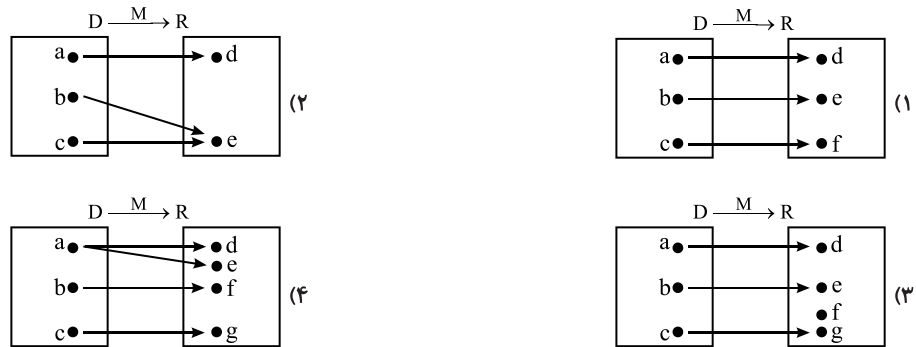


فصل سوم: تبدیل‌ها

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

نگاشت

۱- در کدام یک از موارد زیر، نظیرسازی M ، نگاشتی از D به R نیست؟



۲- نگاشت $F(x, y) = (x+y, 2x-y)$ نقطه‌ی $A(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$ را به کدام نقطه تصویر می‌کند؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(-1, 3)$ (۳) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $(1, 1)$

۳- نگاشت $T(x, y) = (2y+1, 3x-2)$ مفروض است. اگر تصویر نقطه‌ی $A(2, m)$ تحت این نگاشت نقطه‌ی $B(1, n)$ باشد، آن‌گاه $m+n$

کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴- مختصات نقطه‌ای که تصویر آن تحت تبدیل $T(x, y) = (x-3y, 3x-2y)$ نقطه‌ی $(-4, 2)$ است، کدام می‌باشد؟

- (۱) $(3, 2)$ (۲) $(2, 2)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(3, 1)$

۵- تصویر دو نقطه‌ی $A(2, 4)$ و $B(-6, 2)$ را تحت تبدیل $D(x, y) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x+1)$ ، A' و B' می‌نامیم. زاویه‌ی بین دو خط AB و

$A'B'$ چند درجه است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸۰

۶- تبدیل‌های $T(x, y) = (x, y-2)$ و $F(x, y) = (x-y, 2y)$ مفروضند. اگر $T(A) = B$ ، $F(B) = C$ ، $C(-5, 2)$ ، آن‌گاه فاصله‌ی

A از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) $\sqrt{29}$

۷- تصویر چهارضلعی PQRS با رئوس $S(0, 0)$ ، $R(-1, 3)$ ، $Q(0, 2)$ ، $P(1, -1)$ در اثر نگاشت $T(x, y) = (y, x-1)$ کدام است؟

- (۱) لوزی (۲) مستطیل (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) دوزنقه

۸- اگر $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)$ یک تبدیل باشد و داشته باشیم $T(2, 1) = (4, 1)$ و $T(3, -2) = (6, 5)$ ، آن‌گاه $T(2, 2)$ کدام است؟

- (۱) $(6, -1)$ (۲) $(2, 0)$ (۳) $(4, 0)$ (۴) $(3, -2)$

۹- اگر مبدأ مختصات، تصویر نقطه‌ی A تحت تبدیل $T(x, y) = (3x-1, 2y+3)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی A می‌تواند روی کدام یک از خطوط

زیر قرار داشته باشد؟

- (۱) $9x-2y=0$ (۲) $3y-x=0$ (۳) $3y+x=0$ (۴) $2y+9x=0$

۱۰- اگر $A(1, 1)$ ، $B(3, 1)$ و $C(5, 2)$ رأس‌های مثلث ABC باشند. تصویر مثلث ABC تحت تبدیل $T(x, y) = (x-3y, y-2)$ چه

مساحتی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۱- اگر $F(x, y) = (3x, y+2)$ و $G(x, y) = (2y+1, 2x)$ ، آنگاه تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $(3, -1)$ ابتدا تحت تبدیل G و سپس تحت تبدیل F کدام است؟

- (۱) $(21, 0)$ (۲) $(-3, 8)$ (۳) $(3, 18)$ (۴) $(4, -16)$

۱۲- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی داده شده یک تبدیل است؟

- (۱) $T(x, y) = (x+3y, 2)$ (۲) $T(x, y) = (x^2-1, y+3)$
(۳) $T(x, y) = (5, y^2+1)$ (۴) $T(x, y) = (x+y, x)$

۱۳- نگاشت M با ضابطه‌ی $M(x, y) = (x, 0)$ روی نقاط صفحه، تعریف شده است. کدام گزینه درباره‌ی نگاشت M همواره درست است؟

- (۱) ایزومتري است. (۲) شیب خطوط را حفظ می‌کند.
(۳) یک‌به‌یک نیست. (۴) مساحت را ثابت نگه می‌دارد.

۱۴- کدام یک از نگاشت‌های زیر یک تبدیل نیست؟

- (۱) $T(x, y) = (x^3, y^3)$ (۲) $T(x, y) = (y, x)$
(۳) $T(x, y) = (x^3 - x, y)$ (۴) $T(x, y) = (x^2 + y, x)$

۱۵- کدام یک از نگاشت‌های زیر تبدیل نمی‌باشد؟

- (۱) $T(x, y) = (2x - y, 2y - 4x)$ (۲) $F(x, y) = (x^3, x^2 + y^3)$
(۳) $H(x, y) = (x + y, x - y)$ (۴) $G(x, y) = (y + 1, 3x^5 + \sin y)$

۱۶- نگاشت M به هر نقطه‌ی واقع بر خط ثابت L ، خود آن نقطه را نسبت می‌دهد و به هر نقطه‌ی غیر واقع بر خط L ، تصویر قائم آن روی خط L را نسبت می‌دهد. در مورد نگاشت M کدام گزینه درست است؟

- (۱) نه یک‌به‌یک است، نه ایزومتري. (۲) یک‌به‌یک و غیر ایزومتري است.
(۳) غیر یک‌به‌یک و ایزومتري است. (۴) یک‌به‌یک و ایزومتري است.

۱۷- کدام توصیف برای نگاشت $T(x, y) = (0, y)$ درست است؟

- (۱) T ایزومتري است. (۲) T نقاط را روی محور y ها تصویر می‌کند.
(۳) T شیب خطوط را حفظ می‌کند. (۴) T نقاط را روی محور x ها تصویر می‌کند.

۱۸- نگاشت $F(x, y) = (x, x)$ کدام ویژگی را دارد؟

- (۱) ثابت است. (۲) یک‌به‌یک است.
(۳) ایزومتري است. (۴) هر نقطه از صفحه را روی نیمساز ربع اول و سوم می‌نگارد.

۱۹- کدام تبدیل زیر ایزومتري است؟

- (۱) $T(x, y) = (2x, 3y)$ (۲) $T(x, y) = (2x, \frac{1}{3}y)$
(۳) $T(x, y) = (x + y, x - y)$ (۴) $T(x, y) = (-y + 2, x - 1)$

۲۰- به ازای کدام مقدار m تبدیل $T(x, y) = (mx + 1, my + 2)$ ایزومتري است؟

- (۱) ± 1 (۲) فقط ۱ (۳) هر مقدار m (۴) هیچ مقدار m

۲۱- به ازای کدام مقادیر a تبدیل $T(x, y) = (ax + ay, ax - ay)$ ایزومتري است؟

- (۱) ± 1 (۲) $\pm \sqrt{2}$ (۳) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) ± 2

۲۲- اگر تبدیل $T(x, y) = (ax + by, bx - ay)$ ایزومتري باشد، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $a - b = 1$ (۲) $a^2 + b^2 = 1$ (۳) $a^2 - b^2 = 1$ (۴) $a + b = 1$

۲۳- اگر نگاشت $T(x, y) = ((m-1)x + m, -y + m)$ یک تبدیل ایزومتري باشد، آنگاه m کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

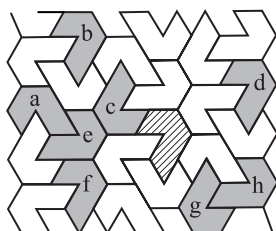
۲۴- کدام تبدیل شیب خط را حفظ می‌کند؟

- (۱) $T(x, y) = (-y, y + x)$ (۲) $T(x, y) = (-2x + 3, 2y + 1)$
(۳) $T(x, y) = (-3x + 1, -3y - 4)$ (۴) $T(x, y) = (-x + 1, -2y + 1)$

- ۲۵- تصویر محور x ها تحت تبدیل $T(x, y) = (x+3y, x-y)$ کدام است؟
 (۱) $x=2y$ (۲) $2x+y=0$ (۳) $3x+2y=0$ (۴) $x=y$
- ۲۶- تبدیل $T(x, y) = (2x+y, 2y+x)$ خط $x+y=1$ را بر کدام خط تصویر می‌کند؟
 (۱) $x+y=3$ (۲) $y-x=1$ (۳) $x+y=1$ (۴) $x-y=1$
- ۲۷- اگر $F(x, y) = (2x-y, x+y)$ ، تصویر منحنی $x^2-2x+y=1-y^2-2xy$ تحت این تبدیل کدام است؟
 (۱) $x^2-y=1$ (۲) $x=y^2+1$ (۳) $y^2=x+1$ (۴) $xy-y^2=1$
- ۲۸- کدام نقطه از خط $d: y=x+2$ تحت تبدیل $T(x, y) = (mx+2y, mx+y-4)$ منطبق بر تصویر خود است؟
 (۱) $(-8, -6)$ (۲) $(3, 5)$ (۳) $(-3, -1)$ (۴) $(5, 7)$
- ۲۹- اگر تبدیل یافته‌ی خط $d: y-3x+3=0$ تحت تبدیل $T(x, y) = (2y-a, x+3)$ از نقطه‌ی $(6, 1)$ بگذرد، آن‌گاه a کدام است؟
 (۱) -6 (۲) -12 (۳) -18 (۴) -24
- ۳۰- به ازای کدام مقدار m خط d به معادله‌ی $y = (m-3)x+2$ بر تصویر خود توسط تبدیل $T(x, y) = (x+y, x-y)$ عمود است؟
 (۱) $4 \pm \sqrt{2}$ (۲) $2 \pm \sqrt{2}$ (۳) $2 \pm \sqrt{2}$ (۴) $4 \pm \sqrt{2}$
- ۳۱- به ازای کدام مقدار m خط d به معادله‌ی $d: y-(m+1)x-1=0$ با تصویر خود تحت تبدیل $T(x, y) = (x, x-y)$ موازی است؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -2 (۴) 2
- ۳۲- تبدیل $T(x, y) = (x+y, x)$ خط $D: y=mx$ را روی خط D' تصویر می‌کند. اگر $D \perp D'$ ، آن‌گاه m کدام است؟
 (۱) -1 (۲) 1 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۳۳- خط d به معادله‌ی $y = (m-1)x+1$ با تصویر خود توسط تبدیل $T(x, y) = (x+y, x-y)$ موازی است. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟
 (۱) 1 (۲) -2 (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۳۴- تبدیل یافته‌ی خط $d: x+y-1=0$ ابتدا تحت تبدیل $T(x, y) = (x+y, \frac{1}{2}y)$ و سپس تحت تبدیل $F(x, y) = (x-2y, 2y)$ کدام است؟
 (۱) $2x-3y-1=0$ (۲) $x+y-1=0$ (۳) $x-y+1=0$ (۴) $3x-2y+1=0$
- ۳۵- L' تصویر خط $L: 2x+3y=6$ تحت تبدیل $f(x, y) = (-y, x)$ است. اگر L'' تصویر L' تحت تبدیل نقطه‌ی $g(x, y) = (x-1, y+1)$ باشد، خط L'' از کدام نقطه عبور می‌کند؟
 (۱) $(2, \frac{5}{2})$ (۲) $(-2, \frac{5}{2})$ (۳) $(3, 1)$ (۴) $(3, -1)$
- ۳۶- تبدیل‌های $T(x, y) = (y, x)$ و $T'(x, y) = (-y, x)$ مفروضند. تصویر خط $d: 2x-y-2=0$ در اثر تبدیل $T'OT$ محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟
 (۱) 1 (۲) -1 (۳) 2 (۴) -2

انتقال

- ۳۷- کدام یک از تبدیل‌های زیر ضابطه‌ی یک انتقال است؟
 (۱) $F(x, y) = (5-x, 3+y)$ (۲) $F(x, y) = (y+3, x-1)$
 (۳) $F(x, y) = (\frac{x-1}{2}, \frac{y+2}{4})$ (۴) $F(x, y) = (\frac{2x+3}{2}, \frac{2y+1}{3})$
- ۳۸- در شکل مقابل، چند تصویر از تصویرهای مشخص شده، تصویر انتقال یافته‌ی شکل هاشورخورده هستند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



فصل سوم: تبدیل‌ها

پاسخ‌های تشریحی

(A) ۱- گزینه‌ی ۴ طبق تعریف، یک نگاشت از D به R ، یک عمل نظیرسازی است که به هر عضو مجموعه‌ی D یک و تنها یک عضو از مجموعه‌ی R را نظیر کند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نگاشت هستند. اما گزینه‌ی (۴) نگاشت نیست، زیرا یکی از عضوهای D یعنی a به دو عضو مختلف R یعنی d و e نظیر شده است. لذا شرط نگاشت بودن را ندارد.

(A) ۲- گزینه‌ی ۲ در ضابطه‌ی F کافی است به جای x ، عدد $\frac{2}{3}$ و به جای y عدد $-\frac{5}{3}$ را قرار دهیم:

$$F(A) = F\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3}, \frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right) = (-1, 3)$$

(B) ۳- گزینه‌ی ۴ از آن‌جا که نقطه‌ی B تصویر نقطه‌ی A تحت T است لذا $T(A) = B$ پس داریم:

$$T(A) = B \Rightarrow T(2, m) = (1, n) \Rightarrow (2m+1, 6-2) = (1, n) \Rightarrow \begin{cases} 2m+1=1 \Rightarrow m=0 \\ 4=n \end{cases} \Rightarrow m+n=4$$

(B) ۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به متن سؤال باید x و y را به دست آوریم که در آن $T(x, y) = (-4, 2)$ پس:

$$\begin{cases} x-3y=-4 \\ 3x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+9y=12 \\ 3x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

(B) ۵- گزینه‌ی ۳ تصاویر دو نقطه‌ی A و B را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A(2, 4) &\xrightarrow{D} A'(-2, 2) & m_{AB} &= \frac{4-2}{2-6} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ B(-6, 2) &\xrightarrow{D} B'(-1, -2) & m_{A'B'} &= \frac{2+2}{-2+1} = -4 \end{aligned} \Rightarrow m_{AB} = \frac{-1}{m_{A'B'}} \Rightarrow AB \perp A'B'$$

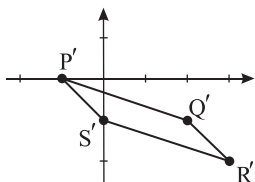
(B) ۶- گزینه‌ی ۳ با داشتن مختصات C مختصات نقاط A و B را به دست می‌آوریم.

$$F(B) = C \Rightarrow (x-y, 2y) = (-5, 2) \Rightarrow \begin{cases} x-y=-5 \\ 2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(-4, 1)$$

$$T(A) = B \Rightarrow (x, y-2) = (-4, 1) \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(-4, 3)$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ را محاسبه می‌کنیم:

$$OA = \sqrt{16+9} = 5$$



(B) ۷- گزینه‌ی ۳ تصویر چهارضلعی $PQRS$ تحت تبدیل T چهارضلعی $P'Q'R'S'$ با رئوس

$P'(-1, 0)$ ، $Q'(2, -1)$ ، $R'(3, -2)$ ، $S'(0, -1)$ دیده می‌شود $P'+R'=Q'+S'$ پس اقطار

چهارضلعی $P'Q'R'S'$ منصف یکدیگرند پس $P'Q'R'S'$ متوازی‌الاضلاع است.

$$m_{P'Q'} = \frac{-1-0}{2+1} = -\frac{1}{3}, m_{P'S'} = \frac{-1-0}{0+1} = -1 \Rightarrow P'Q' \not\parallel P'S'$$

$$\begin{cases} P'Q' = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \\ P'S' = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow P'Q' \neq P'S'$$

بنابراین چهارضلعی $P'Q'R'S'$ نه مستطیل و نه لوزی می‌تواند باشد پس $P'Q'R'S'$ متوازی‌الاضلاع است.

۸- گزینه‌ی ۳ تبدیل موردنظر خطی به فرم $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$T(2, 1) = (2a + b, 2c + d) = (4, 1) \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 2c + d = 1 \end{cases}$$

$$T(3, -2) = (3a - 2b, 3c - 2d) = (6, 5) \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 6 \\ 3c - 2d = 5 \end{cases}$$

حال کافی است دستگاه معادله‌ی روبه‌رو را حل کنیم:

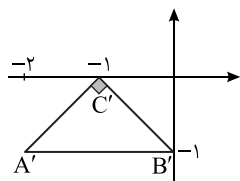
$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3a - 2b = 6 \\ 2c + d = 1 \\ 3c - 2d = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow T(x, y) = (2x, x - y) \Rightarrow T(2, 2) = (4, 0)$$

۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا مختصات نقطه‌ی $A(x, y)$ را به دست می‌آوریم:

$$T(x, y) = (3x - 1, 2y + 3) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow A = (\frac{1}{3}, -\frac{3}{2})$$

در بین گزینه‌ها نقطه‌ی A می‌تواند روی خط $2y + 9x = 0$ قرار بگیرد.

۱۰- گزینه‌ی ۱ ابتدا تصویر نقاط A, B و C را تحت تبدیل T به دست می‌آوریم:



$$A' = T(A) = T(1, 1) = (-2, -1)$$

$$B' = T(B) = T(3, 1) = (0, -1)$$

$$C' = T(C) = T(5, 2) = (-1, 0)$$

مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الساقین بوده و در رأس C' قائم است. بنابراین داریم:

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{A'C' \times B'C'}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 1$$

یا این که ارتفاع وارد بر ضلع $A'B'$ برابر یک می‌باشد و $A'B' = 2$ پس داریم:

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} h \times A'B' = \frac{1}{2} (1)(2) = 1$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ راه‌حل اول: ابتدا $G(3, -1)$ را به دست آورده، سپس حاصل را در تبدیل F قرار می‌دهیم:

$$G(3, -1) = (2(-1) + 1, 2(3)) = (-1, 6)$$

$$F(-1, 6) = (3(-1), 6 + 2) = (-3, 8)$$

راه‌حل دوم: ابتدا ضابطه‌ی FOG را به دست می‌آوریم و سپس حاصل $FOG(3, -1)$ را به دست می‌آوریم.

$$FOG(x, y) = F(G(x, y)) = F(2y + 1, 2x) = (6y + 3, 2x + 2) \Rightarrow FOG(3, -1) = (-3, 8)$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم تبدیل نگاشتی یک‌به‌یک از صفحه بر روی خودش است. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) تبدیل نیستند، زیرا

شرط یک‌به‌یک بودن را ندارند.

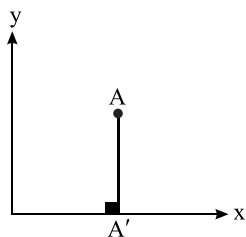
$$(۱) \quad T(x, y) = (x + 3y, 2) \Rightarrow T(1, 1) = T(4, 0) = (4, 2)$$

$$(۲) \quad T(x, y) = (x^2 - 1, y + 3) \Rightarrow T(1, 0) = T(-1, 0) = (0, 3)$$

$$(۳) \quad T(x, y) = (5, y^2 + 1) \Rightarrow T(1, 1) = T(1, -1) = (5, 2)$$

حال به بررسی تبدیل بودن گزینه‌ی (۴) می‌پردازیم و آن را ثابت می‌کنیم.

$$T(x, y) = T(x', y') \Rightarrow (x + y, x) = (x' + y', x') \Rightarrow \begin{cases} x + y = x' + y' \\ x = x' \end{cases} \xrightarrow{(۱)} \boxed{y = y'} \Rightarrow (x, y) = (x', y')$$

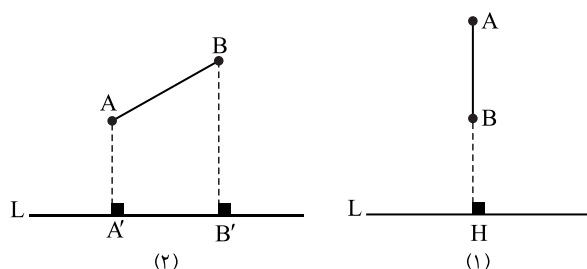


- (A) ۱۳- گزینه‌ی ۳ این نگاشت هر نقطه مانند $A(x, y)$ را به نقطه‌ی $A'(x, 0)$ تصویر می‌کند. بنابراین هر نقطه روی پاره‌خطی مانند AA' در شکل (یا امتداد آن) به نقطه‌ی A' تصویر می‌شود. لذا این نگاشت یک‌به‌یک نیست.

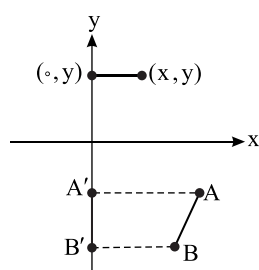
- (A) ۱۴- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم تبدیل، نگاشتی یک‌به‌یک از صفحه بر روی خودش است. اما گزینه‌ی (۳) شرط یک‌به‌یک بودن را دارا نیست، زیرا:
 $T(0, 1) = T(1, 1) = T(-1, 1) = (0, 1)$

- (C) ۱۵- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم تبدیل نگاشتی یک‌به‌یک از صفحه بر روی خودش است ولی گزینه‌ی (۱) شرط یک‌به‌یک بودن را دارا نیست، زیرا:
 $T(1, 2) = T(2, 4) = (0, 0)$

تذکر: می‌توان برای بررسی تبدیل بودن یا نبودن نگاشت‌هایی مانند گزینه‌ی (۱) و (۳) از نکته‌ی زیر نیز استفاده کرد:
 نگاشت T با ضابطه‌ی $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ با شرط $ad \neq bc$ همواره یک تبدیل است.



- (B) ۱۶- گزینه‌ی ۱ مطابق شکل (۱) نقاطی که روی خطوط عمود بر L قرار دارند، به یک نقطه تصویر می‌شوند، پس نگاشت داده شده یک‌به‌یک نیست. در ضمن این نگاشت ایزومتري نیست زیرا مطابق شکل (۲)، $A'B' \neq AB$ است ولی طول $A'B'$ و AB برابر نیست.



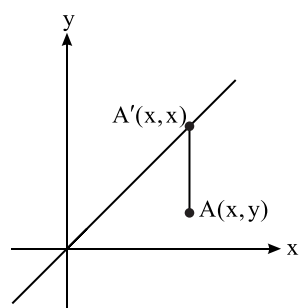
- (A) ۱۷- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل، این نگاشت نقاط روی صفحه را بر محور y ها تصویر می‌کند. در ضمن در شکل $A'B'$ تصویر AB تحت نگاشت T است. به وضوح دیده می‌شود که $AB \neq A'B'$ و $AB \parallel A'B'$ پس سایر گزینه‌ها درست نیستند.

- (C) ۱۸- گزینه‌ی ۴ بررسی گزینه‌ی (۱): F ثابت نیست، زیرا $F(1, 2) = (1, 1)$ و $F(3, 2) = (3, 3)$ پس همه‌ی نقاط به یک نقطه تصویر نمی‌شوند.

بررسی گزینه‌ی (۲): F یک‌به‌یک نیست، زیرا $F(1, 2) = (1, 1)$ و $F(1, 3) = (1, 1)$. در حقیقت تصویر دو نقطه، یک نقطه شده است، پس F یک‌به‌یک نیست.
 بررسی گزینه‌ی (۳): F ایزومتري نیست، زیرا:

$$\begin{aligned} A(1, 2) &\xrightarrow{F} A'(1, 1) \\ B(3, 2) &\xrightarrow{F} B'(3, 3) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\xrightarrow{AB=2} \\ &\xrightarrow{A'B'=2\sqrt{2}} \end{aligned} \quad AB \neq A'B'$$

بررسی گزینه‌ی (۴): با توجه به تعریف F هر نقطه از صفحه مثل $A(x, y)$ به نقطه‌ی $A'(x, x)$ که روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، تصویر می‌شود.



- (A) ۱۹- گزینه‌ی ۴ طبق تعریف، تبدیل ایزومتري، تبدیلی است که فاصله‌ی بین نقاط را حفظ می‌کند و تنها گزینه‌ی (۴) تبدیلی ایزومتري می‌باشد، زیرا:

$$\begin{cases} A(x, y) \\ B(x', y') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = T(A) = (-y + 2, x - 1) \\ B' = T(B) = (-y' + 2, x' - 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \\ |A'B'| &= \sqrt{((-y+2)-(-y'+2))^2 + ((x-1)-(x'-1))^2} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |AB| = |A'B'|$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ (A) با توجه به گزینه‌ها ممکن است این تبدیل ایزومتري نباشد بنابراین برای هر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ داریم:

$$A' = T(A) = (mx_1 + 1, my_1 + 2)$$

$$B' = T(B) = (mx_2 + 1, my_2 + 2)$$

$$|A'B'| = \sqrt{(mx_2 - mx_1)^2 + (my_2 - my_1)^2} = \sqrt{m^2(x_2 - x_1)^2 + m^2(y_2 - y_1)^2} = |m| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|A'B'| = |AB| \Rightarrow |m| = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

۲۱- گزینه‌ی ۳ (B) با توجه به این که تصویر مبدأ مختصات تحت تبدیل T بر خودش منطبق است، می‌توان گفت که اندازه‌ی هر پاره‌خط OA

$(O(0,0), A(x,y))$ باید با اندازه‌ی پاره‌خط تصویرش (OA') برابر باشد، بنابراین داریم:

$$A' = T(A) = (ax + ay, ax - ay)$$

$$|OA| = |OA'| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(ax + ay)^2 + (ax - ay)^2} = |a| \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |a| \sqrt{2} = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۲- گزینه‌ی ۲ (B) تصویر مبدأ مختصات تحت تبدیل T بر خودش منطبق است. لذا برای این که تبدیل T ایزومتري باشد، می‌توان طول هر

پاره‌خط OA $(O(0,0), A(x,y))$ را با طول تصویرش یعنی OA' $(O(0,0), A'(ax+by, bx-ay))$ برابر قرار داد، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} |OA| &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ |OA'| &= \sqrt{(ax+by-0)^2 + (bx-ay-0)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{|OA|=|OA'|} \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

۲۳- گزینه‌ی ۲ (B) تصاویر دو نقطه‌ی دلخواه $A(0,0)$ و $B(1,0)$ را به‌دست آورده، سپس فاصله‌ی آن‌ها را با AB برابر قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} A(0,0) &\xrightarrow{T} A'(m,m) \\ B(1,0) &\xrightarrow{T} B'(2m-1,m) \end{aligned} \xrightarrow{AB=A'B'} 1 = \sqrt{(m-1)^2 + 0} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=0 \end{cases}$$

۲۴- گزینه‌ی ۳ (B) می‌دانیم شیب خطی که نقطه‌ی $A(x,y)$ را به نقطه‌ی $A'(x',y')$ وصل می‌کند، برابر است با:

$$m_{AA'} = \frac{y-y'}{x-x'}$$

برای تک‌تک گزینه‌ها شیب پاره‌خط OA $(O(0,0), A(x,y))$ را با شیب تصویر آن تحت تبدیل T که آن را $O'A'$ می‌نامیم، مقایسه می‌کنیم:

$$(۱) \text{ گزینه‌ی ۱: } T(x,y) = (-y, y+x)$$

$$O' = T(0,0) = (0,y), \quad A' = T(x,y) = (-y, y+x)$$

$$m_{OA} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}, \quad m_{O'A'} = \frac{y+y+x-y}{-y-0} = \frac{-x}{y} \Rightarrow m_{OA} \neq m_{O'A'}$$

$$(۲) \text{ گزینه‌ی ۲: } T(x,y) = (-2x+3, 2y+1)$$

$$O' = T(0,0) = (3,1), \quad A' = T(x,y) = (-2x+3, 2y+1)$$

$$m_{OA} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}, \quad m_{O'A'} = \frac{2y+1-1}{-2x+3-3} = \frac{-y}{x} \Rightarrow m_{OA} \neq m_{O'A'}$$

$$(۳) \text{ گزینه‌ی ۳: } T(x,y) = (-3x+1, -3y-4)$$

$$O' = T(0,0) = (1,-4), \quad A' = T(x,y) = (-3x+1, -3y-4)$$

$$m_{OA} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}, \quad m_{O'A'} = \frac{-3y-4-(-4)}{-3x+1-1} = \frac{-y}{x} \Rightarrow m_{OA} = m_{O'A'}$$

$$(۴) \text{ گزینه‌ی ۴: } T(x,y) = (-x+1, -2y+1)$$

$$O' = T(0,0) = (1,1), \quad A' = T(x,y) = (-x+1, -2y+1)$$

$$m_{OA} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}, \quad m_{O'A'} = \frac{-2y+1-1}{-x+1-1} = \frac{-y}{x} \Rightarrow m_{OA} \neq m_{O'A'}$$

بنابراین فقط گزینه‌ی (۳) شیب خطوط را حفظ می‌کند.

(B) ۲۵- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی محور x ها به صورت $y=0$ است، لذا خواهیم داشت:

$$T(x, y) = (x + 3y, x - y) = (x', y') \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = x' \\ x - y = y' \end{cases} \xrightarrow{y=0} \begin{cases} x = x' \\ x = y' \end{cases} \Rightarrow x' = y' \text{ یا } x = y$$

(B) ۲۶- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی تصویر خط $x + y = 1$ را تحت تبدیل T به دست می‌آوریم:

$$T(x, y) = (x', y') = (2x + y, 2y + x) \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2x' - y'}{3} \\ y = \frac{2y' - x'}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{2x' - y'}{3} + \frac{2y' - x'}{3} \xrightarrow{x+y=1} \frac{2x' - y' + 2y' - x'}{3} = 1 \Rightarrow x' + y' = 3 \text{ یا } x + y = 3$$

روش تستی: با روش تغییر متغیر داریم:

$$\begin{cases} 2x + y = x' \\ 2y + x = y' \end{cases} \xrightarrow{+} 3(x + y) = x' + y' \xrightarrow{x+y=1} x' + y' = 3$$

(C) ۲۷- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی منحنی مورد نظر را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x^2 - 2x + y = 1 - y^2 - 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = (2x - y) + 1 \Rightarrow (x + y)^2 = (2x - y) + 1$$

$$\begin{cases} 2x - y = x' \\ x + y = y' \end{cases} \xrightarrow{(x+y)^2 = (2x-y)+1} y'^2 = x' + 1$$

حال با توجه به ضابطه‌ی تبدیل F خواهیم داشت:

(C) ۲۸- گزینه‌ی ۱ مختصات هر نقطه از خط d به صورت $M(\alpha, \alpha + 2)$ است، بنابراین کافی است تصویر این نقطه را تحت تبدیل T پیدا

کنیم و آن را مساوی مختصات نقطه‌ی M قرار دهیم:

$$M' = T(M) = T(\alpha, \alpha + 2) \Rightarrow M' = (m\alpha + 2\alpha + 4, m\alpha + \alpha - 2)$$

$$M = M' \Rightarrow (m\alpha + 2\alpha + 4, m\alpha + \alpha - 2) = (\alpha, \alpha + 2) \Rightarrow \begin{cases} m\alpha + 2\alpha + 4 = \alpha \\ m\alpha + \alpha - 2 = \alpha + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\alpha + \alpha + 4 = 0 \\ m\alpha - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -8$$

$$M = (\alpha, \alpha + 2) = (-8, -6)$$

(C) ۲۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا معادله‌ی خط d' تبدیل یافته‌ی d تحت تبدیل T را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x' = 2y - a \\ y' = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a + x'}{2} \\ x = y' - 3 \end{cases} \xrightarrow{d: y - 3x + 3 = 0} \frac{a + x'}{2} - 3(y' - 3) + 3 = 0 \Rightarrow d': x' - 6y' + 24 + a = 0$$

حال مختصات نقطه‌ی $(1, 6)$ را در معادله‌ی خط d' جایگذاری می‌کنیم:

$$d': x - 6y + 24 + a = 0 \xrightarrow{\substack{x=6 \\ y=1}} 6 - 6 + 24 + a = 0 \Rightarrow a = -24$$

تذکر: می‌توانستیم مختصات نقطه‌ای را به دست آوریم که تصویر آن $(1, 6)$ است و سپس آن نقطه‌ی به دست آمده را در معادله‌ی d قرار دهیم.

(C) ۳۰- گزینه‌ی ۱ به روش تغییر متغیر معادله‌ی تبدیل یافته‌ی خط را به دست می‌آوریم. برای این منظور داریم:

$$\begin{cases} x + y = x' \\ x - y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + y'}{2} \\ y = \frac{x' - y'}{2} \end{cases}$$

حال معادله‌ی d' (تصویر خط d) را می‌نویسیم:

$$d: y = (m - 3)x + 2 \Rightarrow \frac{x' - y'}{2} = (m - 3) \frac{(x' + y')}{2} + 2 \Rightarrow y' = \left(\frac{4 - m}{m - 2} \right) x' - \frac{4}{m - 2}$$

می‌دانیم دو خط بر هم عمودند هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 باشد داریم:

$$m_d \cdot m_{d'} = -1 \Rightarrow \frac{4 - m}{m - 2} = \frac{-1}{m - 2} \Rightarrow m - 2 = m^2 - 7m + 12 \Rightarrow m = 4 \pm \sqrt{2}$$

(B) ۳۱- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تصویر را به‌دست می‌آوریم:

$$T(x, y) = (x, x-y) \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ x-y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = x'-y' \end{cases} \xrightarrow{\text{در خط } d \text{ قرار می‌دهیم}} x'-y' = (m+1)x'+1 \Rightarrow d': y' + mx' + 1 = 0$$

شیب خط d' و شیب خط d باید مساوی باشد. بنابراین داریم:

$$m+1 = -m \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

(B) ۳۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی D' را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x+y = x' \\ x = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x'-y' \\ x = y' \end{cases} \xrightarrow{\text{در خط } D \text{ قرار می‌دهیم}} x'-y' = my' \Rightarrow y' = \frac{1}{m+1} x'$$

$$D \perp D' \Rightarrow \frac{1}{m+1} \times m = -1 \Rightarrow m+1 = -m \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

(B) ۳۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا تصویر خط را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x+y = x' \\ x-y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'+y'}{2} \\ y = \frac{x'-y'}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{در خط } d \text{ جای‌گذاری می‌کنیم}} \frac{x'-y'}{2} = (m-1)\left(\frac{x'+y'}{2}\right) + 1 \Rightarrow x'-y' = (m-1)(x'+y') + 2$$

$$\Rightarrow x'-y' = (m-1)x' + (m-1)y' + 2 \Rightarrow d': my' + (m-2)x' + 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} d \text{ شیب } = m-1 \\ d' \text{ شیب } = \frac{2-m}{m} \end{array} \right\} \xrightarrow{d \parallel d'} m-1 = \frac{2-m}{m} \Rightarrow m^2 - m = 2 - m \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

(C) ۳۴- گزینه‌ی ۲ باید معادله‌ی خط d را تحت تبدیل $FOT(x, y)$ به‌دست آوریم، بنابراین ضابطه‌ی این تبدیل را می‌نویسیم:

$$FOT(x, y) = F(T(x, y)) = F\left(x+y, \frac{1}{2}y\right) = \left(x+y-2\left(\frac{1}{2}y\right), 2\left(\frac{1}{2}y\right)\right) = (x, y)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تبدیل یافته‌ی هر نقطه‌ی $A(x, y)$ تحت تبدیل $(FOT)(x, y)$ بر خودش منطبق است. بنابراین معادله‌ی تصویر خط d تحت تبدیل مورد نظر با معادله‌ی خط d یکسان است، یعنی:

$$d': x+y-1=0$$

(B) ۳۵- گزینه‌ی ۲ ابتدا معادله‌ی تصویر خط L را تحت تبدیل f به‌دست می‌آوریم:

$$f(x, y) = (-y, x) \Rightarrow \begin{cases} -y = x' \\ x = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = y' \end{cases} \xrightarrow[\text{جای‌گذاری می‌کنیم}]{\text{در } L} 2y' - 3x' = 6 \Rightarrow L': 2y - 3x = 6$$

حال تصویر خط L' را تحت تبدیل g به‌دست می‌آوریم:

$$g(x, y) = (x-1, y+1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = x' \\ y+1 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'-1 \end{cases} \xrightarrow[\text{جای‌گذاری می‌کنیم}]{\text{در } L'} 2(y'-1) - 3(x'+1) = 6 \Rightarrow 2y' - 3x' = 11$$

در بین گزینه‌ها تنها نقطه‌ی $(-2, \frac{5}{2})$ در خط L'' صدق می‌کند.

(B) ۳۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا ضابطه‌ی $T'OT$ را به‌دست می‌آوریم.

$$(T'OT)(x, y) = T'(T(x, y)) = T'(y, x) = (-x, y)$$

$$\begin{cases} -x = x' \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در خط } d} -2x' - y' - 2 = 0 \Rightarrow 2x' + y' + 2 = 0 \xrightarrow{y'=0} x' = -1$$

(A) ۳۷- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم ضابطه‌ی هر انتقال به صورت $T(x, y) = (x+a, y+b)$ است و تنها گزینه‌ای که می‌توان آن را به این صورت

نوشت، گزینه‌ی (۴) می‌باشد، زیرا:

$$F(x, y) = \left(\frac{2x+3}{2}, \frac{3y+1}{3}\right) \Rightarrow F(x, y) = \left(x+\frac{3}{2}, y+\frac{1}{3}\right)$$