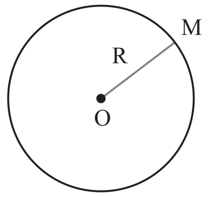
فصل دوم: دایره

درسنامه

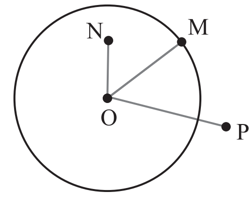
دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه است، که از یک نقطه‌ی ثابت به فاصله‌ای ثابت هستند. نقطه‌ی ثابت را مرکز دایره و فاصله‌ی ثابت را شعاع دایره می‌گوییم.



- در شکل مقابل، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم شده است.

- دایره‌ای به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر هر دایره مانند $C(O,R)$ صفحه را به سه بخش افراز می‌کند:



۱- نقاط درون دایره: مجموعه نقطه‌هایی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره کم‌تر از شعاع دایره می‌باشد.
درون دایره$=\{N|ON<R\}$

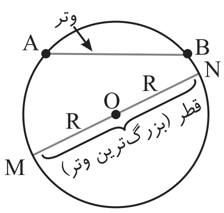
۲- نقاط روی دایره: مجموعه نقطه‌هایی از صفحه، که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.
روی دایره (محیط دایره)$=\{M|OM=R\}$

۳- نقاط خارج دایره: مجموعه نقطه‌هایی از صفحه، که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره، از شعاع دایره بیش‌تر است.
خارج دایره (برون دایره)$=\{P|OP>R\}$

چند تعریف اولیه

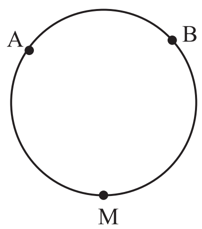
۱ وتر

به پاره‌خطی که دو نقطه‌ی متمایز، از محیط دایره را به یک‌دیگر وصل می‌کند وتر دایره می‌گوییم. در شکل روبه‌رو پاره‌خط AB وتری از دایره است.



تذکر وتری که از مرکز دایره می‌گذرد را **قطر** دایره می‌نامیم. همواره قطر بزرگ‌ترین وتر می‌باشد. در شکل مقابل، MN قطر دایره و طول آن برابر $2R$ است (R: طول شعاع).

۲ کمان

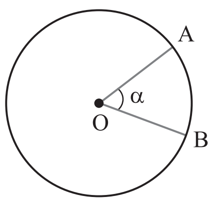


دو نقطه‌ی A و B را روی محیط دایره در نظر می‌گیریم. این دو نقطه محیط دایره را به دو بخش تقسیم می‌کنند، که به هر یک از آن بخش‌ها، کمان یا قوس می‌گوییم.

توجه ۱: اگر بنویسیم $\overset{\frown}{AB}$ (بخوانید کمان AB) مطابق شکل، منظور قسمت کوچک محیط دایره است. برای نشان دادن بخش بزرگ‌تر از نقطه‌ای کمکی مانند نقطه‌ی M استفاده می‌کنیم. در این صورت کمان موردنظر را به‌صورت $\overset{\frown}{AMB}$ می‌نویسیم.

توجه ۲: هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند. این کمان‌ها را نیم‌دایره می‌نامیم.

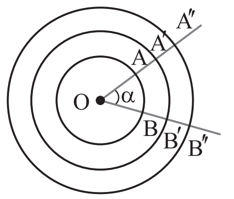
۳ زاویه‌ی مرکزی



زاویه‌ای که رأس آن، مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره باشند یک زاویه‌ی مرکزی نامیده می‌شود. مانند $A\hat{O}B$ در شکل.

قرارداد: اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی، برابر با اندازه‌ی کمان مقابل به آن است. یعنی در شکل مقابل داریم:

$$\alpha=\overset{\frown}{AB}$$



توجه: اندازه‌ی یک کمان را نباید با طول آن کمان اشتباه کرد، مثلاً در شکل، کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ ، $\overset{\frown}{A'B'}$ و $\overset{\frown}{A''B''}$ اندازه‌های برابر α دارند.

$$\alpha=\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{A''B''}$$

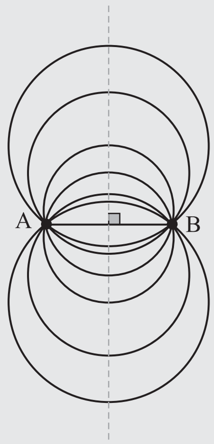
اما واضح است که طول این کمان‌ها نابرابرند، یعنی:

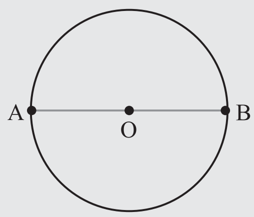
$$|\overset{\frown}{AB}|<|\overset{\frown}{A'B'}|<|\overset{\frown}{A''B''}|$$

تست ۱: پاره‌خط AB به طول ۴ مفروض است. اگر تنها دو دایره به شعاع $۴x-۱$ از دو سر این پاره‌خط بگذرد، حدود x کدام است؟

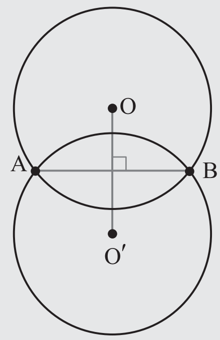
۱) $x>\frac{۱}{۴}$ ۲) $x>\frac{۳}{۴}$ ۳) $x>۱$ ۴) $\frac{۱}{۴}<x<\frac{۳}{۴}$

پاسخ: از دو نقطه‌ی متمایز A و B بی‌شمار دایره می‌گذرد، که اگر شعاع این دوایر را R فرض کنیم $\frac{AB}{۲}\le R$. اگر $R=\frac{AB}{۲}$، آن‌گاه فقط یک دایــره با این ویژگی داریم که این دایره دارای قطر AB است. اگر $\frac{AB}{۲}<R$، دو دایره خواهیم داشت که مراکز آن‌ها، نسبت به پاره‌خط AB قرینه‌ی یک‌دیگرند.





$R=\frac{AB}{۲}$



$\frac{AB}{۲}<R$

در این تست می‌خواهیم، دو دایره داشته باشیم، پس باید به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\frac{AB}{۲}<R\xrightarrow{AB=۴,\ R=۴x-۱}\frac{۴}{۲}<۴x-۱\Rightarrow ۲<۴x-۱\Rightarrow\frac{۳}{۴}<x$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

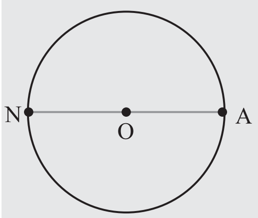
تذکر گفتیم که از دو نقطه‌ی A و B، بی‌شمار دایره می‌گذرد. مکان هندسی مرکز این دایره‌ها عمودمنصف پاره‌خط AB می‌باشد.

تست ۲: بیش‌ترین و کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از یک دایره به‌ترتیب ۸ و ۴ است. شعاع این دایره چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۲ یا ۶

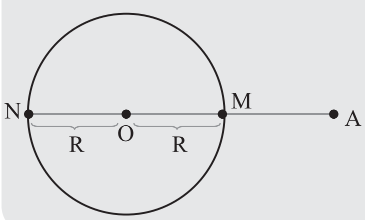
پاسخ: کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از یک دایره را در ۳ حالت می‌توان بررسی کرد:

۱- A روی دایــره باشــد: در این حالت مطابق شــکل، قطر گذرنده از A را رســم می‌کنیم، در این حالت داریم:

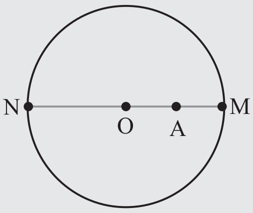


$$\begin{cases}\text{کم‌ترین فاصله}=۰\\ \text{بیش‌ترین فاصله}=AN=۲R\end{cases}$$

۲- A بیرون دایره باشــد: در این حالت از A به O وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را مطابق شــکل در M و N قطع کند. ثابت می‌شــود که M نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره به A و N دورترین است. یعنی:



$$\begin{cases}\text{کم‌ترین فاصله}: AM=OA-OM=OA-R\\ \text{بیش‌ترین فاصله}: AN=OA+ON=OA+R\end{cases}$$



۳- A درون دایره باشـد: در این حالت نیز مانند قبل، قطر گذرنده از A را رسـم می‌کنیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کند که این نقاط به ترتیب، نزدیک‌ترین و دورترین نقطه‌ی دایره به A می‌باشند. لذا:

$$\begin{cases} \text{کم‌ترین فاصله}: AM=OM-OA=R-OA \\ \text{بیش‌ترین فاصله}: AN=ON+OA=R+OA \end{cases}$$

اگر بخواهیم به‌طور کلی مطالب فوق را خلاصه کنیم می‌توان گفت:

$$\text{کم‌ترین فاصله} = |R-OA|$$

$$\text{بیش‌ترین فاصله} = R+OA$$

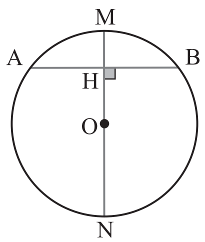
حال در این سؤال چون وضع A و دایره را نمی‌دانیم، می‌توان نوشت:

$$\text{حالت اول: } A \text{ بیرون دایره} \rightarrow \begin{cases} \text{کم‌ترین فاصله}=OA-R=۴ \\ \text{بیش‌ترین فاصله}=OA+R=۸ \end{cases} \Rightarrow R=۲$$

$$\text{حالت دوم: } A \text{ درون دایره} \rightarrow \begin{cases} \text{کم‌ترین فاصله}=R-OA=۴ \\ \text{بیش‌ترین فاصله}=R+OA=۸ \end{cases} \Rightarrow R=۶$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نکات مربوط به یک وتر و کمان نظیر آن



۱- در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند. به زبان ریاضی یعنی:

$$OM \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH=HB \\ \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}\ ,\ \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NB} \end{cases}$$

۲- در هر دایره خطی که از مرکز دایره، به وسط وتری از آن دایره وصل شود، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند. مطابق شکل فوق یعنی:

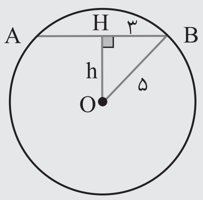
$$AH=BH \Rightarrow \begin{cases} OM \perp AB \\ \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB} \end{cases}$$

۳- در هر دایره، خطی که از مرکز دایره، به وسط کمانی از آن دایره وصل می‌شود، بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن وتر را نصف می‌کند. به عبارتی طبق شکل بالا:

$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB} \Rightarrow \begin{cases} OM \perp AB \\ AH=HB \end{cases}$$

تست ۳: دایره‌ی $C(O,۵)$ مفروض است، مکان هندسی وسط وترهای به طول ۶ در این دایره کدام است؟

۱) رأس‌های مربع به ضلع ۳
۲) دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴
۳) دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳
۴) دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای روی دایره و شعاع ۲

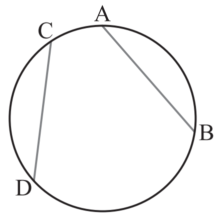


پاسخ: ابتدا یک شکل فرضی از سؤال رسم می‌کنیم. در این شکل AB یکی از وترهای مورد نظر می‌باشد و H وسط این وتر یکی از نقاط عضو مکان هندسی است. داریم:

$$H \text{ وسط } AB \Rightarrow OH \perp AB \xrightarrow[\text{فیثاغورس در } \overset{\Delta}{OBH}]{} h^۲+۹=۲۵ \Rightarrow h^۲=۱۶ \Rightarrow h=۴$$

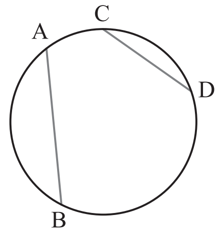
بنابراین، فاصله‌ی وســط این وترها از مرکز دایره (O) همواره مقدار ثابت ۴ می‌باشـد. پس مکان هندسی وسط این وترها، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع ۴. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

نکات مربوط به دو وتر در یک دایره



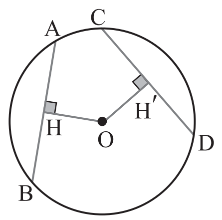
۱- در هر دایره، اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند و برعکس.

$$AB=CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$



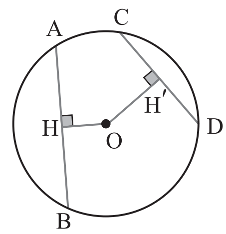
۲- در هر دایره، اگر دو وتر نابرابر باشند، کمان نظیر وتر بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است و برعکس.

$$AB>CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$$



۳- در هر دایره، وترهای برابر، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.

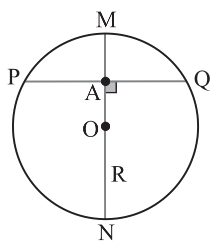
$$AB=CD \Leftrightarrow OH=OH'$$



۴- در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

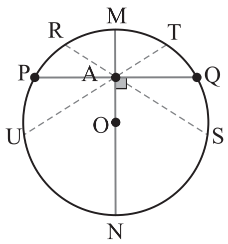
$$AB>CD \Leftrightarrow OH<OH'$$

وتر مینیمم (کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه)



اگر نقطه‌ی A درون دایره باشد (A غیر از مرکز است) بی‌شمار وتر از A می‌گذرد. بزرگ‌ترین وتر گذرنده از A قطر دایره است (MN در شکل) و کوچک‌ترین وتر گذرنده از A وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود می‌باشد (وتر PQ در شکل).

نتیجه | **اگر l طول وتری دلخواه، گذرنده از A باشد، همواره** $PQ \le l \le ۲R$.



تذکر با توجه به شکل، اگر بخواهیم در تعداد وترهای گذرنده از A با طول‌های متفاوت بحث کنیم:

۱- فقط یک وتر به طول $۲R$ (بزرگ‌ترین وتر گذرنده از A) و یک وتر به طول PQ (کوچک‌ترین وتر گذرنده از A) داریم، اما دو وتر به طول عدد ثابت l داریم که $PQ<l<۲R$ می‌باشد. مثلاً فرض کنید A نقطه‌ای درون یک دایره به قطر ۸ باشد و وتر مینیمم گذرنده از A را به طول ۵ در نظر بگیرید. در این صورت فقط ۲ وتر وجود دارد که طول آن‌ها فرضاً ۶ باشد چون $۸>۶>۵$.

$MN=۲R=۸$ وتر ماکزیمم گذرا از A

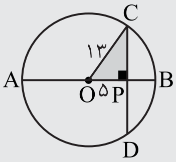
$PQ=۵$ وتر مینیمم گذرا از A

$RS=TU=l=۶$ دو وتر مورد نظر

۲- اگر A مرکز دایره باشد، وتر مینیمم و ماکزیمم گذرنده از آن برابر $۲R$ می‌باشد و بی‌شمار وتر با این ویژگی وجود دارد.

تست ۴: **در دایــره‌ای بــه قطر ۲۶ واحــد، فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مرکز دایره ۵ واحد اســت. انــدازه‌ی کوچک‌ترین وتری کــه در دایره از نقطه‌ی P می‌گذرد، کدام است؟**

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴



پاسخ: کوچک‌ترین وتری که از نقطه‌ی P می‌گذرد، وتری است که بر قطر گذرنده از P عمود باشد (طبق شکل، وتر CD). لذا با توجه به این‌که قطر عمود بر یک وتر آن را نصف می‌کند، خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{OPC}: OC^۲ = OP^۲ + PC^۲ \Rightarrow ۱۳^۲ = ۵^۲ + PC^۲ \Rightarrow PC^۲ = ۱۴۴$$

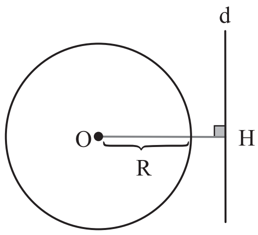
$$\Rightarrow PC = ۱۲ \xrightarrow{CD = ۲PC} CD = ۲۴$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

وضعیت یک خط و یک دایره

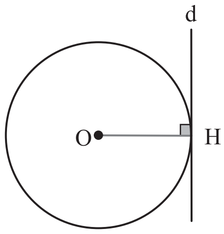
وضعیت یک خط و یک دایره نسبت به هم خط d و دایره‌ی $C(O, R)$ در یک صفحه نسبت به هم سه حالت دارند:

۱- خط خارج دایره است (متخارج): در این حالت خط و دایره، هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند و فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیش‌تر است.



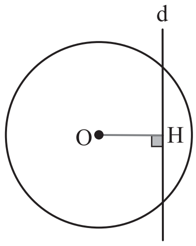
$OH > R \Leftrightarrow$ خط خارج دایره است.

۲- خط مماس بر دایره اســت: در این حالت خط و دایره تنها یک نقطه‌ی مشــترک دارند و فاصله‌ی مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است.

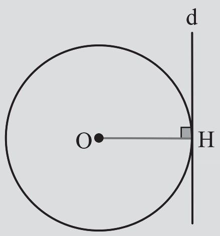


$OH = R \Leftrightarrow$ خط بر دایره مماس است.

۳- خط و دایره متقاطع‌اند: در این حالت خط و دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند و فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کم‌تر است.

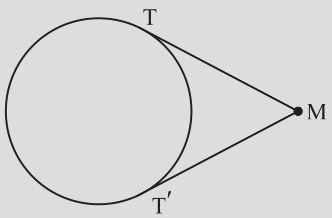


$OH < R \Leftrightarrow$ خط و دایره متقاطع‌اند.



نکته: شعاع دایره، در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است و برعکس، یعنی اگر از مرکز یک دایره به نقطه‌ی برخورد آن با یک خط وصل کنیم و شعاع ایجاد شده بر خط مورد نظر عمود باشد آن خط بر دایره مماس است.

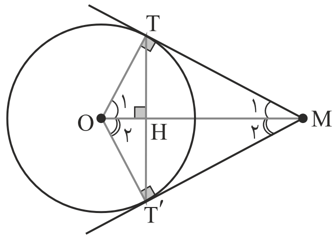
d مماس بر دایره است. $\Leftrightarrow OH \perp d$



نکته: از هر نقطه خارج دایره می‌توان دو مماس بر دایره رسم کرد، که طول این دو مماس با هم برابر است.

MT, MT' مماس بر دایره‌اند $\Rightarrow MT = MT'$

نکات مربوط به دو مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره



مطابق شــکل اگر MT و MT' مماس‌های رسم شــده از نقطه‌ی M بر دایره باشند و α زاویه‌ی بین این دو مماس باشد، می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد:

۱- از آن‌جا که دو مثلث OMT و OMT' همنهشت‌اند (به حالت وتر و یک ضلع) می‌توان گفت:

الف) $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$، یعنی MO نیمساز زاویه‌ی بین دو مماس است.

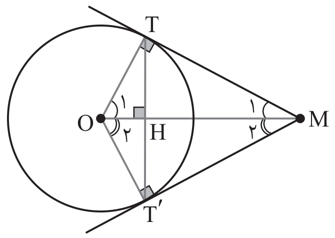
ب) $\hat{O}_۱=\hat{O}_۲$، یعنی OM نیمساز زاویه‌ی $T\hat{O}T'$ است.

۲- چــون $MT=MT'$ و می‌دانیــم هر نقطه که از دو ســر یک پاره‌خط، به یک فاصله باشــد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد، لذا M روی عمودمنصف TT' است.

به دلیل مشابه $OT=OT'=R$، نقطه‌ی O نیز، روی عمودمنصف TT' قرار دارد پس می‌توان از این مطالب نتیجه‌ی زیر را به‌دست آورد:

نتیجه | MO **عمودمنصف** TT' **است یعنی:**

$$OM\perp TT'\ ,\ TH=T'H$$

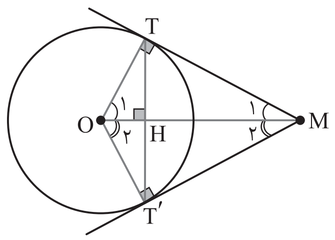


۳- (روابــط مثلثاتــی) فرض کردیم کــه زاویه‌ی بین دو مماس برابر α اســت یعنی $T\hat{M}T'=\alpha$ و همچنین MO نیمســاز زاویه‌ی بین دو مماس اســت، پس $\hat{M}_۱=\frac{\alpha}{۲}$ است (شکل را ببینید). حال اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی MOT نسبت‌های مثلثاتی را بنویسیم، داریم:

$$\sin\hat{M}_۱=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}\xrightarrow{\hat{M}_۱=\frac{\alpha}{۲}\ ,\ \text{ضلع مقابل}=OT\ \ ,\ \text{وتر}=OM}\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{OT}{OM}$$

$$\cos\hat{M}_۱=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}\xrightarrow{\hat{M}_۱=\frac{\alpha}{۲}\ ,\ \text{ضلع مجاور}=MT\ ,\ \text{وتر}=OM}\cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{MT}{OM}$$

تذکــر اگر زاویه‌ی بین دو مماس رسم شده از نقطه‌ی M برابر α باشد، اصطلاحاً می‌گوییم، از نقطه‌ی M دایره‌ی $C(O,R)$ به زاویه‌ی α دیده می‌شود.



۴- دیدیم که $\overset{\Delta}{OTM}$ قائم‌الزاویه اســت. با بررســی ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه نتایج زیر به‌دســت می‌آیند:

الف) با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OTM داریم:

$$OM^۲=OT^۲+TM^۲$$

ب) می‌دانیم، در هر مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویه‌ی قائمه، واســطه‌ی هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر می‌باشد. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OTM داریم:

الف) $OT^۲=OH\,.\,OM\xrightarrow{OT=R}R^۲=OH\,.\,OM$

ب) $MT^۲=MH\,.\,OM$

ج) در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی قطعاتی است، که آن ارتفاع روی وتر ایجاد می‌کند، پس:

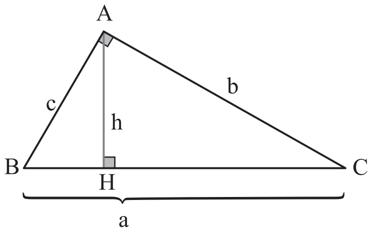
$$TH^۲=OH\,.\,MH\xrightarrow{TH=\frac{TT'}{۲}}(\frac{TT'}{۲})^۲=OH\,.\,MH\Rightarrow(TT')^۲=۴OH\,.\,MH$$

د) در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل‌ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه، برابر ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر است. لذا در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OTM داریم:

$$OT\,.\,TM=TH\,.\,OM\xrightarrow{TH=\frac{TT'}{۲}}OT\,.\,TM=\frac{TT'}{۲}.OM\Rightarrow TT'\,.\,OM=۲OT\,.\,TM$$

یک پیشــنهاد مفید: روابط طولی فوق (شــماره‌ی ۴) با استفاده از ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه به‌دست می‌آید، بهتر است به جای حفظ کردن این روابط دلیل به‌دست آمدن آن‌ها را بررسی کنیم.

یادآوری: ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه:



۱) $a^۲ = b^۲ + c^۲$

۲) $b.c = a.h = ۲\times(\text{مساحت}) = ۲S$

۳) $h^۲ = BH.CH$

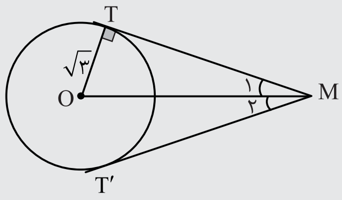
۴) $\begin{cases} b^۲ = a.CH \\ c^۲ = a.BH \end{cases}$

تست ۵: از نقطه‌ای مفروض، دو خط بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ مماس می‌کنیم. اگر زاویه‌ی بین دو مماس ۶۰ درجه باشد، آن‌گاه طول مماس برابر است با:

۱) $۲\sqrt{۳}$ **۲)** ۴ **۳)** ۲ **۴)** ۳

پاسخ: نقطه‌ی مورد نظر را M در نظر می‌گیریم.

زاویه‌ی $M_۱$ برابر با ۳۰ درجه است، زیرا OM نیمساز است. داریم:



$$\hat{M}_۱ = ۳۰^\circ \xrightarrow{\text{در مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه‌ی } ۳۰^\circ \text{ نصف وتر است.}} OT = \frac{OM}{۲}$$

$$\Rightarrow OM = ۲\sqrt{۳}$$

حال با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث OTM داریم:

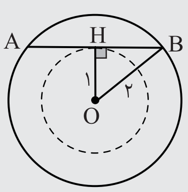
$$MT^۲ = OM^۲ - OT^۲ = (۲\sqrt{۳})^۲ - (\sqrt{۳})^۲ = ۹ \Rightarrow MT = ۳$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تست ۶: دو دایره‌ی متحدالمرکز به شعاع‌های ۱ و ۲ مفروض‌اند. طول وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، برابر است با:

۱) ۳ **۲)** $۲\sqrt{۳}$ **۳)** ۲ **۴)** $\sqrt{۳}$

پاسخ: فرض کنید AB وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر باشد که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است. از آن‌جا که شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، می‌توان در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH رابطه‌ی فیثاغورس را نوشت. پس:



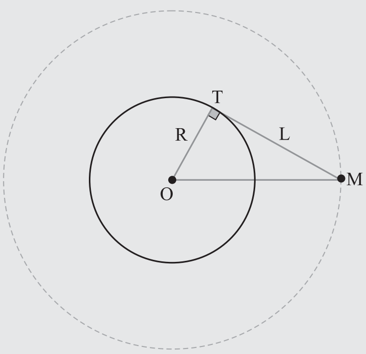
$$BH^۲ = OB^۲ - OH^۲ \Rightarrow BH^۲ = ۴ - ۱ = ۳ \Rightarrow BH = \sqrt{۳} \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۷: مکان هندسی نقاطی که بتوان از آن نقاط مماس‌هایی به طول L بر دایره‌ای مفروض رسم کرد، کدام است؟

۱) یک خط **۲)** یک دایره **۳)** یک نیم‌دایره **۴)** دو خط

پاسخ: مطابق شکل، فرض کنید M، یکی از نقاط عضو مکان هندسی باشد یعنی مماس‌های رسم شده از M بر دایره دارای طول L باشند. با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث OTM داریم:



$$\overset{\Delta}{OTM}: OM^۲ = OT^۲ + TM^۲ \xrightarrow{OT=R\,,\,TM=L} OM^۲ = R^۲ + L^۲$$

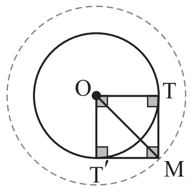
$$\Rightarrow OM = \sqrt{R^۲ + L^۲}$$

و چون R و L مقادیر ثابتی هستند، OM نیز، مقداری ثابت خواهد شد. بنابراین فاصله‌ی M تا مرکز دایره (نقطه‌ی O) همواره مقداری ثابت است پس مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^۲ + L^۲}$ است.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

یک مکان هندسی معروف- دایره‌ی مونژ

مسأله ۱ دایره‌ی $C(O,R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که مماس‌های رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند.

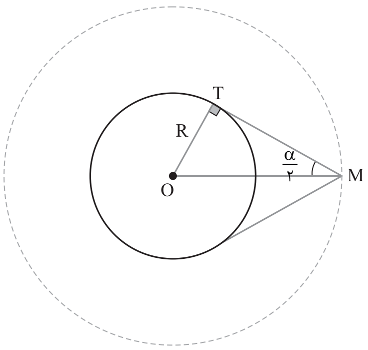


راه‌حل: فرض کنید M یکی از نقاط مکان هندسی مورد نظر باشد و MT و MT' دو مماس رسم شده از این نقطه بر دایره باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OT=OT'=R \\ \hat{M}=\hat{T}=\hat{T}'=۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مربع است } OTMT'$$

در نتیجه $OM=R\sqrt{۲}$ (قطر مربع) مقدار ثابتی است. لذا مکان هندسی M دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R\sqrt{۲}$ که به این دایره، **دایره‌ی مونژ** می‌گوییم.

حالت کلی: حال اگر بخواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه را به‌دست آوریم که از آن نقاط دایره به زاویه‌ی α دیده شود به صورت زیر عمل می‌کنیم.



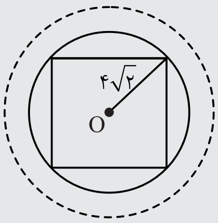
فرض کنید M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد (شکل را ببینید). در مثلث قائم‌الزاویه‌ی MOT داریم:

$$\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{R}{OM}\Rightarrow OM=\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

چون R و α مقادیر ثابتی هستند، لذا OM نیز، مقداری ثابت می‌شود، لذا «مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دایره‌ی $C(O,R)$ به زاویه‌ی α دیده می‌شود، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$»

تست ۸: دایره‌ی $C(O,۴\sqrt{۲})$ و مربع به ضلع ۸ و هم‌مرکز با دایره‌ی C مفروض‌اند. چند نقطه روی مربع وجود دارد که از آن بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ی C رسم کرد؟

۱) ۴ ۲) بی‌شمار ۳) صفر ۴) ۲



پاسخ: قطر دایره و قطر مربع هر دو برابر با $۸\sqrt{۲}$ می‌باشند، بنابراین دایره از رئوس مربع می‌گذرد. مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود برهم بر دایره‌ی C رسم می‌شوند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R\sqrt{۲}=۸$ می‌باشد.

دایره‌ی فوق مربع را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند، پس نقطه‌ای روی مربع وجود ندارد که از آن بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ی C رسم کرد.

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.