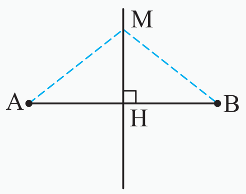
درسنامه‌ی ۱

اجزای فرعی مثلث (میانه، ارتفاع و ...)

تعریف: عمودمنصف هر پاره‌خط، خطی است که در وسط پاره‌خط بر آن عمود می‌شود. مهم‌ترین نکته‌ای که در مورد عمودمنصف یک پاره‌خط باید حتماً بدانید این است که:



هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

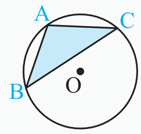
محل تلاقی عمودمنصف‌ها

۱ **مثلث حاده‌الزاویه:** اگر در مثلث ABC هر سه زاویه حاده باشد، محل تلاقی عمودمنصف‌ها **داخل** مثلث است.

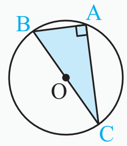
۲ **مثلث قائم‌الزاویه:** اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، محل تلاقی عمودمنصف‌ها دقیقاً **وسط وتر** است.

۳ **مثلث منفرجه‌الزاویه:** در مثلث‌های منفرجه‌الزاویه محل تلاقی عمودمنصف‌ها نقطه‌ای در **خارج** از مثلث است.

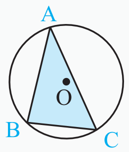
توجه: محل تلاقی سه عمودمنصف از سه رأس مثلث به یک فاصله است و لذا این نقطه **مرکز دایره‌ی محیطی** مثلث است.



ABC منفرجه‌الزاویه



ABC قائم‌الزاویه



ABC حاده‌الزاویه

تعریف: دایره‌ی محیطی یک چند ضلعی محدب، (که در فصل دایره راجع به آن صحبت خواهیم کرد) دایره‌ای است که از رأس‌های آن می‌گذرد.

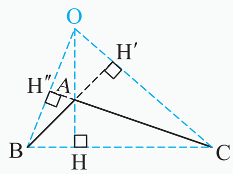
محل تلاقی سه ارتفاع مثلث

محل تلاقی سه ارتفاع مثلث نیز وضعیتی مشابه محل تلاقی سه عمودمنصف دارد. یعنی:

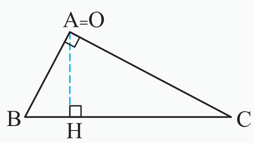
۱ **مثلث حاده‌الزاویه:** اگر در مثلث ABC هر سه زاویه حاده باشد، محل تلاقی سه ارتفاع **داخل** مثلث است.

۲ **مثلث قائم‌الزاویه:** اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، محل تلاقی سه ارتفاع **رأس قائمه** است.

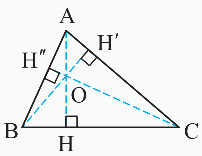
۳ **مثلث منفرجه‌الزاویه:** اگر مثلث ABC منفرجه‌الزاویه باشد، محل تلاقی سه ارتفاع **خارج** مثلث است.



$\frac{\pi}{۲} < \widehat{A} < \pi$



$\widehat{A} = \frac{\pi}{۲}$

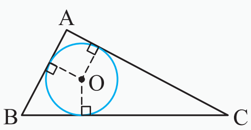


$۰ < \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} < \frac{\pi}{۲}$

محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث

محل تلاقی سه نیمساز داخلی همواره داخل مثلث است و با توجه به این که هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، لذا محل تلاقی سه نیمساز داخلی هر مثلث از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

توجه: محل تلاقی سه نیمساز داخلی مثلث ABC (که از هر سه ضلع به یک فاصله است) **مرکز دایره‌ی محاطی داخلی** مثلث می‌باشد.

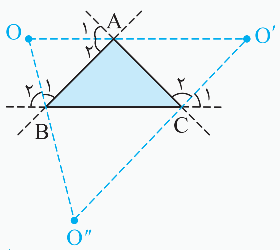


تعریف: دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC (که در فصل دایره به طور مفصل درباره‌ی آن صحبت می‌کنیم) دایره‌ای است که بر سه ضلع مثلث مماس باشد.

محل تلاقی نیمسازهای خارجی مثلث

با توجه به این که نیمساز خارجی هر زاویه‌ی مثلث از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر آن به یک فاصله است، لذا محل تلاقی نیمسازهای خارجی هر مثلث از اضلاع و امتداد آن‌ها به یک فاصله است.

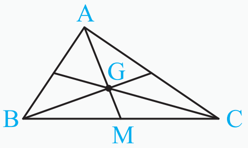
توجه: محل تلاقی نیمسازهای خارجی، مرکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC است. این دایره‌ها به یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس می‌شوند.



محل تلاقی میانه‌ها

محل تلاقی میانه‌های هر مثلث **مرکز ثقل** مثلث است، در ضمن میانه‌های هر مثلث همدیگر را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ از رأس و $\frac{۱}{۳}$ از پای میانه قطع می‌کنند.

$$\begin{cases} AG = \frac{۲}{۳}AM \\ GM = \frac{۱}{۳}AM \end{cases}$$



۱- در مثلث ABC مجموع دو زاویه‌ی A و B برابر ۷۵° است. اگر نقطه‌ی O محل تلاقی سه عمود منصف باشد کدام گزینه در مورد آن صحیح است؟

۱) O داخل مثلث است. ۲) از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.
۳) از سه رأس به یک فاصله است. ۴) مجموع فواصلش از سه ضلع برابر یکی از ارتفاع‌ها است.

۲- از بین مثلث‌هایی که در ضلع ثابت $AB = ۱۶$ مشترک و مساحت هریک از آن‌ها ۴۸ واحد مربع باشد، کم‌ترین مقدار محیط، کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸ (سراسری ریاضی ۸۹)

۳- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۳ و ۳ و ۶ است. محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کجا قرار دارد؟

۱) داخل مثلث ۲) خارج مثلث ۳) روی یکی از رأس‌ها ۴) وسط یکی از اضلاع

۴- در یک مثلث بین زوایا رابطه‌ی $\widehat{C} = \widehat{A} + ۲\widehat{B}$ برقرار است. محل تلاقی سه ارتفاع کجا قرار دارد؟ (آزاد ریاضی عصر ۹۰)

۱) داخل مثلث ۲) روی محیط مثلث ۳) خارج مثلث ۴) هر سه حالت ممکن است.

۵- اگر در مثلث ABC زاویه‌ی $\widehat{A} = ۹۲^\circ$، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (آزاد پزشکی ۷۹)

۱) نقطه‌ی تلاقی سه میانه خارج مثلث است. ۲) نقطه‌ی تلاقی سه نیمساز خارج مثلث است.
۳) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است. ۴) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع روی ضلع BC است.

۶- اگر اضلاع مثلثی ۵ و ۱۲ و ۱۴ باشد، محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کجا قرار دارد؟

۱) خارج مثلث ۲) داخل مثلث ۳) وسط ضلع بزرگ ۴) روی یکی از رأس‌ها

۷- در مثلثی $AC = ۴$، $AB = \frac{۲}{۳}$ و $\widehat{A} = ۱۲۰^\circ$. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های نظیر این دو ضلع از ارتفاع سوم مثلث کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt{۳}$ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۳)
۳) ۱ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۸- در مثلث ABC اگر O محل تلاقی سه ارتفاع باشد، نقطه‌ی A برای مثلث OBC چه نقطه‌ای است؟

۱) محل تلاقی نیمسازهای خارجی ۲) محل تلاقی عمودمنصف‌ها ۳) محل تلاقی ارتفاع‌ها ۴) محل تلاقی میانه‌ها

۹- کدام‌یک از نقاط زیر از سه ضلع یک مثلث به یک فاصله است؟

۱) محل تلاقی سه میانه ۲) محل تلاقی سه ارتفاع ۳) محل تلاقی سه عمودمنصف ۴) محل تلاقی سه نیمساز

۱۰- در صفحه‌ی یک مثلث چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشد؟ (سراسری تجربی ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱- سه خط که در سه نقطه‌ی متمایز همدیگر را دو به دو قطع می‌کنند مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از هر سه خط به یک فاصله باشد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۲- در جزیره‌ای به شکل مثلث، کدام نقطه است که از دریا دورترین فاصله را دارد؟

۱) نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌های مثلث ۲) مرکز ثقل مثلث
۳) مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ۴) مرکز دایره‌ی محیطی مثلث

۱۳- اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۸ و $۲\sqrt{۱۱}$ واحد است، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها از وسط وتر این مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)
۳) ۲ ۴) ۳

درسنامه‌ی ۲

قضیه‌ی شرطی:

یکی از روش‌های ساختن گزاره‌های مرکب با استفاده از گزاره‌های ساده به کار بردن ترکیب «**اگر ... آن‌گاه ...**» است. حال اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشد، هر گزاره به صورت «**اگر p آن‌گاه q**» را ترکیب شرطی p و q می‌نامند و آن را با نماد $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهند و p را مقدم و q را تالی گزاره‌ی شرطی می‌نامند. حال اگر ارزش یک ترکیب شرطی که به این ترتیب ایجاد می‌شود درست باشد آن را قضیه‌ی شرطی می‌نامند و به جای لفظ مقدم و تالی لفظهای **فرض** و **حکم** را به کار می‌برند.

مثلاً: **اگر** $\underbrace{\text{مثلث } ABC \text{ قائم‌الزاویه باشد}}_{\text{فرض}}$، **آن‌گاه** $\underbrace{\text{مربع وتر برابر است با مجموع مربعات اضلاع زاویه‌ی قائمه}}_{\text{حکم}}$.

عکس قضیه‌ی شرطی:

اگر در یک قضیه‌ی شرطی جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه‌ی شرطی به دست می‌آید.

مثلاً: اگر در مثلثی مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، مثلث قائم‌الزاویه است.

قضیه‌ی دو شرطی:

اگر یک گزاره‌ی شرطی و عکس آن هر دو درست باشد، آن را قضیه‌ی دو شرطی می‌نامند. یکی از معروف‌ترین قضیه‌های دو شرطی همین قضیه‌ی فیثاغورس است.

☆ **۱۴- کدام قضیه به صورت دو شرطی بیان <u>نمی‌شود</u>؟** (سراسری ریاضی ۷۸)

۱) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه‌ی یک ضلع برهم منطبق‌اند.

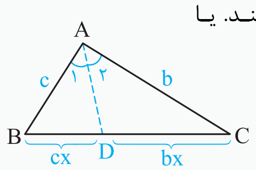
۲) در مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف اضلاع بر روی ضلع بزرگ‌تر متقاطع‌اند.

۳) در مثلث قائم‌الزاویه، یکی از میانه‌ها نصف وتر است.

۴) در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۹۰° بزرگ‌ترین ضلع است.

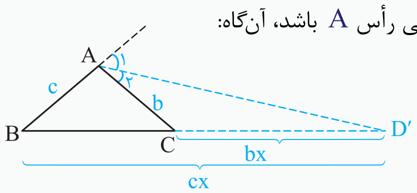
درسنامه‌ی ۳

خاصیت نیمسازهای مثلث



قضیه‌ی بسیار مهم:
در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند. یا به عبارتی:

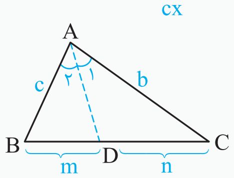
$$BD = cx \Leftarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow DC = bx$$



توجه: این قضیه عیناً در مورد نیمسازهای خارجی نیز برقرار است. یعنی اگر AD' نیمساز خارجی رأس A باشد، آن‌گاه:

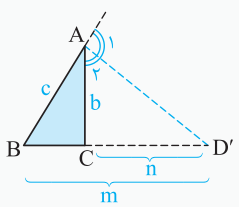
$$D'B = cx \Leftarrow \frac{AB}{AC} = \frac{D'B}{D'C} \Rightarrow D'C = bx$$

محاسبه‌ی طول نیمساز داخلی و خارجی:



$$AD^۲ = bc - mn$$

طول نیمساز داخلی رأس A برابر است با: **حاصل‌ضرب دو ضلع، منهای حاصل‌ضرب دو قطعه.**



$$AD'^۲ = mn - bc$$

طول نیمساز خارجی رأس A برابر است با: **حاصل‌ضرب دو قطعه، منهای حاصل‌ضرب دو ضلع.**

☆ ۱۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\widehat{A}=۹۰^\circ)$ اگر قطعات ایجاد شده توسط نیمساز AD روی وتر ۳ و ۴ باشد، تفاضل اندازه‌ی دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۶

۱۶- در مثلث ABC، میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم، تا دو ضلع AB و AC را به‌ترتیب در D و E قطع کنند. نسبت $\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

۱) $\frac{AD}{AB}$ ۲) $\frac{ME}{MC}$ ۳) $\frac{ME}{CE}$ ۴) $\frac{AM}{BC}$

۱۷- در مستطیلی به ابعاد ۴ و ۳ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کند. اندازه‌ی MN چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۷)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

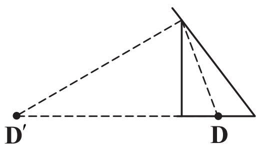
☆ ۱۸- ضلع‌های مثلث ABC با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب هستند. نیمساز BD، کوچک‌ترین ضلع یعنی AC را به دو پاره‌خط AD و CD تقسیم می‌کند. اگر AC به طول ۱۰ باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط بزرگ‌تر ایجاد شده روی AC کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{۴۰}{۷}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۱۹- در مثلثی به اضلاع ۱۲، ۸ و ۷، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از وسط ضلع بزرگ‌تر چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۶)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

☆ ۲۰- در مثلثی به اضلاع ۸، ۶ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچکترین زاویه‌ی آن، ضلع مقابل و امتداد آن را در D و D' قطع می‌کنند. اندازه‌ی DD' چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)



۱) $\frac{۱۹۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱۰۲}{۷}$

۳) $\frac{۱۲۰}{۷}$ ۴) $\frac{۱۲۴}{۷}$

☆ ۲۱- در مثلث ABC $(\widehat{A}=۹۰^\circ, AB=۳, AC=۴)$ ارتفاع AH و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اندازه‌ی DH کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۳۵}$

۲۲- اگر فرض شود در مثلثی مجذور طول نیمساز داخلی زاویه‌ی A با حاصل‌ضرب اضلاع آن زاویه برابر است، استنباط چگونه است؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

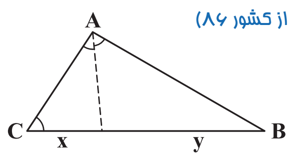
۱) $\widehat{A}<۹۰^\circ$ ۲) $\widehat{A}=۹۰^\circ$

۳) $\widehat{A}>۹۰^\circ$ ۴) نادرستی فرض

۲۳- محیط مثلث ABC برابر ۲۱ سانتی‌متر و اندازه‌ی دو پاره‌خطی که نیمساز داخلی رأس A روی ضلع BC پدید می‌آورد ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر است، اندازه‌ی نیمساز AD کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴- در مثلث ABC داریم: $AB=۹$، $AC=۷$ و $\widehat{A}=۲\widehat{C}$، اندازه‌ی BC کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۶)



۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵

۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۲۵- در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه‌ی ۶ و ۳، طول نیمساز زاویه‌ی قائمه کدام است؟

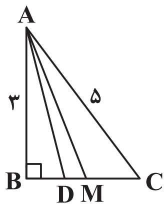
۱) ۲ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

☆ ۲۶- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌ی اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد می‌باشد. فاصله‌ی دورترین رأس این مثلث از نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای داخلی آن کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۷- در مثلث با اضلاع $AB = ۲$ ، $BC = \sqrt{۱۲}$ و $AC = ۴$ ، طول نیمساز AD چند برابر طول میانه‌ی BM است؟ (آزاد ریاضی عصر ۸۹)

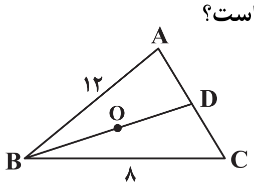
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$



۲۸- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{B} = ۹۰^\circ)$ ، AD نیمساز و AM میانه است. اگـر $AB = ۳$ و $AC = ۵$ باشـد، اندازه‌ی DM کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۰/۵

۳) ۲ ۴) ۱



۲۹- اضلاع مثلث شکل زیر ۸، ۱۰ و ۱۲ است و O محل برخورد نیمسازهای داخلی می‌باشد. حاصل $\frac{OB}{OD}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۲

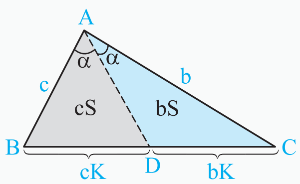
۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۰- در مثلث ABC به اضلاع ۴، ۶، ۸ طول نیمساز وارد بر ضلع متوسط کدام است؟

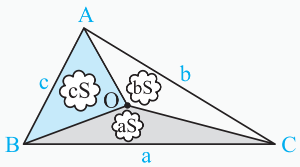
۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

درسنامه‌ی ۴

تقسیم مساحت توسط نیمساز

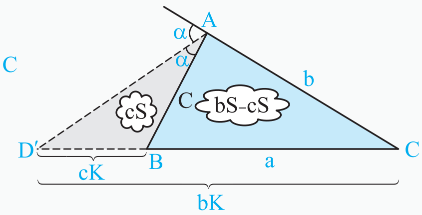


۱ در مثلث ABC اگر AD نیمساز داخلی زاویه‌ی A باشد، آن‌گاه مساحت‌های ABD و ADC به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌شوند. یعنی:



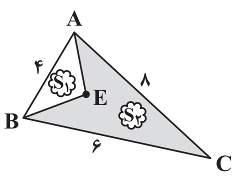
۲ اگر از محل تلاقی نیمسازهای داخلی به سه رأس مثلث وصل کنیم، مساحت‌های محصور شده بـه نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌شوند.

۳ در مثلث ABC اگر AD' نیمساز خارجی باشد، آن‌گاه:



۳۱- در مثلث ABC اگر $AC = ۳AB$ و AD نیمساز باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت ABD است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶



۳۲- در مثلث ABC نقطه‌ی E محل برخورد نیمسازهای رأس A و رأس B است، مساحت ناحیه‌ی سایه زده شده، چند برابر مساحت ناحیه‌ی سفیدرنگ است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

☆ ۳۳- اضلاع مثلثی با اعداد ۲، ۳ و ۴ متناسب است، نیمساز زاویه‌ی داخلی متوسط آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصـل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

☆ ۳۴- در مثلثی به اضلاع ۶ ، ۵ و ۳ واحد، نیمساز کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی آن، بزرگ‌ترین ضلع مثلث را قطع می‌کند. مساحت مثلثی کـه در خارج مثلث اصلی تشکیل می‌شود، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

درسنامه‌ی ۵

نامساوی‌های مهم در مثلث

قضیه‌ی نامساوی مثلث:

در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است و هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است. یعنی:

$$b - c < a < b + c$$

نکته: $\begin{cases} \hat{A} < 90^\circ : \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2 \\ \hat{A} > 90^\circ : \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2 \end{cases}$

قضیه‌ی وجود مثلث:

سه عدد حقیقی مثبت a، b و c داده شده‌اند. اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد، آن‌گاه مثلثی وجود دارد که طول ضلع‌های آن a، b و c هستند.

در تست‌ها، نامساوی مثلثی به سه نوع می‌تواند مطرح شود:

۱) اگر اعداد a، b و c معلوم باشند و به فرض آن‌که $a > b > c$ باشد، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آن که مثلثی به اضلاع a، b و c موجود باشد آن است که جمع دو ضلع کوچک‌تر، بیش از ضلع بزرگ‌تر باشد.

۲) اگر یک ضلع مجهول بود آن را بین تفاضل و جمع دو ضلع معلوم قرار می‌دهیم.

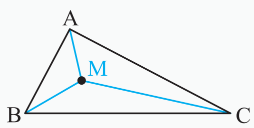
۳) اگر بیش از یک ضلع مجهول باشد، باید مجموع هر دو ضلع دلخواه را بزرگ‌تر از ضلع سوم قرار دهیم و هر سه نامساوی را حل کنیم و حدود x را پیدا کنیم.

(I) اگر a، b و c اضلاع مثلث ABC و $a \geq b \geq c$ باشد (یعنی a بزرگ‌ترین ضلع و c کوچک‌ترین ضلع باشد)، آن‌گاه:

(محیط) $\frac{1}{3} \leq$ کوچک‌ترین ضلع مثلث $(c) < 0$	(محیط) $\frac{1}{2} <$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث $(a) \leq$ (محیط) $\frac{1}{3}$

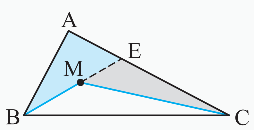
استدلال: بزرگ‌ترین ضلع نمی‌تواند از $\frac{1}{3}$ محیط کم‌تر باشد، چون در این صورت دو ضلع دیگر هم که کوچک‌تر از آن هستند از $\frac{1}{3}$ محیط کم‌تر می‌شوند و جمع آن‌ها برابر محیط نخواهد شد، همچنین اگر به نصف محیط برسد یا از آن بیش‌تر شود یک ضلع به تنهایی از جمع دو ضلع دیگر بیش‌تر می‌شود و امّا در مورد کوچک‌ترین ضلع که اگر از $\frac{1}{3}$ محیط تجاوز کند دو ضلع دیگر هم از آن بیش‌ترند و جمع آن‌ها از محیط بیش‌تر می‌شود.

(II) اگر در مثلث ABC، نقطه‌ی M درون مثلث باشد، آن‌گاه مجموع فواصل M از سه رأس مثلث، از محیط کوچک‌تر و از نصف محیط بزرگ‌تر است یعنی:



$$P < MA + MB + MC < 2P$$

استدلال: قبل از اثبات، یک نکته‌ی دیگر را اثبات کنیم و آن این که اگر M نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد، آن‌گاه $MB + MC < AB + AC$ می‌باشد و همچنین براساس نامساوی مثلثی در مثلث ABE داریم:



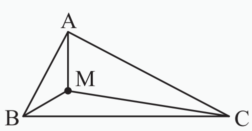
$$AB + AE > BE = MB + ME$$

از طرفی در مثلث MEC داریم: $EC + ME > MC$ حال این دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم:

$$AB + AE + EC + \cancel{ME} > MB + \cancel{ME} + MC \Rightarrow AB + AC > MB + MC$$

حال می‌رویم به سراغ اثبات رابطه‌ی اصلی:

اثبات:



$$\overset{\Delta}{MAB} : AB < MA + MB < AC + BC$$

$$\overset{\Delta}{MAC} : AC < MA + MC < AB + BC$$

$$\overset{\Delta}{MBC} : BC < MB + MC < AB + AC$$

حال طرفین سه نامساوی را با هم جمع می‌کنیم:

$$AB + AC + BC < 2(MA + MB + MC) < 2AB + 2AC + 2BC \Rightarrow \underbrace{P}_{\text{نصف محیط}} < MA + MB + MC < \underbrace{2P}_{\text{محیط}}$$

(III) در هر مثلث مجموع اندازه‌های سه میانه از $\frac{۳}{۴}$ محیط مثلث بیش‌تر و از محیط مثلث کوچک‌تر است.

$$\frac{۳}{۴}\,(\text{محیط}) < m_a + m_b + m_c < \text{محیط}$$

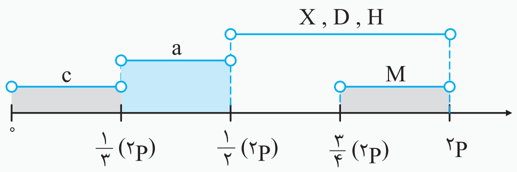
استدلال: به عهده‌ی خودتان.

(IV) مجموع سه ارتفاع و مجموع سه نیمساز هر مثلث همواره از محیط کوچک‌تر و از نصف محیط بزرگ‌تر است.

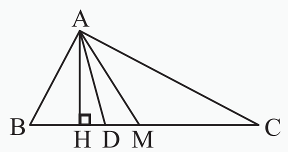
$$\text{نصف محیط} < h_a + h_b + h_c < \text{محیط} \qquad \text{نصف محیط} < d_a + d_b + d_c < \text{محیط}$$

استدلال: به عهده‌ی خودتان.

جمع‌بندی: اگر O نقطه‌ای درون مثلث ABC و ۲P محیط مثلث و $H = h_a + h_b + h_c$ و $M = m_a + m_b + m_c$ و $D = d_a + d_b + d_c$ و $X = OA + OB + OC$ باشد و در ضمن در این مثلث $a \geq b \geq c$ باشد، آن‌گاه:



(V) در هر مثلث دلخواه مانند ABC اگر m_a میانه‌ی نظیر ضلع a و d_a نیمساز زاویه‌ی A و h_a ارتفاع وارد بر ضلع a باشد، آن‌گاه:



$$m_a \geq d_a \geq h_a$$

یعنی همواره نیمساز بین ارتفاع و میانه قرار می‌گیرد.

توجه: اگر دو جزء از سه جزء h_a، d_a و m_a بر هم منطبق شوند، دیگری نیز بر آن‌ها منطبق می‌شود و مثلث متساوی‌الساقین خواهد شد.

توجه: در ضمن در مثلث قائم‌الزاویه نیمساز وارد بر وتر علاوه بر این‌که بین ارتفاع و میانه هست نیمساز بین آن دو هم هست.

۳۵- کدام دسته از اعداد زیر می‌توانند سه ضلع یک مثلث باشند؟ (سراسری ریاضی ۸۹ و آزاد ریاضی ۷۵)

۱) ۳ و ۵ و ۷ ۲) ۲ و ۳ و ۶ ۳) ۱ و ۲ و ۳ ۴) ۱ و ۳ و ۴

۳۶- با کدام سه طول داده شده می‌توان یک مثلث رسم کرد؟ $(a, b > ۰)$ (آزاد ریاضی ۷۳)

۱) a و b و $a + b + ۱$ ۲) $a + ۱$ و $b + ۱$ و $a + b$

۳) $a^۲$ و $(a + ۱)^۲$ و $۲a^۲ + ۳a + ۱$ ۴) $a - ۲$ و $۲a$ و $۳a$

☆ **۳۷-** سه پاره‌خط به طول‌های $۴x - ۴$ و $x + ۷$ و $۶x$ اضلاع مثلثی هستند، مقادیر x به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

۱) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$ ۲) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$ ۳) $۲ < x < ۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$

۳۸- اگر محیط مثلث ABC برابر ۹ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۴/۷

☆ **۳۹-** اگر در مثلث ABC داشته باشیم $A < ۹۰^\circ$ و $b = ۱۲$ و $c = ۵$، حدود ضلع a کدام است؟

۱) $۷ < a < ۱۷$ ۲) $۱۲ < a < ۱۷$ ۳) $۷ < a < ۱۳$ ۴) $a < ۱۳$

۴۰- محیط یک مثلث متساوی‌الساقین ۱۸ است. اندازه‌ی ساق آن کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۱- در مثلث ABC اگر $h_۱$ و $h_۲$ و $h_۳$ سه ارتفاع باشند، کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) $|h_۲ - h_۳| < h_۱ < h_۲ + h_۳$ ۲) $\left|\frac{۱}{h_۲} - \frac{۱}{h_۳}\right| < \frac{۱}{h_۱} < \frac{۱}{h_۲} + \frac{۱}{h_۳}$

۳) $h_۱^۲ = h_۲^۲ + h_۳^۲$ ۴) $۲h_۱ = h_۲ + h_۳$

☆ **۴۲-** در مثلثی به طول اضلاع ۳، $۲\sqrt{۲}$ - ۳ و $۲ + \sqrt{۲}$ واحد، نقطه‌ی M داخل مثلث تغییر مکان می‌دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل نقطه‌ی M از سه رأس مثلث، مورد قبول است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) $۵ - \sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۸

۴۳- اگر مجموع طول سه ارتفاع یک مثلث را H و مجموع طول سه میانه را M و محیط مثلث را $۲P$ فرض کنیم، کدام گزینه همواره درست است؟ (آزاد تجربی ۷۴)

۱) $H < ۲P < M$ ۲) $H \leq M < ۲P$ ۳) $۲P < H \leq M$ ۴) $۲P < M \leq H$

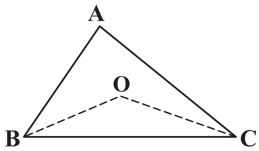
۴۴- در مثلث ABC مجموع طول سه میانه برابر $۳\sqrt{۳}$ است. بین مجموع اضلاع مثلث کدام رابطه می‌تواند برقرار باشد؟

۱) $a+b+c=۴$ ۲) $a+b+c=۵$ ۳) $a+b+c=۶$ ۴) $a+b+c=۳$

۴۵- در مثلثی به اندازه‌ی اضلاع ۵، ۷، $a \geq ۸$، کدام عدد برای مجموع اندازه‌های سه میانه، مورد قبول است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۹ ۴) ۲۴

۴۶- نقطه‌ی O را درون مثلث ABC انتخاب می‌کنیم. کدام‌یک از گزینه‌های زیر همواره صحیح است؟

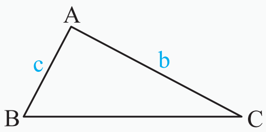


۱) $B\hat{O}C < O\hat{C}B$ ۲) $B\hat{O}C > B\hat{A}C$

۳) $O\hat{B}C > O\hat{C}B$ ۴) $B\hat{A}C > B\hat{O}C$

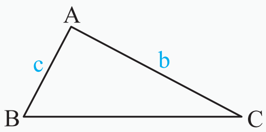
درسنامه‌ی ۶

قضیه‌ی لولا، عکس لولا و ...



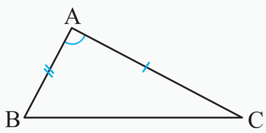
قضیه‌ی زاویه‌ی برتر: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر است.

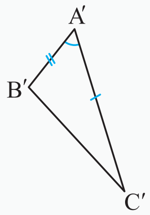
$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$$



قضیه‌ی ضلع برتر: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویه‌ی مقابل به ضلع کوچک‌تر است.

$$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

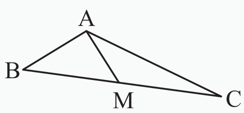




قضیه‌ی لولا: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و زاویه‌ی بین این دو ضلع در مثلث اول، بزرگ‌تر از زاویه‌ی بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آن‌گاه ضلع سوم از مثلث اول، بزرگ‌تر از ضلع سوم از مثلث دوم است.

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} > \hat{A'} \end{cases} \Rightarrow BC > B'C'$$

عکس قضیه‌ی لولا: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و ضلع سوم مثلث اول، بزرگ‌تر از ضلع سوم مثلث دوم باشد، آن‌گاه زاویه‌ی بین دو ضلع از مثلث اولی بزرگ‌تر از زاویه‌ی بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم است.



(I) مثلث ABC مفروض است. اگر AM میانه‌ی نظیر ضلع BC باشد، آن‌گاه داریم:

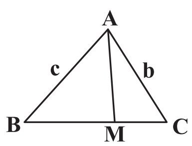
۱) $\hat{A} > ۹۰^\circ$، اگر و تنها اگر $AM < \frac{a}{۲}$

۲) $\hat{A} = ۹۰^\circ$، اگر و تنها اگر $AM = \frac{a}{۲}$ $\Leftarrow$ میانه‌ی وارد بر وتر، برابر نصف وتر است.

۳) $\hat{A} < ۹۰^\circ$، اگر و تنها اگر $AM > \frac{a}{۲}$

به عبارتی با افزایش زاویه‌ی رأس، اندازه‌ی میانه نسبت به ضلع مقابل خودش کاهش می‌یابد. [چون رأس به ضلع مقابل نزدیک‌تر می‌شود.]

۴۷- در مثلث مقابل اگر $BM = AC$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

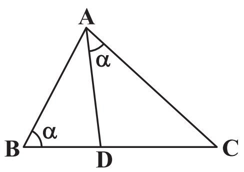


۱) $AB < AM$ ۲) $AB > MC$

۳) $AB < MC$ ۴) $MC > MB$

۴۸- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(\hat{A} = ۱۰۰^\circ)$ اگر M نقطه‌ای روی ساق AB باشد، آن‌گاه:

۱) $MC = MB$
۲) $MC < MB$
۳) $MC > MB$
۴) هر سه حالت امکان‌پذیر است.



☆ ۴۹- در مثلث ABC در شکل داده شده، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $AC < DC$
۲) $AB < AC$
۳) $AD = DC$
۴) $AD < AB$

۵۰- در مثلث ABC به اضلاع $AB = ۷$ و $AC = ۵$ از نقطه‌ی D واقع بر ضلع BC (بین B و C) خطوطی به موازات اضـلاع AB و AC رسم می‌کنیم تا آن‌ها را در M و N قطع کنند. $DM + DN$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۲
۲) ۸
۳) ۵
۴) ۶

☆ ۵۱- در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند، کدام نامساوی همواره صحیح است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

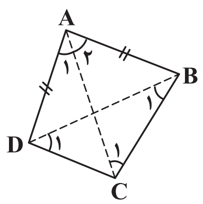
۱) $BA > BD$
۲) $DA > DB$
۳) $AB > AD$
۴) $DB > DA$

☆ ۵۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ اگر نیمساز زاویه‌ی B ضلع AC را در D قطع کند، کدام نامساوی نادرست است؟

۱) $AD < DC$
۲) $AB > AD$
۳) $BC > DC$
۴) $BD < AD$

☆ ۵۳- در مثلث ABC، اگر $a = ۶$ و $b^۲ + c^۲ < ۳۶$ و AM میانه‌ی نظیر ضلع BC باشد، آن‌گاه AM کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴



☆ ۵۴- در چهارضـلعی $ABCD$ داریـم: $AB = AD$ و $BC > CD$. در مـورد زاویـه‌ها کـدام نتیجـه‌گیری نادرست است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\hat{C}_۱ > \hat{A}_۱$
۲) $\hat{A}_۲ > \hat{A}_۱$
۳) $\hat{D}_۱ > \hat{B}_۱$
۴) $\hat{D} > \hat{B}$

درسنامه‌ی ۷

رسم مثلث

به طور کلی برای رسم یک n ضلعی باید $۲n - ۳$ جزء مستقل از یک n ضلعی معلوم باشد. بنـابراین **برای رسم یک مثلث باید سه جزء مسـتقل از هـم معلوم باشد**، به عنوان مثال سه زاویه‌ی مثلث، سه جزء مستقل از هم محسوب نمی‌شوند، چون با معلوم بودن دو تا از آن‌ها سومی نیز معلـوم می‌شـود ولی سه ضلع مثلث مستقل از هم می‌باشند. البته مسأله‌های مربوط به رسم مثلث بسیار زیاد و متنوع هستند و برای حل آن‌ها قضیه‌های بسیاری از هندسـه مـورد استفاده قرار می‌گیرد، به همین دلیل نمی‌توان روش کلی برای حل آن‌ها بیان کرد به طوری که جنـاب آقـای محمـد هاشـم رسـتمی در جلـد دوازدهـم کتـاب دایرة المعارف هندسه طریقه‌ی رسم بیش از ۶۰۰ نوع از حالات ممکن را در قالب یک کتاب ۵۰۰ صفحه‌ای مورد نقد و بررسی قـرار داده اسـت، امـا خوشـبختانه مسأله‌هایی که در کنکور مطرح می‌شود، تنوع چندان زیادی ندارد و به چند نوع مختلف محدود می‌شود که یکی‌یکی آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ **با معلوماتی که دو مثلث با هم برابر می‌شوند (ض ز ض، ض ض ض، ز ض ز و همچنین دو ضلع و زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگ‌تر) تنها یک مثلث منحصر به فرد مشخص می‌شود.**

رسم مثلث با معلومات دو ضلع و زاویه‌ی غیربین

اگر از مثلثی دو ضلع و زاویه‌ی غیربین معلوم باشد دو حالت امکان‌پذیر است:

۲ **زاویه‌ی داده شده روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است:** در این حالت تنها یک مثلث قابل رسم است، چون این حالت جزء حالت تساوی دو مثلث است.

۳ **زاویه‌ی داده شده روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است:** در این حالت برای پیدا کردن تعداد حالات ممکن از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم مـثلاً اگر a و b و $\hat{B}$ معلوم باشد، می‌نویسیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{a\sin\hat{B}}{b} \begin{cases} > ۱ & \text{هیچ مثلث} \\ = ۱ & \text{یک مثلث} \\ < ۱ & \text{دو مثلث} \end{cases}$$

دانش‌آموز: *حالت ۲ را نمی‌توان از این راه حل کرد؟!*

معلم: چرا ولی در این صورت همواره دو جواب به دست می‌آید ولی باید دقت کنیم که یکی از آن‌ها همواره غیرقابل قبول می‌شود، چون همیشه در تمام مثلث‌ها زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگ‌تر از زاویه‌ی مقابل به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر می‌باشد.

مثال: با معلومات $a=۶\sqrt{۳}$، $b=۶$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$ چند مثلث مشخص می‌شود؟

حل: اگر بخواهیم از قضیه‌ی سینوس‌ها مسأله را حل کنیم، باید بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{۶\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۶}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\hat{B}=۳۰^\circ\\\hat{B}=۱۵۰^\circ\end{cases}$$

$\hat{B}=۱۵۰^\circ$ نمی‌تواند قابل قبول باشد، چون اولاً که جمع زوایای مثلث بیش‌تر از ۱۸۰° می‌شود و در ثانی $a>b$ است، پس باید $\hat{A}>\hat{B}$ باشد، یعنی $\hat{B}<۶۰^\circ$ است.

دانش‌آموز: *پس هر وقت دو ضلع داده شده باشد و زاویه‌ی مقابل به عدد بزرگ‌تر معلوم بود، دیگر چشم بسته بگوییم فقط یک مثلث وجود دارد؟!*

معلم: دقیقاً همین‌طور است.

توجه مهم: اگر اضلاع و زاویه‌های داده شده (یا هر اطلاعات دیگری) نام‌گذاری نشده بود باید همه‌ی حالات ممکن را در نظر بگیریم مثلاً وقتی بگوییم چند مثلث وجود دارد که دو زاویه‌ی آن ۳۰° و ۷۰° و یک ضلع آن ۵ باشد باید سه حالت در نظر بگیریم که این ضلع می‌تواند رو به هر کدام از سه زاویه‌ی مثلث باشد.

۵۵- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $b=۳$ و $c=۷$ و $\hat{A}=\frac{\pi}{۵}$، تعداد جواب‌های ممکن کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☆ **۵۶- مثلث ABC با معلوم بودن $b=۳$ و $\hat{B}=۶۵^\circ$ و $\hat{C}=۷۰^\circ$ قابل رسم است. چند مثلث (غیر همنهشت) با این شرایط می‌توان رسم کرد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆ **۵۷- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $c=۱۰$ و $b=۸$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$، تعداد جواب‌های ممکن کدام است؟** (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۲)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۵۸- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $\hat{A}=\frac{\pi}{۳}$ و $b=\sqrt{۳}a$، تعداد جواب‌های ممکن کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۹- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $c=۲/۵$ و $a=۴$ و $\hat{A}=۳۰^\circ$، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) غیرقابل رسم ۲) جواب منحصر به فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) چهار جواب متمایز

۶۰- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $b=۳$ و $c=۶$ و زاویه‌ی B، جواب منحصر به فردی حاصل شده است. زاویه‌ی B کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۹۰°

۶۱- با کدام دسته از معلومات زیر فقط یک مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱) یک ضلع و یک زاویه ۲) دو ضلع و زاویه‌ی مجاور یکی از آن‌ها

۳) نقاط وسط سه ضلع ۴) سه زاویه

۶۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر آن مشخص است. با معلوم بودن اندازه‌ی کدام جزء دیگر، این مثلث به طور منحصربه‌فرد قابل رسم <u>نیست</u>؟ (سراسری ریاضی ۷۷)

۱) ارتفاع وارد بر وتر ۲) ارتفاع وارد بر ضلع قائم

۳) میانه‌ی وارد بر وتر ۴) میانه‌ی وارد بر ضلع قائم

۶۳- چند مثلث ناهمنهشت می‌توان رسم کرد که دو زاویه‌ی آن‌ها ۳۰° و ۵۰° و یک ضلع آن‌ها ۷ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆ **۶۴- چند مثلث ناهمنهشت وجود دارد که دو ضلع به طول‌های ۲/۵ و ۴ و یک زاویه‌ی ۳۰° داشته باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴