ویرایش جدید
با تغییرات کلی

مهروماه

9786003170063

هندسه جامع

هندسه تحلیلی + هندسه پایه

هندسه ۱ | هندسه ۲
هندسه تحلیلی و جبرخطی

مهندس منصور سعیدی
مهندس محمدرضا میرجلیلی

به نام پروردگار مهربان

مهر و ماه
9786003170063

هندسه جامع

هندسه تحلیلی + هندسه پایه

ویرایش جدید

هندسه ۱ | هندسه ۲
هندسه تحلیلی و جبرخطی

مهندس منصور سعیدی
مهندس محمدرضا میرجلیلی

فهرست

		صفحه
۰	هندسه مختصاتی	۹
۱	بردارها	۲۷
۲	معادلات خط و صفحه	۱۰۹
۳	مقاطع مخروطی	۱۸۹
۴	ماتریس و دترمینان	۲۸۱
۵	دستگاه معادلات خطی	۳۴۹
۶	استدلال در هندسه	۳۹۵
۷	مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس	۴۶۷
۸	تالس و تشابه	۴۹۹
۹	اشکال فضایی	۵۲۳
۱۰	دایره	۵۵۱
۱۱	تبدیلات هندسی	۵۸۹
۱۲	هندسه در فضا	۶۲۱
۱۳	آزمون‌های جامع	۶۴۵
	پاسخنامه‌ی تشریحی آزمون‌های جامع	۶۵۲

زندگی صحنه‌ی یکتای هنرمندی ماست
هرکسی نغمه‌ی خود خواند و از صحنه رود
صحنه پیوسته به جاست
خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد

«قسم به قلم و آنچه می‌نویسد.»

شاید نگارش و تألیف یک کتاب را نیز بتوان به نوعی اختراع نامید، با این تفاوت که بیشتر باب بر این شده که مخترع، یک وسیله کاربردی اختراع می‌کند، اما یک مؤلف و نویسنده حاصل اندیشیدن را به وجود می‌آورد. به همین دلیل نگارش و خلق کردن یک کتاب با اندیشه جدید برای بسیاری امری دشوار و دور از ذهن تصور می‌شود. اما اگر کسی در خود این توان را ببیند می‌تواند با نوشتن و خلق یک اثر با تجربه و بر دانش، آن را به همنوعان خود هدیه دهد. در همین زمینه گوته شاعر آلمانی می‌گوید: **«اگر می‌خواهید کاری بکنید و توانایی انجامش را دارید، خوب انجامش دهید».**
ما هم در خود توانایی لازم را یافتیم و بیش از ۳۰ ماه تلاش کردیم تا مجموعه‌ی دیگری را با همت ناچیزمان به ثمر برسانیم. سعی کردیم این کتاب را متفاوت از همه کتاب‌هایی که تاکنون در درس هندسه دیده‌ایم و خوانده‌ایم بنویسیم و در این سیر هم از دوستانمان که در این زمینه نیز تجربه دارند کمک بگیریم.

درس اثرگذار! ...

معمولاً اگر از هر دانش‌پژوه رشته‌ی ریاضی، سؤال شود که برای تست‌های ریاضی کنکور چه برنامه‌ای داری، میگه که من دیفرانسیل را کامل می‌خونم و یک کمی هم هندسه تحلیلی و جبر و احتمال و وقت تست‌های هندسه پایه و گسسته را روی درس‌های دیگه‌ام می‌ذارم، شاید این دانش‌آموز به این نکته توجه ندارد که دیگران هم مانند او فکر می‌کنند و بیشتر به همین دروس برای پاسخ‌گویی به ۵۵ سؤال ریاضی کنکور می‌پردازند. اما در نهایت درس‌هایی در کنکور تعیین‌کننده خواهد بود که عده‌ی کم‌تری آن را می‌خوانند و عده‌ی بیشتری از آن صرف‌نظر می‌کنند. هندسه‌ی پایه یکی از درس‌های اثرگذار در آزمون کنکور ریاضی می‌باشد و دلیل واضح آن، این است که بیش از ۹۰ درصد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی از این درس صرف‌نظر می‌کنند و یاد در آن موفق نیستند. چنان‌چه به آمار سال‌های اخیر کنکور سراسری توجه کنیم، مشاهده خواهیم کرد که بیش از ۸۵ درصد دانش‌آموزان به سؤالات هندسه پایه دست نزده‌اند و حتی بیش از ۹۵ درصد داوطلبان حداکثر به دو سؤال آن توانسته‌اند پاسخ صحیح دهند ولی ما به جرأت و اطمینان کامل می‌گوییم که اگر کسی مطالب گفته شده در این کتاب را مطالعه کند و بر موضوعات مختلف آن تسلط کامل داشته باشد قادر خواهد بود به بیش از ۱۳ سوال از ۱۶ سوال مطرح شده در کنکور پاسخ صحیح بدهد.

یک کتاب عالی! ...

عدم وجود یک مرجع کامل (شامل تشریح کامل درس به همراه نکات مهم و پرسش‌های چهار گزینه‌ای تألیفی و کنکوری) در درس هندسه‌ی رشته ریاضی و پراکندگی و نقایص کتاب‌های موجود ما را بر آن داشت تا به خواسته دانش‌آموزان این رشته پاسخ دهیم و به نگارش کتابی که در دست دارید بپردازیم. با مطالعه این کتاب که ویژه‌ی رشته ریاضی تهیه شده است دانش آموزان این رشته به کتاب‌های کمک‌درسی متعدد و پراکنده نیازی نخواهند داشت. کتاب حاضر براساس سرفصل‌های ریاضیات کنکور ریاضی در **۱۴ فصل** تألیف شده است و کلیه مطالب دروس **هندسه ۱، هندسه ۲ و هندسه تحلیلی و جبرخطی** را تحت پوشش خود قرار می‌دهد. به لحاظ جامعیت مباحث و دربرداشتن آموزش کامل به‌همراه بیش از **۴۰۰۰ تست** در این حجم به جرأت می‌توان گفت که این مجموعه کاملترین و غنی‌ترین کتاب هندسه موجود است.

راهنمای بخش‌ها و نمادهای کتاب

هر فصل کتاب شامل چهار بخش کلی به این شرح است. بخش اول: درس‌نامه جامع، بخش دوم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای تفکیکی، بخش سوم: آزمون جامع فصل و بخش چهارم: پاسخنامه تشریحی.

۱. درس‌نامه: درس‌نامه در هر فصل موارد زیر را در بر می‌گیرد:

نمای کلی فصل: در ابتدای هرفصل مقدمه ای شامل جایگاه و اهمیت فصل و میزان سئوالات مطرح از آن در کنکور سراسری به همراه نمودار نمای کلی فصل درج شده است. این نمودار که بر مبنای ترتیب و تقسیمات درس‌نامه تنظیم شده به شما کمک می‌کند تا ساختار فصل و «نقشه هوایی» درس را مرور کنید.

آموزش: در این بخش مطالب درسی، نکات آموزشی و نکات مورد نیاز برای حل تست‌ها در ایستگاه‌های مختلف آورده شده است. بهتر است پس از خواندن کامل مطالب آموزشی هر ایستگاه، به سراغ پاسخ تست‌های آن ایستگاه بروید. از آنجا که

در این بخش روال آموزشی دنبال شده است، بنابراین برای فهم بهتر و حفظ پیوستگی موضوعات بهتر است که مطالب درس‌نامه به ترتیبی که آمده است مطالعه شود.
در این قسمت روابط و فرمول‌های کاربردی و مهم داخل باکس مشخص شده‌اند. همچنین نکته، تذکر، توجه، یادآوری، توضیح و نتیجه مواردی هستند که در بخش آموزش با علامت‌های زیر آمده‌اند.

نکته **تذکر** **توجه** **یادآوری** **توضیح** **نتیجه**

مثال آموزشی: بسیاری از مباحث ریاضیات با حل مثال، بهتر فهمیده می‌شود. در بخش درسنامه هرجا که نیاز بوده مثال‌های آموزشی با حل مرحله‌ای و کامل آمده است.

تست نمونه: در این قسمت تستهای مختلف برای تکرار و تمرین مطالب آموزشی به منظور تسلط بیشتر، آورده شده است. حل و فهم تمام تستهای نمونه ضروری است، زیرا با حل این تستها، نکات آموزشی مطرح شده را بهتر فرا خواهید گرفت و تسلط بیشتر بر مفاهیم ارائه شده پیدا خواهید کرد. توصیه می شود ابتدا سعی کنید که تست نمونه را خودتان حل کنید وسپس پاسخ کتاب را با آن مقایسه کنید.

۲. پرسش‌های چهارگزینه‌ای: در انتهای هر فصل براساس طبقه‌بندی موضوعی فصل، تست‌ها به‌صورت ایستگاه‌های مختلف ارائه شده است.
این ایستگاه‌بندی با سرفصل‌های درس‌نامه کتاب هماهنگ است. تعداد تست‌های هر مبحث بستگی به حجم فصل و اهمیت آن مبحث دارد. سعی شده است که این تست‌ها استاندارد و از نظر کیفیت و سطح مشابه آزمون کنکور باشند. سعی کنید تستهای کنکوری را در زمانی کمتر از زمان کنکور حل کنید (برای هر تست به‌طور متوسط ۱ دقیقه و ۴۰ ثانیه در کنکور زمان دارید). اگر در برخی از مبحث‌های موضوعی نتیجه خوبی نگرفتید توصیه می‌کنیم یک بار دیگر درسنامه مربوط به آن مبحث را مطالعه کنید.

۳. آزمون‌های جامع: پس از تست‌های تفکیکی در انتهای هرفصل، چند آزمون جامع از مجموعه مباحث آن فصل فراهم شده است که پاسخ به آن می تواند تسلط شما را بر مجموعه‌ی مطالب سنجش نماید. پاسخنامه کلیدی این آزمون‌ها در انتهای پاسخنامه تشریحی فصل آمده است. به منظور امکان ارزیابی بهتر مخاطب، یک فصل مستقل در انتهای کتاب به آزمون‌های جامع اختصاص یافته است که شامل ۶ آزمون استاندارد مشابه کنکور می باشد. سعی کنید آزمون‌های جامع را در زمان تعیین شده پاسخ دهید.

٤. پاسخنامه تشریحی: تست‌های تفکیکی کتاب به صورت کاملا تشریحی پاسخ داده شده است. در کنار هر پاسخ سطح تست به لحاظ میزان دشواری مشخص شده است. تست ها در ۴ سطح آسان، متوسط، سخت و خیلی سخت سطح‌بندی شده‌اند، که با نمادهای زیر نمایش داده شده است: A B C D

نحوه‌ی استفاده از این کتاب

۱ ابتـدا نگاهـی به نمای کلی فصل (نموداری که ابتدای فصل آمده) بیاندازید تا مسـیر کلی مباحث و موضوعات مهم در ذهن شما مرور شود.

۲ درس‌نامه را با حوصله مطالعه کنید اگر احسـاس می‌کنید فهم مطالب برای شـما دشوار است لازم است به کتاب‌های درسی مراجعه کنید تا درک پایه خود از آن مبحث را تقویت کنید.

۳ روابط و فرمول ها را تجزیه و تحلیل کنید. دقت کنید که لازم نیسـت همه فرمول‌ها را حفظ کنید بلکه بهتر اسـت اولا در صورت امکان، مفهوم رابطه و فرمول و یا اثبات قضایا را متوجه شوید و سپس با تمرین کافی به کاربرد آن مسلط شوید. روابط و فرمول‌های مهم در این کتاب داخل کادر خاکستری آمده است. خوب است چندین بار فرمول‌ها، روابط و نکات مهم هر قسمت را برای خود بنویسید و مرور کنید.

۴ برای تسلط کامل بر نکات و فرمول‌ها مثال های آموزشی را بررسی نموده و تست‌های نمونه را بدون نگاه کردن به پاسخ تشریحی آن‌ها، حل کنید.

۵ در صورتی که از حل مسأله بازماندید، جواب تشریحی آن را مطالعه کرده و روش حل مسأله را یاد بگیرید زیرا در مسائل هندسه، روش‌های حل بسیار به هم نزدیکند.

۶ در صورتی که پاسخ برخی مسائل، برای شما مبهم بود حتماً به کمک دوستان و دبیران خود سعی کنید راه حل مسأله را بیاموزید.

۷ برای تمرین مفاهیم و نکات به سر فصل‌های موضوعی تست‌ها مراجعه کنید.

۸ در انتهای تست‌های هر فصل قسمتی تحت عنوان «برای ۱۰۰ درصد» آورده شده است که این قسمت برای دانش‌آموزانی آورده شده است که می‌خواهند با مسائل سطح بالاتری هم دست و پنجه نرم کنند.

۹ در پایان مطالعه کتاب برای جمع بندی و سنجش خود می‌توانید، آزمون‌های جامع انتهای کتاب را پاسخ دهید.

۱۰ در فصل مرور و جمع‌بندی (۱ تا ۲ ماه مانده به کنکور) می‌توانید برای جمع‌بندی سریع مطالب از **کتاب آخر هندسه تحلیلی و ریاضیات گسسته** که توسط همین انتشارات در قطع کوچک بصورت فشرده و مختصر تمام فرمول‌ها و روابط را دوره نموده و تیپ‌های تست‌های مطرح در کنکور را دسته‌بندی کرده است استفاده کنید.

سپاس‌نامه

در پایـان از مدیریت محترم انتشـارات مهروماه، جناب آقای احمد اختیاری کـه همواره در راه ارتقای این اثر با صبر و حوصله‌ای مثال زدنی ما را یاری نمودند کمال تشـکر و قدردانی را داریم و از خداوند متعال بهترین‌ها را برای ایشـان آرزومندیم و ممنونیم از:

- تشکر ویژه از همکاران گرامی خانم سوگند روشنی و آقای میثم حمزه‌لوئی به‌خاطر همه‌ی توانی که جهت ارتقای این اثر گذاشتند.
- خانم لاله پارسی و آقای سامان شاهین‌پور که زحمت اصلی حروف‌چینی و صفحه‌آرایی کتاب را بر عهده داشته‌اند.
- آقای علیرضا پورخمسه به‌خاطر رسم شکل‌های زیبا
- آقای محسن فرهادی به‌خاطر طراحی جلد کتاب و تمامی کارهای لازم برای بهتر بودن کتاب.
- آقایان میثم حمزه‌لوئی، سـید شـهاب‌الدین سـید صالحی، محمدجواد عددیان و حسین رضایی و خانم‌ها سوگند روشـنی، منصوره شاعری، زهرا امینیان و مینا نظری به‌خاطر بازخوانی کتاب و مطابقت دست نوشته‌ها با متن تایپی و ویرایش همه جوره‌ی متن که به بهترین شکل ممکن انجام شده است. (واقعاً خسته نباشند!)
- دانش‌آموزان خوب دبیرسـتان‌های خواجه نصیرالدین طوسـی، سروش، روشن‌گر، سـیمای نور و نورا، به‌خصوص آقایان سعید اسدیان، محمدعلی مهری و خانم‌ها یاسمن سعیدی، مونا رضایی و مارال دکتر ارسطو که مایه‌ی دلگرمی ما برای ارتقای سطح این کتاب چه از لحاظ کیفی و چه از لحاظ کمی بودند.
- آقای عباس گودرزی، مدیر فروش انتشارات به خاطر حمایت‌های همه جانبه‌ی ایشان.
- سایر پرسنل محترم و زحمت‌کش انتشارات مهروماه به‌خاطر همه‌ی لطفی که داشته و دارند.

مطالب این کتاب با هدف بسـط و تشـریح مباحث موجود در کتاب درسـی تهیه و تدوین گردیده است. کوشش ما بر این بوده اسـت که خواننده با مطالعه مثال‌های متنوع و شرح مطالب درسی و مورد نیاز، بتواند پرسش‌های علمی خود را تا حد ممکن مرتفع نماید.

از کلیـه صاحبنظران، اسـتادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواسـت می‌نماییم این مجموعـه را از نقد و نظر خود محروم ننمایند. خواهشـمند اسـت نظرات ارزشـمند خود را به نشـانی الکترونیکی mansaiedi@yahoo.com و mr_mirjalili@yahoo.com اعلام فرمایید.

تقدیم به همسرانمان بخاطر همه‌ی محبت‌هایشان، که اگر نبودند، این کتاب هم اینگونه نبود

مولفین

ریاضی را چگونه بخوانیم!

دست‌نوشته‌ی رتبه‌ی یک کنکور ریاضی ۹۳
یاسمن سعیدی

سرکار خانم یاسمن سعیدی، فرزند مهندس سعیدی، مؤلف کتاب حاضر هستند که به خواسته‌ی انتشارات متنی را برای شما نوشته‌اند؛ ایشان مطالب این کتاب را در سال کنکور مطالعه کرده‌اند و همچنین در ویرایش و تقویت کتاب در چاپ جدید، همراه پدرشان بوده‌اند. امیدواریم که شما هم با مطالعه‌ی این کتاب به موفقیت‌هایی بزرگ دست پیدا کنید.

انتشارات مهروماه

دستم را در باغچه می‌کارم، سبز خواهم شد، می‌دانم!

حالا که کار ما به شکفتن تمام شود، انگار به قول شاعر "از این جایی که هستم تا شهر معلومه" و چیزهایی که شنیدین حتماً لازمه که دو سال درس درست خوندن. در این نوشته، نوشتم که راه‌های چهارتا درس درست به مقصد عالی ریاضی!

از این که اعظم یادگیری سر کلاس درسه. مخصوصاً در درس دیفرانسیل. ولی نکته‌ای که فقط گفتم باید به مرور زیادی واحد و شیوه‌ی مراجعه شون که این روشا که قبلاً فراموش شنید یا دونستید کرده باشید. و سؤالات ریاضی هم به خوبی برسید. احیاناً اگر کتاب خوبی هم هست که این نکات رو جمع‌بندی کرده باشه طی مسیری از اتلاف وقت می‌تونید از اینش استفاده کنید. گسترش تعداد تست زدن طی دو مرحله است. مرحله اول به مقصد صرفاً یادگرفتن و بدون توجه به زمان (که تعداد دقیق تست مشخص یکنواخت داره و منظورم اینه که تعیین کنید چند ساعت قراره وقت بذارید، نه اینکه چند تا تست بزنید. یعنی مثلاً یک ساعت دیگه گذشته به جای چند تا تست نوشته!) در این مرحله باید وقت زیاد بذارید و با پاسخ‌نامه مراجعه کنید و راه حل اصلی رو بررسی کنید. مرحله بعد تست زدن به مقصد عمیق و سریع شدنه. در انتها به بررسی موردی جواب‌ها اصول می‌پردازید و نکته‌ای که هنوز برایش به جایی یادداشت کنید. سؤال از مهم بودن علامت تعدادی تست‌ها تعداد مرور کنید. بنابراین شما در درس ریاضی فقط به تعداد بالای تست زدن و کار مرور اصل نشان داده. اول سؤال‌های کنکوری و بعد شکل حل سؤال (کامل بررسیه) بعد هم از کتاب‌های کمک آزمون‌های آزمایشی مختلف. و به این ترتیب کنکور آشنا باشید و نکات مهم در دفتر یادداشت کرده باشید. سر آزمون هم چی هست! خودکار شکر هم کاملاً متقابلاً مربوط از طرف مهم است و از آزمون‌ها یه دانید در مرور کنید.

نکته دیگر هم برای ترسیدن از مسائل دیفرانسیل و کنکوری درسنامه نشنیدید تست رو حداقل یک بار حل کرده باشید.

موفق باشید

یاسمن سعیدی، اول تیرماه

فصل صفرم

۰

هندسه‌ی مختصاتی

تمامی مطالبی که به محورهای مختصات و معادله‌ی خط برمی‌گردد را به طور کلی هندسه‌ی مختصاتی می‌نامند. به دلیل نیاز مبرم به مطالب این فصل برای تحلیل مسائل و مفاهیم فصل‌های دیگر کتاب به خصوص فصل سوم (مقاطع مخروطی)، خلاصه‌ای از مبحث هندسه‌ی مختصاتی که به آن نیاز است در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد. (صرفاً جهت یادآوری)
وضعیت دو نقطه نسبت به هم

راهنمای ایستگاه‌ها

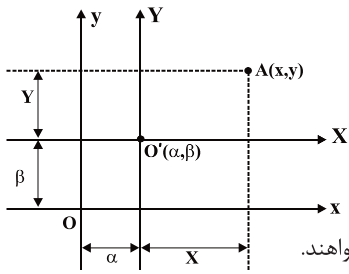
۱ انتقال محورهای مختصات

۲ وضعیت دو نقطه نسبت به هم

۳ معادله‌ی خط

۴ وضعیت یک نقطه نسبت به یک خط

ایستگاه ۱ انتقال محورهای مختصات



هرگاه محورهای مختصات را با حفظ جهت به نقطه‌ی $O'(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم، آن‌گاه مختصات نقطه‌ی $A(x,y)$ در دستگاه $XO'Y$ از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x=\alpha+X \\ y=\beta+Y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$$

تذکر: در حل مسائل مربوط به این مبحث دو تا از پارامترها داده می‌شود و پارامتر سوم را از ما می‌خواهند.

تست نمونه

● **هرگاه مبدأ مختصات را با حفظ جهت محورها به نقطه‌ی $O'(۱,-۱)$ منتقل کنیم، معادله‌ی خط $x-۲y=۳$ در دستگاه جدید کدام است؟**

۱) $x=۲y$ ۲) $y=۲x$ ۳) $y=-۲x$ ۴) $x+۲y=۰$

حل: در این سؤال $O'(\alpha,\beta)$ و مختصات قدیم (معادله‌ی خط در دستگاه قدیم) داده شده است و مختصات جدید (معادله‌ی خط در دستگاه جدید) خواسته شده است، بنابراین:

$$\begin{matrix} x=X+\alpha=X+۱ \\ y=Y+\beta=Y-۱ \end{matrix} \xrightarrow{\text{در معادله‌ی خط}} (X+۱)-۲(Y-۱)=۳ \Rightarrow X-۲Y=۰ \Rightarrow X=۲Y$$

● **مبدأ مختصات را به کدام نقطه منتقل کنیم تا معادله‌ی تابع $y=۲x^۲-۴x+۳$ به صورت $Y=۲X^۲$ ساده شود؟**

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(-۱,۹)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(۳,۲)$

حل: در این سؤال نقطه‌ی مجهول $O'(\alpha,\beta)$ از ما خواسته شده است.

$$\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases} \Rightarrow Y+\beta=۲(X+\alpha)^۲-۴(X+\alpha)+۳ \Rightarrow Y=۲X^۲+(۴\alpha-۴)X+(۲\alpha^۲-۴\alpha+۳-\beta)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق صورت سؤال}} ۲X^۲+(۴\alpha-۴)X+(۲\alpha^۲-۴\alpha+۳-\beta)=۲X^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴\alpha-۴=۰ \Rightarrow \alpha=۱ \\ ۲\alpha^۲-۴\alpha+۳-\beta=۰ \Rightarrow ۲-۴+۳-\beta=۰ \Rightarrow \beta=۱ \end{cases} \Rightarrow O'(۱,۱)$$

تذکر: در تابع درجه‌ی دو اگر مبدأ مختصات را به رأس سهمی منتقل کنیم، معادله به فرم $Y=aX^۲$ ساده می‌شود. بنابراین برای مثال بالا داریم:

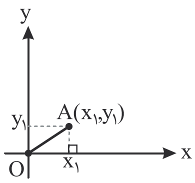
$$S(-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲\times ۲}=۱, f(۱)=۱) \Rightarrow S(۱,۱)$$

مختصات طول رأس سهمی برابر است با:

$$x=\frac{-b}{۲a}$$

ایستگاه ۲ وضعیت دو نقطه نسبت به هم

۱ فاصله‌ی نقطه تا مبدأ مختصات:



فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ از مبدأ مختصات یعنی نقطه‌ی $O(۰,۰)$ برابر است با: $|OA|=\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}$

$|OA|$ طول پاره خطی است که O را به A وصل می‌کند.

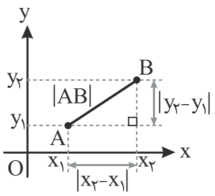
اگر به شکل مقابل توجه کنید متوجه خواهید شد که طول $|OA|$ با کمک قضیه‌ی فیثاغورس محاسبه می‌شود.

مثال آموزشی

● **فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-۱,۲)$ از مبدأ مختصات چقدر است؟**

حل: با کمک رابطه‌ی بالا: $|OA|=\sqrt{(-۱)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{۵}$

۲ فاصله‌ی بین دو نقطه یا طول یک پاره‌خط:



فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ از نقطه‌ی $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با: $|AB|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$

$|AB|$ همان طول پاره‌خطی است که A را به B وصل می‌کند.

همانند شکل مقابل و با کمک قضیه‌ی فیثاغورس طول $|AB|$ محاسبه می‌شود.

تست نمونه

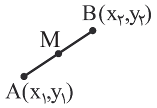
● **هرگاه دو نقطه‌ی $A(-۱,۲)$ و $B(۲,-۲)$ دو سر قطر یک دایره باشند، محیط این دایره کدام است؟**

۱) $۲/۵\pi$ ۲) ۵π ۳) ۳π ۴) ۱۵π

حل: فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی A و B در حقیقت همان اندازه‌ی قطر دایره است، پس:

$$\text{قطر دایره}=D=AB=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵ \qquad \text{محیط دایره}=۲R\pi=D\pi=۵\pi$$

۳ مختصات وسط پاره‌خط:



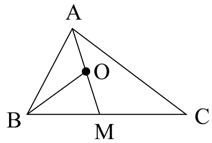
مختصات وسط پاره‌خط رسم شده بر دو نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ ، $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$M=\frac{A+B}{۲}=(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$$

کاملاً مشخص است که طول نقطه‌ی M ، میانگین طول‌های A و B است و عرض آن میانگین عرض‌های A و B است.

مثال آموزشی

● **فرض کنید نقاط $A(۲,۳)$ و $B(-۷,۴)$ و $C(۳,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند.**
اگر نقطه‌ی O وسط میانه‌ی AM از مثلث ABC باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی O تا رأس B را به دست آورید.



حل: نقطه‌ی M وسط ضلع BC می‌باشد، بنابراین از فرمول مختصات وسط یک پاره‌خط می‌توانیم مختصات نقطه‌ی M را به دست آوریم:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{-۷+۳}{۲}=-۲ \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۴-۲}{۲}=۱\Rightarrow M(-۲,۱)$$

چون نقطه‌ی O وسط AM است داریم:

$$x_O=\frac{x_A+x_M}{۲}=\frac{۲-۲}{۲}=۰ \quad \text{و} \quad y_O=\frac{y_A+y_M}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲\Rightarrow O(۰,۲)$$

و در نتیجه طول OB برابر است با:

$$|OB|=\sqrt{(x_B-x_O)^۲+(y_B-y_O)^۲}=\sqrt{(-۷-۰)^۲+(۴-۲)^۲}=\sqrt{۴۹+۴}=\sqrt{۵۳}$$

تست نمونه

● **اگر $A(۴,۵)$ و $B(-۲,۱)$ و مبداء مختصات، سه رأس مثلث ABO باشند، طول میانه‌ی OM در این مثلث کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)**

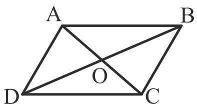
۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

حل: نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد، بنابراین:

$$M=\frac{B+A}{۲}\Rightarrow M(x_M=\frac{-۲+۴}{۲}=۱,y_M=\frac{۱+۵}{۲}=۳)\Rightarrow|OM|=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

نتایج:

۱ در چهارضلعی ABCD که قطرها منصف هم هستند، نقطه‌ی وسط هر دو رأس مقابل، محل تلاقی قطرهاست.



بنابراین با توجه به شکل مقابل در متوازی الاضلاع ABCD داریم:

$$\frac{A+C}{۲}=\frac{B+D}{۲}\Rightarrow\boxed{A+C=B+D}$$

تست نمونه

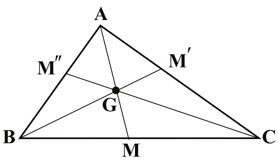
● **اگر AC قطر متوازی‌الاضلاع ABCD باشد و $A(-۱,۷)$ ، $B(۲,-۳)$ و $C(۶,۰)$ باشد، مختصات D کدام است؟**

۱) (۲,۱۰) ۲) (۳,۱۰) ۳) (۲,۹) ۴) (۳,۹)

حل: مطابق با نتیجه‌ی قبل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow-۱+۶=۲+x_D\Rightarrow x_D=۳\\ y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow۷+۰=-۳+y_D\Rightarrow y_D=۱۰\end{array}\right\}\Rightarrow D(۳,۱۰)$$

۲ **مختصات مرکز ثقل مثلث (محل برخورد میانه‌ها):**



$$G=\frac{A+B+C}{۳}\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳}\end{cases}$$

مثال آموزشی

● **در مثلث ABC اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۷)$ دو رأس مثلث و $G(-۲,۵)$ محل تلاقی میانه‌های این مثلث باشند، فاصله‌ی رأس C از این مثلث تا مبدأ مختصات را به دست آورید.**

حل: از رابطه‌ی مختصات مرکز ثقل مثلث داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳}\Rightarrow-۲=\dfrac{-۱+۳+x_C}{۳}\Rightarrow x_C=-۸\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳}\Rightarrow۵=\dfrac{۲+۷+y_C}{۳}\Rightarrow y_C=۶\end{array}\right.\Rightarrow C(-۸,۶)$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی C را تا مبدأ مختصات می‌یابیم:

$$|OC|=\sqrt{x_C^۲+y_C^۲}=\sqrt{(-۸)^۲+(۶)^۲}=\sqrt{۶۴+۳۶}=۱۰$$

ایستگاه ۳ معادله‌ی خط

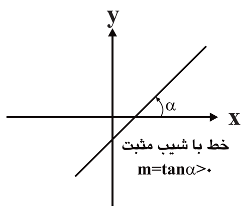
۱ تعریف: نمودار هر معادله که در آن x و y از درجه‌ی اول باشند، یک خط راست می‌باشد. بنابراین معادله‌ی کلی خط به صورت زیر می‌باشد:

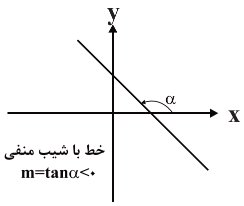
$$ax+by+c=0 \text{ معادله‌ی ضمنی خط } \Rightarrow by=-ax-c \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

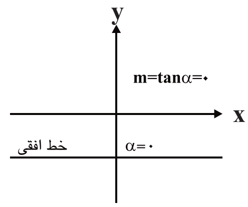
با فرض $-\frac{a}{b}=m$ و $-\frac{c}{b}=h$ داریم: $y=mx+h \rightarrow$ معادله‌ی صریح خط

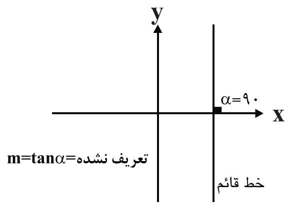
۲ شیب خط:

۱ شیب خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.









نتیجه: هر خط افقی دارای شیب صفر است و برای خط قائم شیب تعریف نمی‌شود.

۲ شیب خط، هرگاه معادله‌ی خط معلوم باشد:

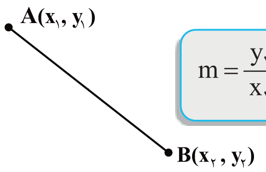
معادله‌ی ضمنی: $ax+by+c=0 \Rightarrow$ شیب خط $=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} \Rightarrow m=-\frac{a}{b}$

معادله‌ی صریح: $y=mx+h \rightarrow$ شیب خط $=$ ضریب $x=m$

۳ شیب خط، هرگاه دو نقطه از خط معلوم باشد:

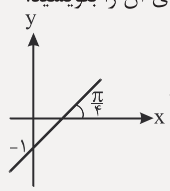
در این حالت کافی است نسبت تفاضل عرض‌ها به تفاضل طول‌ها را بیابیم، یعنی:

$$\boxed{m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

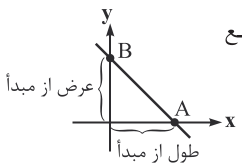


۳ معادله‌ی خط

معادله‌ی خط با داشتن شیب و یک نقطه از آن قابل نوشتن است. به جدول زیر توجه کنید:

داده‌ها	روش	مثال
داشتن شیب و یک نقطه از خط	$\begin{cases}A(x_1,y_1)\\ \text{شیب}=m\end{cases} \Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$	$\begin{cases}A(-2,1)\\ m=3\end{cases} \Rightarrow$ معادله‌ی خط: $y-1=3(x-(-2))$
داشتن دو نقطه از خط	$\begin{cases}A(x_1,y_1)\\ B(x_2,y_2)\end{cases} \Rightarrow y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$	$\begin{cases}A(2,-1)\\ B(0,3)\end{cases} \Rightarrow$ معادله‌ی خط: $y-3=\frac{3-(-1)}{0-2}(x-0)$
داشتن زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور xها و یک نقطه از خط	$\begin{cases}A(x_1,y_1)\\ \text{زاویه}=\alpha\end{cases} \Rightarrow y-y_1=\tan\alpha(x-x_1)$	اگر نمودار خط d به صورت زیر باشد معادله‌ی آن را بنویسید:  $\begin{cases}A(0,-1)\\ \alpha=\frac{\pi}{4}\end{cases} \Rightarrow y-(-1)=\tan\frac{\pi}{4}(x-0)$

۴ طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط: هرگاه خطی محور طول‌ها را در نقطه‌ی A و محور عرض‌ها را در نقطه‌ی B قطع کند، فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ را طول از مبدأ و فاصله‌ی نقطه‌ی B تا مبدأ را عرض از مبدأ می‌گویند. (شکل روبه‌رو)



- برای تعیین عرض از مبدأ خط کافی است در معادله‌ی خط به جای x صفر قرار دهیم.
- برای یافتن طول از مبدأ خط کافی است در معادله‌ی خط به جای y صفر قرار دهیم.

تست نمونه

- **نسبت طول از مبدأ به عرض از مبدأ خط $2x-3y+6=0$ کدام است؟**

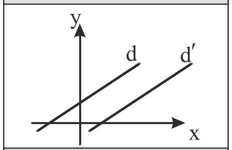
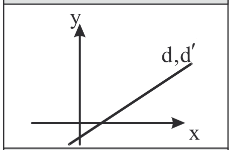
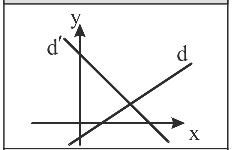
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

حل: کافی است در معادله‌ی خط داده شده یک‌بار به جای x و یک‌بار به جای y عدد صفر را جایگزین کنیم.

$$\left.\begin{matrix} x=0 \Rightarrow 0-3y+6=0 \Rightarrow y=2 & \text{عرض از مبدأ} \\ y=0 \Rightarrow 2x+0+6=0 \Rightarrow x=-3 & \text{طول از مبدأ}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\text{طول از مبدأ}}{\text{عرض از مبدأ}}=\frac{-3}{2}$$

۵ وضعیت دو خط نسبت به هم

دو خط $d: ax+by+c=۰$ و $d': a'x+b'y+c'=۰$ می‌توانند یکی از حالت‌های زیر را نسبت به هم داشته باشند:

موازی	منطبق	متقاطع
		
شرط: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	شرط: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	شرط: $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

اگر معادله‌ی صریح دو خط یعنی $d: y=mx+h$ و $d': y=m'x+h'$ را داشته باشیم، آن‌گاه:

۱) دو خط موازی‌اند هرگاه: $m=m'$

۲) دو خط عمودند هرگاه: $m.m'=-۱$

مثال آموزشی

● **خط D به معادله‌ی $۲x-۳y+۴=۰$ و خط D' به معادله‌ی $۳Kx-(K+۷)y+۴=۰$ را در نظر بگیرید.**

الف) به ازای چه مقداری از K دو خط D و D' با یکدیگر موازی‌اند.

ب) به ازای چه مقداری از K خط D' از نقطه‌ی $(۲,-۱)$ می‌گذرد.

حل: ابتدا شیب دو خط D و D' را به دست می‌آوریم:

$$m_D=-\frac{۲}{-۳}=\frac{۲}{۳},\ m_{D'}=-\frac{۳K}{-(K+۷)}=\frac{۳K}{K+۷}$$

الف) $$D \parallel D' \Rightarrow m_D=m_{D'} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۳K}{K+۷} \Rightarrow ۲K+۱۴=۹K \Rightarrow K=۲$$

ب) باید مختصات نقطه‌ی $(۲,-۱)$ در معادله‌ی خط D' صدق کند، لذا داریم:

$$(۳K)(-۱)-(K+۷)(۲)+۴=۰ \Rightarrow -۳K-۲K-۱۴+۴=۰ \Rightarrow K=-۲$$

تست نمونه

● **خط گذرنده از نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ و موازی با خط $x-۲y=۱$ محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟**

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۲-

حل: چون خط گذرنده از نقطه‌ی A با خط مفروض موازی است، لذا شیب هر دو با هم برابر است:

$$x-۲y=۱ \Rightarrow m=-\frac{۱}{-۲}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow[\text{خط}]{\text{معادله‌ی}} y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y+۱=\frac{۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow ۲y+۲=x-۲ \Rightarrow x-۲y=+۴ \xrightarrow{y=۰} x=+۴$$

حالت خاص تقاطع: حالتی که دو خط متقاطع در نقطه‌ی تقاطع با هم زاویه‌ی ۹۰° می‌سازند را، دو خط عمود بر هم می‌گویند. دو خط زمانی عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها (۱-) باشد. اگر از منظر معادلات صریح هم بخواهیم شرط عمود بودن دو خط را بررسی کنیم نکته‌ی مقابل را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} d: ax+by+c=۰ \\ d': a'x+b'y+c'=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط عمود بودن}} ab'-ba'=۰$$

مثال آموزشی

● **معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی تلاقی دو خط $D: x+۲y+۵=۰$ و $D': ۳x-۲y-۱=۰$ گذشته و بر خط $D'': ۳x+۲y-۱۱=۰$ عمود باشد.**

حل: ابتدا نقطه‌ی تلاقی دو خط D و D' را به دست می‌آوریم تا یک نقطه از خط مذکور به دست آید. برای این کار باید دستگاه زیر را حل نماییم:

$$\begin{cases} x+۲y+۵=۰ \\ ۳x-۲y-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow ۴x+۴=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow -۱+۲y+۵=۰ \Rightarrow y=-۲ \Rightarrow A(-۱,-۲)$$

می‌دانیم شرط عمودبودن دو خط آن است که شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر باشند، چون خط مذکور بر D'' عمود است، شیب خط D'' را به دست آورده و سپس آن را قرینه و معکوس می‌کنیم:

$$m_{D''}=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow m=\frac{۲}{۳} \text{ شیب خط عمود}$$

با داشتن شیب و یک نقطه از خط، معادله‌ی خط معلوم است:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \xrightarrow{m=\frac{۲}{۳},\ A(-۱,-۲)} y-(-۲)=\frac{۲}{۳}(x-(-۱)) \xrightarrow{\times ۳} ۳y+۶=۲x+۲ \Rightarrow ۲x-۳y-۴=۰$$

تست نمونه

● **هرگاه دو خط $my=۲x+۱$ و $(۱-۳m)x-۵y+۲=۰$ بر هم عمود باشند، مقدار m کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $\frac{۲}{۱۱}$ ۴) $-\frac{۲}{۱۱}$

حل: ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم و سپس قرینه و معکوس هم می‌گذاریم:

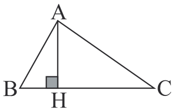
$$\begin{cases} D: my = ۲x + ۱ \xrightarrow{\div m} y = \frac{۲}{m}x + \frac{۱}{m} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{۲}{m} \\ D': (۱-۳m)x - ۵y + ۲ = ۰ \Rightarrow \text{شیب خط} = -\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}} = -\frac{۱-۳m}{-۵} = \frac{۱-۳m}{۵} \end{cases}$$

حال شرط عمودبودن را برقرار می‌سازیم:

$$\frac{۲}{m} \times \frac{۱-۳m}{۵} = -۱ \Rightarrow \frac{۲-۶m}{۵m} = -۱ \Rightarrow ۲-۶m = -۵m \Rightarrow m = ۲$$

● **هرگاه سه نقطه‌ی $A(۰,-۲)$ ، $B(-۱,۳)$ و $C(۱,-۱)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله‌ی ارتفاع AH کدام است؟**

۱) $۲x - y = ۲$ ۲) $x + ۲y = ۴$ ۳) $x - ۲y = ۴$ ۴) $۲x + y + ۲ = ۰$

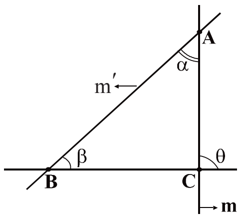


حل: شکل فرضی را در نظر بگیرید. ارتفاع AH در مثلث ABC بر ضلع BC عمود است. پس اگر شیب پاره‌خط BC را بیابیم و سپس قرینه و معکوس نماییم، شیب ارتفاع AH به دست می‌آید.

$$m_{BC} = \frac{۳-(-۱)}{-۱-۱} = -۲ \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow m_{AH} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} A(۰,-۲) \\ m_{AH} = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow y + ۲ = \frac{۱}{۲}(x-۰) \Rightarrow x - ۲y = ۴$$

۶ زاویه‌ی بین دو خط:

اگر m و m' شیب دو خط باشند، برای محاسبه‌ی زاویه‌ی بین دو خط داریم:



$$\begin{cases} m = \tan\theta \\ m' = \tan\beta \end{cases}$$ θ: زاویه‌ی خارجی مثلث ABC می‌باشد:

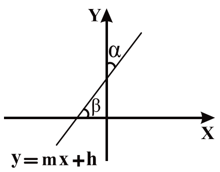
$$\theta = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \theta - \beta \Rightarrow \tan\alpha = \tan(\theta - \beta)$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\tan\theta - \tan\beta}{۱ + \tan\theta\tan\beta} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{m - m'}{۱ + mm'}$$

و برای اینکه زاویه‌ی حاده مورد محاسبه قرار گیرد:

$$\boxed{\tan\alpha = \left|\frac{m - m'}{۱ + mm'}\right|}$$

نکته: برای یافتن اندازه‌ی زاویه‌ی بین هر خط دلخواه با محور yها یا با هر خط موازی محور yها با توجه به شکل زیر، ابتدا زاویه‌ی خط با محور xها را پیدا می‌کنیم و سپس متمم زاویه‌ی مزبور را به دست می‌آوریم.



در شکل روبه‌رو اگر $m = \tan\beta$ باشد داریم: $\alpha = \left|\frac{\pi}{۲} - \beta\right|$

که در این رابطه α برابر زاویه‌ی خط با محور yها است.

به عنوان مثال برای یافتن زاویه‌ی خط به معادله‌ی $\sqrt{۳}y - ۳x + ۵ = ۰$ با محور yها از آنجا که شیب خط برابر $\sqrt{۳}$ است، بنابراین $\tan\beta = \sqrt{۳}$ و $\beta = ۶۰^\circ$، پس زاویه‌ی خط با محور yها برابر $\alpha = |۹۰^\circ - ۶۰^\circ| = ۳۰^\circ$ است.

نکته: برای یافتن زاویه‌ی بین دو خط اگر زاویه‌های هر کدام از خطوط با محور xها برابر $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ باشد می‌توان علاوه بر استفاده از رابطه‌ی قبل، از رابطه‌ی $\alpha = |\alpha_۲ - \alpha_۱|$ نیز استفاده کرد.

به عنوان مثال برای یافتن زاویه‌ی بین دو خط $y = x + ۱$ و $y = \sqrt{۳}x + ۲$، چون شیب‌های دو خط به ترتیب برابر ۱ و $\sqrt{۳}$ است پس دو خط با محور xها به ترتیب زوایای ۴۵° و ۶۰° تشکیل می‌دهند بنابراین داریم: $\alpha = |۶۰^\circ - ۴۵^\circ| = ۱۵^\circ$

تست نمونه

● **زاویه‌ی بین خطوط $x - ۲y + ۷ = ۰$ و $۳x + ۹y - ۱ = ۰$ کدام است؟**

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

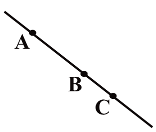
حل: مطابق با رابطه‌ی بالا، باید شیب هر دو خط را به دست آوریم:

$$\begin{cases} x - ۲y + ۷ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱}{۲} \\ ۳x + ۹y - ۱ = ۰ \Rightarrow m' = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \tan\alpha = \left|\frac{\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۳})}{۱ + (\frac{۱}{۲})(-\frac{۱}{۳})}\right| = ۱ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

۷ شرط آنکه سه نقطه بر یک استقامت باشند:

باید شیب خط گذرنده از هر دو نقطه‌ی دلخواه با هم برابر باشند تا این خطوط بر هم منطبق باشند، پس:

$$\boxed{m_{AB} = m_{AC} \rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}}$$



تست نمونه

● هرگاه سه نقطه‌ی $A(-۲,۱)$ ، $B(k,k-۱)$ و $C(۱,۰)$ در یک امتداد باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۱   ۲) -۱ ۳) ۲   ۴) -۲

حل:
$$m_{AB}=m_{AC}\Rightarrow \frac{k-۱-۱}{k+۲}=\frac{۰-۱}{۱+۲}\Rightarrow \frac{k-۲}{k+۲}=\frac{-۱}{۳}\Rightarrow ۳k-۶=-k-۲\Rightarrow ۴k=۴\Rightarrow k=۱$$

۸ معادله‌ی چند خط خاص:

۱ محور xها: هر نقطه روی این محور دارای عرض صفر است، بنابراین: $y=۰$.

۲ محور yها: هر نقطه روی این محور دارای طول صفر است، بنابراین: $x=۰$.

۳ موازی محور xها: شیب این خط برابر صفر بوده و در نتیجه معادله‌ی آن به صورت $y=b$ است.

۴ موازی محور yها: شیب برای این دسته از خطوط تعریف نمی‌شود و معادله‌ی آن در حالت کلی به صورت $x=a$ است.

۵ معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم: $y=x$

۶ معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم: $y=-x$

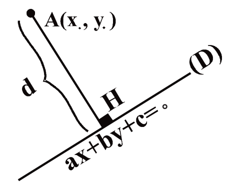
ایستگاه ۴ وضعیت یک نقطه نسبت به یک خط

در حقیقت یک نقطه و یک خط تنها دو وضعیت نسبت به هم می‌توانند داشته باشند که در زیر می‌بینید:

۱- نقطه روی خط قرار داشته باشد: در این حالت مختصات نقطه در خط صدق می‌کند.

۲- نقطه خارج از خط قرار داشته باشد: در این حالت بحث فاصله‌ی نقطه از خط پدید می‌آید. در نتیجه:

۱ فاصله‌ی نقطه از خط:



تعریف: طول عمودی است که از نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ بر خط D به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ وارد می‌شود، که از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$\boxed{d=AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

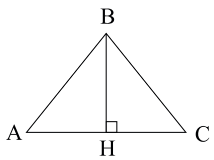
نکته: فرمول بالا را این‌طوری یاد بگیرید: برای پیداکردن فاصله‌ی هر نقطه از هر خط مفروض، ابتدا نقطه‌ی داده شده را در معادله‌ی خط جایگزین می‌کنیم. سپس قدرمطلق عدد حاصل را بر جذر مجموع مربعات ضریب x و y خط تقسیم می‌کنیم.

تذکر: فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$\boxed{d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

مثال آموزشی

● اگر نقاط $A(-۲,۵)$ ، $B(۱,۴)$ و $C(۲,-۳)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع BH در این مثلث را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل طول ارتفاع BH همان فاصله‌ی نقطه‌ی B از خط گذرنده بر دو نقطه‌ی A و C می‌باشد. بنابراین ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و C را می‌نویسیم:

$$m_{AC}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{-۳-۵}{۲-(-۲)}=\frac{-۸}{۴}=-۲$$

$$\Rightarrow y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow{m=-۲\ ,\ A(-۲,۵)}y-۵=-۲(x+۲)\Rightarrow ۲x+y-۱=۰$$

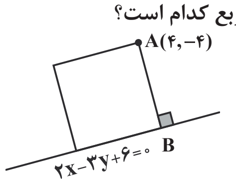
فاصله‌ی نقطه‌ی B از خط گذرنده بر A و C برابر است با:

$$BH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲\times۱+۱\times۴-۱|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

تست نمونه

● هرگاه یکی از اضلاع مربع بر روی خط $۲x-۳y+۶=۰$ منطبق بوده و نقطه‌ی $A(۴,-۴)$ یک رأس آن باشد، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۱۳   ۲) ۲۶   ۳) ۵۲   ۴) ۳۹



حل:

$$AB=d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\Rightarrow d=\frac{|(۲)(۴)-۳(-۴)+۶|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{۲۶}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\Rightarrow S=d^۲=\frac{۲۶\times۲۶}{۱۳}=۵۲$$

● نقطه‌ی $(۲,-۱)$ مرکز مربع و معادله‌ی یک ضلع آن به صورت $۴x-۳y=a$ می‌باشد. به ازای کدام مقدار a، مساحت مربع ۱۶ واحد مربع است؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱   ۴) ۲

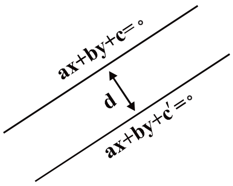
حل: چون مساحت مربع ۱۶ است، در نتیجه هر ضلع این مربع ۴ واحد می‌باشد. از طرفی می‌دانیم فاصله‌ی مرکز مربع از تمام اضلاعش برابر نصف ضلع مربع است. پس ابتدا فاصله‌ی مرکز $(۲,-۱)$ را از ضلع مربع به معادله‌ی $۴x-۳y-a=۰$ محاسبه کرده و سپس برابر ۲ قرار می‌دهیم تا پارامتر a مشخص شود:

$$\text{فاصله‌ی مرکز تا ضلع مربع} = OH = \frac{|۴(۲)-۳(-۱)-a|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}} = \frac{|۱۱-a|}{۵} \xrightarrow{OH=۲} \frac{|۱۱-a|}{۵} = ۲$$

$$\Rightarrow |۱۱-a| = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱۱-a=۱۰ \Rightarrow a=۱ & \text{گزینه‌ی (۳)} \\ ۱۱-a=-۱۰ \Rightarrow a=۲۱ \rightarrow & \text{در بین گزینه‌ها نیست} \end{cases}$$

فاصله‌ی دو خط: فاصله‌ی دو خط تنها در حالتی که دو خط موازی غیر منطبق هستند، قابل تعریف است. در مابقی حالات فاصله‌ی دو خط صفر است. بنابراین:

۲ فاصله‌ی بین دو خط موازی:



$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

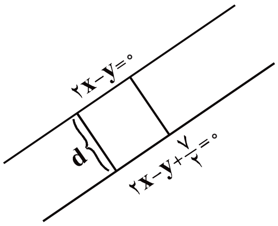
توجه: در کاربرد فرمول فوق باید دقت نماییم که، ضرایب x و y در هر دو معادله‌ی خط با هم برابر باشند.

تست نمونه

● هرگاه دو ضلع از یک مربع بر دو خط $y=۲x$ و $۴x-۲y+۷=۰$ منطبق باشند، مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{۴۹}{۵}$ ۲) $\frac{۴۹}{۲۵}$ ۳) $\frac{۴۹}{۲۰}$ ۴) $\frac{۷}{۲۰}$

حل: دو خط داده شده موازی‌اند و از طرفی می‌دانیم که در مربع هم ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی‌اند، پس اگر فاصله‌ی بین این دو خط موازی را به دست آوریم، در حقیقت اندازه‌ی ضلع مربع را محاسبه کرده‌ایم.

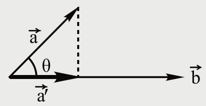


$$\begin{cases} y=۲x \Rightarrow ۲x-y=۰ \\ ۴x-۲y+۷=۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{یکسان کردن ضرایب x و y}]{\text{دو خط موازی}} \begin{cases} ۲x-y=۰ \\ ۲x-y+\frac{۷}{۲}=۰ \end{cases}$$

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|۰-\frac{۷}{۲}|}{\sqrt{۴+۱}} = \frac{۷}{۲\sqrt{۵}} \Rightarrow S = d^۲ = \frac{۴۹}{۲۰}$$

یادداشت:

چند نکته‌ی مهم:



۱- اندازه‌ی تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد بردار $\vec{b}$ را به دو روش می‌توان به دست آورد:

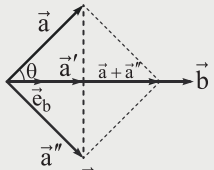
$$\begin{cases}|\vec{a}'|=|\vec{a}|\cos\theta\\ |\vec{a}'|=\dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}\end{cases}$$

۲- تعبیر هندسی ضرب داخلی دو بردار:

با توجه به نکته‌ی بالا، ضرب داخلی دو بردار را می‌توان به صورت مقابل هم تعریف کرد:

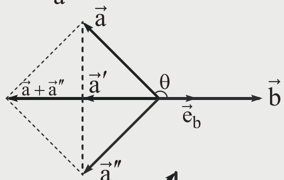
$$\begin{cases}|\vec{a}'|=|\vec{a}|\cos\theta\\ |\vec{b}'|=|\vec{b}|\cos\theta\\ \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\end{cases}\Rightarrow|\vec{a}.\vec{b}|=|\vec{a}'||\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}'|$$

یعنی اندازه‌ی حاصل‌ضرب داخلی دو بردار برابر حاصل‌ضرب اندازه‌ی یکی از دو بردار در اندازه‌ی تصویر بردار دیگر بر روی آن بردار است و این مطلب را می‌توان تعبیر هندسی ضرب داخلی دو بردار دانست.



۳- در حالتی‌که زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده باشد، بردارهای $\vec{a}'$، $\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{a}''$ همگی هم‌جهت و هم‌راستا می‌باشند، بنابراین:

$$۰<\theta<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\vec{e}_{a'}=\vec{e}_{(\vec{a}+\vec{a}'')}=\vec{e}_b=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

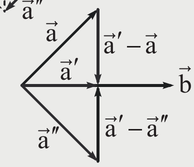


و در حالتی‌که زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه باشد، بردارهای $\vec{a}'$ و $\vec{a}+\vec{a}''$ هم‌راستا با بردار $\vec{b}$ بوده ولی در جهت مخالف آن قرار می‌گیرند. بنابراین:

$$\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi\Rightarrow\vec{e}_{\vec{a}'}=\vec{e}_{(\vec{a}+\vec{a}'')}=-\vec{e}_{\vec{b}}=-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

۴- اندازه‌ی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{a}''$ همواره باهم برابر است، یعنی: $|\vec{a}|=|\vec{a}''|$

۵- بردارهای $\vec{a}'-\vec{a}$ و $\vec{a}'-\vec{a}''$ همواره بر بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}'$ عمودند.



۶- اگر بردار $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد بردار $\vec{b}$ باشد آن‌گاه با توجه به تعبیر هندسی ضرب داخلی دو بردار داریم: $\vec{a}.\vec{a}'=|\vec{a}'|^{۲}$

تست نمونه

● **اگر سه نقطه‌ی $A(۱,۱,۲)$، $B(۳,۲,۵)$ و $C(۲,۲,۳)$ در فضا مفروض باشند، طول تصویر قائم بردار $\overrightarrow{AB}$ بر روی بردار $\overrightarrow{AC}$ چیست؟**

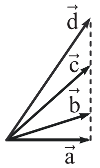
۱) ۴ ۲) $\sqrt{۱۴}$ ۳) $۲\sqrt{۱۴}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

حل: با توجه به نکته‌ی (۱) داریم: طول تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ روی بردار $\overrightarrow{AC}$ $=\dfrac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|}=d$

لذا داریم:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=(۲,۱,۳)\\ \overrightarrow{AC}=\vec{C}-\vec{A}=(۱,۱,۱)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=۲+۱+۳=۶\\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}\end{cases}\Rightarrow d=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

● **با توجه به شکل، کدام گزینه عددی بزرگ‌تر است؟**



۱) $\vec{a}.\vec{b}$ ۲) $\vec{a}.\vec{c}$
۳) $\vec{a}.\vec{d}$ ۴) هر سه یکسان هستند.

حل: اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ دو بردار در فضای سه‌بعدی باشند، آن‌گاه $\vec{a}.\vec{b}$ یعنی $|\vec{b}||\vec{a}'|$ که $|\vec{a}'|$ تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ است چون تصویر بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ روی $\vec{a}$ با هم برابر است، بنابراین هر سه عبارت $\vec{a}.\vec{b}$ و $\vec{a}.\vec{c}$ و $\vec{a}.\vec{d}$ باهم برابرند.

● **قرینه‌ی بردار $\vec{a}=(-۷,-۱۴,۲۲)$ بر امتداد بردار $\vec{b}=(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۸}})$ کدام است؟**

۱) $(-۱۸,۹,-۱۸)$ ۲) $(۱۸,۹,-۱۸)$ ۳) $(-۹,۱۸,-۱۸)$ ۴) $(۹,۱۸,-۱۸)$

حل: از آنجایی‌که اندازه‌ی بردار $\vec{b}$ در مختصات بردار $\vec{a}'$ تأثیری ندارد لذا مؤلفه‌های بردار $\vec{b}$ را در $\sqrt{۸}$ ضرب می‌کنیم و در نتیجه داریم $\vec{u}=\sqrt{۸}\,\vec{b}=(۱,۲,۲)$. حال تصویر بردار $\vec{a}$ را روی بردار $\vec{u}$ پیدا می‌کنیم.

$$\vec{a}'=(\frac{\vec{a}.\vec{u}}{|\vec{u}|^{۲}})\vec{u}\Rightarrow\vec{a}'=\frac{-۷-۲۸+۴۴}{(\sqrt{۱+۴+۴})^{۲}}\vec{u}=\frac{۹}{۹}\vec{u}\Rightarrow\vec{a}'=\vec{u}=(۱,۲,۲)\Rightarrow\vec{a}''=۲\vec{a}'-\vec{a}\Rightarrow\vec{a}''=(۲,۴,۴)-(-۷,-۱۴,۲۲)=(۹,۱۸,-۱۸)$$

● **اندازه‌ی تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر راستای بردار $\vec{b}=(۲\sqrt{۳},\sqrt{۲},-\sqrt{۲})$ برابر ۲ است، مقدار مثبت $\vec{a}.\vec{b}$ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

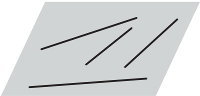
روش دوم با توجه به مطالب گفته شده در حالت سوم، متغیر غیرمشترک یعنی z را حذف می‌کنیم و در نتیجه داریم: $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ و $x=y$. حال فاصله‌ی نقطه‌ی $M(0,2)$ را از خط $x=y$ یا $x-y=0$ به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|0-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

ایستگاه 2 صفحه

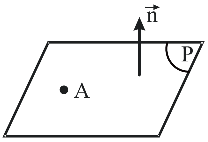
معادله‌ی صفحه

یک خط مجموعه‌ای از نقاط به هم پیوسته است که دارای راستا است و همان طور که گفتیم معادله‌ی آن با داشتن بردار هادی خط (همان راستای خط) و یک نقطه از خط، قابل نوشتن است. اما صفحه چیست؟ معادله‌ی آن چگونه نوشته می‌شود؟



یک صفحه از مجموعه‌ای از خطوط تشکیل شده است که چون راستای خطوط متفاوت است (به شکل مقابل توجه کنید.) باید به دنبال برداری باشیم که در همه‌ی خطوط مشترک است.

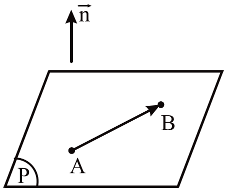
برای یافتن این بردار از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:



قضیه: اگر خطی بر یک صفحه عمود باشد، بر تمام خطوط آن صفحه عمود است. پس بردار مورد نظر، همان بردار عمود بر صفحه است که به آن بردار نرمال صفحه می‌گویند و با حرف n نمایش داده می‌شود. در نتیجه معادله‌ی یک صفحه با داشتن بردار نرمال صفحه ($\vec{n}$) و یک نقطه از آن (A) قابل نوشتن است.

در مورد بردار نرمال نیز (همانند بردار هادی خط) تنها راستا اهمیت دارد. لذا اگر $\vec{n}$ یک بردار نرمال صفحه باشد، $r\vec{n}$ نیز یک بردار نرمال همان صفحه خواهد بود $(r\in\mathbb{R}-\{0\})$.

شیوه‌ی نوشتن معادله‌ی صفحه



با توجه به شکل، فرض کنید $A(x_0,y_0,z_0)$ یک نقطه روی صفحه‌ی P و $\vec{n}=(a,b,c)$ یک بردار عمود بر آن صفحه باشد. یک نقطه مانند $B(x,y,z)$ روی صفحه‌ی P قرار دارد، اگر و فقط اگر بردار $\vec{n}$ بر امتداد پیکان $\overrightarrow{AB}$ عمود باشد.

بنابراین داریم:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow(a,b,c).(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

که پس از بسط و مرتب‌کردن داریم:

$$ax+by+cz=\overbrace{ax_0+by_0+cz_0}^{d}\Rightarrow ax+by+cz=d$$

تذکر 1: برای نوشتن معادله‌ی یک صفحه به دو پارامتر نیاز داریم یکی مختصات یک نقطه از آن، که معمولاً آن را به ما می‌دهند و دیگری بردار نرمال صفحه که معمولاً از فرض مسئله به دست می‌آید.

تذکر 2: بردار نرمال صفحه را یا مستقیماً به ما می‌دهند یا اینکه دو بردار داخل صفحه و یا دو بردار موازی صفحه و یا یک بردار موازی صفحه و یک بردار داخل صفحه می‌دهند، که در هر سه حالت بردار نرمال صفحه از ضرب خارجی بردارهای داده شده به دست می‌آید.

تذکر 3: ضرایب x و y و z در معادله‌ی صفحه، بیانگر مختصات بردار نرمال صفحه می‌باشند.

تذکر 4: اگر بخواهیم یک نقطه‌ی دلخواه روی صفحه‌ای مانند P مشخص کنیم، در معادله‌ی آن به دو متغیر دلخواه عددی نسبت می‌دهیم و متغیر سوم را پیدا می‌کنیم. معمولاً برای سادگی به دو متغیر عدد صفر را نسبت داده و متغیر سوم را محاسبه می‌کنیم.

تذکر 5: برخورد صفحه با محورهای مختصات: واضح است که وقتی صفحه‌ای یک محور مختصات را قطع می‌کند، در محل برخورد، دو مؤلفه‌ی غیرهمنام محور، صفر خواهد بود. بنابراین برای پیداکردن مؤلفه‌ی همنام محور (و در نهایت مختصات محل برخورد)، در معادله‌ی صفحه دو متغیر غیرهمنام را صفر قرار داده و مؤلفه‌ی مورد نظر را محاسبه می‌کنیم. مثلاً برای پیداکردن نقطه‌ی تلاقی یک صفحه با محور oy، در معادله‌ی صفحه مؤلفه‌های x و z را صفر قرار داده و مؤلفه‌ی y را محاسبه می‌کنیم.

مثال آموزشی

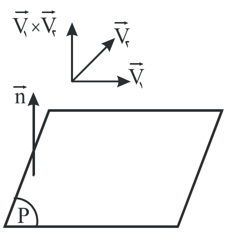
● **معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی $P(2,0,-2)$ و عمود بر بردار $\vec{n}=(2,3,-4)$ را پیدا کنید.** (تمرین کتاب درسی)

حل: مطابق با فرمول بالا، معادله‌ی صفحه به صورت زیر است:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\Rightarrow 2(x-2)+3(y-0)-4(z+2)=0\Rightarrow 2x+3y-4z=12$$

● **معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و با دو بردار $\vec{v}_1(1,-1,2)$ و $\vec{v}_2(2,1,-1)$ موازی باشد.**

حل: با توجه به شکل، راستای بردار نرمال صفحه با راستای بردار $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ برابر است. بنابراین داریم:



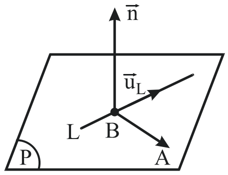
$$\begin{cases}\vec{v}_1=(1,-1,2)\\ \vec{v}_2=(2,1,-1)\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=(-1,5,3)\ ,\ O(0,0,0)$$

$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\Rightarrow(-1)(x-0)+5(y-0)+3(z-0)=0$$

$$\Rightarrow x-5y-3z=0$$

● **معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی $A(۱,-۱,۲)$ و خط $L: x+۲=y+۱=\frac{z+۵}{۲}$ را پیدا کنید.** (تمرین کتاب درسی)

حل: برای نوشتن معادله‌ی صفحه، به یک نقطه و یک راستای عمود بر صفحه نیاز داریم. نقطه‌ی A همان نقطه‌ی مورد نظر است که داده شده است. برای پیداکردن راستای بردار عمود بر صفحه‌ی P مطابق با شکل داریم:



نقطه‌ای دلخواه مانند B را از خط L انتخاب می‌کنیم و بردار $\overrightarrow{BA}$ را می‌یابیم. برداری که بر هر دو بردار $\vec{u}_L$ و $\overrightarrow{BA}$ عمود باشد، بر صفحه‌ی P هم عمود خواهد بود.

$$L: x+۲=y+۱=\frac{z+۵}{۲}=۰ \Rightarrow B(-۲,-۱,-۵), A(۱,-۱,۲) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA}=(۳,۰,۷) \\ \vec{u}_L=(۱,۱,۲) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{BA}\times\vec{u}_L=(-۷,۱,۳)$$

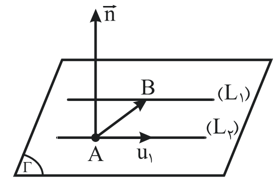
حال با داشتن بردار عمود بر صفحه و نقطه‌ی A معادله‌ی صفحه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P: a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \Rightarrow -۷(x-۱)+(y+۱)+۳(z-۲)=۰ \Rightarrow ۷x-y-۳z-۲=۰$$

● **معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از دو خط $L_۱: \frac{x+۳}{۳}=\frac{y-۴}{۲}=\frac{z}{۴}$ و $L_۲: \frac{x-۱}{۳}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۵}{۴}$ را پیدا کنید.** (تمرین کتاب درسی)

حل: ابتدا وضعیت دو خط را مشخص می‌کنیم. $\vec{u}_۱=(۳,۲,۴)=\vec{u}_۲ \Rightarrow L_۱ \parallel L_۲$

حال که دو خط موازی‌اند شکل مقابل را در نظر می‌گیریم.



نقاط A و B را به ترتیب از روی دو خط $L_۲$ و $L_۱$ انتخاب نموده و بردار $\overrightarrow{AB}$ را تشکیل می‌دهیم. با توجه به شکل مشخص است که راستای عمود بر صفحه در حقیقت همان راستای برداری است که بر دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}_۱$ عمود است. یعنی $\overrightarrow{AB}\times\vec{u}_۱$. بنابراین داریم:

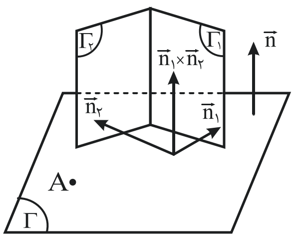
$$\begin{cases} L_۱: \frac{x+۳}{۳}=\frac{y-۴}{۲}=\frac{z}{۴}=۰ \xrightarrow{B\in L_۱} B(-۳,۴,۰) \\ L_۲: \frac{x-۱}{۳}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۵}{۴}=۰ \xrightarrow{A\in L_۲} A(۱,-۱,۵) \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-۴,۵,-۵) \\ \vec{u}_۱=(۳,۲,۴) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}_۱=(۳۰,۱,-۲۳)$$

حال با داشتن راستای عمود بر صفحه (بردار $\vec{n}$) و نقطه‌ی A، معادله‌ی صفحه‌ی Γ را می‌نویسیم:

$$\Gamma: a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \Rightarrow ۳۰(x+۳)+(y-۴)-۲۳(z-۰)=۰ \Rightarrow ۳۰x+y-۲۳z+۸۶=۰$$

● **معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی $A(-۹,۱۲,۱۴)$ و عمود بر دو صفحه‌ی $\Gamma_۱: x-z=۱$ و $\Gamma_۲: ۲x-۳y+۴z=۲$ را پیدا کنید.** (تمرین کتاب درسی)

حل: صفحه‌ی خواسته شده را Γ فرض می‌کنیم و با توجه به شکل زیر مشاهده می‌کنیم که راستای عمود بر صفحه‌ی Γ از ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه‌ی $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ به دست می‌آید:

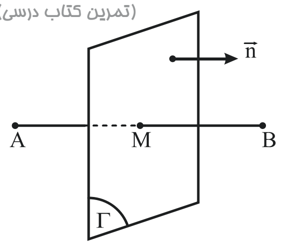


$$\begin{cases} \vec{n}_۱=(۱,۰,-۱) \\ \vec{n}_۲=(۲,-۳,۴) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}=\vec{n}_۱\times\vec{n}_۲=(-۳,-۶,-۳)\equiv(۱,۲,۱), A(-۹,۱۲,۱۴)$$

معادله‌ی صفحه‌ی Γ به صورت زیر می‌باشد:

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \Rightarrow (x+۹)+۲(y-۱۲)+(z-۱۴)=۰ \Rightarrow x+۲y+z-۲۹=۰$$

● **معادله‌ی صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی $A(۳,۱,۰)$ و $B(۵,-۱,۳)$ را پیدا کنید.** (تمرین کتاب درسی)



حل: با توجه به شکل کاملاً مشخص است که نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB متعلق به صفحه‌ی Γ بوده و همچنین راستای بردار $\overrightarrow{AB}$ همان راستای عمود بر صفحه است، یعنی $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$، لذا داریم:

$$\begin{cases} AB \text{ وسط } M \Rightarrow M(\frac{۳+۵}{۲},\frac{۱-۱}{۲},\frac{۰+۳}{۲})=(۴,۰,\frac{۳}{۲}) \\ \vec{n}=\overrightarrow{AB}=(۵-۳,-۱-۱,۳-۰)=(۲,-۲,۳) \end{cases}$$

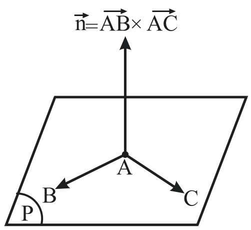
و معادله‌ی صفحه‌ی Γ به صورت مقابل است:

$$\Gamma: a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \Rightarrow ۲(x-۴)-۲(y-۰)+۳(z-\frac{۳}{۲})=۰$$

$$\Rightarrow ۲x-۲y+۳z-۸-\frac{۹}{۲}=۰ \xrightarrow{\times۲} ۴x-۴y+۶z=۲۵$$

● **معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از سه نقطه‌ی $A(۲,-۱,۴)$، $B(۵,۳,۵)$ و $C(۲,۴,۳)$ را پیدا کنید.** (تمرین کتاب درسی)

حل: توجه می‌کنیم که این صفحه شامل دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ است. (مطابق شکل زیر). لذا برداری که بر این دو بردار عمود باشد بر این صفحه نیز عمود بوده و می‌تواند نقش $\vec{n}$ را بازی کند. از طرفی می‌دانیم برداری که بر دو بردار مفروض عمود است از ضرب خارجی آن دو بردار به دست می‌آید:



$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(۳,۴,۱) \\ \overrightarrow{AC}=(۰,۵,-۱) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-۹,۳,۱۵)$$

۲- نقطه‌ی $(1,2)$ مرکز دایره‌ای به معادله‌ی $x^2+y^2-mx+2ny+1=0$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۳- معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $(1,1)$ که خط به معادله‌ی $x+y+1=0$ روی آن وتری هم‌طول با شعاع دایره جدا می‌کند، به صورت $x^2+y^2-2x-2y+c=0$ است. مقدار c کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴- ۳) ۶ ۴) ۲-

۴- اگر طول مماس رسم شده از نقطه‌ی $A=(-1,2)$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $kx^2+y^2+2ax-4y=0$، برابر $\sqrt{8}$ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{11}{2}$ ۴) ۵

۵- نقاط $F=(3,1)$ و $F'=(-3,1)$ کانون‌های یک بیضی و $M=(-5,1)$ نقطه‌ای واقع بر آن است. طول کوچک‌ترین قطر این بیضی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۶- معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $A=(1,0)$، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر فاصله‌ی آن‌ها از خط $x=2$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2+\frac{y^2}{4}=$ ۲) $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ ۳) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ۴) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

۷- کانون‌های بیضی به معادله‌ی $x^2+2y^2-2x-15=0$، دو سر قطری از یک دایره هستند. این دایره و بیضی نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۱) فقط در یک نقطه بر هم مماس‌اند. ۲) در دو نقطه بر هم مماس‌اند.
۳) در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. ۴) یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

۸- نقطه‌ی متغیر M در صفحه‌ی مختصات طوری قرار دارد که همواره فاصله‌اش از مبدأ مختصات، $\sqrt{3}$ برابر فاصله‌اش از نقطه‌ی $(0,-1)$ است. نقطه‌ی M همواره از نقطه‌ی مشخصی در این صفحه فاصله‌ی ثابتی دارد، این فاصله‌ی ثابت چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) ۲

۹- دایره‌ای بر دو خط موازی مماس است. اگر $A=(2,-3)$ و $B=(4,1)$ مختصات نقاط تماس باشند، معادله‌ی این دایره کدام است؟

۱) $x^2+y^2+4x+8y-5=0$ ۲) $x^2+y^2-6x+2y+5=0$ ۳) $x^2+y^2-6x+2y-5=0$ ۴) $x^2+y^2+4x+8y+5=0$

۱۰- اگر دو دایره‌ی $C_1: x^2+y^2-4x-6y+a=0$ و $C_2: x^2+y^2+4x-5=0$ مماس خارج باشند، آن‌گاه اندازه‌ی بلندترین مماسی که از نقاط روی دایره‌ی C_1، می‌توان بر دایره‌ی C_2 رسم کرد، کدام است؟

۱) $2\sqrt{10}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) ۵

۱۱- دایره‌ای به شعاع ۲ که در مبدأ مختصات بر محور yها مماس است، خط $x=1$ را در دو نقطه قطع کرده است. عرض مثبت نقطه‌ی تلاقی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۱۲- نقطه‌ی $(2,1)$ مرکز یک بیضی است. اگر نقاط $(5,1)$ و $(2,6)$ روی این بیضی قرار داشته باشند، آن‌گاه مختصات یکی از کانون‌های این بیضی کدام است؟

۱) $(2,3)$ ۲) $(2,-3)$ ۳) $(2,-4)$ ۴) $(2,4)$

۱۳- در یک بیضی، فاصله‌ی هر کانون از دورترین رأس برابر ۸ و از هر یک از دو سر قطر کوچک بیضی برابر ۵ است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۱۴- نقطه‌ی متغیر H را روی خط $d: 3x-4y+8=0$ و نقطه‌ی متغیر A را روی دایره‌ی $C: x^2+y^2-2x+2y+1=0$ در نظر می‌گیریم. کوتاه‌ترین فاصله‌ی AH کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۵- شعاع دایره‌ای که از دو نقطه‌ی $A=(3,0)$ و $B=(-1,0)$ گذشته و بر خط $y=-1$ مماس است، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

آزمون ۲ سهمی، هذلولی و دوران

۱- از کانون سهمی به معادله‌ی $y^2=4ax$، $(a>0)$، خطی به موازات خط هادی سهمی رسم می‌کنیم تا سهمی را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) a ۲) 2a ۳) 3a ۴) 4a

۲- به ازای کدام مقدار m، کانون سهمی $y^2-4y+mx+8=0$ روی نیمساز ربع دوم قرار دارد؟

۱) ۸- ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۸

۳- مختصات کانون یک سهمی که خط هادی آن محور yها بوده و از نقطه‌ی $(3,0)$ می‌گذرد، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(-2,-2\sqrt{2})$ ۲) $(2\sqrt{2},2)$ ۳) $(2,2\sqrt{2})$ ۴) $(-2,\sqrt{2})$

۴- نقطه‌ی F کانون سهمی به معادله‌ی $x=\frac{۱}{۸}(y^۲-۴y-۴)$ و P نقطه‌ی تقاطع آن با محور xها است. اگر O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OFP کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵- فاصله‌ی بین کانون‌های مقطع مخروطی به معادله‌ی $xy+\sqrt{۲}x=۱$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۶- مکان هندسی متناظر به معادله‌ی $x^۲+۴y^۲-۴x-۴y+۷=۰$ کدام است؟

۱) یک نقطه ۲) تهی ۳) بیضی ۴) هذلولی

۷- $A=(-۱,۱)$ یکی از رئوس هذلولی است که کانون‌های آن روی خطی موازی محور xها قرار دارد. اگر $x+۲y=۳$ یکی از مجانب‌های این هذلولی باشد، معادله‌ی مجانب دیگر کدام است؟

۱) $x=۲y-۳$ ۲) $x=۲y+۳$ ۳) $x=۲y-۱$ ۴) $x=-۲y+۱$

۸- در هذلولی به معادله‌ی $-۹x^۲+۱۶y^۲-۷۲x-۹۶y-۱۴۴=۰$، عرض نزدیک‌ترین کانون به محور xها کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۸ ۴) ۸-

۹- کانونی از هذلولی به معادله‌ی $x^۲-y^۲=۱$ که طول مثبت دارد، مرکز دایره‌ای است که بر مجانب‌های این هذلولی مماس است. معادله‌ی دایره کدام است؟

۱) $(x-\sqrt{۲})^۲+y^۲=۲$ ۲) $x^۲+(y-\sqrt{۲})^۲=۲$ ۳) $(x-\sqrt{۲})^۲+y^۲=۱$ ۴) $x^۲+(y-\sqrt{۲})^۲=۱$

۱۰- اگر محورهای مختصات را با زاویه‌ی ۳۰° در جهت مثبت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دوران دهیم، معادله‌ی بیضی $mx^۲+\sqrt{۳}xy+y^۲=۱$ در دستگاه جدید فاقد جمله‌ی شامل xy خواهد شد. طول قطر بزرگ این بیضی کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱- نوع مقطع مخروطی به معادله‌ی $x^۲-۲\sqrt{۳}xy-y^۲=۳$ کدام است؟

۱) دو خط متقاطع ۲) هذلولی ۳) تنها یک نقطه ۴) بیضی

۱۲- خط $x=۲$ محور تقارن یک هذلولی و خط $y=mx-۳$، یکی از مجانب‌های آن است. اگر این دو خط در نقطه‌ای به عرض ۱ متقاطع باشند، آن‌گاه مجانب دیگر این هذلولی از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(۲,۰)$ ۲) $(۴,-۳)$ ۳) $(۱,۱)$ ۴) $(۳,-۳)$

۱۳- اگر $(۱,-۱)$ و $(۱,۷)$ مختصات کانون‌های یک هذلولی بوده و این هذلولی از مبدأ مختصات بگذرد، آن‌گاه عرض نقطه‌ای به طول $۲\sqrt{۲}+۱$ در این هذلولی کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۷- ۳) ۴ ۴) ۴-

۱۴- فاصله‌ی کانون و رأس سهمی $x^۲+۲xy+y^۲+۶x=۱$ از یکدیگر، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$

۱۵- با دوران محورهای مختصات به اندازه‌ی ۳۰° حول مبدأ مختصات و در جهت مثبت مثلثاتی، معادله‌ی دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ در دستگاه جدید به کدام صورت تبدیل می‌شود؟

۱) $x^۲+y^۲+\sqrt{۳}x-y-۳=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+\sqrt{۳}x+y-۳=۰$

۳) $x^۲+y^۲-\sqrt{۳}x-y-۳=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-\sqrt{۳}x+y-۳=۰$

آزمون جامع ۵۰ دقیقه

۱- معادله‌ی $۵x^۲-۱۴xy+y^۲-۴=۰$ معادله‌ی چه شکلی است؟

۱) دایره ۲) هذلولی ۳) سهمی ۴) بیضی

۲- اگر با دوران محورهای مختصات با زاویه‌ی مشخصی مانند θ در جهت مثلثاتی، معادله‌ی $۵x^۲-۴xy+۸y^۲-۲x+y-۱۰=۰$ به معادله‌ی $۸x^۲+bxy+۵y^۲+mx+ny-۱۰=۰$ تبدیل شده باشد، برای b چند مقدار عددی به دست می‌آید؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۳- اگر مقطع مخروطی به معادله‌ی $۳x^۲-bxy+۲y^۲+۴۲=۰$ را به اندازه‌ی $-\frac{\pi}{۶}$ دوران دهیم تا ضریب xy در دستگاه جدید صفر گردد، آن‌گاه مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴- خروج از مرکز مقطع $۳x^۲+۲xy+۳y^۲=۴$:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۲۸- در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ بر روی ضلع BC پاره‌خط‌های $BA = BM$ و $CN = CA$ را جدا می‌کنیم. اگر $\hat{A} = 72^\circ$ باشد، زاویه‌ی MAN چند درجه است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) ۵۴
۲) ۵۲
۳) ۴۸
۴) ۴۲

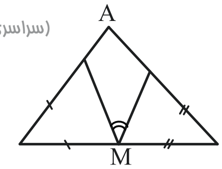
۲۹- در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} = 108^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. کوچکترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE چند درجه است؟ (سراسری تجربی۹۳)

۱) ۲۴
۲) ۳۲
۳) ۳۶
۴) ۵۴

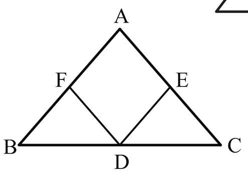
۳۰-زاویه‌های مثلثی با اعداد ۲، ۳ و ۵ متناسب هستند. نوع این مثلث چیست؟

۱) قائم‌الزاویه
۲) متساوی‌الاضلاع
۳) متساوی‌الساقین
۴) غیرمشخص

۳۱-در شکل زیر، هر دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند. اگر زاویه‌ی A برابر ۱۰۶ درجه باشد، زاویه‌ی M چند درجه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)



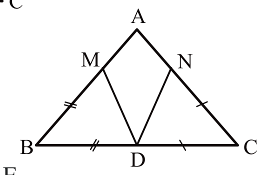
۱) ۳۷
۲) ۳۸
۳) ۴۴
۴) ۵۴



۳۲- در شکل مقابل، $BF = BD$ و $CE = CD$ و $\angle B + \angle C = 40^\circ$. زاویه‌ی $\angle BAC$ چند برابر زاویه‌ی $\angle FDE$ است؟

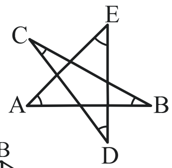
۱) ۷
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۹

۳۳- در شکل مقابل $BM = BD, \hat{A} = 58^\circ$ و $CN = CD$، زاویه‌ی MDN چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)



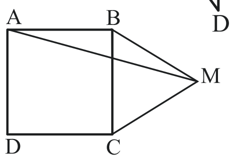
۱) ۵۸
۲) ۵۹
۳) ۶۱
۴) ۶۲

۳ زاویه در چندضلعی‌ها



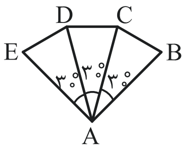
۳۴- در شکل مقابل $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}$ برابر است با:

۱) 360°
۲) 240°
۳) 180°
۴) مقدار ثابتی نیست.



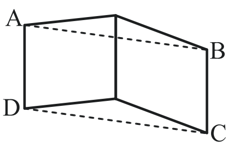
۳۵- مطابق شکل، روی ضلع BC از مربع ABCD، مثلث متساوی‌الاضلاع MBC را می‌سازیم. زاویه‌ی حاده‌ی بین پاره‌خط AM و ضلع BC کدام است؟

۱) 60°
۲) 65°
۳) 70°
۴) 75°



۳۶- در شکل مقابل، $AB = AC = AD = AE$، زاویه‌ی حاده‌ای که امتداد پاره‌خط‌های BC و ED با هم می‌سازند، کدام است؟

۱) 45°
۲) 30°
۳) 75°
۴) 60°



۳۷- در شکل زیر، یک مربع و یک لوزی با زاویه‌ی ۶۰ درجه، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگ‌ترین زاویه‌ی متوازی‌الاضلاع ABCD چند درجه است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

۱) ۱۰۰
۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۵

۳۸- یک ده‌ضلعی محدب، حداکثر چند زاویه‌ی داخلی حاده دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۰

ایستگاه ۳ مثلث

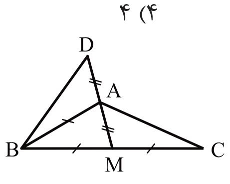
۱ همنهشتی مثلث‌ها

۳۹- چه تعداد از عبارت‌های زیر شرط لازم و کافی برای تساوی (همنهشتی) دو مثلث است؟

الف) سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشند.
ب) سه زاویه از مثلثی با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشند.
ج) محیط مثلثی با محیط مثلث دیگر برابر باشد.
د) مساحت مثلثی با مساحت مثلث دیگر برابر باشد.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۰-در شکل مقابل $\hat{D}+\hat{C} = 61^\circ$، اندازه‌ی زاویه‌ی ABC چند درجه است؟ (سراسری تجربی ۸۹)



۱) ۳۹
۲) ۵۶
۳) ۵۸
۴) ۶۱

۲ نامساوی‌ها در مثلث_ قضیه‌ی لولا

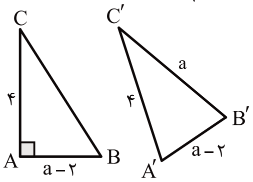
۴۱-اگر اعداد n و $n-۱$ و $n^۲-۱$ طول سه ضلع مثلث باشند، حدود n را به دست آورید.

۱) $n > \sqrt{۲}$ ۲) $۰ < n < ۲$ ۳) $۱ < n < \sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲} < n < ۲$

۴۲- سه پاره‌خط به طول‌های $۴x-۴, x+۷, ۶x$ اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

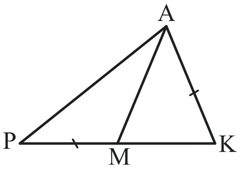
۱) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$ ۲) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$ ۳) $۲ < x < ۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$

۴۳- در مثلث $A'B'C'$ که زاویه‌ی A' حاده است، مقدار a در کدام فاصله تغییر می‌کند؟



۱) $۳ < a < ۴$
۲) $۲ < a < ۴$
۳) $۲ < a < ۵$
۴) $۳ < a < ۵$

۴۴- در مثلث مقابل، اگر $PM = AK$ و $P\hat{M}A > M\hat{A}K$، آن‌گاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

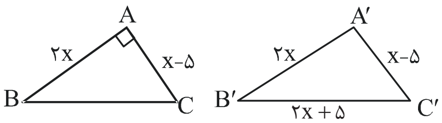


۱) $AP < AM$
۲) $AP > MK$
۳) $AP < MK$
۴) $MK > PM$

۴۵- در مثلث ABC، طول ضلع BC برابر ۶ و طول میانه‌ی AM (وارد بر ضلع BC) برابر ۵ است. حدود تغییرات طول ضلع AB کدام است؟

۱) $۳/۵ < AB < ۸/۵$ ۲) $۱ < AB < ۱۱$ ۳) $۳ < AB < ۹$ ۴) $۲ < AB < ۸$

۴۶- با توجه به مثلث‌های شکل زیر، اگر $\hat{A}'$ منفرجه باشد، آن‌گاه حدود تغییرات x کدام است؟ ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)



۱) $۵ < x < ۲۰$
۲) $۱۰ < x < ۳۰$
۳) $x > ۲۰$
۴) $۵ < x < ۳۰$

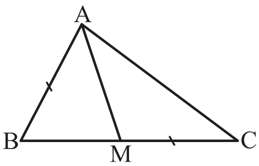
۴۷- در مثلث ABC، طول ضلع AB برابر ۶ و طول میانه‌ی AM برابر ۵ است. حدود تغییرات طول ضلع AC کدام است؟

۱) $۲ < AC < ۸$ ۲) $۴ < AC < ۱۶$ ۳) $۳ < AC < ۱۲$ ۴) $۱ < AC < ۱۱$

۴۸- در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. کدام نامساوی همواره درست است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

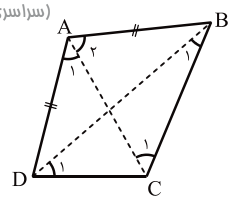
۱) $BA > BD$ ۲) $DA > DB$ ۳) $AB > AD$ ۴) $DB > DA$

۴۹- در شکل مقابل نقطه‌ی M روی BC طوری قرار دارد که $AB = MC$ است. کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست است؟



۱) $AC > BM$
۲) $AM < AC$
۳) $AM > AB$
۴) $AC > MC$

۵۰-در چهارضلعی $ABCD$، داریم $AB = AD$ و $CB > CD$. در مورد زاویه‌ها کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)



۱) $\hat{C}_۱ > \hat{A}_۱$
۲) $\hat{A}_۲ > \hat{A}_۱$
۳) $\hat{D}_۱ > \hat{B}_۱$
۴) $\hat{D} > \hat{B}$

۵۱- در چهارضلعی $ABCD$، عمودمنصف‌های دو ضلع مقابل AB و CD در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. اگر $BC > AD$ باشد، کدام نابرابری همواره صحیح است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $A\hat{M}B > B\hat{M}C$ ۲) $C\hat{A}B > C\hat{A}D$ ۳) $B\hat{M}C > A\hat{M}D$ ۴) $C\hat{M}D > A\hat{M}B$

۳ اجزای مثلث

۱ میانه

۵۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول اضلاع زاویه‌ی قائمه $۳\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳۱}$ است. طول میانه‌ی وارد بر وتر، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

۵۳- در مثلث ABC داریم $AB = AC = ۵$ و $BC = ۸$، اگر G نقطه‌ی همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد آن‌گاه طول AG کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۴- در مثلث ABC، میانه‌ی AM و نیمساز AD را رسم می‌کنیم. کدام‌یک از گزینه‌های زیر، همواره درست است؟

۱) دو نقطه‌ی B و C از AD یا امتداد آن به یک فاصله‌اند.
۲) دو نقطه‌ی B و C از AM یا امتداد آن به یک فاصله‌اند.
۳) هر نقطه روی AD یا امتداد آن، از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله است.
۴) هر نقطه روی AM یا امتداد آن، از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله است.

$$\begin{cases} AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ A'B'=\sqrt{(2x_2-2x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{cases} \Rightarrow AB\neq A'B'$$

بنابراین تبدیل داده شده ایزومتری نیست.

روش دوم می‌توانیم A و B را دو نقطه‌ی فرضی در نظر بگیریم، فاصله‌ی آن‌ها را به دست آورده و با فاصله‌ی تصویر آن‌ها مقایسه کنیم.

$$A(-1,1)\xrightarrow{T}A'(-2,2) \qquad |AB|=\sqrt{(2+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

$$B(2,3)\xrightarrow{T}B'(4,4) \qquad |A'B'|=\sqrt{(4+2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$$

بنابراین چون $|AB|\neq|A'B'|$ می‌باشد، تبدیل ایزومتری نیست.

● **مقدار b را چنان تعیین کنید که نگاشت $T(x,y)=(bx+b,y-b)$ ایزومتری باشد.**

حل: دو نقطه‌ی دلخواه $A(1,1)$ و $B(0,0)$ را در نظر گرفته و باید $|AB|=|A'B'|$ برقرار باشد.

$$\begin{matrix} A(0,0)\to A'(b,-b) \\ B(1,1)\to B'(2b,1-b) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} |AB|=\sqrt{2} \\ |A'B'|=\sqrt{b^2+1} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt{b^2+1}\Rightarrow b^2+1=2\Rightarrow b=\pm 1$$

نکته: تبدیل‌هایی که متغیر آن‌ها دارای توان و ضریب باشند و یا در قسمتی از ضابطه‌ها عدد ثابتی وجود داشته باشد، ایزومتری نیستند.

تست نمونه

● **کدام‌یک از نگاشت‌های زیر، تبدیل ایزومتری است؟**

۱) $T(x,y)=(2x,2y)$ ۲) $T(x,y)=(y+1,x)$ ۳) $T(x,y)=(x+1,2)$ ۴) $T(x,y)=(x^2-1,y+2)$

حل: با توجه به نکته‌ی گفته شده، گزینه‌های ۳و۴ اصلاً تبدیل نیستند، پس تنها کافی است گزینه‌های ۱ و۲ را بررسی کنیم:

گزینه‌ی (۱): اگر دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ را فرض کنیم تحت تبدیل T به $A'(2x_1,2y_1)$ و $B'(2x_2,2y_2)$، تصویر می‌شود، حال فاصله‌ی دو نقطه و تصویر آن‌ها را می‌یابیم:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$A'B'=\sqrt{(2x_2-2x_1)^2+(2y_2-2y_1)^2}=2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=2AB\Rightarrow$$ ایزومتری نیست.

گزینه‌ی «۲»:

$$A(x_1,y_1)\xrightarrow{T}A'(x_1^2-1,\ y_1+2)$$

$$B(x_2,y_2)\xrightarrow{T}B'(x_2^2-1,\ y_2+2)$$

فاصله‌ی دو نقطه برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

فاصله‌ی تصویر دو نقطه برابر است با:

$$A'B'=\sqrt{(x_2-1-(x_1-1))^2+(y_2+2-(y_1+2))^2}$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=AB\Rightarrow$$ ایزومتری است.

می‌توانیم به طور کلی جمع‌بندی زیر را در نظر بگیریم: چه ضابطه‌هایی، تبدیل نیستند؟

مورد	مثال	دلیل (ارائه‌ی مثال نقض)
حداقل یک مؤلفه، عدد ثابت باشد.	$T(x,y)=(x+2y,3)$	$T(-1,2)=T(1,1)=(3,3)$!!
یکی از مؤلفه‌ها مضرب دیگری باشد.	$T(x,y)=(2x+y,6x+3y)$	$T(0,0)=T(1,-2)=(0,0)$!!
یکی از مؤلفه‌های تصویر، توان زوج، قدرمطلق یا جزء صحیح داشته باشد.	$T(x,y)=(x^2,y+1)$ $T(x,y)=(3x-1,\|y\|)$ $T(x,y)=(y+1,[2x])$	$T(1,1)=T(-1,1)=(1,2)$!! $T(2,2)=T(2,-2)=(5,2)$!! $T(0,1)=T(\frac{1}{3},1)=(2,0)$!!
یکی از مؤلفه‌های تصویر، به‌جز صفر ریشه‌ی دیگری داشته باشد.	$T(x,y)=(x-1,y^2+y)$	$y^2+y=0$ دو ریشه دارد، یکی $y=0$ و دیگری $y=-1$! x دلخواه: $T=(x,0)=T(x,-1)=(x-1,0)$!!
یکی از مؤلفه‌های تصویر، برابر ضریبی از مؤلفه‌ی دیگر به اضافه‌ی عددی ثابت باشد.	$T(x,y)=(x-3y,2x-6y+2)$	در واقع ضابطه، فرم $(k,2k+2)$ را دارد. $T(-2,0)=T(-5,-1)=(-2,-2)$!!
یکی از متغیرهای x یا y اصلاً در مؤلفه‌های تصویر استفاده نشود.	$T(x,y)=(2x-1,x+2)$	$T(1,2)=T(1,3)=(1,3)$!!

تست نمونه

● **در بین نگاشت‌های داده شده چند تبدیل وجود دارد؟**

الف) $T(x,y)=(x^2-x,y+3)$ ب) $T(x,y)=(x-2y,2y-x)$

ج) $T(x,y)=(x+y,1-x-y)$ د) $T(x,y)=(\sin x,\cos y)$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: در حالت (الف) عبارت $x^۲ - x$ به جز $x=۰$ دارای ریشه‌ی $x=۱$ هم است. پس طبق نکات گفته شده (الف) نمی‌تواند تبدیل باشد. در حالت (ب) مؤلفه‌ی دوم (۱-) برابر مؤلفه‌ی اول است که چون مضربی از مؤلفه‌ی اول می‌باشد، پس این گزینه نیز تبدیل نیست. در حالت (ج) نیز، مؤلفه‌ی دوم (۱-) برابر مؤلفه‌ی اول به علاوه ۱ است که این گزینه نیز تبدیل نمی‌باشد. برای مورد چهارم نیز خواهیم داشت:

$$T(۰,\frac{\pi}{۲})=(۰,۰) \qquad T(\pi,\frac{۳\pi}{۲})=(۰,۰)$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) نیز تبدیل نمی‌باشد.

البته اثبات تبدیل‌بودن یک نگاشت در حالت کلی این است که $T(x,y)=T(a,b)$ قرار دهیم و ساده کنیم و نتیجه بگیریم که: $y=b, x=a$

ایستگاه ۲ انتقال

۱ تعریف: جابه‌جایی یک شکل در صفحه، در یک امتداد معین را انتقال می‌گوییم. تحت انتقال، همه‌ی نقطه‌های صفحه به یک فاصله و در یک جهت جابه‌جا می‌شوند. امتداد معین را معمولاً با یک بردار نشان می‌دهند و آن را بردار انتقال می‌نامیم.

۲ ضابطه‌ی نگاشت انتقال: ضابطه‌ی نگاشت انتقال تحت بردار $\vec{u}=(h,k)$ به صورت مقابل می‌باشد: $T(x,y)=(x+h,y+k)$

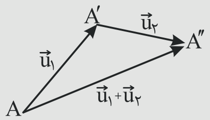
۳ ویژگی‌های انتقال

الف) یک‌به‌یک و ایزومتری است. ب) بردار انتقال ثابت است. ج) شیب خط را حفظ می‌کند. د) جهت شکل را حفظ می‌کند.

نتایج مهم:

- انتقال یافته‌ی هر پاره‌خط، پاره‌خطی است موازی و مساوی با آن
- انتقال یافته‌ی هر زاویه، زاویه‌ای است مساوی با آن
- انتقال یافته‌ی هر شکل، شکلی است همنهشت با آن

نکته‌ی ۱: ترکیب دو انتقال با بردارهای $\vec{u}_۱$ و $\vec{u}_۲$، یک انتقال با برداری معادل $\vec{u}_۱+\vec{u}_۲$ می‌باشد، یعنی چنانچه نقطه‌ی A را با بردار $\vec{u}_۱$ انتقال دهیم تا نقطه‌ی A' به دست آید و نقطه‌ی A' را با بردار $\vec{u}_۲$ انتقال دهیم تا A'' به‌دست آید، نقطه‌ی A با برداری معادل با $\vec{u}_۱+\vec{u}_۲$ به A'' تبدیل خواهد شد.



نکته‌ی ۲: اگر A' تصویر نقطه‌ی A تحت انتقال T باشد، بردار انتقال برابر است با: $\vec{u}=A'-A=\overrightarrow{AA'}$

تست نمونه

● در انتقال $T(x,y)=(x-۱,y+۲)$، نقطه‌ی $A(۲,۳)$ تصویر چه نقطه‌ای است؟

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(-۱,-۵)$ ۳) $(۳,۱)$ ۴) $(-۳,۱)$

حل: $T(x,y)=(x-۱,y+۲)=(۲,۳)\Rightarrow \begin{cases}x=۳\\ y=۱\end{cases}\Rightarrow A'(۳,۱)$

● تصویر خط به معادله‌ی $۳x+۴y=۵$ تحت انتقال $T(x,y)=(x-۲,y+a)$ از نقطه‌ی $(۵,۲)$ گذشته است. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حل: $T(x,y)=(X,Y)\Rightarrow \begin{cases}X=x-۲\\ Y=y+a\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=X+۲\\ y=Y-a\end{cases}\xrightarrow{\text{درخط}} ۳(X+۲)+۴(Y-a)=۵\Rightarrow ۳X+۴Y=۴a-۱$

$\xrightarrow{A(۵,۲)\text{ در معادله صدق می‌کند.}} ۳\times۵+۴\times۲=۴a-۱\Rightarrow ۴a=۲۴\Rightarrow a=۶$

● خط $x+۲y=۹$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۲,y-۳)$ منتقل می‌کنیم. فاصله‌ی خط تبدیل یافته از مبدأ کدام است؟

۱) $\frac{۹\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۱۱\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$

حل: $\begin{cases}X=x+۲\Rightarrow x=X-۲\\ Y=y-۳\Rightarrow y=Y+۳\end{cases}\Rightarrow X-۲+۲(Y+۳)=۹\Rightarrow X+۲Y-۵=۰\xrightarrow[\text{از خط}]{\text{فاصله‌ی مبدأ}} d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۵|}{\sqrt{۱+۴}}=\sqrt{۵}$

نکته: می‌دانیم فاصله‌ی نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$، برابر است با: $d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

● کدام‌یک از تبدیل‌های زیر یک انتقال است؟

۱) $T(x,y)=(x+۱,۱-y)$ ۲) $T(x,y)=(y+۲,x-۱)$

۳) $T(x,y)=(۲x+۱,۱+y)$ ۴) $T(x,y)=(\frac{۲x+۱}{۲},\frac{۳y+۵}{۳})$

حل: گزینه‌ای ضابطه‌ی انتقال را مشخص می‌کند که به صورت $T(x,y)=(x+h,y+k)$ باشد و تنها گزینه‌ی (۴) به فرم $T(x,y)=(x+\frac{۱}{۲},y+\frac{۵}{۳})$ است.

انتشارات مهروماه

۰۲۱-۶۶۴۰۸۴۰۰

www.mehromah.ir

۳۰۰۰۷۲۱۲۰

9 786003 170063

مهم‌ترین مواردی که در این کتاب می‌بینید عبارتند از:

- شامل ۳ کتاب هندسه تحلیلی و جبر خطی، هندسه۱ و هندسه۲
- آموزش کامل این ۳ کتاب همراه با مثال‌های آموزشی و تست‌های نمونه متنوع
- بررسی تمامی مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی در قالب مثال آموزشی یا تست نمونه
- شامل بیش از ۴۰۰۰ تست نمونه و طبقه‌بندی‌شده همراه با پاسخ تشریحی
- آزمون‌های تستی استاندارد در آخر هر فصل همراه با پاسخ تشریحی
- ارائه تست‌های سطح بالاتر ویژه دانش‌آموزان ممتاز
- شامل کلیه تست‌های کنکورهای سراسری از سال ۸۱ به بعد
- شامل کلیه تست‌های کنکورهای سراسری خارج از کشور از سال ۸۳ به بعد