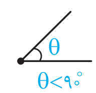
Detailed Solutions

پاسخ‌های تشریحی

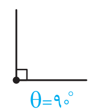
A ۱ ۴

زاویه

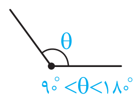
زاویه‌های نام‌دار:



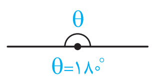
زاویه‌ی حاده



زاویه‌ی قائمه



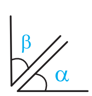
زاویه‌ی منفرجه



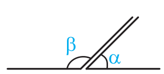
زاویه‌ی نیم‌صفحه

وضعیت دو زاویه نسبت به هم:

۱ **متمم:** دو زاویه‌ی α و β را متمم یک‌دیگر می‌نامند، هرگاه مجموع آن‌ها ۹۰° باشد.

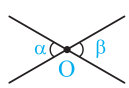


۲ **مکمل:** دو زاویه‌ی α و β را مکمل می‌نامند، هرگاه مجموع آن‌ها برابر ۱۸۰° باشد.

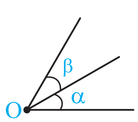


۳ **متقابل به رأس:** دو زاویه‌ی α و β را متقابل به رأس می‌نامند، هرگاه رأس آن‌ها مشترک و اضلاع آن‌ها در امتداد هم باشد.

تذکر *دو زاویه‌ی متقابل به‌رأس با هم برابرند.*

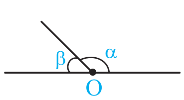


۴ **مجاور:** دو زاویه‌ی α و β را مجاور می‌نامند، هرگاه رأس و یک ضلع مشترک داشته باشند.



۵ **مجانب:** دو زاویه‌ی α و β را مجانب می‌نامند، هرگاه مجاور و مکمل باشند.

تذکر *نیمسازهای دو زاویه‌ی مجانب بر هم عمودند.*



مثال: دو زاویه‌ی A و B مجانب هم هستند. اگر زاویه‌ی بزرگ‌تر ۴ برابر متمم زاویه‌ی کوچک‌تر باشد، زاویه‌ی بزرگ‌تر چه‌قدر است؟

پاسخ:

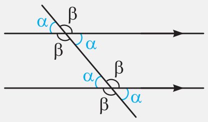
$$\begin{cases} A+B=۱۸۰^\circ \\ B=۴(۹۰-A) \end{cases} \Rightarrow ۴(۹۰-A)+A=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳A=۱۸۰^\circ \Rightarrow A=۶۰^\circ \Rightarrow B=۱۲۰^\circ$$

$$\begin{cases} \hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ \\ \hat{A}=\frac{۴}{۹}(۱۸۰^\circ-\hat{B}) \end{cases} \Rightarrow \hat{A}=\frac{۴}{۹}(۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ-\hat{A})) \Rightarrow ۹\hat{A}=۴(۹۰^\circ+\hat{A}) \Rightarrow ۵\hat{A}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۷۲^\circ$$

A+ ۲ ۳

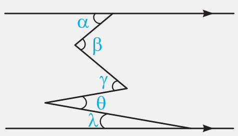
خطوط موازی و مورب

قضیه ۱. اگر یک خط مورب دو خط موازی را قطع کند، ۸ زاویه به‌وجود می‌آید که حاده‌ها با هم و منفرجه‌ها نیز با هم برابر است.



۲. اگر یک خط شکسته بین دو خط موازی گیر کرده باشد، [یعنی دو سر آن محدود به دو خط موازی باشد] مجموع زوایای طرفین این خط شکسته با هم برابر است.

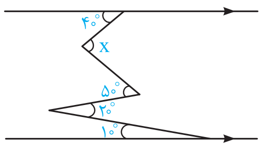
$\Rightarrow \alpha+\gamma+\lambda=\beta+\theta$



مثال: در شکل مقابل زاویه‌ی x را به‌دست آورید:

پاسخ:

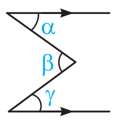
$x+20^\circ=40^\circ+50^\circ+10\Rightarrow x=80^\circ$



مثال: در شکل مقابل رابطه‌ی α و β و γ را پیدا کنید.

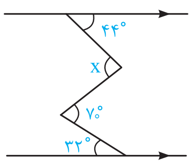
پاسخ:

$\beta=\alpha+\gamma$



چون چهارضلعی ذوزنقه است. بنابراین AB و CD موازی‌اند و در نتیجه:

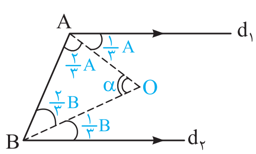
$\Rightarrow \underbrace{44^\circ+70^\circ}_{\text{مجموع زوایای رو به راست}}=\underbrace{x+32^\circ}_{\text{مجموع زوایای رو به چپ}}\Rightarrow x=82^\circ$



A+ ۳ ۳

$\underbrace{44^\circ+70^\circ}_{\text{مجموع زوایای رو به راست}}=\underbrace{x+32^\circ}_{\text{مجموع زوایای رو به چپ}}\Rightarrow x=82^\circ$

A+ ۴ ۴



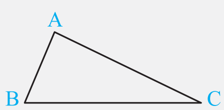
$\alpha=\frac{1}{3}\hat{A}+\frac{1}{3}\hat{B}=\frac{1}{3}(\hat{A}+\hat{B})=\frac{1}{3}\times 180^\circ=60^\circ$

A ۵ ۳

زاویه در مثلث

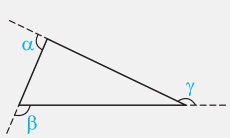
۱ مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$



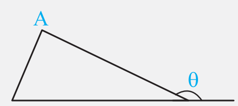
۲ مجموع زوایای خارجی هر مثلث 360° است.

$\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$



۳ هر زاویه‌ی خارجی در مثلث برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور است:

$\theta=\hat{A}+\hat{B}$



مثال: در یک مثلث زاویه‌های داخلی متناسب با اعداد ۵ و ۶ و ۷ هستند. بزرگ‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث را به‌دست آورید.

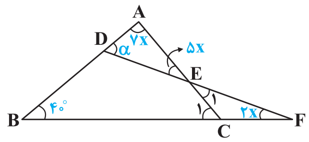
پاسخ: زاویه‌ها را $5x$ و $6x$ و $7x$ در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$5x+6x+7x=180^\circ\Rightarrow x=10^\circ$

حال زاویه‌ها 50° و 60° و 70° به‌دست می‌آیند، که بزرگ‌ترین زاویه‌ی خارجی برابر است با:

$180^\circ-50^\circ=130^\circ$

مثال: در مثلث شکل مقابل زاویه‌ی α کدام است؟



پاسخ: زاویه‌ی $E_۱$ و $۵x$ متقابل به رأس هستند و برابرند، زاویـه‌ی $C_۱$ زاویـه‌ی خـارجی مثلـث CEF است، پس:

$$C_۱ = ۵x + ۲x$$

در مثلث ABC مجموع زاویه‌ها برابر $۱۸۰°$ است، پس:

$$۷x + ۷x + ۴۰° = ۱۸۰° \Rightarrow x = ۱۰°$$

زاویه‌ی α زاویه‌ی خارجی مثلث DBF است، پس:

$$\alpha = ۴۰° + ۲x = ۶۰°$$

فرض می‌کنیم زاویه‌ها $۲x$، $۵x$ و $۸x$ باشند.

مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث برابر است با $۱۸۰°$، بنابراین:

$$۲x + ۵x + ۸x = ۱۸۰° \Rightarrow ۱۵x = ۱۸۰° \Rightarrow x = ۱۲°$$

کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی برابر مجموع کوچک‌ترین زاویه‌های داخلی است، یعنی:

$$\alpha = ۲x + ۵x = ۷x = ۷ \times ۱۲° = ۸۴°$$

A+ ۶ ۱ زاویه‌ی خارجی برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور است، بنابراین در مثلث OAB داریم:

$$۱۲۵° = \alpha + ۹۰° \Rightarrow \alpha = ۳۵°$$

در رأس B می‌توان نوشت:

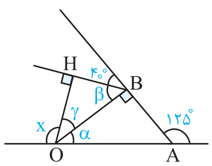
$$\beta + ۴۰° = ۹۰° \Rightarrow \beta = ۵۰°$$

در مثلث OBH داریم:

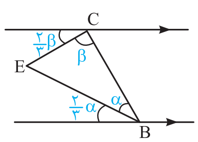
$$\gamma + \beta = ۹۰° \Rightarrow \gamma = ۴۰°$$

در رأس O خواهیم داشت:

$$x + \alpha + \gamma = ۱۸۰° \Rightarrow x = ۱۰۵°$$



B ۷ ۲



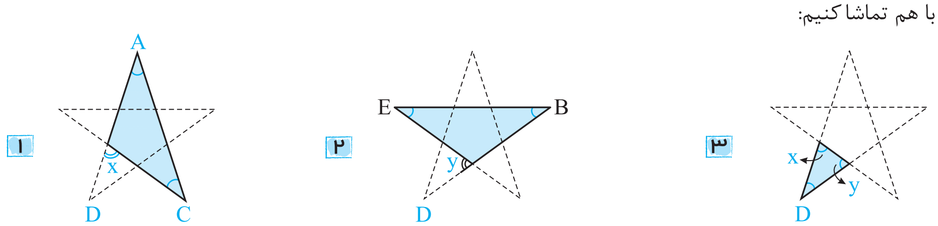
$$\hat{B}_۱ = \frac{۳}{۲}\hat{B}_۲ \xRightarrow{\hat{B}_۱=\alpha} \hat{B}_۲ = \frac{۲}{۳}\alpha$$

$$\hat{C}_۲ = \frac{۲}{۳}\hat{C}_۱ \xRightarrow{\hat{C}_۱=\beta} \hat{C}_۲ = \frac{۲}{۳}\beta$$

$$\xRightarrow[\text{و مورب}]{\text{خطوط موازی}} (\beta + \frac{۲}{۳}\beta) + (\alpha + \frac{۲}{۳}\alpha) = ۱۸۰°$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = ۱۰۸° \xRightarrow{\overset{\Delta}{EBC}} \hat{E} = ۱۸۰° - ۱۰۸° = ۷۲°$$

B ۸ ۱ مراحل حل مسأله را با هم تماشا کنیم:

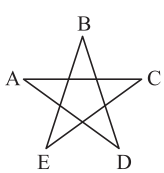


$x = \hat{A} + \hat{C}$

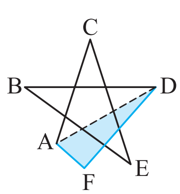
$y = \hat{E} + \hat{B}$

$\hat{x} + \hat{y} + \hat{D} = ۱۸۰° \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = ۱۸۰°$

B ۹ ۳ می‌دانیم مجموع زوایای هر ستاره یا مثلث همواره $۱۸۰°$ است.



$A + B + C + D + E = ۱۸۰°$



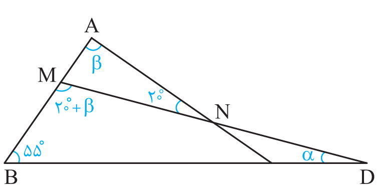
حال کافی است از D به A وصل کنیم:

$\Rightarrow$ مجموع همه‌ی زوایا = ستاره + مثلث = $۳۶۰°$

A+ ۱۰ ۳ $\widehat{BMD}$ زاویه‌ی خارجی مثلث $\overset{\Delta}{AMN}$ است، لذا: $\widehat{BMD} = ۲۰° + \beta$.

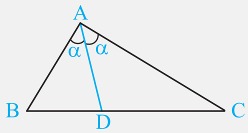
حال کافی است در مثلث $\overset{\Delta}{BMD}$ مجموع زوایا را برابر $۱۸۰°$ قرار دهیم:

$$۵۵° + ۲۰° + \beta + \alpha = ۱۸۰° \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۰۵°$$

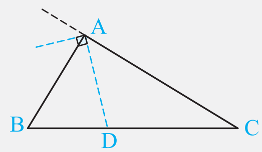


A ۱۱ ۲

نیمساز در مثلث



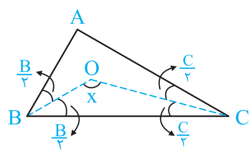
۱ نیمساز خطی است که از رأس زاویه می‌گذرد و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.



نتیجه **محل تلاقی نیمسازهای داخلی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.**

۲ نیمساز زاویه‌ی داخلی و خارجی هر رأس مثلث بر هم عمودند.

مثال: **در مثلث ABC نشان دهید زاویه‌ی بین نیمسازهای داخلی زوایای B و C برابر است با:** $۹۰+\frac{\widehat{A}}{۲}$

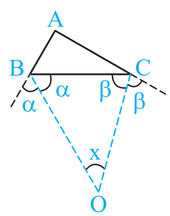


پاسخ:

$$\overset{\Delta}{OBC}: x+\frac{\widehat{B}}{۲}+\frac{\widehat{C}}{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow x+(\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۲})=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow x+(\frac{۱۸۰^\circ-\widehat{A}}{۲})=۱۸۰^\circ \Rightarrow x+۹۰^\circ-\frac{\widehat{A}}{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۹۰^\circ+\frac{\widehat{A}}{۲}$$

مثال: **در مثلث ABC نشان دهید زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی زوایای B و C برابر است با:** $۹۰-\frac{\widehat{A}}{۲}$



پاسخ:

$$\begin{cases} ۲\alpha=۱۸۰^\circ-\widehat{B} \\ ۲\beta=۱۸۰^\circ-\widehat{C} \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=۱۸۰^\circ-(\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۲})=۱۸۰^\circ-(\frac{۱۸۰^\circ-\widehat{A}}{۲})=۹۰^\circ+\frac{\widehat{A}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{OBC}: x+\alpha+\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow x+۹۰^\circ+\frac{\widehat{A}}{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۹۰^\circ-\frac{\widehat{A}}{۲}$$

تمرین: **در مثلث ABC نشان دهید زاویه‌ی بین نیمساز داخلی B و نیمساز خارجی C برابر است با:** $\frac{\widehat{A}}{۲}$

پاسخ: ....

....

....

ابتدا زوایای مثلث را به‌دست می‌آوریم؛ مجموع نسبت‌ها $۱۲=۱+۴+۷$ است. بنابراین:

$$\widehat{A}=\frac{۱}{۱۲}\times۱۸۰^\circ=۱۵^\circ \quad , \quad \widehat{B}=\frac{۴}{۱۲}\times۱۸۰^\circ=۶۰^\circ \quad , \quad C=\frac{۷}{۱۲}\times۱۸۰^\circ=۱۰۵^\circ$$

حال داریم:

$$\widehat{D}=\frac{\widehat{C}}{۲}=\frac{۱۰۵^\circ}{۲}=۵۲/۵^\circ$$

A ۱۲ ۲ زوایای مثلث به‌طور مستقیم داده نشده و باید آن‌ها را پیدا کنیم؛ پس زوایا را x ، ۲x و ۳x فرض می‌کنیم:

$$x+۲x+۳x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{A}=۳۰^\circ , \widehat{B}=۶۰^\circ , \widehat{C}=۹۰^\circ$$

حال $\widehat{ADC}$ زاویه‌ی بین نیمسازهای داخلی A و C است که برابر است با:

$$۹۰^\circ+\frac{\widehat{B}}{۲}=۹۰^\circ+۳۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

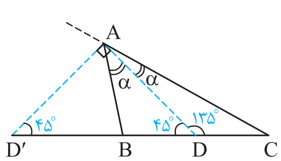
A+ ۱۳ ۳ زاویه بین دو نیمساز خارجی B و C برابر با $۹۰^\circ-\frac{\widehat{A}}{۲}$ است، لذا:

$$۹۰^\circ-\frac{\widehat{A}}{۲}=۵۵^\circ \Rightarrow \widehat{A}=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{C}=۱۱۰^\circ$$

$$\xRightarrow{\widehat{B}=۹۰+\widehat{C}} ۹۰^\circ+۲\widehat{C}=۱۱۰^\circ \Rightarrow \widehat{C}=۱۰^\circ \quad , \widehat{B}=۱۰۰^\circ$$

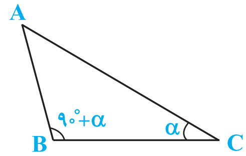
لذا مثلث غیر مشخص است.

B+ ۱۴ ۳ AD و AD′ نیمساز هستند و طولشان با هم برابر است، بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ADD'}$ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. یعنی زاویه‌های زیر ساق ۴۵° است:



$$\begin{cases} ۴۵^\circ=\alpha+\widehat{C} \\ ۱۳۵^\circ=\alpha+\widehat{B} \end{cases} \Rightarrow \widehat{B}-\widehat{C}=۹۰^\circ$$

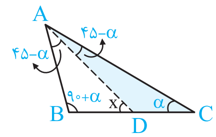
B ۱۵ | ۳



ابتدا شکل را رسم می‌کنیم. باتوجه به این‌که $\widehat{B}-\widehat{C}=۹۰^\circ$ می‌باشد، زاویه‌ی B منفرجه است. با فرض $\widehat{C}=\alpha$، زاویه‌ی $\widehat{B}=۹۰+\alpha$ خواهد بود.

زاویه‌ی A از مثلث ABC برابر است با: $\widehat{A}=۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+\alpha+\alpha)=۹۰^\circ-۲\alpha$

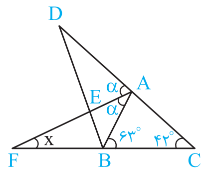
چون AD نیمساز است، پس مطابق شکل داریم:



زاویه‌ی x زاویه‌ی خارجی مثلث ADC است، پس:

$$x=۴۵^\circ-\alpha+\alpha=۴۵^\circ$$

A+ ۱۶ | ۳



در مثلث ABC زاویه‌ی ۲α زاویه‌ی خارجی است، بنابراین:

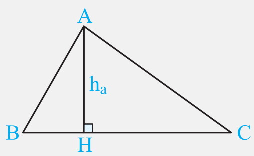
$$۲\alpha=۶۳^\circ+۴۲^\circ=۱۰۵^\circ\Rightarrow\alpha=۵۲/۵^\circ$$

در مثلث AFB هم ۶۳° زاویه‌ی خارجی است، بنابراین:

$$۶۳^\circ=\alpha+x\Rightarrow x=۶۳^\circ-۵۲/۵^\circ=۱۰/۵^\circ$$

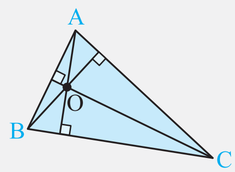
A ۱۷ | ۱

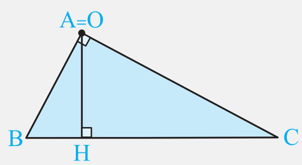
ارتفاع در مثلث

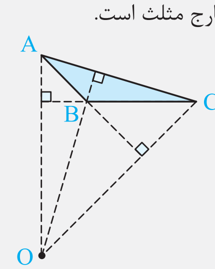


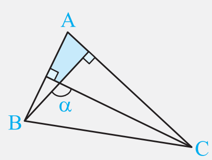
۱ ارتفاع خطی است که از رأس بر ضلع مقابل عمود می‌شود.

۲ محل تلاقی ارتفاع‌ها در مثلث‌های حادالزاویه، داخل مثلث و در مثلث‌های قائم‌الزاویه رأس قائمه و در مثلث‌های منفرجه‌الزاویه خارج مثلث است.



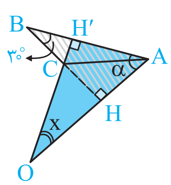






۳ زاویه‌ی بین دو ارتفاع خارج شده از رأس‌های B و C (وارد بر اضلاع b و c) که در درون مثلث متقاطع باشند، برابر است با:

$$\alpha=۱۸۰-\widehat{A}$$



مثال: در مثلث ABC، اگر $A=۲۰^\circ$ و $B=۳۰^\circ$ باشد، زاویه‌ی بین ارتفاع AH و CH′ را به‌دست آورید.

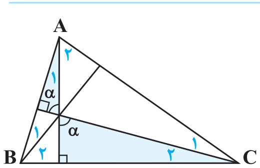
پاسخ: زاویه‌ی سوم این مثلث $C=۱۳۰^\circ$ است، بنابراین مثلث منفرجه‌الزاویه است و ارتفاع‌ها خارج مثلث هم‌دیگر را قطع می‌کنند:

مثلث‌های ABH و OAH′ هر دو قائم‌الزاویه هستند و یک زاویه‌ی مشترک α دارند، بنابراین زاویه‌ی دیگر آن‌ها نیز برابر است، یعنی: $x=۳۰^\circ$

مثلث حادالزاویه می‌باشد و ارتفاع‌ها درون مثلث متقاطع‌اند:

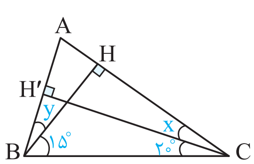
$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\widehat{C}=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ-۴۰^\circ=۸۰^\circ\Rightarrow\widehat{BHA}=۱۸۰-\widehat{C}=۱۰۰^\circ$$

A+ ۱۸ | ۴



$$\widehat{A}_۱+۹۰^\circ+\alpha=\widehat{C}_۲+۹۰^\circ+\alpha\Rightarrow\widehat{A}_۱=\widehat{C}_۲$$

B ۱۹ | ۲



$$\overset{\Delta}{BHC}:(x+۲۰^\circ)+۱۵^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow x=۵۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BH'C}:(y+۱۵^\circ)+۲۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow y=۵۵^\circ$$

$$\Rightarrow\widehat{A}=۱۸۰^\circ-(۷۰^\circ+۷۵^\circ)=۳۵^\circ$$

$$\Rightarrow\widehat{B}-\widehat{A}=۷۰^\circ-۳۵^\circ=۳۵^\circ$$