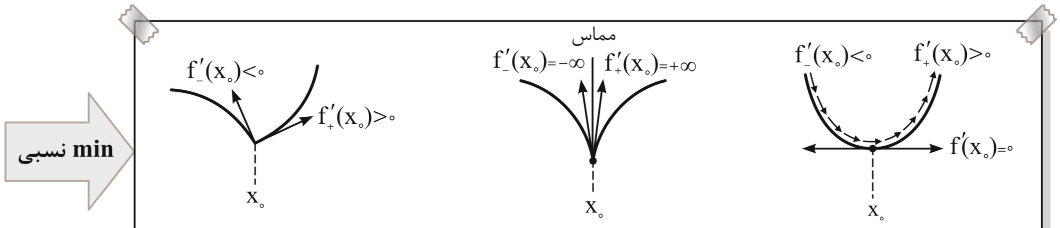
۵۶- ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\begin{cases}|x|-۱ & ; \ ۰\le x\le ۲\\ -۳\sin \pi x & ; \ ۲<x\le ۳\end{cases}$ کدام است؟ (آزاد تجربی ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

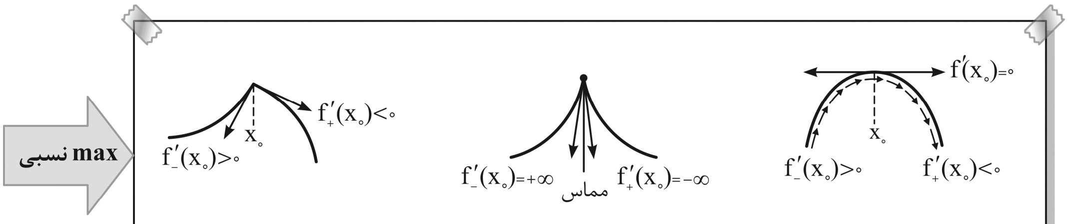
درسنامه‌ی ۳

تعیین طول نقاط اکسترمم نسبی پیوسته به کمک مشتق

در زیر نمودار تابع f را در اطراف نقاط اکسترمم نسبی پیوسته‌ی آن رسم کرده‌ایم. به این شکل‌ها به دقت نگاه کنیم و یک ویژگی مشترک آن‌ها را مشخص نماییم.



تذکر: در نقاط **min نسبی** پیوسته‌ی تابع، علامت مشتق از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد.



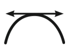
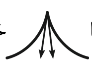
تذکر: در نقاط **max نسبی** پیوسته‌ی تابع، علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در دو طرف نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبیِ پیوسته‌ی تابع، علامت مشتق عوض می‌شود. پس به خاطر می‌سپاریم:

برای تعیین طول نقاط اکسترمم نسبی پیوسته‌ی تابع $y=f(x)$، ابتدا ضابطه‌ی مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم. سپس **ریشه‌های ساده (یا مکرر مرتبه‌ی فرد) صورت و مخرج مشتق را مشروط بر آن‌که عضو دامنه‌ی تعریف تابع باشند، به عنوان طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f معرفی می‌کنیم.**

$$y'=\frac{\bigcirc=۰ \Rightarrow \text{ریشه‌های ساده (یا مکرر مرتبه فرد)} \in D_f}{\bigcirc=۰ \Rightarrow \text{ریشه‌های ساده (یا مکرر مرتبه فرد)} \in D_f} \Rightarrow \text{EXT نسبی}$$

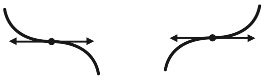
نکته‌های مهم و به یاد ماندنی:

۱) در اطراف ریشه‌های ساده (یا مکرر مرتبه‌ی فرد) صورت مشتق، چون مشتق تابع صفر می‌شود، نمودار تابع به شکل  یا  است و در اطراف ریشه‌های ساده (یا مکرر مرتبه‌ی فرد) مخرج مشتق، چون مشتق وجود ندارد، نمودار تابع به شکل  یا  خواهد بود.

۲ فقط در توابع شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد است که برای تعیین طول نقاط اکسترمم نسبی، مخرج مشتق تابع را نیز برابر صفر قرار می‌دهیم. به عبارتی دیگر، در توابعی که شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد نباشند، برای تعیین طول نقاط اکسترمم نسبی، فقط مشتق تابع را برابر صفر قرار داده و با ریشه‌های مخرجِ مشتق، هیچ کاری نداریم.

۳ در نقطه‌ی اکسترمم نسبی اگر تابع زاویه‌دار باشد، طول اکسترمم نسبی نه ریشه‌ی ساده‌ی صورت مشتق است و نه ریشه‌ی ساده‌ی مخرج آن. بلکه تنها علامت مشتق راست و چپ در این نقطه عوض می‌شود. به عنوان مثال نقطه‌ای به طول $x=0$ در تابع $y=|x|$.

۴ **ریشه‌های مضاعف و مکرر مرتبه‌ی زوج مشتق تابع**، طول‌های نقاط **عطف افقی** تابع هستند.



تذکر مهم و کاربردی: برای تعیین ریشه‌های ساده و مکرر مرتبه‌ی فرد یک معادله، ابتدا باید این معادله را به طور کامل تجزیه کنیم. اگر x_0 ریشه‌ی این معادله باشد، حتماً یکی از عوامل تجزیه شده، به‌صورت $(x-x_0)$ است. براساس توانی که $(x-x_0)$ دارد، نوع ریشه معلوم می‌شود. اگر این توان برابر ۱ باشد، x_0 ریشه‌ی ساده بوده، اگر برابر ۲ باشد، ریشه‌ی مضاعف بوده و اگر برابر ۳ باشد، ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی سوم است. پس داریم:

$$\dots\times(x-x_0)^n\times\dots=0 \Rightarrow \text{ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی } n \text{ اُم است } x=x_0$$

تست آموزشی ۱۰

تابع $f(x)=(x^2-1)^3$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، برای تعیین تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع، کافی است ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد مشتق تابع را مشخص نماییم. داریم:

$$f(x)=(\underbrace{x^2-1}_{u})^3 \Rightarrow f'(x)=3(\underbrace{x^2-1}_{u})^2(\underbrace{2x}_{u'})=3(x-1)^2(x+1)^2(2x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ریشه‌ی ساده} \Rightarrow \text{EXT نسبی} \\ x=1 & \text{ریشه‌ی مضاعف} \Rightarrow \text{عطف افقی (غ‌ق‌ق)} \\ x=-1 & \text{ریشه‌ی مضاعف} \Rightarrow \text{عطف افقی (غ‌ق‌ق)} \end{cases}$$

چون مشتق تابع f تنها دارای یک ریشه‌ی ساده است، در نتیجه تابع f تنها یک اکسترمم نسبی دارد.

تست آموزشی ۱۱

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x$ اکسترمم نسبی ندارد؟

۱) $a<0$ ۲) $-2\le a\le 2$ ۳) $0\le a\le 3$ ۴) $-4\le a\le 0$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، برای آن‌که تابع فاقد اکسترمم نسبی باشد، باید مشتق اول آن ریشه‌ی ساده نداشته باشد. برای این منظور چون مشتق اول تابع، یک عبارت درجه‌ی دوم است، Δی مشتق اول تابع را نامثبت قرار می‌دهیم تا مشتق اول دارای ریشه‌ی ساده (دقت کنیم ریشه‌ی ساده) نباشد. داریم:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x \Rightarrow f'(x)=x^2+2ax+4 \Rightarrow \Delta_{\text{مشتق}}=4a^2-16\not>0 \Rightarrow 4a^2-16\le 0 \Rightarrow -2\le a\le 2$$

تشخیص ماکزیمم و می‌نیمم نسبی با استفاده از آزمون مشتق اول

اگر در تابع f، x_0 طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی پیوسته‌ی تابع f باشد و هنگام عبور از x_0، تغییر علامت مشتق در x_0 از **مثبت به منفی** باشد، تابع f در x_0 دارای **ماکزیمم نسبی** بوده و چنان‌چه هنگام عبور از x_0، تغییر علامت مشتق در x_0 از **منفی به مثبت** باشد، تابع f در x_0 دارای **می‌نیمم نسبی** است. پس برای تعیین نوع اکسترمم نسبی تابع کافی است از ضابطه‌ی تابع مشتق گرفته و جدول تغییرات تابع را رسم کنیم (آزمون مشتق اول). داریم:

x		x_0	
f′	+		−
f	↗	$f(x_0)$	↘
		Max نسبی	

x		x_0	
f′	−		+
f	↘	$f(x_0)$	↗
		min نسبی	

تست آموزشی ۱۲

نمودار تابع $y=\frac{x^4}{4}-x^3+x^2-1$ دارای .... ماکزیمم نسبی و .... می‌نیمم نسبی است.

۱) صفر، ۱ ۲) ۲ و ۱ ۳) ۱ و ۲ ۴) ۱ و صفر

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$$y=\frac{x^۴}{۴}-x^۳+x^۲-۱ \Rightarrow y'=x^۳-۳x^۲+۲x=x(x^۲-۳x+۲)=x(x-۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{ریشه‌ی ساده} \\ x=۱ & \text{ریشه‌ی ساده} \\ x=۲ & \text{ریشه‌ی ساده} \end{cases} \Rightarrow$$ ۳ اکسترمم نسبی

حال با رسم جدول تغییرات (استفاده از آزمون مشتق اول)، نوع اکسترمم نسبی‌ها را مشخص می‌کنیم.

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نمودار تابع، دارای ۲ می‌نیمم نسبی و ۱ ماکزیمم نسبی است.

x		۰		۱		۲	
y'	−	۰	+	۰	−	۰	+
y	↘	min نسبی	↗	Max نسبی	↘	min نسبی	↗

تست آموزشی ۱۳

مقدار می‌نیمم تابع $y=x^۲e^{-x}$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۶)

۱) ۱- ۲) $\frac{۱}{e}$ ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$$y=x^۲e^{-x} \Rightarrow y'=۲xe^{-x}+(-e^{-x})x^۲=\underbrace{e^{-x}}_{\text{همواره مثبت}}(۲x-x^۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{ریشه‌ی ساده} \\ x=۲ & \text{ریشه‌ی ساده} \end{cases} \Rightarrow$$ تابع دارای دو نقطه‌ی اکسترمم نسبی است

$\xrightarrow{\text{جدول تغییرات}}$

x		۰		۲	
y'	−	۰	+	۰	−
y	↘	min نسبی	↗	Max نسبی	↘

$\Rightarrow x_{min}=۰ \Rightarrow y_{min}=۰$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مقدار می‌نیمم نسبی برابر صفر است.

تست آموزشی ۱۴

به ازای کدام مقدار b نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳+ax^۲+b$ در نقطه‌ی $(۲,۳)$ یک می‌نیمم نسبی دارد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

نکته‌ی مهم: در تابعی که شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد نباشد، اگر نقطه‌ای به طول $x_۰$، طول اکسترمم نسبی این تابع معرفی شود، مشتق اول تابع قطعاً به ازای $x=x_۰$ صفر می‌شود، یعنی $f'(x_۰)=۰$.

با توجه به نکته‌ی بالا، مشتق اول تابع را مشخص کرده و به ازای $x=۲$، مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم. از طرفی با معلوم بودن مختصات نقطه‌ی می‌نیمم، مختصات این نقطه را در ضابطه‌ی تابع صدق می‌دهیم. داریم:

$$f(x)=x^۳+ax^۲+b \Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۲ax$$

$$\begin{cases} f'(۲)=۰ \Rightarrow ۱۲+۴a=۰ \Rightarrow a=-۳ \\ (۲,۳)\in f \Rightarrow f(۲)=۳ \Rightarrow ۸+۴a+b=۳ \xrightarrow{a=-۳} b=۷ \end{cases}$$

۵۷- نمودار تابع $y=x^۴-۱$ چند می‌نیمم نسبی دارد؟ (آزاد پزشکی ۹۰ نوبت صبح)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۵۸- در مورد تابع $y=x^۴+۳x^۲+۱$ کدام گزینه درست است؟ (آزاد تجربی ۸۴)

۱) فقط یک می‌نیمم نسبی دارد. ۲) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد.

۳) یک می‌نیمم و دو ماکزیمم نسبی دارد. ۴) یک ماکزیمم و دو می‌نیمم نسبی دارد.

۵۹- طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۴+\frac{۴}{۳}x^۳-۴x^۲$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵ خارج از کشور)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

۶۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^۲-۴)(x^۲-۱)$ دارای .... است.

۱) دو ماکزیمم و یک می‌نیمم نسبی ۲) یک ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی

۳) یک ماکزیمم و یک می‌نیمم نسبی ۴) دو ماکزیمم و دو می‌نیمم نسبی

۶۱- در تابع $y=x^۳-۳x+۱$ فاصله‌ی نقطه‌ی ماکزیمم از نقطه‌ی می‌نیمم، برابر کدام است؟ (آزاد تجربی ۹۰ خارج از کشور)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۶۲- قرینه‌ی خطی که نقاط اکسترمم تابع $f(x) = x^3 - 3x$ را به هم وصل می‌کند، نسبت به محور x ها کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۶)

۱) $x = -2y$ ۲) $x = 2y$ ۳) $y = 2x$ ۴) $y = -2x$

۶۳- از نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y = x^3 - 3x^2$، خطوطی موازی محورهای مختصات رسم می‌کنیم. مساحت مستطیل حاصل کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲ (آزاد تجربی ۸۹ خارج از کشور)

۶۴- تابع $f(x) = \left(m + \frac{2}{3}\right)x^3 + (m+2)x^2 - x + 3$، دارای دو نقطه‌ی اکسترمم نسبی است. حدود m کدام است؟

۱) $1 < m < 6$ ۲) $-1 < m < 6$ ۳) $m > -1$ یا $m < -6$ ۴) $m > 6$ یا $m < -1$

۶۵- اگر حاصل‌ضرب طول‌های نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y = ax^3 + x^2 + x$ برابر $-\frac{1}{9}$ باشد، a کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -5

۶۶- به ازای چه مقدار a، منحنی به معادله‌ی $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ از نقطه‌ی $M(3, 0)$ گذشته و در مبدأ مختصات دارای ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -3 ۴) -2

۶۷- کدام تابع ماکزیمم دارد ولی می‌نیمم ندارد؟ (آزاد تجربی ۸۹)

۱) $y = x^2 - x$ ۲) $y = x - x^2$ ۳) $y = x^3 - x$ ۴) $y = x - x^3$

۶۸- کدام تابع هم ماکزیمم و هم می‌نیمم دارد؟ (آزاد تجربی ۸۶)

۱) $y = \frac{x+1}{x-1}$ ۲) $y = x^2 + 2x$ ۳) $y = x^3 - x$ ۴) $y = x^3 + 3x$

۶۹- تابع $y = \frac{x+1}{x^2 - 2x}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟ (آزاد ریاضی ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۰- نقطه‌ی می‌نیمم نسبی منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$ در کدام ناحیه‌ی مختصات قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۷۱- ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2}$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۲- اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵ خارج از کشور)

۱) $a > 0$ یا $a < -2$ ۲) $a > 2$ یا $a < 0$ ۳) $-2 < a < 0$ ۴) $0 < a < 2$

۷۳- تابع $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه‌ی $(-1, 2)$ دارای اکسترمم نسبی است. مقدار a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

۱) $-\frac{4}{3}$، می‌نیمم ۲) $-\frac{4}{3}$، ماکزیمم ۳) $\frac{4}{3}$، می‌نیمم ۴) $\frac{4}{3}$، ماکزیمم

۷۴- در تابع $f(x) = (x+2)^6(x^2 - 1)$، $x = -2$ طول چه نقطه‌ای است؟

۱) min نسبی ۲) Max نسبی ۳) عطف افقی ۴) عادی

۷۵- برای تابع $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$، مبدأ مختصات چه نقطه‌ای است؟

۱) می‌نیمم نسبی ۲) عطف ۳) ماکزیمم نسبی ۴) معمولی

۷۶- طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع $y = x\sqrt{4 - x^2}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) ۱

۷۷- نقطه‌ای به طول $x = -1$ برای تابع $y = xe^x$ چه نقطه‌ای است؟ (آزاد تجربی ۸۹ خارج از کشور)

۱) ماکزیمم نسبی ۲) عطف ۳) می‌نیمم نسبی ۴) عادی

۷۸- تابع $f(x) = (x^2 - 2x)e^{2x}$ مفروض است. مجموع طول‌های نقاط اکسترمم نسبی تابع چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۹- در تابع $y=\sin^{۴} x$ نقطه‌ی $x=\pi$ چه نوع نقطه‌ای است؟ (آزاد پزشکی ۹۰ نوبت عصر)

۱) می‌نیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) عطف ۴) هیچ‌کدام

۸۰- نقطه‌ای به طول $x=\frac{۲\pi}{۳}$ برای تابع $y=x+۲\sin x$ چگونه نقطه‌ای است؟

۱) می‌نیمم است. ۲) ماکزیمم است. ۳) عطف است. ۴) بحرانی است اما اکسترمم نمی‌باشد.

۸۱- اگر نقطه‌ی می‌نیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a\cos ۲x+b\sin x$، $\left(\frac{\pi}{۶},-۳\right)$ باشد، a کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۸۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $y=\cos^{۲} x+\sqrt{۳}\sin x+a$ در فاصله‌ی $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ دارای اکسترممی به عرض $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۸۳- نمودار تابع $y=\frac{۳\sin x+۱}{\sin x+۴}$ در کدام نقطه می‌نیمم دارد؟ (آزاد ریاضی ۸۵)

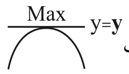
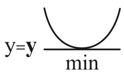
۱) صفر ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۸۴- طول اکسترمم تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۲+\cos x}$ در فاصله‌ی $[۰,\pi]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

درسنامه‌ی ۴

تعیین عرض نقاط اکسترمم نسبی بدون تعیین طول آن‌ها

می‌دانیم در توابع مشتق‌پذیر، خط مماس در نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، افقی است  یا  . همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم می‌توانیم خط $y=y$ را بر نمودار منحنی مماس کنیم. بنابراین معادله‌ی تقاطع منحنی و خط، ریشه‌ی **مضاعف** دارد.

حال با شنیدن مطالب فوق، برای پیدا کردن عرض نقاط اکسترمم نسبی، کافی است معادله‌ی تقاطع منحنی را با خط $y=y$ نوشته و برحسب x آن را مرتب کنیم. اگر شرط ریشه‌ی مضاعف را در معادله‌ی تقاطع برقرار کنیم، مقدار y (عددی ثابت) یا همان عرض نقاط اکسترمم نسبی به دست می‌آید.

نکته مهم: پس از محاسبه‌ی مقادیر اکسترمم نسبی، اگر تابع کسری دقیقاً دو اکسترمم نسبی داشته باشد، برای تشخیص عرض ماکزیمم و می‌نیمم نسبی اگر تابع پیوسته باشد، مقدار بیشتر را برای Max و مقدار کم‌تر را برای min درنظر می‌گیریم ($y_{Max}>y_{min}$). ولی اگر تابع کسری، مخرجش ریشه داشته باشد، به عکس عمل می‌کنیم.

تست آموزشی ۱۵

مقدار می‌نیمم تابع $y=\frac{۵x}{x^{۲}+۴}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$$y=\frac{۵x}{x^{۲}+۴}\Rightarrow yx^{۲}-۵x+۴y=۰\xRightarrow{\Delta=۰}(-۵)^{۲}-۴y(۴y)=۰\Rightarrow ۲۵-۱۶y^{۲}=۰\Rightarrow y^{۲}=\frac{۲۵}{۱۶}\xRightarrow{\text{تابع پیوسته است}}\begin{cases}y_{Max}=\frac{۵}{۴}\\ y_{min}=-\frac{۵}{۴}\end{cases}$$

۸۵- مقدار ماکزیمم تابع $y=\frac{x}{۱+x^{۲}}$ چه‌قدر است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۲)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۸۶- اگر min نسبی تابع $y=\frac{x^{۲}+۲x+a}{x+۱}$ برابر ۴ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۷- اگر اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^{۲}+ax+۹}{x^{۲}+۱}$ روی محور x ها باشد، طول این اکسترمم نسبی کدام است؟

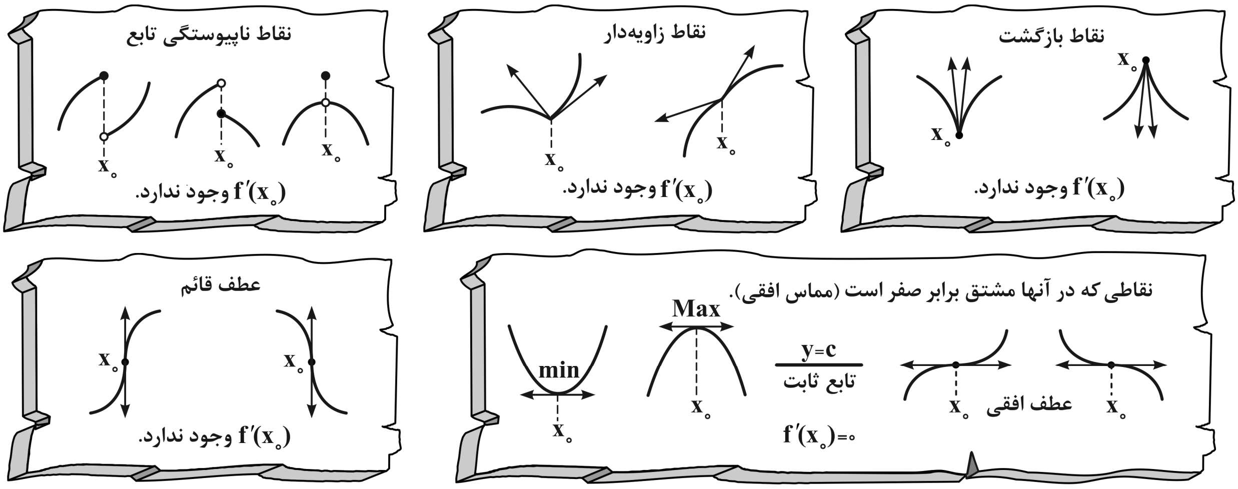
۱) ±۱ ۲) ±۲ ۳) ±۳ ۴) ±۶

درسنامه‌ی ۵

نقطه‌ی بحرانی

فرض کنیم تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد. نقاطی از بازه‌ی (a,b) که **مشتق در آن‌ها صفر شود** و یا **وجود نداشته باشد** را **نقـاط بحرانی** تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر نقطه‌ای به طول $x_\circ \in D_f$ نقطه‌ی بحرانی تابع f است، هرگاه $f'(x_\circ)=\circ$ باشد یا $f'(x_\circ)$ **وجود نداشته باشد.**

دقت کنیم! طبق تعریفی که در صفحه‌ی ۸۴ کتاب پیش‌دانشگاهی بیان شده است، نقـاط ابتـدا و انتهـای دامنـه‌ی تعریـف، یعنـی دو نقطـه بـه طول‌های $x=a$ و $x=b$ جزء نقاط بحرانی تابع محسوب نمی‌شوند. در زیر انواع مختلف نقاط بحرانی تابع را معرفی می‌کنیم:



نکته‌های به یاد ماندنی:

- نقاطی عضو دامنه‌ی تعریف تابع که مشتق تابع در آن‌ها وجود ندارد، به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱) نقاطی که تابع در آن‌ها ناپیوسته بوده ولی تعریف شده (توپُر) است.

۲) نقاطی که مشتق‌های راست و چپ تابع در آن‌ها، برابر نیستند (نقاط زاویه‌دار).

۳) نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها بی‌نهایتی می‌شود. به عبارتی مشتق تابع در آن‌ها نامتناهی است (نقاط بازگشت یا عطف قائم).

- نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است، نقاطی است که در آن‌ها می‌توانیم خط مماس افقی رسم نماییم.
- در تابع ثابت، همه‌ی نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.
- هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، یک نقطه‌ی بحرانی است ولی هر نقطه‌ی بحرانی، اکسـترمم نسـبی نیسـت. در ضـمن هـر نقطـه‌ی عطفـی، بحرانـی محسوب نمی‌شود. تنها نقاط عطف افقی و عطف قائم، بحرانی هستند.

تعیین طول نقاط بحرانی تابع به کمک مشتق

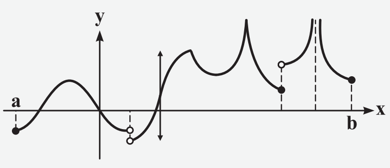
تابع $y=f(x)$ را درنظر می‌گیریم. برای تعیین طول نقاط بحرانی تابع f، می‌توانیم از ضابطه‌ی تابع مشـتق گرفتـه و صـورت و مخـرج مشـتق تـابع را برابرصفر قرار دهیم. **ریشه‌های صورت و مخرج مشتق تابع مشروط بر آن‌که عضو دامنه‌ی تعریف تابع باشند، بحرانی هسـتند.** بـه ازای ریشـه‌های صورت مشتق، مشتق تابع برابر صفر بوده و به ازای ریشه‌های مخرج مشتق، مشتق تابع وجود ندارد. پس داریم:

$$y'=\frac{\bigcirc}{\bigcirc}\quad \begin{cases}\bigcirc=\circ \xrightarrow{\text{ریشه}\in D_f} \text{مشتق برابر صفر است}\\ \bigcirc=\circ \xrightarrow{\text{ریشه}\in D_f} \text{مشتق وجود ندارد}\end{cases} \Rightarrow \text{بحرانی}$$

نکته‌ی مهم: فقط در توابع شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد است که برای تعیین طول نقاط بحرانی تابع، مخرج مشـتق را برابـر صـفر قـرار مـی‌دهیم. بـه عبارتی دیگر، در توابعی که شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد نباشند، برای تعیین طول نقاط بحرانی فقط مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم. پس نتیجـه می‌گیـریم که در توابعی که شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد نیستند، اگر نقطه‌ای به طول $x_\circ$، طول نقطه‌ی بحرانی باشد، حتماً مشتق اول به ازای $x_\circ$، صفر می‌شود.

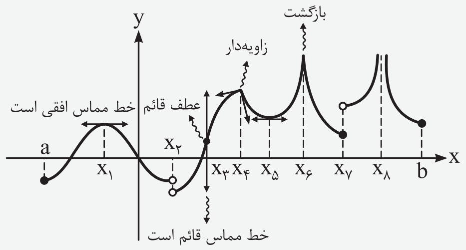
تست آموزشی ۱۶

در نمودار مقابل، در فاصله‌ی $[a,b]$ چند نقطه‌ی بحرانی وجود دارد؟



۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸



پاسخ: گزینه‌ی (۲)، a: ابتدای دامنه‌ی تعریف تابع است. پس بحرانی نیست. ✗

$x_{۱}$: مشتق تابع برابر صفر می‌باشد (چون خط مماس افقی است). پس بحرانی است. ✓

$x_{۲}$: مشتق تابع وجود ندارد ولی چون عضو دامنه نمی‌باشد، پس بحرانی نیست. ✗

$x_{۳}$: مشتق تابع وجود ندارد (چون خط مماس قائم است، پس مشتق تابع بی‌نهایتی می‌باشد). پس بحرانی است. ✓

$x_{۴}$: مشتق تابع وجود ندارد (چون خط مماس واحد قابل رسم نیست). پس بحرانی است. ✓

$x_{۵}$: مشتق تابع برابر صفر می‌باشد. پس بحرانی است. ✓

$x_{۶}$: مشتق تابع وجود ندارد. پس بحرانی است. ✓

$x_{۷}$: مشتق تابع وجود ندارد (چون تابع ناپیوسته است). پس بحرانی است. ✓

$x_{۸}$: مشتق تابع وجود ندارد ولی چون عضو دامنه نمی‌باشد، پس بحرانی نیست. ✗

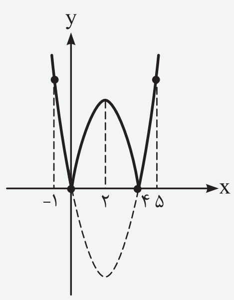
b: انتهای دامنه‌ی تعریف تابع است. پس بحرانی نیست. ✗

پس تعداد نقاط بحرانی تابع، ۶ نقطه می‌باشد.

تست آموزشی ۱۷

تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x^{۲}-۴x|$ بر بازه‌ی $[-۱,۵]$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



پاسخ: گزینه‌ی (۲)، برای تعیین تعداد نقاط بحرانی تابع، از روش **رسم نمودار** کمک می‌گیریم. داریم:

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم تابع f در نقاطی به طول‌های $x=۰$ و $x=۴$، مشتق‌ناپذیر است. چون مشتق تابع f در این نقاط موجود نمی‌باشد، در نتیجه نقاطی به طول‌های $x=۰$ و $x=۴$، بحرانی محسوب می‌شوند. از طرفی در نقطه‌ای به طول $x=۲$، مشتق تابع f برابر صفر است. بنابراین نقطه‌ای به طول $x=۲$ نیز، بحرانی محسوب می‌شود.

تذکر: نقاطی به طول‌های $x=-۱$ و $x=۵$، چون نقاط ابتدا و انتهای دامنه‌ی تعریف تابع هستند، هرگز بحرانی محسوب نمی‌شوند.

تست آموزشی ۱۸

تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^{۴}}{۴}-۲x^{۲}+۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی (۳)، چون تابع f به راحتی قابل رسم نیست، از ضابطه‌ی این تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$f(x)=\frac{x^{۴}}{۴}-۲x^{۲}+۳ \Rightarrow f'(x)=x^{۳}-۴x=x(x^{۲}-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\pm ۲ \end{cases} \Rightarrow \text{۳ نقطه‌ی بحرانی}$$

تست آموزشی ۱۹

طول نقطه‌ی بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x-۱۲)\sqrt[۵]{x}$ روی بازه‌ی $(۰,۳)$ کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی ریاضی عمومی)

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه‌ی (۱)، برای سهولت در مشتق‌گیری، ابتدا ضابطه‌ی تابع f را از شکل رادیکالی به شکل توانی (یعنی شکل x^n) تبدیل می‌کنیم. حال برای تعیین طول نقاط بحرانی تابع، چون تابع f شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد است، مخرج مشتق این تابع را نیز برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$f(x)=(x-۱۲)\sqrt[۵]{x}=(x-۱۲)\times x^{\frac{۱}{۵}}=x^{\frac{۶}{۵}}-۱۲x^{\frac{۱}{۵}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۶}{۵}x^{\frac{۱}{۵}}-\frac{۱۲}{۵}x^{-\frac{۴}{۵}}=\frac{۶}{۵}\left(\sqrt[۵]{x}-\frac{۲}{\sqrt[۵]{x^{۴}}}\right)=\frac{۶}{۵}\left(\frac{x-۲}{\sqrt[۵]{x^{۴}}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۶}{۵}\times\frac{x-۲}{\sqrt[۵]{x^{۴}}} \quad \begin{matrix} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲\in(۰,۳) \ ✓ \\ \sqrt[۵]{x^{۴}}=۰ \Rightarrow x=۰\notin(۰,۳) \ \text{(غ‌ق‌ق)} \end{matrix}$$

۸۸- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=||x-۱|-۱|$، چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) بی‌شمار ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۸۹- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x-1|-|x+1|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۹۰- تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=|\sin x|$ بر بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۱- تعداد نقاط بحرانی کدام‌یک از توابع زیر از بقیه بیش‌تر است؟

۱) $f(x)=3x+|x|$ ۲) $f(x)=x+|3x|$ ۳) $f(x)=x+|x|$ ۴) $f(x)=|x^2-1|$

۹۲- تابع $f(x)=x-[x]$ در بازه‌ی $[-2,2]$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۳- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases}[x] & ;\ x\geq 2\\ x^2-3x & ;\ x<2\end{cases}$ روی بازه‌ی هم‌ارز $x^2<10$، کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۹۴- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^4-4x^3+3$ کدام است؟

۱) بی‌شمار ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۹۵- نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین ۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۹۶- دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵- نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+bx$ هستند. مقدار می‌نیمم نسبی این تابع، کدام است؟

۱) ۸۴- ۲) ۸۱- ۳) ۵۷- ۴) ۷۵- (سراسری تجربی ۸۹ خارج از کشور)

۹۷- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ دارای چند نقطه‌ی بحرانی است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۹۸- طول نقاط بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$ بر بازه‌ی $[-1,1]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$، صفر، $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$، صفر، $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۹۹- طول نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)=x^{\frac{7}{6}}-\frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}}+5$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی ریاضی عمومی)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $2\sqrt{2}$

۱۰۰- مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^2-28)\sqrt[3]{x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۳)

۱) $\{-2,2\}$ ۲) $\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$ ۳) $\{-2,0,2\}$ ۴) $\{-7,0,1\}$

۱۰۱- مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x^3-3x^2+4)^{\frac{1}{3}}$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی ریاضی عمومی)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر

۱۰۲- نقطه‌ی بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^3-3x^2+4)^{\frac{1}{3}}$ روی بازه‌ی $(-1,2)$ چگونه است؟ (سراسری تجربی ۸۶ خارج از کشور)

۱) می‌نیمم ۲) ماکزیمم ۳) عطف ۴) مشتق‌ناپذیر

۱۰۳- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & ;\ x<0\\ x^3-6x & ;\ x\geq 0\end{cases}$، چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰۴- تابع $f(x)=x^2|x-3|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۵- تابع $f(x)=x^2-3|x|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۶- مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\{۰, \frac{۴}{۵}, ۲\}$ ۲) $\{۰, \frac{۲}{۳}, ۲\}$ ۳) $\{۰, ۱\}$ ۴) $\{\frac{۲}{۳}, ۲\}$

۱۰۷-تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده است. کدام بیان درست است؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

۱) هر نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ی اکسترمم نسبی است. ۲) هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، نقطه‌ی بحرانی است.

۳) در هر نقطه‌ی بحرانی، مشتق تابع، صفر است. ۴) در هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، مشتق تابع، صفر است.

درسنامه‌ی ۶

تعیین مقادیر اکسترمم مطلق تابع در بازه‌ی $[a,b]$

برای تعیین مقادیر اکسترمم مطلق تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱: عرض نقاط بحرانی تابع را در بازه‌ی (a,b) محاسبه می‌کنیم. برای این منظور از تابع مشتق گرفته و ریشه‌های صورت و مخرج مشتق که در بازه‌ی (a,b) قرار دارند را مشخص می‌کنیم و اگر عضو D_f باشند، با جای‌گذاری آن‌ها در ضابطه‌ی تابع، عرض این نقاط را به دست می‌آوریم.

دقت کنیم! اگر تابع f در نقطه‌ای به طول $x=c$ از بازه‌ی $[a,b]$ ناپیوسته از راست (یا چپ) باشد، علاوه بر مقدار، باید حد راست (یا چپ) تابع در آن نقطه محاسبه شود. مثلاً در تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۲ & ; \ x\le ۱\\ -x+۲ & ; \ x>۱\end{cases}$ علاوه بر $f(۱)$، باید حد راست را در $x=۱$ از ضابطه‌ی پایین به دست آوریم.

گام ۲: مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه، تعیین می‌کنیم. به عبارتی با جای‌گذاری a و b در ضابطه‌ی تابع، $f(a)$ و $f(b)$ را مشخص می‌کنیم.

گام ۳: از بین مقادیر به دست آمده، بزرگ‌ترین آن‌ها ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، می‌نیمم مطلق است (به شرط آن‌که این بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین مقدار، حدی نباشد، یعنی صرفاً از یک lim به دست نیامده باشد).

برای تعیین مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق در بازه‌ی $(a,b]$ (یا $[a,b)$ یا (a,b))، در مرز باز b، فقط حد چپ و در مرز باز a، فقط حد راست را به دست می‌آوریم. اگر به ازای حد در یکی از این نقاط، بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین مقدار حاصل شود، ماکزیمم مطلق (یا می‌نیمم مطلق) وجود نخواهد داشت. یعنی اگر بیشترین (یا کم‌ترین) مقدار، به ازای مقادیر حدی به دست آید، تابع فاقد ماکزیمم (یا می‌نیمم) مطلق می‌باشد.

دقت کنیم! به جای حدگیری می‌توانیم مرز باز را بسته فرض کرده و مقدار تابع را به ازای آن به دست آوریم. حال اگر بیشترین (یا کم‌ترین) مقدار، در این مرز باز رخ دهد، تابع فاقد ماکزیمم (یا می‌نیمم) مطلق خواهد بود، چون این نقاط عضو بازه‌ی موردنظر نیستند.

تست آموزشی ۲۰

کم‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳-۳x^۲-۹x$ در بازه‌ی $[۱,۴]$ کدام است؟

۱) -۲۷ ۲) -۲۴ ۳) -۲۰ ۴) -۱۱

پاسخ: گزینه‌ی (۱)، **گام ۱**: عرض نقاط بحرانی تابع را در بازه‌ی $(۱,۴)$ مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=x^۳-۳x^۲-۹x \Rightarrow f'(x)=\overbrace{۳x^۲-۶x-۹}^{۳(x^۲-۲x-۳)}=۰ \xrightarrow{x\in(۱,۴)} \begin{cases} x=-۱\notin(۱,۴) \rightsquigarrow \text{غ‌ق‌ق} \\ x=۳\Rightarrow f(۳)=-۲۷\end{cases}$$

گام ۲: عرض نقاط ابتدا و انتهای بازه را به‌دست می‌آوریم:

$$f(۱)=-۱۱ \ , \ f(۴)=-۲۰$$

گام ۳: بین مقادیر به دست آمده‌ی فوق، -۲۷ کوچک‌ترین مقدار است. بنابراین تابع در بازه‌ی $[۱,۴]$ در نقطه‌ی $x=۳$ دارای می‌نیمم مطلقی برابر -۲۷ است، یعنی $y_{\text{min مطلق}}=-۲۷$.

۱۰۸- بیشترین مقدار تابع $f(x)=x^۳-۳x$ بر روی بازه‌ای که همواره $x^۲\le ۳$ باشد، کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۵)

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۹- بیشترین مقدار تابع $y=x^۳-۳x^۲-۹x+۵$ در بازه‌ی $[-۲,۲]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

۱۱۰- می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۴}{۴}-\frac{x^۳}{۳}-x^۲$ روی بازه‌ی $[-۱,۳]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) $-\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $-\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۷}{۳}$

۱۱۱- تابع $f(x)=x^3-3x^2$ در فاصله‌ی $-1 \le x < 3$:

۱) ماکزیمم مطلق دارد و می‌نیمم مطلق ندارد. ۲) ماکزیمم و می‌نیمم مطلق ندارد.

۳) می‌نیمم مطلق دارد و ماکزیمم مطلق ندارد. ۴) می‌نیمم مطلق و ماکزیمم مطلق دارد.

۱۱۲- کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x}$ روی بازه‌ی $[-1,8]$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۳-

۱۱۳- مجموع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=1-(x-3)^{\frac{2}{3}}$ در بازه‌ی $[-5,4]$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی ریاضی عمومی)

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۱

۱۱۴- ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x^2e^x$ در بازه‌ی $[-2,1]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) e ۳) $4e^2$ ۴) $\frac{4}{e^2}$

۱۱۵- کم‌ترین مقدار تابع $y=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۲)

۱) ۳۶- ۲) ۳۲- ۳) ۲۴- ۴) ۱۸-

۱۱۶- اختلاف ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۲

۱۱۷- کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=x-2\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) ۱-

۱۱۸- اگر $f(x)=2x^2-6x+5$، ماکزیمم مقدار تابع $\frac{1}{f(x)}$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱۹- ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x^4-4x^3+4x^2+5}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۰- کم‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=1-\cos^2 x-\sin x$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷ خارج از کشور)

۱) ۱- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) صفر

۱۲۱- بیشترین مقدار عبارت $\cos^2 x+\sin x$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۲)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۲۲- بیشترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin 2x+2\cos x$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $1+\sqrt{2}$ ۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۲۳- بیشترین مقدار تابع $y=\frac{\sin x}{1+3\sin x}$ در فاصله‌ی $(0,\pi)$ چه‌قدر است؟ (آزاد پزشکی ۸۹ خارج از کشور)

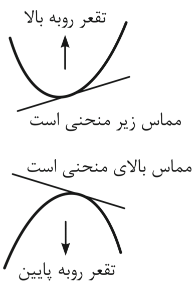
۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۱۲۴- ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=5\sin 2x-12\cos 2x+7$، چه‌قدر از می‌نیمم مطلق آن بیشتر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۶

درسنامه‌ی ۷

تقعر منحنی



تعریف تقعر روبه‌بالا: فرض کنیم تابع f روی یک بازه، مشتق‌پذیر باشد. تقعر منحنی f را روبه بالا می‌گوییم، هرگاه **خطوط مماس بر منحنی در همه‌ی نقاط این بازه، زیر منحنی باشد.** به عبارتی نقاط منحنی، بالای خطوط مماس قرار گیرند.

تعریف تقعر روبه پایین: فرض کنیم تابع f روی یک بازه، مشتق‌پذیر باشد، تقعر منحنی f را روبه پایین می‌گوییم، هرگاه **خطوط مماس بر منحنی در همه‌ی نقاط این بازه، بالای منحنی باشد.** به عبارتی نقاط منحنی، پایین خطوط مماس قرار گیرند.

بررسی تقعر منحنی به کمک مشتق دوم تابع

برای بررسی و تعیین تقعر منحنی، مشتق دوم تابع را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

در فواصلی که $f''(x) > 0$ باشد، **جهت تقعر منحنی روبه بالا است** (به طرف y های مثبت).

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow$ تقعر تابع f رو به بالا است

در فواصلی که $f''(x) < 0$ باشد، **جهت تقعر منحنی روبه پایین است** (به طرف y های منفی).

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow$ تقعر تابع f رو به پایین است

پس برای تعیین فاصله‌ای که تقعر نمودار تابع رو به بالا است، کافی است از تابع دوبار مشتق گرفته و مشتق دوم تابع را مثبت قرار دهیم و برای تعیین فاصله‌ای که تقعر نمودار تابع رو به پایین است، کافی است مشتق دوم تابع را منفی قرار دهیم. از حل نامعادله‌های حاصل، فاصله‌ی مورد نظر مشخص می‌شود.

تذکر: صفر شدن f''، تأثیری در مطالب مطرح شده در بالا نمی‌گذارد.

تست آموزشی ۲۱

جهت تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{6}x^3 - x^2 + 3$ در کدام بازه رو به پایین است؟

۱) $(0, 4)$ ۲) $(-3, \frac{1}{2})$ ۳) $(-1, 2)$ ۴) $(-2, \frac{1}{3})$

پاسخ: گزینه‌ی (۴)، مشتق دوم تابع f را منفی قرار می‌دهیم. داریم:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{6}x^3 - x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x \Rightarrow f''(x) = \underbrace{3x^2 + 5x - 2}_{\text{ریشه‌ها}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6}=-2,\frac{1}{3}}$$

$$\text{تقعر } f \text{ رو به پایین است} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 2 < 0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه منفی است}} -2 < x < \frac{1}{3}$$

تست آموزشی ۲۲

تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x}$ در بازه‌ی (a, b) رو به پایین است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه‌ی (۱)

$$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x} = (x-4) \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$$

x		-2 (ساده)		0 (مکرر مرتبه‌ی ۵ (ساده))	
f''	+	0	−	‖	+
f	∪ ↑		∩ ↓		∪ ↑

$$\text{تقعر تابع } f \text{ رو به پایین است} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \underset{a}{-2} < x < \underset{b}{0} \Rightarrow \mathrm{Max}(b-a) = 0 - (-2) = 2$$

تست آموزشی ۲۳

تقعر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \ln(1 - x^2)$ در کدام فاصله رو به پایین است؟

۱) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$f(x) = \ln(1-x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2(1-x^2) - (-2x)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-2-2x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$\text{تقعر تابع } f \text{ رو به پایین است} \Rightarrow f''(x) = \frac{\overbrace{-2-2x^2}^{\text{همواره منفی}}}{\underbrace{(1-x^2)^2}_{\text{همواره مثبت}}} < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \xrightarrow{D_f=(-1,1)} -1 < x < 1$$

نکته‌ی مهم: در تمام مباحث کاربرد مشتق، باید مجموعه‌ی جواب، عضو دامنه‌ی تعریف تابع باشد.

پس با توجه به این که دامنه‌ی تعریف تابع برابر $D_f = (-1, 1)$ است، لذا جواب درست، گزینه‌ی (۲) می‌باشد.

۱۲۵- تقعر منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^4-6x^2$ در کدام بازه، رو به پایین است؟ (سراسری تجربی ۸۱)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)$

۱۲۶- تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=6x^5-5x^4+2x+7$ در بازه‌ی $(a,+\infty)$ رو به بالا است. کم‌ترین مقدار a کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۱۲۷- در بازه‌ی (a,b)، مماس بر نمودار تابع $y=\frac{x^4}{2}-x^3-18x^2+4x+3$ بالای منحنی قرار دارد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۸- حدود m کدام باشد تا تقعر $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+(m+1)x^2+2$ همواره رو به بالا باشد؟

۱) $m\in\mathbb{R}$ ۲) $m>2$ ۳) $m>\frac{5}{3}$ ۴) $m>\frac{1}{2}$

۱۲۹- منحنی نمایش تابع $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به بالا است؟ (سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,3)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(1,+\infty)$

۱۳۰- منحنی نمایش تابع $y=-x^4+4x^3-3$، در کدام‌یک از بازه‌های زیر، صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) $(2,3)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(0,3)$ ۴) $(2,+\infty)$

۱۳۱- در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^4+8x^3-18x^2$ نزولی و تقعر نمودار آن، رو به بالا است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

۱) $(1,3)$ ۲) $(1,4)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(0,3)$

۱۳۲- در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-3x^2$، صعودی و تقعر نمودار آن، رو به پایین است؟ (سراسری تجربی ۹۳ خارج از کشور)

۱) $(-2,0)$ ۲) $(-2,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(0,1)$

۱۳۳- در کدام بازه تقعر منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}}$ رو به پایین است؟ (سراسری تجربی ۸۶ خارج از کشور)

۱) $(-\infty,-8)$ ۲) $(-8,0)$ ۳) $(-4,2)$ ۴) $(0,2)$

۱۳۴- تقعر منحنی به معادله‌ی $y=x^2+\sqrt{x}$، در کدام بازه رو به پایین است؟ (سراسری تجربی ۸۷ خارج از کشور)

۱) $(0,\frac{1}{4})$ ۲) $(0,\frac{1}{2})$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

۱۳۵- تقعر نمودار تابع $y=(x+3)\sqrt{x}$، در بازه‌ی (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲ خارج کشور)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $+\infty$

۱۳۶- در کدام ناحیه‌ی دستگاه محورهای مختصات، تقعر نمودار تابع $y=x+\frac{1}{x}$ به سمت بالا است؟ (سراسری تجربی ۸۴)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۳۷- تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x^2+12}$ در بازه‌ی $(-a,a)$ رو به پایین است. بیش‌ترین مقدار a کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۸- تقعر منحنی به معادله‌ی $y=x\sqrt{x^2+2}$ در بازه‌ی $(a,+\infty)$ رو به بالا است. کم‌ترین مقدار a کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۱۳۹- تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2|x-1|$ در بازه‌ی (a,b) رو به پایین است. بیش‌ترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

۱) ∞ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۴۰- تقعر نمودار تابع $y=\frac{1}{|x|}$:

۱) همواره رو به بالا است. ۲) همواره رو به پایین است.

۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است. ۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا است.

۱۴۱- نمودار تابع $y=\frac{1}{\sin x}$ در بازه‌ی $(0,\pi)$ از نظر تقعر چگونه است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی و تجربی ۸۰)

۱) رو به بالا ۲) رو به پایین

۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین ۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا